



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio fotométrico del súper cúmulo estelar A de la
galaxia NGC 1569.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Jesús Omar Hernández Prado

Asesorado por

Dr. Yalia Divakara Mayya (INAOE)

(Co-asesor) Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.
23 de junio de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio fotométrico del súper cúmulo estelar A de la
galaxia NGC 1569.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Jesús Omar Hernández Prado

Asesorado por

Dr. Yalia Divakara Mayya (INAOE)

(Co-asesor) Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.
23 de junio de 2023

Título: Estudio fotométrico del súper cúmulo estelar A de la galaxia NGC 1569.

Estudiante: JESÚS OMAR HERNÁNDEZ PRADO

COMITÉ

Dr. Oscar Mario Martínez Bravo
Presidente

Dra. Bolivia Cuevas Otahola
Secretario

Dr. Ivânio Puerari
Vocal

Dr. Mario Iván Martínez Hernández
Suplente

Dr. Yalia Divakara Mayya (INAOE)
Asesor

(Co-asesor) Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Co-asesor

To my sunshine

One more light

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Cúmulos estelares	2
1.1.1. Estructura de los cúmulos estelares	2
1.2. Formación de cúmulos y contenido estelar	3
1.2.1. Formación de cúmulos	3
1.2.2. Estrellas	6
1.3. Estabilidad y evolución dinámica de cúmulos	12
1.4. Súper cúmulo estelar A en NGC 1569	12
1.4.1. Galaxias	12
1.4.2. NGC 1569	14
1.4.3. Antecedentes	14
1.5. Objetivo de la tesis	17
2. Tratamiento teórico de cúmulos estelares	19
2.1. Tiempo de relajación	19
2.2. Equilibrio Virial en cúmulos	20
2.3. Potencial gravitacional para sistemas esféricos	22
2.3.1. Energía potencial para sistemas esféricos	22
2.3.2. Masa puntual	23
2.3.3. Esfera homogénea	23
2.3.4. Modelo de Plummer	23
2.4. Ecuación no colisional de Boltzmann	24
2.5. Teorema de Jeans	25
2.6. Funciones de distribución para sistemas esféricos	25
2.6.1. Modelos politrópicos	26
2.6.2. Esfera isotérmica	27
2.6.3. Modelos <i>lowered isothermal</i>	28
2.7. Cinemática	29
2.7.1. Procesos de relajación	29
2.8. Teorema de Liouville	32
2.9. Ecuación: Fokker-Planck	32
2.10. Evolución de sistemas estelares esféricos	33
2.10.1. Pérdida de masa	33
2.10.2. Colapso del núcleo	34
2.11. Modelo de King	35
2.12. Modelo de Wilson	36
2.13. Modelo Moffat-EFF	37

3. Análisis	41
3.1. Tarea: <code>ellipse</code>	41
3.2. Tarea: <code>imexpr</code>	42
3.3. NGC 1569-A	42
3.4. PSF	46
3.5. Convolución	47
3.6. Tarea: <code>mkobjects</code>	48
3.7. Simulación	50
3.8. Prueba estadística χ^2	52
3.9. Pruebas χ^2	57
4. Resultados	61
4.1. Caso 1: 3 subestructuras.	62
4.2. Caso 2: 4 subestructuras.	63
4.3. Comparación final y residuos	64
4.4. Evolución dinámica	67
5. Conclusiones	73
6. Agradecimientos	75
A. Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.	77
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

Dentro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, hay aproximadamente entre 100 y 400 mil millones de estrellas [1] y aunque este número es extremadamente alto y difícil de resolver dimensionalmente, el espacio en la galaxia está relativamente vacío. De hecho, la estrella más cercana al Sol es *Próxima Centauri*, la cuál está a una distancia de 4.22 años luz. Si tomamos una distancia mayor, aproximadamente 15 años luz, sólo encontraremos 70 estrellas [2].

En cambio, existen objetos astronómicos los cuales contienen estrellas, pero la cantidad es muchísimo mayor que en el caso anterior. Un ejemplo es *Omega Centauri* (Fig.1.1), conteniendo aproximadamente 10 millones de estrellas en una esfera de 45 años luz de diámetro. Este tipo de objeto se le conoce como **cúmulo estelar**.

Evidentemente, en estos dos casos se habla de un entorno completamente distinto, pero la comparación ya es interesante *per se*.

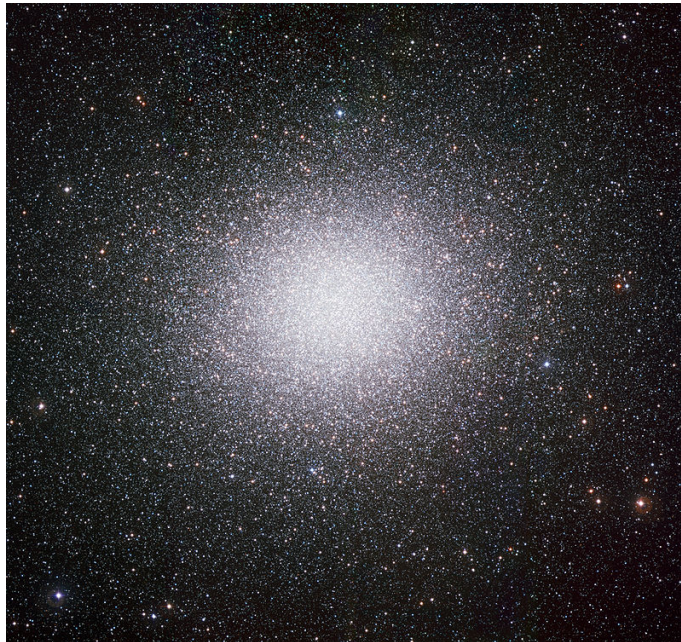


Figura 1.1: Cúmulo globular **Omega Centauri**, ω Cen o NGC 5139. Crédito: ESO.

1.1. Cúmulos estelares

Un **cúmulo estelar** es:

Un conjunto de estrellas ligadas por la fuerza gravitacional entre sí.

La suma importancia del estudio de los cúmulos estelares reside en que a partir de estos podemos obtener información de distintas propiedades de sus componentes (estrellas) como por ejemplo la formación y evolución estelar, así como también masas, edades, composición química y por consiguiente información de su galaxia huésped. En el caso galáctico, nos permite tener un entendimiento de distintos procesos que ocurren en nuestra galaxia.

También se denomina como un **sistema dinámico**, ya que debido a su naturaleza puede ser tratado como un sistema de partículas y la rama de la astrofísica que estudia su comportamiento es la **dinámica estelar**.

Existe una clasificación de cúmulos estelares en términos de su estructura, definida en dos grupos bien delimitados: **cúmulos globulares** y **cúmulos abiertos**. En donde sus radios, densidades, masas y edades son algunas de sus principales diferencias.

Los **cúmulos globulares** presentan una morfología compacta ($r_h \sim 3$ pc) y esférica, agrupando desde decenas de miles a millones de estrellas siendo en su mayoría estrellas rojas que se encuentran tanto en el halo como en el disco de la Vía Láctea así como en otras galaxias. Su cantidad de estrellas los hace ser un cúmulo masivo (entre 10^4 y $10^6 M_\odot$) y denso (entre 0.5 y $10^3 M_\odot \text{pc}^{-3}$), siendo su concentración de estrellas mayor hacia el centro [3]. Los cúmulos globulares galácticos tienen un rango de edades entre 10 Gyr hasta 13 Gyr, la edad del universo. Un ejemplo de éste tipo de cúmulo es *Omega Centauri* ilustrado en la figura 1.1. Los **cúmulos abiertos** no presentan una morfología esférica sino que son usualmente asimétricos y extendidos ($r_h \sim 10$ pc), conteniendo una cantidad inferior de estrellas a los cúmulos globulares, con sólo varios miles a cientos de ellas, mayoritariamente estrellas azules y se encuentran en el disco de la Vía Láctea. Debido a que sus masas (entre 10 y $10^3 M_\odot$) y densidades (entre 0.1 y $10 M_\odot \text{pc}^{-3}$) son menores que la de los globulares, en consecuencia la fuerza gravitacional entre sus estrellas no es tan fuerte, haciéndolos susceptibles a ser destruidos por encuentros cercanos con otros cúmulos o el gas que está en el medio interestelar [4]. En consecuencia a lo anterior, no sobreviven tanto tiempo y su rango de edades es de 5 Myr a aproximadamente 1 Gyr. Un ejemplo de este tipo de objeto es *Pleiades* ilustrado en la figura 1.2, conteniendo estrellas jóvenes en donde las más brillantes son tipo espectral B.

En las últimas décadas, ya no sólo se encuentran estas dos clasificaciones para los cúmulos estelares, a partir de datos del Telescopio Espacial Hubble (HST, por sus siglas en inglés) en galaxias cercanas obteniendo imágenes nítidas se ha podido identificar un nuevo tipo de cúmulo, conocido como **súper cúmulo estelar** (SSC, por sus siglas en inglés).

Los **súper cúmulos estelares** son objetos muy densos ($\sim 10^4 M_\odot \text{pc}^{-3}$), considerablemente masivos (entre 10^4 y $10^6 M_\odot$) y compactos ($r_h \sim 1$ pc). Contienen estrellas jóvenes encontrándose en el disco de las galaxias anfitrionas, denominándose como **cúmulos jóvenes**. En comparación con los cúmulos globulares, sus propiedades (densidad, masa y tamaños) son similares, por lo que se consideran candidatos para ser los **progenitores** de los **cúmulos globulares**. Las características que los llevan a ser comparables con los cúmulos globulares, debido a lo anterior, son extremadamente ricas en información de las fases tempranas, evolución y condiciones necesarias para la formación de los cúmulos globulares los cuales ya son poblaciones viejas [5]. Usualmente se forman en galaxias con interacción o en regiones con alta formación estelar [6].

1.1.1. Estructura de los cúmulos estelares

Recordemos que los cúmulos globulares tienen una forma esférica, es por eso que podemos generalizar una estructura para estos sistemas estelares en donde se encuentran dos componentes principales: el halo y el núcleo (ver Fig 1.3). A partir del estudio de la densidad en un cúmulo, se

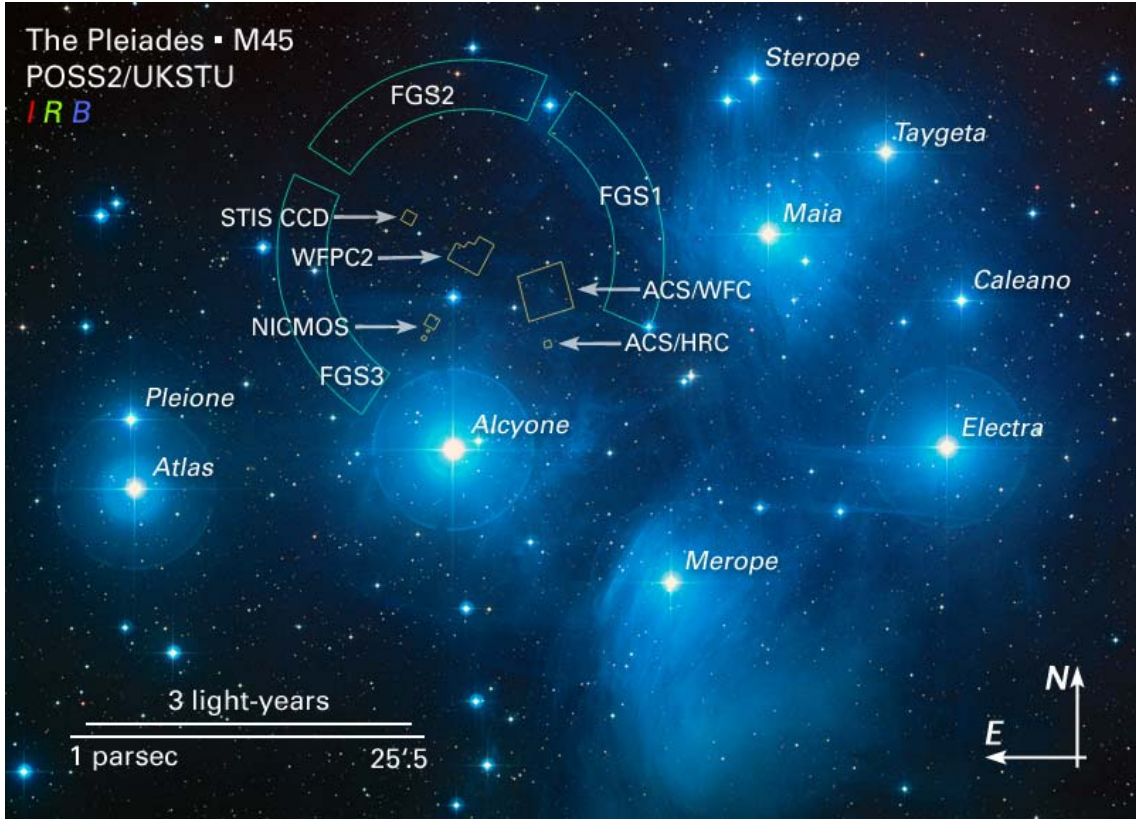


Figura 1.2: Mapa del cúmulo abierto *Pleiades*. Crédito: NASA,ESA y AURA/Caltech.

puede confirmar que aunque son objetos con mucha densidad estelar, hacia el centro (núcleo) el valor incrementa considerablemente.

Este estudio se hace por medio de los perfiles de brillo superficial (**SBP**, por sus siglas en inglés), los cuales describen el brillo integrado por unidad de área de un objeto. Estos perfiles decrecen así como disminuye el brillo a radios más grandes, un ejemplo de lo anterior se encuentra en la figura 1.4.

Para la caracterización de la estructura de estos objetos, algunos de los radios utilizados son:

- Radio del núcleo (*core radius*): donde el brillo superficial cae a la mitad de su valor central.
- Radio a media luz (*half-light radius*): el radio de la esfera que contiene la mitad de toda la luminosidad.
- Radio a media masa (*half-mass radius*): el radio de la esfera que contiene la mitad de toda la masa.
- Radio de marea (*tidal radius*): el límite exterior donde la densidad del cúmulo se hace cero.

1.2. Formación de cúmulos y contenido estelar

1.2.1. Formación de cúmulos

La **formación estelar** se da por regiones conocidas como **nubes moleculares** y debido a su vasto tamaño y densidad el nacimiento de estrellas se da en grupos, dando lugar a la formación

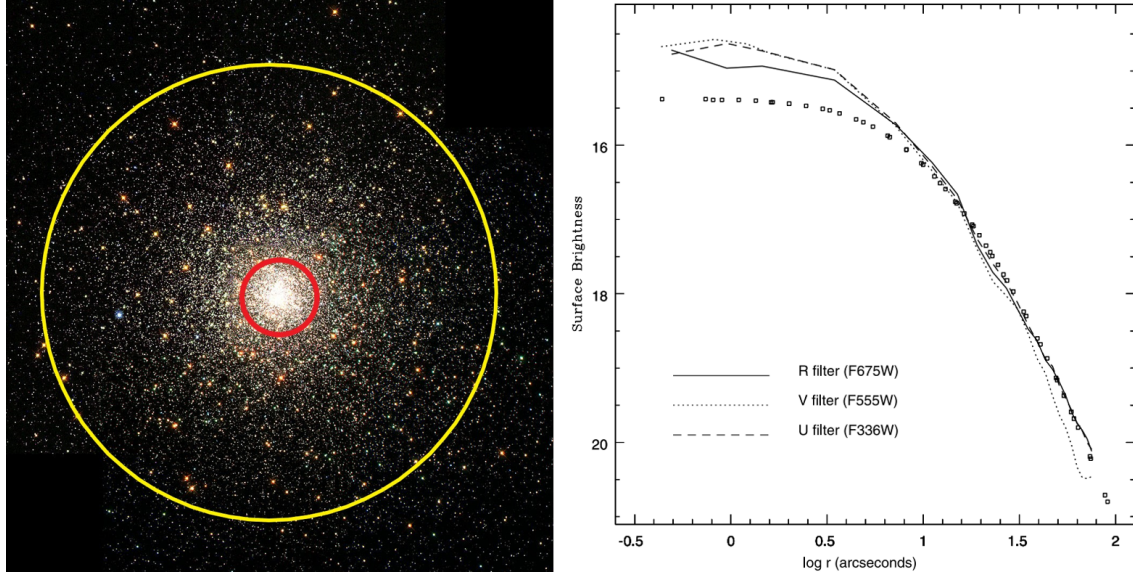


Figura 1.3: Imagen del cúmulo globular **M80** (tomada por el HST) a la izquierda, en donde el círculo amarillo **representa gráficamente** el radio de marea o el halo del cúmulo, mientras que el círculo rojo **representa gráficamente** el núcleo en donde está la mayor concentración de estrellas. Del lado derecho se tiene el perfil de brillo superficial del mismo cúmulo en diferentes filtros (datos del HST) [7].

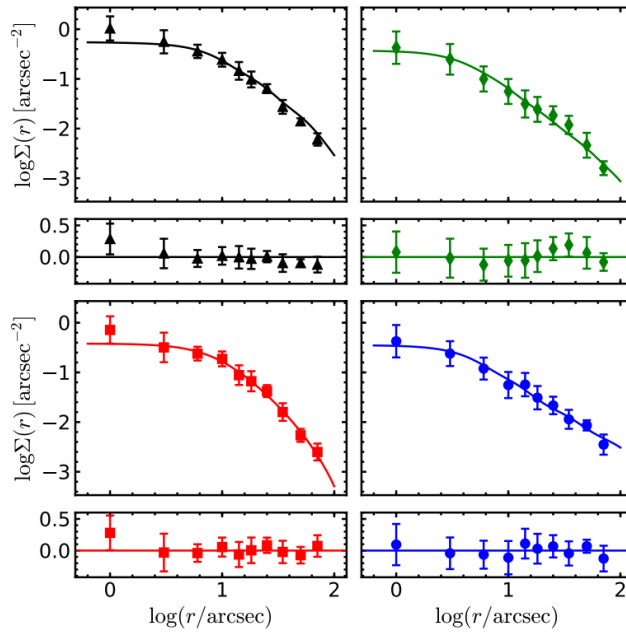


Figura 1.4: Perfiles de densidad superficial del cúmulo M80 con distintas poblaciones estelares. Cúmulo completo (negro), población primordial (verde), población intermedia (rojo) y población tardía (azul), los recuadros inferiores denotan el residuo entre los datos y el ajuste [8].

de los **cúmulos estelares** los cuales, como se dijo anteriormente, su formación y evolución puede revelar información valiosa para la comprensión de la galaxia huésped.

Las **nubes moleculares** son regiones extendidas donde la densidad es suficientemente alta y la temperatura lo suficientemente baja para la existencia del hidrógeno molecular (H_2) aunque es indetectable, sin embargo la segunda molécula más abundante sí es observable en longitudes milimétricas y es el monóxido de carbono (CO). Estas regiones pueden tener un rango de masas desde $\sim 10^3 M_\odot$ hasta $\sim 10^7 M_\odot$ teniendo una estructura compleja, jerárquica o fractal (ver Figura 1.5) en donde hay zonas con mayor densidad unidas a las de menor densidad por filamentos.

La formación estelar ocurre cuando la nube sufre una inestabilidad gravitacional la cual la lleva a sufrir una contracción, a este fenómeno se le llama la **inestabilidad de Jeans** y ocurre cuando la presión interna del gas de la nube no es lo suficientemente fuerte para detener el colapso gravitacional. Para que exista la condición de estabilidad la nube debe estar en equilibrio hidrostático donde tomando la aproximación como si la nube fuese esférica se tiene que:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho(r)M_{enc}(r)}{r^2} \quad (1.1)$$

donde G es la constante gravitacional, $M_{enc}(r)$ es la masa dentro de un radio r , $\rho(r)$ es la densidad del gas a un radio r y r es el radio. La condición de equilibrio es estable si las perturbaciones son atenuadas, pero si incrementan, la condición se vuelve inestable como se mostrará a continuación.

La nube será estable para una masa lo suficientemente baja, sin embargo, cuando el valor para la masa crítica sea alcanzado comenzará el proceso de contracción sin que exista un proceso que lo pueda contrarrestar. James Jeans derivó la forma de calcular esta masa crítica en función de la densidad, composición química y temperatura:

$$M_J = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{RT}{\mu G}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{1/2} \quad (1.2)$$

Sin embargo, una derivación más formal se conoce como el **criterio de Jeans** basándose en las perturbaciones. Partiendo de un gas en reposo que debe obedecer la ecuación del movimiento hidrodinámico junto con la ecuación de continuidad así como la adición de la ecuación de Poisson, finalmente se obtiene que:

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (1.3)$$

y si el número de onda es grande entonces

$$(k v_s)^2 - 4\pi G \rho_0 > 0 \quad (1.4)$$

entonces ω es real y el equilibrio es estable respecto a las perturbaciones.

■ si $k \rightarrow \infty$ entonces $\omega^2 = (k v_s)^2 \rightarrow$ ondas sónicas en un medio isotérmico.

■ si $k^2 < \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2}$ entonces $\omega \equiv \pm i\zeta$ con $\zeta \in \Re \rightarrow$ perturbaciones que crecen exponencialmente.

Jeans definió un número de onda específico k_J o longitud de onda λ_J donde:

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \quad \vee \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} \quad (1.5)$$

De forma que si $\lambda > \lambda_J$ las perturbaciones son inestables y la condición para que la inestabilidad se dé es:

$$\lambda_J = \left(\frac{\pi}{G \rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} v_s \quad (1.6)$$

Entonces para que el colapso ocurra, la sección de la nube debe cumplir la condición de tener $R_J \geq \lambda_J$ en donde la masa contenida dentro del radio R_J es la masa de Jeans.

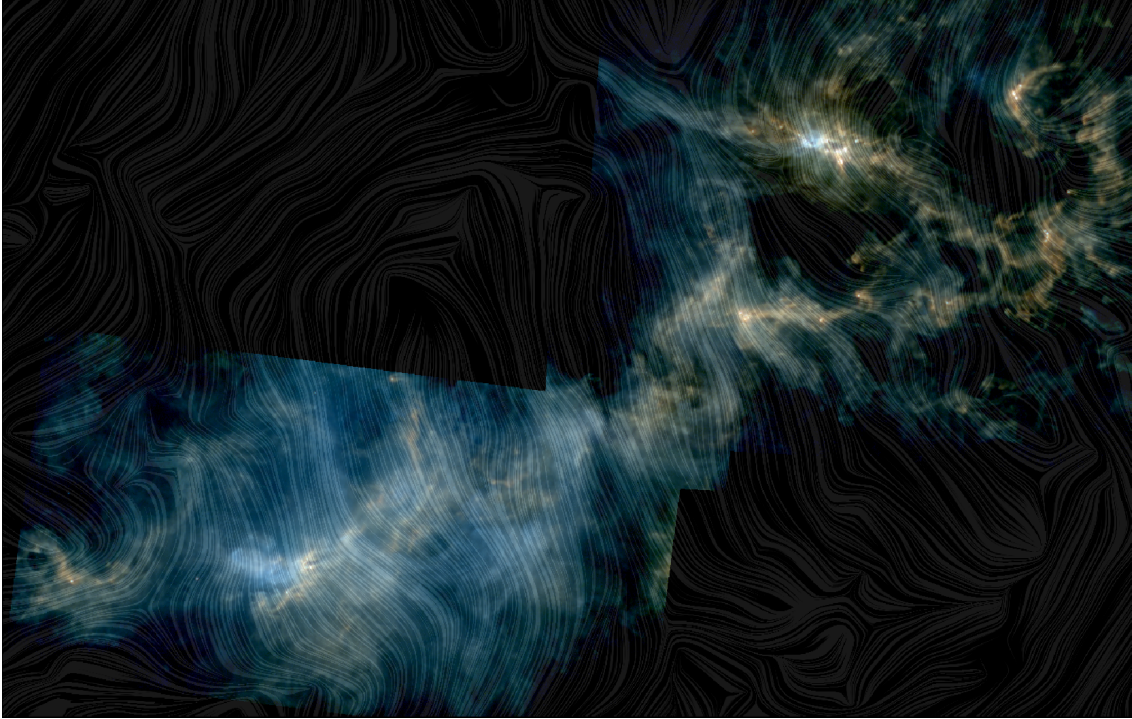


Figura 1.5: Imagen de la nube molecular de Perseo, en donde las zonas brillantes son la emisión del polvo interestelar a distintas longitudes de onda y el patrón de líneas representa la orientación del campo magnético, respectivamente. Crédito: Telescopios Herschel & Planck.

Sin embargo, en realidad es un poco más complejo, la formación de los cúmulos estelares la podemos dividir en diferentes fases [9]. Comenzando por la **turbulencia supersónica** que da lugar al escenario **gravoturbulento** (**GT**, por sus siglas en inglés) en donde las nubes están siendo soportadas globalmente por la presión de la turbulencia supersónica, isotrópica y de escala pequeña, mientras que localmente los choques provocan fluctuaciones de densidad creando amontonamientos y filamentos los cuales, localmente se volverán inestables bajo el criterio de Jeans y colapsarán dando lugar, por medio de este colapso de los núcleos a la formación estelar en grupos, formando los cúmulos, posteriormente las protoestrellas van acumulando su masa por medio de la acreción del material a su alrededor provocando una escasez de gas que va de la mano con la realimentación estelar al medio que prácticamente deja al cúmulo al descubierto (ver Fig 1.6 [10]).

1.2.2. Estrellas

La definición comentada anteriormente de un cúmulo estelar, denota que la componente principal de los mismos, son las **estrellas**, siendo una esfera de plasma que mantiene su forma debido a un equilibrio entre la gravedad y la presión térmica por reacciones termonucleares en su núcleo.

El combustible de una estrella es producido por reacciones termonucleares como se comentó anteriormente, específicamente la **fusión nuclear**, convirtiendo hidrógeno en helio en su núcleo, liberando energía y radiándola al exterior. Podemos relacionar la radiación total emitida de una estrella con la temperatura de un cuerpo negro que emitiría la misma cantidad de radiación, esta temperatura se utiliza como estimación de la temperatura de la superficie del cuerpo negro, conocida como **temperatura efectiva** (T_{eff}). Por ejemplo, el cuerpo negro que ajusta a la radiación total emitida por el sol, le corresponde una temperatura efectiva de aproximadamente 5777 K, ilustrando lo anterior en la figura 1.7.

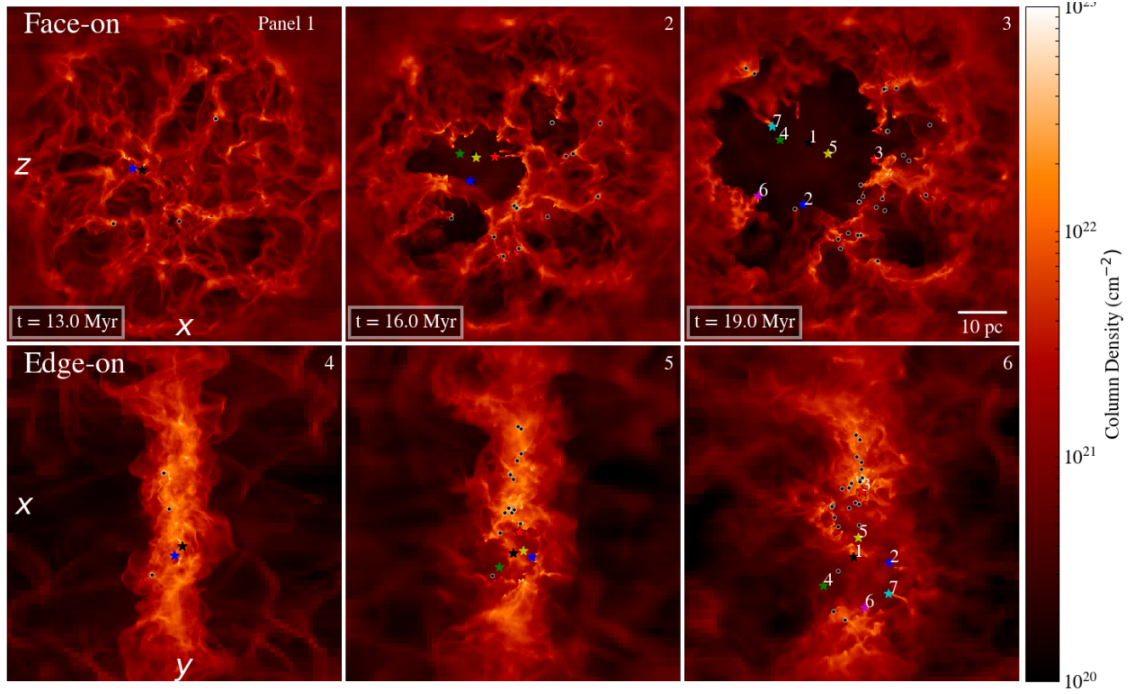


Figura 1.6: Simulación numérica de la evolución de una nube molecular con realimentación estelar. En la parte superior se muestra las vistas de frente y en la inferior, de canto [10].

Entonces, la temperatura efectiva de una estrella es la temperatura de su superficie y dependiendo de su valor varía el color de la estrella y aunque parezca contradictorio intuitivamente, las estrellas **azules** son las más calientes ya que su pico de emisión es en la zona del ultravioleta, en cambio, las **rojas** son las menos calientes y su pico corresponde sobre todo al infrarrojo, por lo anterior, existe una clasificación espectral según la temperatura, desde las estrellas con las superficies más calientes hasta las más frías que va como O, B, A, F, G, K y M. También el color nos da una idea de su edad, por ejemplo, las estrellas más jóvenes son más azuladas, en cambio las estrellas más viejas, rojizas.

Recordando que la formación de las estrellas comienza con el colapso gravitacional de una nube molecular y debido a que la nube puede ser muy grande, la mayoría de la formación de estrellas es en grupos, desde decenas hasta cientos de miles de ellas, principalmente la masa inicial de la estrella, entre otros aspectos determinará su evolución y aunque el proceso no se tenga completamente claro, es por esto que se introduce la **función inicial de masa (IMF)** la cual describe esta distribución de estrellas en un brote de formación estelar en donde se puede considerar como una función de probabilidad, donde se tiene la forma general como:

$$N(m) \propto m^\alpha \rightarrow dN(m) \propto m^\alpha dm \quad (1.7)$$

Si $\alpha < 0$ significa que se producen pocas estrellas masivas y muchas de baja masa, de hecho para la vecindad solar Salpeter en 1955 [11] derivó una expresión para esta probabilidad específica, en donde:

$$d\log N = \Gamma \times d\log m \quad (1.8)$$

$$dN \propto m^{-x} d\log m \quad (1.9)$$

en donde $\alpha = -2.35$, $\Gamma = -1.35$ y $x = 2.35$.

Mediante el proceso del brote de formación estelar, el entorno y en general la nube molecular progenitora determinará las características de sus **poblaciones estelares**, de hecho, existe una

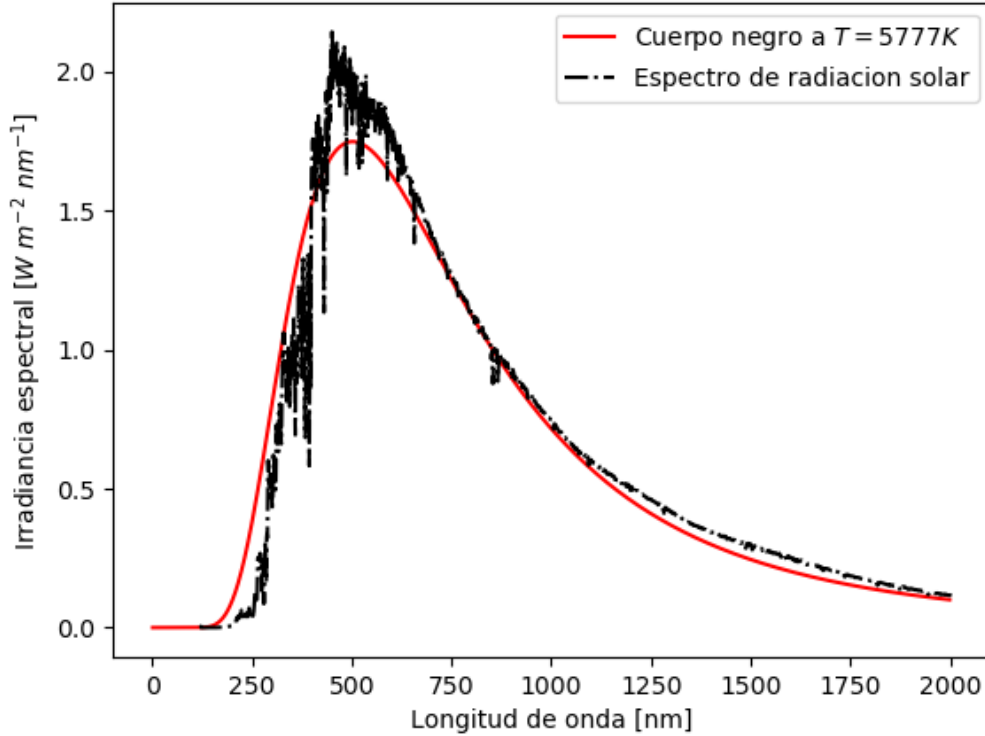


Figura 1.7: Gráfica de irradiancia espectral en función de la longitud de onda, en donde se tiene el espectro del sol y el cuerpo negro que ajusta a la misma cantidad de radiación emitida.

clasificación química para estas poblaciones por estudios en la Vía Láctea. Las estrellas más viejas conocidas se les llama como **población II** por su baja metalicidad¹ ubicándose comunmente en el bulbo y el halo galáctico, posteriormente mientras más estrellas fueron formándose, su metalicidad aumentó, debido a que las nubes moleculares fueron enriquecidas por las generaciones previas cuando terminaba su ciclo de vida. Es por eso que las estrellas más jóvenes, tienen una metalicidad más alta, convirtiéndolas en **población I** y encontrándose sobretodo en los brazos espirales de nuestra galaxia [12].

Evolución estelar

La vida de las estrellas depende de los procesos ocurridos en su núcleo, es por esto que conforme al tiempo y a distintos tipos de reacciones nucleares y cómo las propiedades de la estrella responden a lo anterior, determinarán su evolución. Todo se resume a una batalla entre las fuerzas de gravedad y nuclear, aunque al final ganará la de gravedad ya que en algún momento la estrella terminará con su combustible. Anteriormente se comentó que esta evolución dependerá primordialmente de su masa inicial, metalicidad y entorno.

■ La secuencia principal

La **secuencia principal** es la fase de la estrella en donde quema hidrógeno mediante fusión nuclear en su núcleo por dos principales procesos, la cadena PP y el ciclo CNO, posteriormente hay

¹Se refiere como *metalicidad*(*Z*) por elementos más pesado que el helio.

un cascarón que lleva la energía generada hacia la superficie. Esta fase aparte de ser importante ya que es donde la mayoría de las estrellas pasan casi toda su vida, dependiendo de su masa será la puerta de entrada de la evolución estelar. Por ejemplo, mientras más masivas las estrellas éste periodo de estabilidad es mucho menor.

En el momento en que la cantidad de hidrógeno comienza a agotarse y el helio comienza a concentrarse más y más en el núcleo, la presión de radiación se reduce y la estrella comienza a contraerse creando así un núcleo sólo de Helio y alrededor un cascarón de hidrógeno. Esta contracción provoca un aumento en la densidad y por lo tanto en la temperatura. A partir de este momento sale de la secuencia principal y dependiendo de su masa será la traza evolutiva que seguirá.

■ Estrellas de masa baja e intermedia ($M < 9M_{\odot}$)

Cuando se crea este cascarón se sigue quemando hidrógeno en él mientras que el núcleo de helio, por el momento no varía, resultando en un incremento de tamaño, por lo tanto la superficie se va enfriando, tornándose en un color rojizo llegando a la fase de **subgigante**. Posteriormente, cuando la temperatura de la superficie llega a un punto límite, se detiene la expansión pero la luminosidad aumenta llegando así a la fase de la **gigante roja**.

Si la masa de la estrella es menor a $0.5M_{\odot}$ la temperatura del núcleo no será suficiente para desencadenar el quemado de helio, sin embargo, si se tiene una estrella con ese límite de masa o mayor, empezará una nueva fase ahora con un núcleo en proceso de fusión de helio por el proceso triple-alfa, esta fase es llamada **rama horizontal** si la estrella es de baja metalicidad o **apelotonamiento rojo** para estrellas con metalicidades altas o relativas a la solar.

Posteriormente y de la misma manera que se comienza a agotar el hidrógeno anteriormente, también ocurre con el helio en el núcleo, por lo que la estrella pasa ahora a tener dos cascarones en fusión nuclear, uno de hidrógeno y otro de helio dejando a la estrella en un proceso de enfriamiento de la superficie y expansión, ahora a esta fase se le llama **rama asintótica de las gigantes**, debido a que toma una trayectoria similar a la fase de gigante roja. Finalmente y debido a que en esta fase ya no alcanza a quemar el núcleo, comienzan las inestabilidades que provocan pulsos térmicos causando la pérdida de masa y expulsa sus capas exteriores para formar una **nebulosa planetaria** siendo ionizada por el núcleo de la estrella, que lleva por nombre **enana blanca**.

■ Estrellas de alta masa ($9M_{\odot} < M < 30M_{\odot}$)

Debido a que las temperaturas en el núcleo son lo suficientemente altas para quemar los elementos que resultan de las reacciones triple-alfa hasta llegar al hierro, aunque por sus tasas de pérdida de masa mayores y su luminosidad tan alta, las etapas posteriores de la secuencia principal serán relativamente cortas, por lo que hace que el tiempo de vida de estas estrellas sea relativamente corto (ver Tabla.1.1).

Cuando el hidrógeno comienza a agotarse en el núcleo, comienza una inestabilidad que hace que la temperatura de la superficie disminuya y la estrella se expanda, llegando a la fase de **supergigante azul** y aunque disminuya la temperatura de su superficie siguen siendo sumamente calientes con un color correspondiente a los tipos espectrales O y B. Debido a las altas tasas de pérdida de masa hacen que la estrella siga expandiéndose y llegando a la fase de **supergigante roja** evidentemente disminuyendo su temperatura superficial pero siendo las estrellas más grandes en el universo conocido. Durante todo este proceso la estrella pasa por fases de quemado de hidrógeno, helio, carbono, neón, oxígeno y silicio, dejando un núcleo de hierro el cual ya no será posible fusionar para finalmente terminar su vida.

■ Estrellas súper masivas ($M > 30M_{\odot}$)

Estas estrellas también son capaces de quemar todos los elementos hasta llegar al hierro, aunque al agotar su hidrógeno en el núcleo éstas toman el mismo camino para llegar a ser una **supergigante**

roja, sin embargo debido a las altas tasas de pérdida de masa, los cascarones conteniendo hidrógeno se van desprendiendo dejando al descubierto el interior estelar para ir convirtiéndose en estrellas **Wolf-Rayet**.

Una estrella tipo **Wolf-Rayet** como se dijo anteriormente, tienen una tasa de pérdida de masa muy alta, es por esto que pierden su cascarón exterior de hidrógeno, dejando su núcleo de helio expuesto y por consecuente su temperatura superficial puede ser mayor que 25,000K y tener luminosidades extremadamente altas ($\sim 10^6 L_\odot$), por lo anterior, sus espectros indican la ausencia de hidrógeno y por lo tanto el aumento de elementos más pesados así como fuertes vientos estelares, causantes de la pérdida de masa (ver Fig 1.8).



Figura 1.8: Estrella tipo Wolf-Rayet, conocida como WR 124 en la nebulosa M1-67. Crédito: Telescopio Espacial Hubble.

Si la masa de la estrella es mayor a $60M_\odot$ nunca llegan a la fase de supergigante roja debido a las altas tasas de pérdida de masa, aunque si aumenta la opacidad en su atmósfera las hace acercarse al límite de Eddington convirtiéndose en estrellas en fase de **variable luminosa azul** (LBVs, en inglés) donde sus espectros y brillo tienen variaciones tanto impredecibles como caóticas. Finalmente, de nuevo por las tasas de pérdida de masa se terminarán convirtiendo en estrellas **Wolf-Rayet**.

Finalmente, para las estrellas mayores a $M > 9M_\odot$ el final de su vida estará dado por el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff ya que es el límite superior para la masa de una estrella compuesta de electrones degenerados o en otras palabras, una estrella de neutrones (este límite es $2.20M_\odot$, si la masa del núcleo supera este límite se convertirá en un agujero negro).

En la figura 1.9 se muestra la secuencia principal con la línea negra así como las trazas evolutivas para diferentes estrellas, denotando las fases evolutivas que pasa cada una. También se tiene un gráfico similar con datos de *MESA-Web* el cual es un código de evolución estelar, ilustrado en la figura 1.10.

Masa (M_\odot)	Tipo espectral	Tiempo (Myr)
60	O3	3
10	B4	32
3	A5	370
1.5	F5	3000
1	G2	10000
0.1	M7	10000000

Tabla 1.1: Tiempos de vida de distintos tipos de estrella, en función de su masa [13].

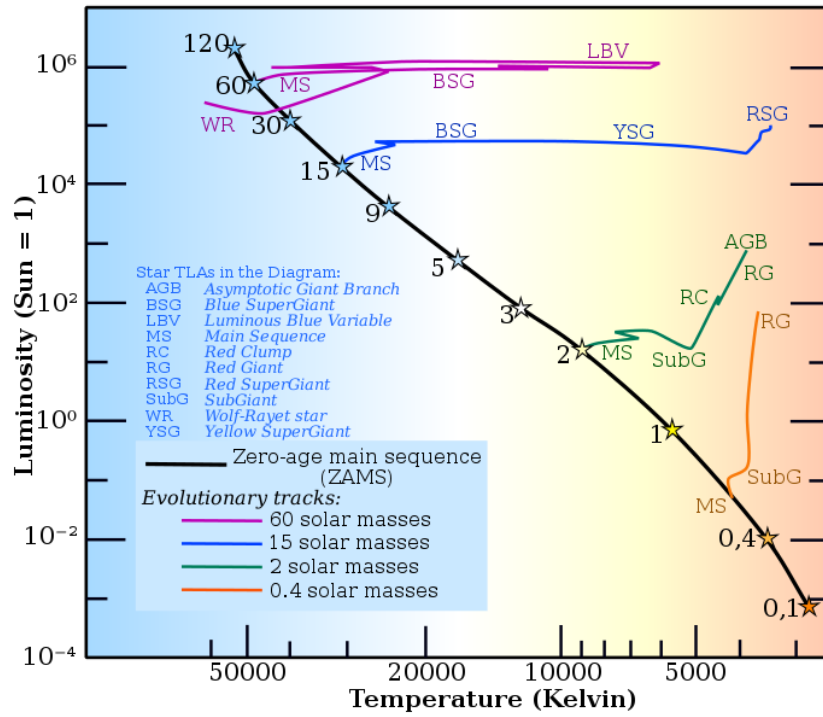


Figura 1.9: Diagrama HR con trazas de evolución estelar para distintas masas. Crédito:Wikimedia Commons.

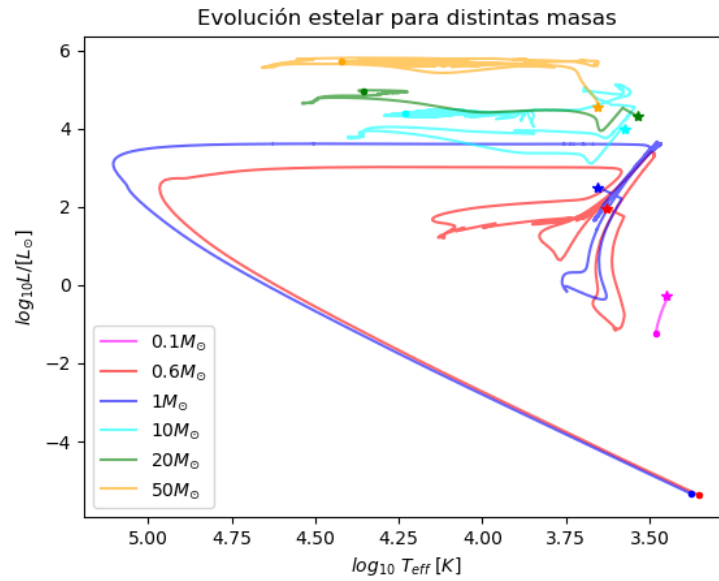


Figura 1.10: Trazas evolutivas para estrellas con distintas masas, los símbolos de estrella representan el inicio de la trayectoria y los puntos sólidos en el mismo color que la línea representan el final de la trayectoria, la muerte de la estrella.

1.3. Estabilidad y evolución dinámica de cúmulos

Los cúmulos globulares contienen al menos algunos millones de estrellas y a pesar que la distancia entre ellas es relativamente pequeña, raramente chocan entre ellas, sin embargo, debido a que éstas estrellas no son estáticas, si llegan a pasar tan cerca una de otra provocando que se afecten gravitacionalmente conservando su energía y momento. Debido a la cantidad de estas interacciones gravitacionales, las velocidades de las estrellas tienden a una distribución maxwelliana.

Estas **interacciones gravitacionales** son una fuente de evolución del sistema, causada por las componentes, en el caso de un cúmulo estelar, las estrellas. A este efecto le llamaremos **encuentros**, los cuales se clasifican en: fuertes y débiles.

Si tomamos en cuenta que los cúmulos globulares galácticos tienen aproximadamente entre 10 y 13 mil millones de años, deberíamos de suponer que existe un tipo de **equilibrio**. En un cúmulo estelar los dos tipos de energía son la potencial (gravitacional) y la cinética. Como lo veremos más adelante, por el Teorema del Virial sabemos que la energía potencial es dos veces el negativo de la energía cinética, por lo tanto las estrellas en un sistema estelar se mantendrán en él mientras sean contenidas por el propio cúmulo.

Sin embargo, el tratamiento que hemos comentado de las interacciones gravitacionales como fuente de evolución del cúmulo no toma en cuenta la física estelar, por lo que a esta estabilidad debemos resaltarle la importancia de la física en las propias estrellas, introduciendo la **evolución estelar**, vista anteriormente.

Remarcando que las estrellas más masivas evolucionan de manera que abandonan la fase de la secuencia principal muy rápido produciendo remanentes estelares, por lo que el sistema estelar se envejece evidenciando poblaciones viejas.

Si se toma en cuenta que dentro de los cúmulos estelares jóvenes existe gas, la evolución de éstas estrellas masivas provocará que cuando mueran, el proceso de explosión de supernova barra este gas, expulsándolo del cúmulo, provocando un cambio en la energía potencial del sistema dejando con menos masa total al cúmulo, desencadenando la **expansión del cúmulo** [14].

Posteriormente, debido a la distribución de velocidades que siguen las estrellas por las interacciones gravitacionales y por la energía potencial gravitacional, el sistema tendrá un límite en donde un cierto valor de velocidad será suficiente para hacer escapar del sistema a una estrella, así como en el núcleo habrá estrellas con mayor velocidad.

De hecho habrá estrellas en la distribución que tendrán la velocidad y por lo tanto la energía suficiente para escapar del sistema, dejando al sistema con cada vez menor energía cinética que la potencial, es por ésto que el núcleo entra en una inestabilidad comenzando una contracción en donde el núcleo cada vez se vuelve más y más denso, este proceso se le conoce como **colapso del núcleo** [15] y aunque se pensaría que seguirá contrayéndose, hay un momento en donde ciertos mecanismos dinámicos paran el colapso del núcleo, aunque estos procesos se enuncian más adelante.

1.4. Súper cúmulo estelar A en NGC 1569

1.4.1. Galaxias

Una **galaxia** es un sistema con distintas componentes en una estructura compleja y definida, entre estas componentes se encuentran: estrellas, polvo, gas y materia oscura, las cuales están ligadas por la fuerza gravitacional que constituye a estos sistemas.

El número de galaxias que existen en el universo es tan alto que parece imposible dar el número exacto debido a ciertos factores como el hecho de contar tanto y la limitante de nuestros instrumentos, aún así Edwin Hubble desde 1926 [16] comenzó con el estudio y clasificación de galaxias según su **morfología**. En la figura 1.11 se ilustra la **secuencia de Hubble** (también conocida como **diapasón de Hubble**) expandida por de Vaucouleurs en donde se divide de izquierda a derecha

en galaxias tipo: elípticas (E), lenticulares (S0), espirales (S) e irregulares (Irr). A continuación, se da un pequeño resumen y se listan algunas características de cada tipo de galaxia.

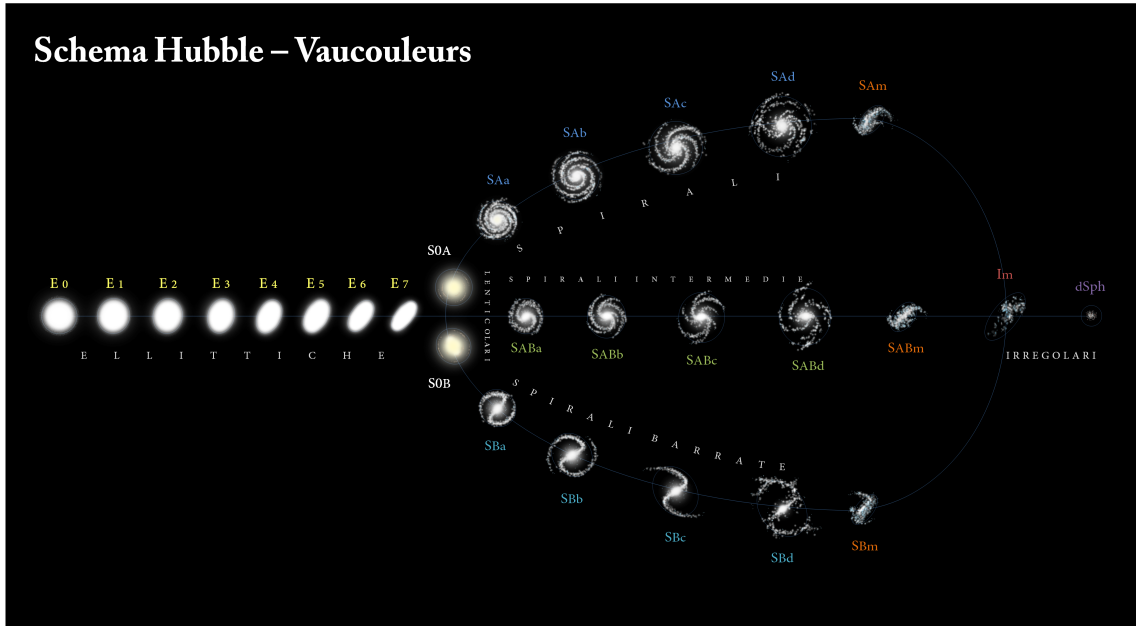


Figura 1.11: Secuencia de Hubble expandida por de Vaucouleurs en 1959 [17]. Crédito: Antonio Ciccolella

Elípticas

Este tipo de galaxias tienen distribuciones de luz suaves y están denotadas con la letra *E* seguida de un número entero *n* el cuál representa la elipticidad con la que se ve en el cielo, de izquierda a derecha va aumentando *n*, empezando desde *n* = 0 que representa una galaxia prácticamente esférica hasta *n* = 7 donde la galaxia tiene una forma *aplanada*. La estructura es prácticamente una concentración de estrellas conocida como bulbo.

Lenticulares

En el centro del diapason, uniendo a las elípticas y espirales se encuentran las galaxias lenticulares las cuales poseen un bulbo similar a las elípticas pero con la adición de una estructura de disco a su alrededor.

Espirales

A la derecha del centro del diapason existe una trifurcación definida para las galaxias de tipo espiral, su estructura consiste en un disco plano en forma de brazos espirales así como un bulbo en el centro. De acuerdo a su estructura, considerando la existencia o no de una barra en el centro del bulbo y donde los brazos espirales comienzan al final de ésta estructura (barra), así como sus detalles y de qué tan *enrollados* estén se define una subdivisión.

Irregulares

Se les llama de tipo irregulares porque son morfológicamente incapaces de entrar en una clasificación de la secuencia de Hubble, aún así se pueden dividir en dos según Hubble, donde las **Irr**

I tienen perfiles asimétricos, ausencia de bulbo y estructura espiral, pero contienen varios cúmulos de estrellas y las tipo **Irr II** que tienen perfiles más planos pero no se puede resolver su contenido. De Vaucouleurs llamó a las **Irr I** como **irregular tipo magallanes** en alusión a las Nubes de Magallanes, dos galaxias satélites de la Vía Láctea.

Es importante resaltar que como se comentó anteriormente, esta clasificación es únicamente **morfológica** excluyendo propiedades físicas y tampoco intenta describir algún tipo de evolución de las galaxias, sin embargo, lo que sí puede llevar la aparente evolución de una galaxia está dado por la **formación estelar** es decir, la formación de estrellas, de hecho se observa que los discos de las galaxias espirales contienen estrellas jóvenes así como regiones de formación estelar activa, en cambio, en las galaxias elípticas predominan estrellas más viejas y en ausencia de gas y polvo no tienen episodios de formación estelar y se les llega a llamar como *galaxias muertas*.

Galaxias tipo *starburst*

Puede ser cualquier tipo de galaxia, morfológicamente hablando, tiene una etapa de un brote de formación estelar muy fuerte, debido a lo anterior consumirá todo el gas disponible de manera muy rápida.

Las interacciones como choques entre galaxias ricas en gas pueden llevar a activar un brote de formación estelar, es por esto que es común ver estos comportamientos en galaxias interactuantes.

1.4.2. NGC 1569

La galaxia **NGC 1569** ilustrada en la figura 1.12, es el objeto de estudio para este trabajo. NGC 1569 es una galaxia irregular enana de tipo **starburst**. Se encuentra a una distancia de 3.06 ± 0.18 Mpc [18], pertenece al grupo de galaxias **IC 342**, cuya distancia fue obtenida a partir de mediciones de la punta de la rama de las gigantes rojas. Aunque no es una galaxia tan cercana, aún está en el universo local, pero la razón que la hace una excelente candidata para ser estudiada es la posibilidad de resolver los perfiles de sus cúmulos. Lo más crucial para este trabajo es que contiene dos súper cúmulos estelares, denominados **A** (NGC 1569-A) y **B** (NGC 1569-B).

Gracias a la resolución del **Telescopio Espacial Hubble** con su cámara *Advance camera for surveys* (ACS) se obtuvo la imagen de la izquierda en la figura 1.13, en donde se marca con círculos en rojo y en amarillo, los SSC de la galaxia NGC 1569, el A y el B, respectivamente. Haciendo un acercamiento al SSC-A, podemos observar que no se trata de un sólo cúmulo, sino que contiene una **subestructura** como se alcanza a observar en la figura. Considerando el trabajo de *De Marchi et al. (1996)* que se enunciará más adelante, se estudió esta subestructura.

1.4.3. Antecedentes

En la noción *clásica*, los cúmulos estelares presentan características idóneas para su estudio, estas son que sus estrellas que se formaron al mismo tiempo y todas están a la misma distancia de nosotros, esto se conoce como **población simple**.

El cúmulo A presenta la característica de **poblaciones múltiples**, como su nombre lo dice, presentan distintas poblaciones con edades diferentes. Gonzales-Delgado et. al (1987) proponen un modelo de dos poblaciones a partir del espectro del súper cúmulo estelar A, la población más joven es de 3 Myr y la más vieja de 9 Myr, ésta se ajusta a la presencia de estrellas Wolf-Rayet (W-R) y súper gigantes rojas, debido a que muestran que en el espectro del supercúmulo estelar A (Fig.1.14) se encuentra el **W-R bump** en 4686Å, así como el salto de Balmer en absorción y serie de Balmer, características detectadas en ambos supercúmulos (A y B), esto sugiere la presencia de estrellas muy masivas. A causa de estas características y como se comentaba anteriormente, estas no encajan con una población simple. Otra característica que comentan es que parece que se forman independientemente de la metalicidad y del ambiente de la galaxia, lo que los lleva a considerarlos como análogos a los cúmulos globulares jóvenes [19].



Figura 1.12: Galaxia NGC 1569. Crédito: HST/NASA/ESA.

Hunter et. al. (2000) reporta los siguientes valores para el radio a media luminosidad (*half-light radius*): $r_{hl} = 2.2$ pc para el súper cúmulo A y $r_{hl} = 3.0$ pc para el súper cúmulo B [5].

Mayya et. al. (2020) infieren 124 ± 11 estrellas Wolf-Rayet en el súper cúmulo A utilizando la línea de Helio II en $\lambda = 4686 \text{ \AA}$, así como las edades para este cúmulo que son del orden de 4.0 ± 0.5 Myr y su masa $(5.5 \pm 0.5) \times 10^5 M_{\odot}$. Resaltan la ausencia de estrellas WR en el súper cúmulo B [20].

De Marchi et. al. (1997) muestra que dentro del cúmulo, se encuentra un objeto menos luminoso ubicado a $\sim 0.2''$ del centro del súper cúmulo A, en éste trabajo se conocía una distancia de 2.2 Mpc hacia la galaxia NGC 1569, por lo que la separación entre los objetos (centro del cúmulo y el objeto menos luminoso) es de ~ 2.1 pc, con lo que se denominó a cada uno de estos como NGC 1569 A1 y NGC 1569 A2, el más brillante y el débil, respectivamente. La separación de 2.1 pc, puede implicar que los objetos están en interacción [21].

Origlia et. al. (2001) mediante estudios de espectroscopia y fotometría, muestra evidencia de estrellas tipo O en el súper cúmulo estelar A, donde anteriormente teníamos información de que en él se encontraban poblaciones de súper gigantes rojas y estrellas W-R. Estas estrellas tipo O se toman como uno de los componentes jóvenes ≤ 5 Myr para A2, ellas están coincidiendo espacialmente con las estrellas W-R, por lo que las estrellas súper gigantes rojas se encuentran en la componente A1. La presencia de poblaciones múltiples no puede ser predicha por modelos de estallido de formación estelar, pero puede ser más accesible desde el punto de vista de que estas poblaciones tuvieron su formación en cúmulos aislados. No hay indicaciones de una función inicial de masa anómala, lo cual es consistente con que este cúmulo puede ser progenitor del tipo de cúmulos globulares actuales [22].

Della Ceca et. al. (1996) detectó rayos-X de remanentes de supernovas y binarias, los cuales se asociaron al centro galáctico [23]. Vallenari & Bomans (1996) muestran diagramas color-magnitud los cuales proponen que la galaxia ha experimentado un brote de formación estelar de 100 Myr a 4Myr previamente [24].

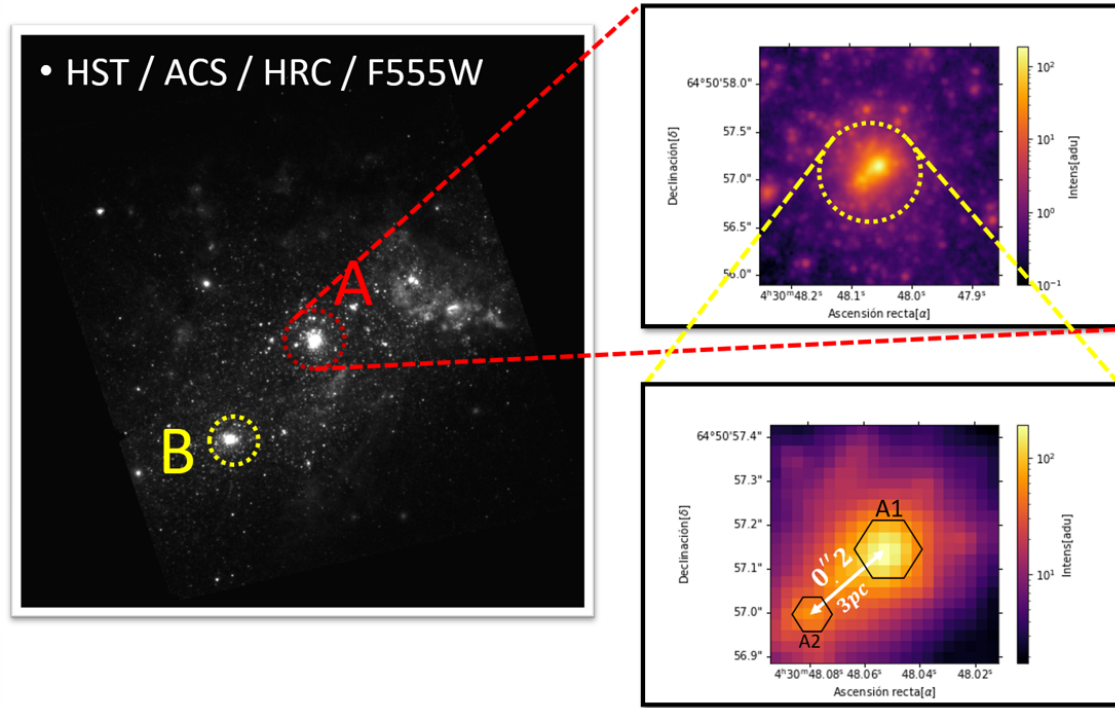


Figura 1.13: En el panel izquierdo se observa una imagen obtenida por el HST de la galaxia NGC 1569, conteniendo sus dos SSC denotados por los círculos, en los paneles de la derecha se muestra un acercamiento al cúmulo A (panel superior) y sus subcomponentes A1 y A2 (panel inferior).

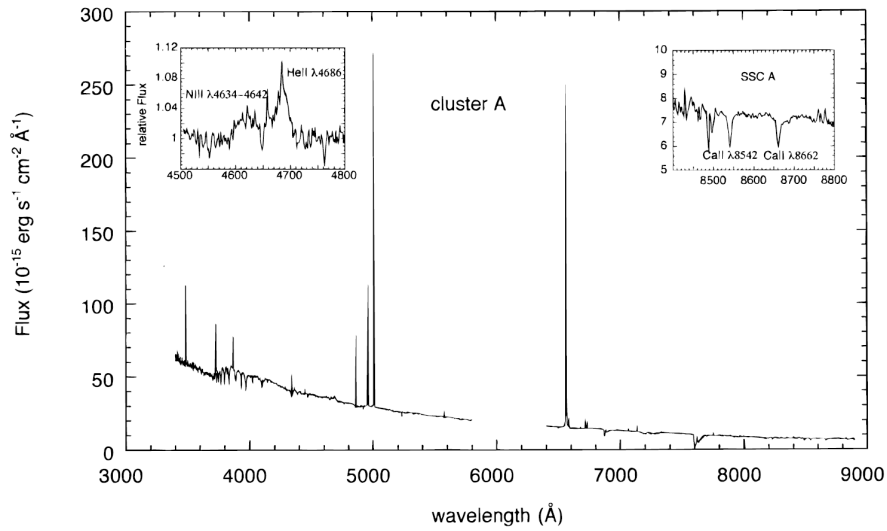


Figura 1.14: Espectro del súper cúmulo estelar A, mostrando el salto de W-R y la serie de Balmer. *González-Delgado et. al. (1996).*

1.5. Objetivo de la tesis

En este trabajo de tesis, se busca caracterizar la estructura de uno de los **súper cúmulos estelares** de la galaxia **NGC 1569** específicamente el **SSC-A**.

Mediante procesos computacionales, obtener sus parámetros estructurales, dinámicos y de morfología; con la finalidad de responder al cuestionamiento de la naturaleza de la subestructura que lo compone; cuántas y de que forma están constituidas estas subestructuras.

Capítulo 2

Tratamiento teórico de cúmulos estelares

Resaltando que el objeto de estudio en esta tesis son los **cúmulos estelares** y más específicamente los **súper cúmulos estelares**, la componente más importante de los anteriores son las **estrellas**, el siguiente capítulo comprende las bases teóricas de los cúmulos estelares para formular ecuaciones y análisis que nos permita obtener información cualitativa y cuantitativa de sus características previamente mencionadas.

2.1. Tiempo de relajación

La fuerza gravitacional que actúa en las estrellas de una galaxia es de **largo alcance**, en contraste con el corto alcance para las partículas. Para una estrella en el vértice de un cono, la fuerza gravitacional cae con la distancia r como r^{-2} aunque incrementa en r^2 si la densidad de estrellas es constante.

Se define un factor de dos intervalos en el radio llamado *octava* [14]; con esto se puede mostrar que la fuerza gravitacional de una estrella en el vértice de un cono está dominada por las estrellas más distantes del sistema, en lugar de las más cercanas. En el caso de un sistema completamente esférico, la estrella en el ápex no experimentaría ninguna fuerza neta, ya que sería atraída en todas direcciones, podemos tratar a la fuerza gravitacional de una estrella como la resultante de una distribución de densidades homogénea en lugar de un conjunto de masas puntuales.

Para dar una respuesta más clara, consideramos un cúmulo con N estrellas idénticas de masa m como una densidad homogénea y de campo gravitacional. Se considera que la estrella individual sea llamada *estrella de prueba* y una estrella cualquiera en el cúmulo será la *estrella de campo* y suponiendo que la estrella de prueba pase a una distancia b de la de campo, se busca calcular el **encuentro** entre estrellas. Este **encuentro** describe las perturbaciones gravitacionales de la órbita de una estrella a causa de otra, específicamente en este caso se aproxima la cantidad $\delta\mathbf{v}$ por la cual el **encuentro** cambia la velocidad \mathbf{v} de la estrella de prueba.

Para la aproximación se asume que $|\delta\mathbf{v}|/v \ll 1$ y que la estrella de campo será estacionaria durante todo el **encuentro**:

$$\delta v = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + (vt/b)^2)^{3/2}} = \frac{2Gm}{bv} \quad (2.1)$$

Para la estrella de prueba, al cruzar el cúmulo de radio R una vez, la cantidad de encuentros es:

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db \quad (2.2)$$

En un rango de b a $b + db$, cada encuentro produce un cambio δv en la velocidad de la estrella de prueba.

Debido a la cantidad de encuentros, la velocidad de la estrella de prueba queda *difusa o dispersada*, este proceso usualmente recibe el nombre de **relajación de dos cuerpos**.

La velocidad v de una estrella de campo en una órbita circular en el borde es:

$$v^2 \approx \frac{GNm}{R} \quad (2.3)$$

La velocidad v de una estrella que haga varios cruces al cúmulo, se aproximará a Δv^2 en cada cruce, aquí se define la cantidad de veces que cruza n_{relax} , la cual es:

$$n_{relax} \simeq \frac{N}{8 \ln \Lambda} \quad (2.4)$$

en donde $\ln \Lambda$ es el logaritmo de Coulumb, el cual está determinado por el parámetro de impacto b . Con esto, podemos definir el **tiempo de relajación** como $t_{relax} = n_{relax} t_{cross}$ donde $t_{cross} = R/v$ es el **tiempo de cruce** en el que la estrella cruza el cúmulo una vez.

$$t_{relax} \simeq \frac{0.1N}{\ln \Lambda} t_{cross} \quad (2.5)$$

Es importante resaltar que después de un tiempo de relajación, la órbita de la estrella habrá cambiado significativamente por todos los encuentros. Este cambio en la órbita sería diferente si el campo gravitacional fuera homogéneo. Después del tiempo de relajación la estrella pierde toda la información de sus condiciones iniciales. En otras palabras es el tiempo que le toma al cúmulo en llegar de un estado perturbado, al equilibrio, generalmente esto es, redistribuir la distribución de velocidades a una distribución maxwelliana.

2.2. Equilibrio Virial en cúmulos

Teorema del Virial

Suponiendo un sistema de partículas con masa m_i con posiciones \mathbf{r}_i y la fuerza sobre m_i es \mathbf{F}_i [25], tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (2.6)$$

en donde \mathbf{p}_i es el **momento** de la partícula i -ésima.

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (2.7)$$

T es la energía cinética del sistema, si tomamos el promedio temporal en ambos lados de la ecuación anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i dt = \langle 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle \quad (2.8)$$

Si todos los elementos del sistema permanecen todo el tiempo en él, entonces los valores de r_i se mantienen constantes así como también los momentos \mathbf{p}_i debido a que la energía total del sistema permanece constante. Entonces $\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$ también permanece constante, por lo tanto la integral de su derivada también lo será.

Si τ que es el tiempo en donde hacemos el promedio temporal lo hacemos suficientemente grande, el lado izquierdo de la ecuación 2.8 se aproxima a cero, entonces tenemos que:

$$\langle 2T \rangle + \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = 0 \quad (2.9)$$

ahora, si la fuerza \mathbf{F} viene de un potencial, tenemos:

$$\langle 2T \rangle - \left\langle \sum_i m_i \nabla V(r_i) \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = 0 \quad (2.10)$$

y si el potencial es proporcional a r^n , entonces el gradiente se extiende a lo largo de la dirección radial,

$$\sum_i m_i \nabla V(r_i) \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \frac{\partial V(r_i)}{\partial r_i} r_i = \sum_i m_i V(r_i) \quad (2.11)$$

finalmente, obtenemos que:

$$\langle 2T \rangle - n \langle V \rangle = 0 \quad \text{con } V \equiv \sum_i m_i V(r_i) \quad (2.12)$$

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle} \quad (2.13)$$

cuando $n > -2 \rightarrow \langle T \rangle + \langle V \rangle > 0$ significaría que el sistema no está ligado gravitacionalmente, por lo tanto el potencial va a la primera potencia inversa, con lo cual $n = -1$, por lo que:

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle} \quad (2.14)$$

donde la ecuación 2.14 es más conocida como el **Teorema del Virial**, el cual nos dice que para un sistema estable y auto-gravitante, en una distribución esférica de objetos de igual masa, la energía cinética total es igual al negativo de un medio de la energía potencial gravitacional.

A partir del Teorema del Virial y utilizando la información de la literatura mencionada en la [Subsección 1.4.3](#), obtendremos el tiempo de relajación para el SSC-A, para lo cual, tenemos la siguiente definición para la velocidad de una estrella en el cúmulo:

$$v = \sqrt{\frac{GM_t}{R}} \quad (2.15)$$

$$v \sim 32.8 \text{ km s}^{-1} \quad (2.16)$$

Ya habiendo definido el tiempo de cruce, dado por:

$$t_{cross} = \frac{R}{v} \quad (2.17)$$

obtenemos, que:

$$t_{cross} \sim 6.5 \times 10^4 \text{ yr} \quad (2.18)$$

Finalmente, haciendo una suposición de que la masa media de las estrellas del cúmulo es de $1M_\odot$, podemos obtener la cantidad N de estrellas en el mismo, para finalmente, obtener el tiempo de relajación. En este caso $N = 5.5 \times 10^5$ estrellas y finalmente:

$$\boxed{t_{relax} \sim 270 \text{ Myr}} \quad (2.19)$$

En los cúmulos globulares con $N \approx 10^5$ y tiempo de cruce $t_{cross} \approx 1 \text{ Myr}$, el proceso de relajación influencia la estructura del cúmulo.

La parte más importante es que la dinámica en los sistemas en donde su escala de tiempo es aproximadamente menor que el tiempo de relajación se consideran **sistemas no colisionales**. Lo que quiere decir que las partículas que están en el sistema se mueven por el campo gravitacional, no debido a la influencia de un conjunto de masas puntuales, más bien, de una distribución de masa uniforme.

2.3. Potencial gravitacional para sistemas esféricos

- **Primer teorema de Newton:** Un cuerpo que está dentro de una cáscara esférica de materia, no experimenta fuerza neta gravitacional de la cáscara.
- **Segundo teorema de Newton:** La fuerza gravitacional de un cuerpo que yace en la parte exterior de una cáscara esférica de materia, es la misma si toda la masa de la cáscara estuviera concentrada en un punto en su centro.

Estos teoremas se utilizan para calcular el potencial gravitacional de cualquier distribución simétrica esférica de materia.

La atracción gravitacional de un sistema de distribución de densidad esférica $\rho(r')$ para una unidad de masa a un radio r está determinada por la masa interior a r :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (2.20)$$

donde

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.21)$$

El potencial gravitacional total, debe considerar la suma de todas las cáscaras esféricas de masa $dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr$. Calculando el potencial gravitacional en \mathbf{r} generado por una distribución de densidad esféricamente simétrica $\rho(r')$, añadiendo la contribución de cada cascarón:

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right] \quad (2.22)$$

Algunas propiedades de las distribuciones de materia esféricas son las siguientes:

- **Velocidad circular:** velocidad de una partícula con masa despreciable en una órbita circular a un radio r .

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r} \quad (2.23)$$

- **Frecuencia circular:** es la frecuencia angular asociada.

$$\Omega \equiv \frac{v_c}{r} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^3}} \quad (2.24)$$

- **Velocidad de escape:** la cual nos dice que una estrella puede escapar del campo gravitacional Φ si tiene una velocidad mayor a la de escape.

$$v_e(r) \equiv \sqrt{2|\Phi(r)|} \quad (2.25)$$

2.3.1. Energía potencial para sistemas esféricos

Tomando en cuenta la expresión de la energía potencial para un cuerpo esférico más simple:

$$W = -4\pi G \int_0^\infty dr r \rho(r) M(r) \quad (2.26)$$

en donde b es la **distancia de escala de Plummer** y M es la masa total del sistema. Aplicándole el operador **Laplaciano** a la ecuación anterior, tenemos:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}} \quad (2.37)$$

y por la ecuación de Poisson, tenemos que la densidad correspondiente al potencial gravitacional es:

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-5/2} \quad (2.38)$$

finalmente, la energía potencial del modelo de Plummer es,

$$W = -\frac{3\pi GM^2}{32b} \quad (2.39)$$

2.4. Ecuación no colisional de Boltzmann

La **función de distribución** $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ (**DF**, por sus siglas en inglés) es una función que describe la probabilidad de que a un tiempo t una estrella cualquiera tenga coordenadas en el espacio de fase en el rango $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}, \mathbf{x} + d^3\mathbf{x}]$ y $\mathbf{v} \in [\mathbf{v}, \mathbf{v} + d^3\mathbf{v}]$.

Asumiendo que todas las estrellas son idénticas, todas las estrellas tienen la misma probabilidad, entonces la función está normalizada.

$$\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 \quad (2.40)$$

La función de distribución tiene el mismo valor numérico en un punto dado del espacio de fase en cualquier sistema de coordenadas canónico. Es por esta invarianza del sistema, que suponemos las siguientes: $\mathbf{w} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, como un sistema arbitrario de coordenadas canónicas.

La probabilidad de encontrar a una estrella que se mueve a través del espacio de fase evoluciona temporalmente, debido a que mientras la estrella evoluciona en su camino la probabilidad de encontrarla debe conservarse, así como en la conservación de masa en un fluido, entonces podemos hacer un análogo para la ecuación de continuidad como,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial w} \cdot (f\dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.41)$$

la cual es la ecuación para la conservación de probabilidad en el espacio de fase.

Posteriormente a esto y utilizando las ecuaciones de Hamilton y haciendo una manipulación algebraica, obtenemos la **ecuación no colisional de Boltzmann (CBE)**:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.42)$$

Bajo distintas formulaciones de la ecuación anterior, podemos decir que la densidad del espacio de fase alrededor de una estrella es constante.

Si consideramos ahora un marco inercial de coordenadas cartesianas en donde $H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(\mathbf{x}, t)$ siendo Φ el potencial gravitacional, la CBE queda de la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (2.43)$$

2.5. Teorema de Jeans

Teorema de Jeans: *Cualquier solución estable de la ecuación no colisional de Boltzmann depende de las coordenadas del espacio de fase sólo por integrales de movimiento en el potencial dado, y cualquier función de integrales lleva a una solución estable de la ecuación no colisional de Boltzmann.*

Teorema fuerte de Jeans: La función de distribución de un sistema estelar estable en el cual casi todas las órbitas son regulares con frecuencias no resonantes se puede presumir que es una función de tres integrales aisladas independientes, las cuales pueden tomarse como las acciones.

En otras palabras, el teorema de Jeans nos dice que si hay I_1, \dots, I_n n integrales independientes en un potencial dado, cualquier función de distribución de la forma $f(I_1), f(I_1, I_2), \dots, f(I_1, \dots, I_n)$ es una solución a la ecuación no colisional de Boltzmann; y el teorema fuerte, que para un potencial de un sistema estable en el cual las órbitas son regulares, la función de distribución puede ser representada de la forma $f(I_1, I_2, I_3)$, donde I_1, I_2, I_3 son integrales independientes.

2.6. Funciones de distribución para sistemas esféricos

Si consideramos cúmulos globulares por ejemplo, se tiene que su forma es prácticamente esférica, esta aproximación hace que los sistemas más simples, sean esféricos, por su simetría. Debido a lo anterior, se busca que las estrellas en el sistema sean de una única población, esto permite que sólo exista una sola función de distribución f , asumiendo que la densidad de masa generada por el potencial gravitacional del sistema es proporcional a $\int d^3\mathbf{v}f$, esto quiere decir que son **auto-consistentes**, debido a que la ecuación de Poisson determina la distribución de densidades.

Se define una nueva expresión para la energía y el potencial gravitacional. Un **potencial relativo** Ψ y **energía relativa** ε , siendo Φ_0 una constante, se tiene que:

$$\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0 \quad (2.44)$$

$$\varepsilon \equiv -H + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2 \quad (2.45)$$

si un sistema aislado se extiende hacia infinito, $\Psi_0 = 0$ y la energía relativa es igual a la energía de ligadura. El potencial relativo de un sistema aislado satisface la ecuación de Poisson de la forma,

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G\rho \quad (2.46)$$

sujeta a la condición de frontera $\Psi \rightarrow \Phi_0$ como $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Debido al teorema de Jeans y a la simetría esférica del sistema, esto nos permite que la DF sea una función de energía relativa como $\varepsilon = \Psi - \frac{1}{2}v^2$ y de la magnitud del momento angular con la ecuación de Poisson, escrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G\rho = -4\pi GM \int d^3\mathbf{v} f \left(\Psi - \frac{1}{2}v^2, |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \right) \quad (2.47)$$

Debido a que para obtener Ψ , tenemos que escoger una DF (f), lo cual hace que no podamos normalizarla para tener la unidad en todo el espacio de fase. En consecuencia, se propone una nueva normalización para que la integral de f en todo el espacio de fase sea la masa total, por lo que asumimos que la densidad de masa ρ está dada por:

$$\rho = \int d^3\mathbf{v} f \quad (2.48)$$

Con lo que se comentó, ya podemos buscar DF que satisfagan los puntos anteriores, como lo veremos a continuación.

2.6.1. Modelos politrópicos

Estos son modelos estelares que se desarrollan para obtener una comprensión más profunda de las propiedades de la estrella. En el primer caso se tiene las relaciones de gases politrópicos. En este caso, la función de distribución sigue la forma:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} F\varepsilon^{n-3/2} & (\varepsilon > 0), \\ 0 & (\varepsilon \leq 0). \end{cases} \quad (2.49)$$

en donde el potencial $\Psi > 0$, quiere decir que tenemos un límite para la densidad ρ . Desarrollando la ecuación de la densidad de masa para el caso de la función de distribución previamente mostrada, tenemos que:

$$\rho = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f(\Psi - \frac{1}{2}v^2) = 4\pi F \int_0^{\sqrt{2\Psi}} dv v^2 (\Psi - \frac{1}{2}v^2)^{n-3/2} \quad (2.50)$$

si sustituimos $v^2 = 2\Psi \cos^2\theta$ y agrupamos las constantes, obtenemos que

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (\Psi > 0) \quad (2.51)$$

$$c_n = \frac{(2\pi)^{3/2} (n - \frac{3}{2})! F}{n!} \quad (2.52)$$

con $n > \frac{1}{2}$, c_n será finito, en este caso, la densidad crece a la potencia n-esíma esto cuando $\Psi > 0$. Como ya tenemos el valor de ρ , lo utilizamos para la ecuación de Poisson dejando todo en función sólo de Ψ , como se ve a continuación:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \quad (2.53)$$

Los gases politrópicos tienen como ecuación de estado $p = K\rho^\gamma$, por lo tanto la ecuación del equilibrio hidrostático para una esfera auto gravitante de un gas politrópico es,

$$K\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = \frac{d\Psi}{dr} \quad (2.54)$$

para finalmente, obtener la siguiente ecuación que es análoga a la ecuación (2.51) pero con otras constantes en consideración como se ve a continuación,

$$p^{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{K\gamma} \Psi \quad (2.55)$$

$$c_n = \left(\frac{\gamma-1}{K\gamma} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (2.56)$$

Todo lo anterior, nos dice que la distribución de densidad de un sistema estelar ergódico con una función de distribución de la forma (2.49) es la misma que la de una esfera de gas politrópica con $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$. Por lo tanto, los sistemas estelares con esta DF, se les conoce como **politrópicos**. Sin embargo, es importante la consideración de $n > \frac{1}{2}$, debido a que si esto no se cumple, estas esferas no tienen un análogo dinámico estelar.

Finalmente, resolviendo la ecuación (2.53) y haciendo algunas consideraciones, tenemos que la masa contenida dentro de un radio r es:

$$M(r) = -\frac{r^2}{G} \frac{d\Psi}{dr} \propto r^{1-\alpha/n} = r^{(n-3)/(n-1)} \quad (2.57)$$

cuando $n \rightarrow \infty$, el potencial se vuelve proporcional a $\ln r$ y se le conoce como "esfera isotérmica singular". Cuando $n = 5$, obtenemos el modelo de Plummer. Por ejemplo, tenemos diferentes casos con la densidad dependiendo del valor de n , cuando $n < 5$ la densidad se hace cero a un radio finito, para $n = 5$ la densidad no es cero en todo el radio pero la masa es finita, finalmente cuando $n > 5$ la densidad cae lentamente conforme el radio aumenta y la masa es infinita [14].

2.6.2. Esfera isotérmica

La condición para que las esferas de gas tengan un análogo dinámico-estelar es $n > \frac{1}{2}$ o que $n = 1/(\gamma - 1) > \frac{1}{2}$, por lo tanto el valor de γ debe ser menor que 3 ($\gamma < 3$). En el límite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que $\gamma = 1$ y esto implicaría que $p = K\rho$, lo cual corresponde a la ecuación de estado para un **gas isotérmico**.

Una de las formas para derivar la ecuación es por el equilibrio hidrostático y suponiendo una función de distribución de la forma:

$$f(\varepsilon) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.58)$$

y si la integramos, recordando la ecuación (2.48), obtenemos que:

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \quad (2.59)$$

donde a partir de lo anterior, obtenemos la ecuación análoga que gobierna a las ecuaciones de polítopos:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G \rho_1 r^2 e^{\Psi/\sigma^2} = 0 \quad (2.60)$$

Llegado este punto donde:

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (2.61)$$

relaciona la ecuación de Poisson y la derivada a partir del equilibrio hidrostático, la cual nos permite denotar que la estructura de una esfera de gas isotérmica auto gravitante es idéntica a la estructura de un sistema no colisional de estrellas que tiene como función de distribución la ecuación (2.58).

Una de las soluciones para la ecuación de la *esfera de gas isotérmica* (2.60) es:

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (2.62)$$

la cual describe el caso de la **esfera isotérmica singular**, descrita por las ecuaciones siguientes:

$$M(r) = \frac{2\sigma^2 r}{G}, \quad v_c(r) = \sqrt{2}\sigma, \quad \Phi(r) = 2\sigma^2 \ln(r) + \text{constante} \quad (2.63)$$

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{2GR} \quad (2.64)$$

esta última es la ecuación de la densidad superficial, en esta caso tiene una densidad infinita en $r = 0$.

Evidentemente, lo anterior causa un problema en el origen $r = 0$, lo cual lleva a definir variables adimensionales que puedan solucionar esto, reemplazando ρ y r por $\tilde{\rho}$ y \tilde{r} , respectivamente; definiéndolas en términos de la **densidad central** ρ_0 y del **radio de King** r_0 :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_0} \quad r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G \rho_0}} \quad (2.65)$$

El modelo de la **esfera isotérmica** tiene un defecto importante: su masa es infinita. De la ecuación (2.63) tenemos que $M \propto r$ a distancias grandes [14].

2.6.3. Modelos *lowered isothermal*

Debido al problema de la masa infinita para la esfera isotérmica, debemos obtener un modelo que pueda solucionarlo a valores grandes de radio, pero dejando una similitud a radios pequeños en donde las estrellas tienen valores mayores de energía relativa ε .

Tomando lo anterior en consideración, se busca modificar la función de distribución de la esfera de gas isotérmica (ecuación 2.58), para que $f_K = 0 : \varepsilon \leq \varepsilon_0$, obteniendo:

$$f_K(\varepsilon) = \begin{cases} \rho_1(2\pi\sigma^2)^{-3/2}(e^{\varepsilon/\sigma^2} - 1) & (\varepsilon > 0), \\ 0 & (\varepsilon \leq 0). \end{cases} \quad (2.66)$$

Este modelo es de suma importancia debido a que define a la familia de **modelos de King**. Posteriormente, integrando esta función de distribución sobre todas las velocidades, recordando la ecuación 2.48, tenemos que [14]:

$$\rho_K(\Psi) = \rho_1 \left[e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma} \right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{2\sigma^2} \right) \right] \quad (2.67)$$

y finalmente, utilizamos la ecuación anterior para escribir la ecuación de Poisson en términos de Ψ , de manera que:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho_1 r^2 \left[e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma} \right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{2\sigma^2} \right) \right] \quad (2.68)$$

De lo cual, podemos integrar la ecuación anterior, sin embargo, dependiendo de los límites de la integración y del valor de Ψ , tendremos que si integramos al exterior de éste, obtendremos un punto donde la densidad de estrellas cae; por lo que a cierto radio r_t , Ψ se vuelve 0. Justamente a este radio r_t se le conoce como el **radio de marea (tidal radius)**.

La masa total del sistema está dada por:

$$M(r_t) = 4\pi \int_0^{r_t} r^2 \rho_K dr \quad (2.69)$$

correspondiéndole un potencial:

$$\Phi(r_t) = -\frac{GM(r_t)}{r_t} \quad (2.70)$$

teniendo que el potencial central es:

$$\Phi(0) = \Phi(r_t) - \Psi(0) \quad (2.71)$$

En la figura 2.1 se muestran perfiles de densidad de los modelos de King, que se obtienen de integrar la ecuación (2.68), con distintos valores de $\Phi(0)$.

Nótese que para alguno de estos modelos r_0 es más grande que el radio a media-luminosidad (*half-light radius*) r_h o el radio del núcleo (*core radius*) r_c , definidos por la condición

$$\frac{\Sigma_K(r_c)}{\Sigma_K(0)} = \frac{1}{2}$$

La razón entre el radio de marea (*tidal radius*) r_t y el radio de King r_0 se define como **índice de concentración c** :

$$c \equiv \log_{10}(r_t/r_0) \quad (2.72)$$

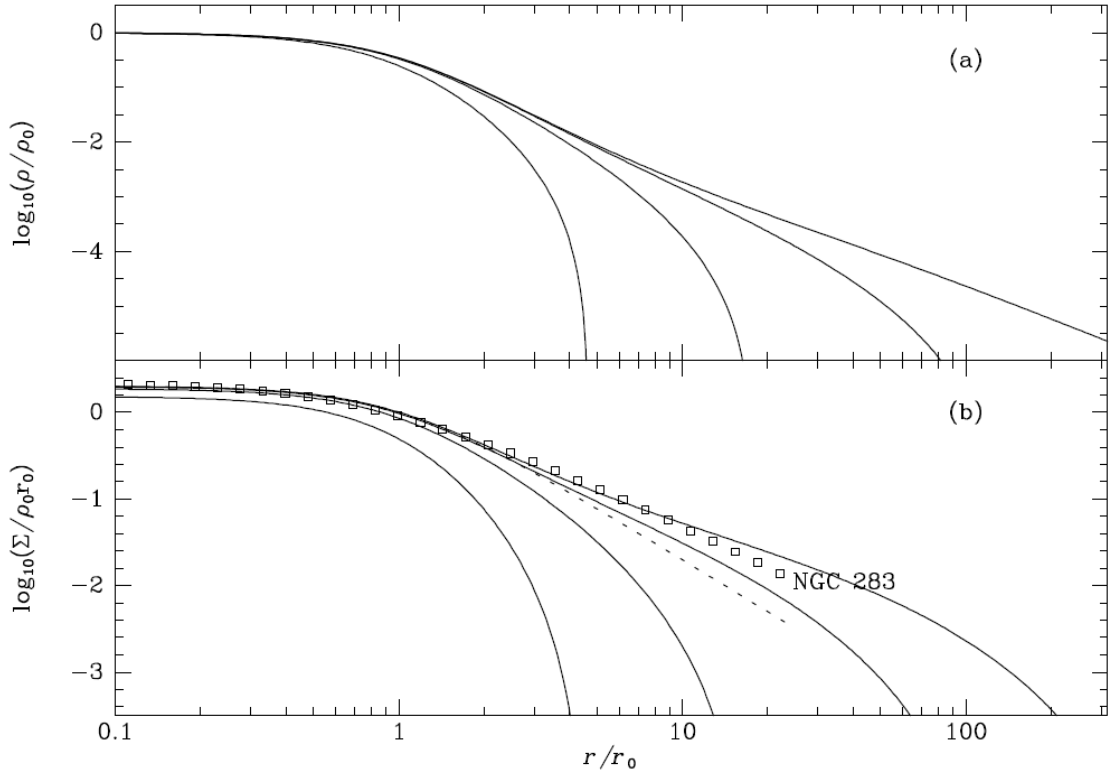


Figura 2.1: (a) Perfiles de densidad de 4 modelos de King. $\Phi(0)/\sigma^2 = 12, 9, 6, 3$, (b) Densidad de masa de estos modelos. Los cuadros muestran el perfil de brillo superficial de la galaxia elíptica NGC 283 [14].

2.7. Cinemática

Haciendo un pequeño resumen, tenemos que los denominados *encuentros* provocan una perturbación gravitacional en la órbita de una estrella respecto a otra, en cambio la *colisión* es el contacto físico entre estrellas. Denotando el efecto **no-colisional** o **colisional**, respectivamente.

Los *encuentros* provocan que las estrellas cambien su trayectoria y finalmente pierden cualquier indicio de su trayectoria inicial, este proceso se le conoce como *difuso*. Si esto llega a pasar, debido a muchas de estas interacciones, le corresponde la escala de tiempo conocida como el **tiempo de relajación** (t_{relax}).

Dentro de esta escala de tiempo, es posible adoptar la aproximación de que el potencial gravitacional se genera por una distribución uniforme de masa, en cambio, cuando se sobrepasa el tiempo de relajación implica que los efectos de los encuentros sobre las órbitas ya redistribuyeron las velocidades y nuestra aproximación se vuelve incorrecta y por consiguiente la ecuación no colisional de Boltzmann es inválida.

2.7.1. Procesos de relajación

Recordando el tiempo de relajación que ya habíamos enunciado anteriormente:

$$t_{relax} \approx \frac{0.1N}{\ln N} t_{cross} \quad (2.73)$$

en donde N es el número de estrellas en el sistema y t_{cross} es el tiempo de cruce para una estrella (en la [Sección 2.2](#) denotamos el tiempo de relajación para el SSC-A, el cual aproximadamente es de 270 Myr). Lo anterior nos permite hacer la aproximación de la ecuación no colisional de Boltzmann. Otro ejemplo puede ser el caso de galaxias, en donde el número de estrellas es extremadamente grande $\approx 10^{11}$ y $t_{cross} \approx 100$ Myr, lo cual nos da un tiempo de relajación excesivamente grande, por lo que los efectos de estos encuentros o perturbaciones gravitacionales pueden ser completamente ignorados. En cambio, en un cúmulo globular con una cantidad de estrellas aproximadamente de $N \approx 10^5$ y un tiempo de cruce $t_{cross} \approx 10^5$ yr, su tiempo de relajación aproximado sería de 100 Myr. Un último ejemplo sería el de los cúmulos abiertos, donde $N \approx 10^2$ y $t_{cross} \approx 1$ Myr, lo cual nos daría un tiempo de relajación de aproximadamente 2 Myr. Entonces en síntesis, dependiendo del sistema que queramos estudiar y su edad, podemos utilizar las aproximaciones antes mencionadas como la CBE y las funciones de distribución.

Retomando lo anterior, en un sistema no colisional de N estrellas de masa m las ecuaciones que lo describen son la ecuación no colisional de Boltzmann y la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad , \quad \nabla^2 \Phi(x, t) = 4\pi G m N \int d^3v f(x, v, t) \quad (2.74)$$

donde el Hamiltoniano es $H(x, v, t) = \frac{1}{2}v^2 + \Psi(x, v, t)$ y la función de distribución $f(x, v, t)$ representa la probabilidad de encontrar a una estrella en un volumen del espacio de fase en una posición (x, v) .

Como se comentó anteriormente, los **encuentros o perturbaciones gravitacionales** en las órbitas de las estrellas son sumamente importantes para guiar la **evolución** de los sistemas estelares. Inclusive, por diferentes mecanismos, por ejemplo:

- Relajación:

Recordemos que la estrella cambia su órbita inicial debido a cada encuentro, lo que lleva a que la entropía del sistema crezca y las condiciones iniciales dejan de ser importantes, llevando a que el sistema tenga núcleos densos y pequeños, halos grandes y poco densos.

- Equipartición:

Los encuentros producirán equipartición de la energía cinética por la variedad de estrellas de distintas masas, llevando a que las estrellas más masivas, reaccionen más al potencial gravitacional, en cambio, las menos masivas tienden a vagar a las partes externas del sistema, en donde la dispersión de velocidades es más pequeña.

- Escape:

Debido a las perturbaciones gravitacionales, puede llegar a ocurrir que una estrella obtenga la suficiente energía para escapar del sistema, llevando a una fuga de estrellas del sistema. La velocidad cuadrada media de escape en un sistema con densidad $\rho(x)$ es:

$$\langle v_e^2 \rangle = \frac{4W}{M} \quad (2.75)$$

donde M y W son la masa total y la energía potencial del sistema, respectivamente. Con el teorema virial, la ecuación anterior se convierte en:

$$\langle v_e^2 \rangle^{1/2} = 2\langle v^2 \rangle^{1/2} \quad (2.76)$$

que significa que la velocidad RMS de escape es el doble de la velocidad RMS. Con lo anterior, podemos probar que una fracción de partículas de una distribución Maxwelliana tendrán velocidades que podrán exceder la velocidad RMS, por lo tanto llamamos a esto "evaporación", esta fracción es del orden de $\gamma = 7.38 \times 10^{-3}$, finalmente la tasa de pérdida de estrellas es:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\gamma N}{t_{relax}} \equiv -\frac{N}{t_{evap}} \quad (2.77)$$

donde t_{evap} es el **tiempo de evaporación**, el cual nos dice la escala de tiempo en donde las estrellas han abandonado el sistema, donde $t_{evap} = t_{relax}/\gamma \simeq 140t_{relax}$

- Encuentros inelásticos.

Puede ocurrir que cuando dos estrellas pasan muy cerca en sistemas estelares muy poblados, estas provoquen fuerzas de marea, o que incluso en ocasiones pueden ser víctimas de una colisión física. Cuando existen estas colisiones cercanas, la energía se disipa, disminuyendo la energía cinética del sistema y finalmente formando una estrella binaria, también algunas colisiones pueden formar estrellas muy masivas jóvenes, dentro de un sistema viejo, lo cual es poco frecuente. La escala de tiempo en la cual una estrella puede sufrir una colisión, viene dada por,

$$t_{collision} \approx (n\Sigma v)^{-1} \quad (2.78)$$

en donde n es la densidad de estrellas, Σ es la sección eficaz para la colisión y v es la velocidad RMS.

En los cúmulos abiertos y globulares por ejemplo, la velocidad de escape es mucho mayor que la velocidad orbital RMS, entonces $t_{collision} \gg t_{relax}$, por lo tanto este proceso no juega un papel clave en determinar la estructura del sistema. Estos encuentros pueden producir estrellas binarias o aisladas.

- Formación de binarias por encuentros triples.

Un encuentro entre dos estrellas aisladas no puede ligarlas para formar un sistema binario, debido a que su movimiento es a lo largo de una hipérbola, sin embargo, en un encuentro entre tres estrellas es posible dejar a dos ligadas en una órbita Kepleriana. Para estimar la tasa de formación de binarias por este proceso, se toma que la velocidad de la perturbación en un encuentro de dos estrellas de masa m y velocidad relativa v es $\delta v \approx Gm/bv$ donde b es la distancia más corta entre ellas y $b_{90} \approx Gm/v^2$ es el *parámetro de impacto* en el cual la velocidad relativa es desviada 90° en el encuentro.

Por lo tanto, para formar una binaria con tres estrellas, deberemos tener $\delta v \approx v$ y $b \approx b_{90}$, finalmente el tiempo que se requiere para este proceso es

$$t_3 \approx \frac{v^9}{n^2 G^5 m^5} \quad (2.79)$$

Usando el **teorema del virial** y expresándolo en términos del **tiempo de relajación**:

$$\frac{t_3}{t_{relax}} \approx 10N^2 \ln N \quad (2.80)$$

Finalmente, la cantidad de binarias formadas por cada **tiempo de relajación**:

$$\frac{Nt_{relax}}{t_3} \approx \frac{0.1}{N \ln N} \quad (2.81)$$

- Interacción con binarias primordiales.

Se les dice **binarias primordiales** ya que no se formaron por encuentros inelásticos ni triples. Este tipo de estrellas binarias pueden cambiar el balance de energía del cúmulo, ya que su energía de ligadura puede ser mucho más grande que la propia energía cinética de un cúmulo típico ($M \sim 10^5 M_\odot$, $v_{RMS} \sim 10 \text{ km s}^{-1}$). Por ejemplo, 100 estrellas binarias pueden tener una mayor energía de ligadura que todo un cúmulo con 10^5 estrellas.

2.8. Teorema de Liouville

Primero denotamos la posición y velocidad de una n -ésima partícula por las coordenadas \mathbf{q}_n y \mathbf{p}_n , en donde $n = 1, \dots, N$ y si consideramos un vector hexadimensional $\mathbf{w}_n \equiv (\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n)$ en donde este punto indica la ubicación de una partícula en el espacio fase y por lo tanto en un sistema donde tenemos $6N$ dimensiones está determinado por N vectores \mathbf{w}_n . Aquí se introduce la función $f^{(N)}$ que es la función de distribución de N -cuerpos:

$$\int d^6\mathbf{w}_1 \cdots d^6\mathbf{w}_N (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) = 1 \quad (2.82)$$

en donde $d^6\mathbf{w}_n \equiv d^3\mathbf{q}_n d^3\mathbf{p}_n$. Y debido a que existe un análogo de la CBE que en este caso lleva la evolución de $f^{(N)}$, estas son:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \left(\dot{\mathbf{q}}_n \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_n} + \dot{\mathbf{p}}_n \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_n} \right) = 0 \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + [f^{(N)}, H_N] = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = 0 \quad (2.85)$$

Estas tres ecuaciones anteriores son las ecuaciones de Liouville. Las cuales muestran que la función de distribución en el espacio fase es constante a través de las trayectorias del sistema o dicho de otra forma, la densidad de probabilidad de cada punto en una vecindad de un sistema siempre se mantiene constante, esto es el **teorema de Liouville**.

Si la función de distribución (2.82) es separable y $N \gg 1$ se puede probar que la ecuación de Liouville se convierte en la ecuación no colisional de Boltzmann.

En cambio, si la función de distribución de N -cuerpos **no** es separable y $N \gg 1$, se tiene que:

$$\frac{df}{dt} = \Gamma[f] \quad (2.86)$$

siendo $\Gamma[f]$ es el **operador de encuentros**.

$$\Gamma[f(\mathbf{w}_1, t)] \equiv N \int d^6\mathbf{w}_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{v}_1} \quad (2.87)$$

en donde g es la función de correlación de dos cuerpos, por lo que conduce la tasa de cambio de la densidad del espacio-fase alrededor de una estrella, dada por el operador de encuentros, el cual, para determinarlo hay que ver cómo los encuentros entre estrellas modifican la función de distribución de un solo cuerpo, por lo que significa que los encuentros toman un papel relevante a partir de esto.

2.9. Ecuación: Fokker-Planck

Como se comentó anteriormente, cuando los encuentros empiezan a tomar un papel importante, la densidad del espacio fase cambia con el tiempo alrededor de una estrella, este cambio se determina con el operador de encuentros $\Gamma[f]$.

Para calcular o tener una idea más clara de este operador, tenemos que $\Psi(\mathbf{w}, \Delta\mathbf{w}) d^6(\Delta\mathbf{w}) \Delta t$ es la probabilidad de que una estrella en el espacio fase sea dispersada al volumen del espacio fase $d^6(\Delta\mathbf{w})$ en un intervalo de tiempo Δt , por lo que esta probabilidad Ψ denota los efectos de los encuentros con estrellas mientras que la ecuación no colisional de Boltzmann, el potencial homogéneo de todo el sistema estelar.

Se obtiene la **ecuación maestra**,

$$\frac{df}{dt} = \Gamma[f] = \int d^6(\Delta \mathbf{w}) [\Psi(\mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}) - \Psi(\mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) f(\mathbf{w})] \quad (2.88)$$

prosiguiendo con el desarrollo, se tiene que los encuentros van como:

$$\Delta v^2 \approx \frac{8v^2}{N} \ln \Lambda \quad (2.89)$$

en donde $\Lambda = \frac{R}{b_{90}}$, recordando que b_{90} es la distancia entre estrellas, deflectadas noventa grados. Debido al Teorema del Virial, se tiene que $v^2 \approx \frac{GmN}{R}$ en donde m es la masa de la estrella, entonces $R/b_{90} \approx N$ y debido a que N es lo suficientemente grande, se hacen algunas aproximaciones para el estudio de la evolución debida a los encuentros, se listan las siguientes:

- Encuentros débiles
- Encuentros locales
- Orbitales

2.10. Evolución de sistemas estelares esféricos

Considerando que el proceso de relajación lleva a una pérdida de información del estado inicial del sistema, es cuando los encuentros o perturbaciones gravitacionales empiezan a jugar un papel mucho más importante.

Este proceso debido a que es proporcional a la densidad, las partes más densas como el núcleo tienden a evolucionar más de prisa, siguiendo una distribución de una esfera isotérmica, anteriormente mencionada.

El cúmulo pierde estrellas si su energía excede $E_t \equiv -GM/r_t$ donde r_t es el **radio de marea**. La densidad de estrellas en el **halo** es:

$$n(r) = \frac{4F_E(GM)^{1/2}}{3\pi^2 C r^{7/2}} \left(1 - \frac{r}{r_t}\right)^{3/2} \quad (2.90)$$

en donde $r_t = -GM/E_t$.

En el caso de un cúmulo aislado donde $E_t = 0$ lleva a $n(r) \propto r^{-7/2}$, sin embargo tiene algunas implicaciones, las cuales son que en la cercanía del radio de marea, la aproximación falla, las estrellas que escapan van como $n(r) \propto r^{-2}$, finalmente estrellas que tengan energías $E > E_t$ permanecerán cercanas al cúmulo.

2.10.1. Pérdida de masa

- Pérdida por evolución estelar

Debido a la evolución de las estrellas, éstas **eyectan** parte de su masa desde su superficie, si una estrella está en un cúmulo, tiene la posibilidad de escapar, ya sea porque tiene la velocidad suficiente o debido a que el mismo gas que está dentro del cúmulo es barrido por el gas de la galaxia. Si tomamos el valor de un tiempo de cruce, podemos saber que la escala de tiempo que tiene una estrella de una población para evolucionar será mayor.

Debido a las fuerzas de marea de la galaxia huésped, éstas ponen un límite externo al cúmulo, denotado por el radio de Jacobi r_J :

$$r_J = R_G^{2/3} \left(\frac{GN\bar{m}}{2V_G^2} \right)^{1/3} \quad (2.91)$$

donde R_G es el radio galactocéntrico, N el número de estrellas, \bar{m} la masa media de las estrellas y V_G la velocidad orbital del cúmulo respecto al centro de masa de la galaxia huésped [26].

Recordando el término de **concentración** enunciado en la ecuación 2.72, los cúmulos que tengan un índice de concentración bajo, esto es que el radio de marea r_t será más cercano al radio de King r_0 , por lo tanto son más densos y menos susceptibles a ser destruidos por las fuerzas de marea. En el caso de los cúmulos globulares la pérdida de masa por evolución estelar no hace un cambio significativo en la evolución dinámica del mismo, es decir, en sus fases evolucionadas los procesos dinámicos dominan sobre los de evolución estelar, aunque en las fases tempranas si tuvieron efecto.

■ Pérdida por eyección y evaporación

Recordando que si una estrella obtiene la suficiente velocidad para superar la gravedad del cúmulo, ésta escapará, hay dos procesos para que esto se lleve a cabo, evidentemente mediante los encuentros, el primero es mediante un encuentro con otra estrella que simplemente deja a una con una velocidad superior para exceder la fuerza gravitacional del sistema y escapar "violentamente", se conoce como **eyección**. El otro es relativamente gradual, mediante encuentros más distantes que poco a poco van aumentando la velocidad de la estrella y por consiguiente logra escapar, este proceso se le llama **evaporación**.

Se definen las escalas de tiempo como:

$$t_{ej} = - \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)^{-1} = 1 \times 10^3 \ln(\lambda N) t_{rh} \quad (2.92)$$

donde t_{rh} es el tiempo de relajación a media masa y se define como:

$$t_{rh} = \frac{0.17N}{\ln(\lambda N)} \sqrt{\frac{r_h^3}{GM}} \quad (2.93)$$

Debido a que la escala de tiempo del proceso de eyección es mucho más grande que la de evaporación debido a estas perturbaciones graduales, prácticamente puede ser ignorado.

La escala de tiempo del proceso de evaporación es:

$$t_{evap} = -N \left(\frac{dN}{dt} \right)^{-1} = f t_{rh} \quad (2.94)$$

Un proceso importante que determina la tasa de pérdida de estrellas por el proceso de evaporación son las fuerzas de marea de la galaxia huésped, en cambio, cuando tenemos un cúmulo aislado, la expansión del cúmulo después del colapso del núcleo provoca la aceleración del proceso de evaporación.

2.10.2. Colapso del núcleo

El proceso de **colapso del núcleo** es una contracción que lleva a un crecimiento intenso de la densidad central.

En las partes más externas del cúmulo, en el halo las estrellas llegan a obtener la energía de escape, liberándose por el proceso de relajación. La culminación ocurre en 16 veces el tiempo de relajación a media masa [14]. Debido a que mientras evoluciona este proceso y el núcleo se va colapsando y la densidad aumentando, su perfil de densidad en las partes externas del núcleo sigue una ley de potencias como $\rho \propto r^{-2.23}$, sin embargo, dentro del núcleo que se encuentra colapsando, el parámetro de anisotropía β se vuelve aproximadamente 0, lo que indica que la distribución de velocidades es isotrópica.

Si utilizamos un método en donde un perfil de densidad se desenvuelva similarmente a como lo haría esta ley de potencias, sólo que con una normalización y escala distinta, tendríamos que:

$$\rho(r, t) = \rho_0(t) \check{\rho}(\check{r}) \quad (2.95)$$

$$\check{r} = \frac{r}{r_0(t)} \quad (2.96)$$

con $\rho_0(t)$ siendo la densidad central evaluada en t y $r_0(t)$ lo tomaremos como el **King radius**:

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}} \quad (2.97)$$

resolviendo para $\rho_0(t)$, obtenemos $\rho_0(t) \propto r_0^{-\alpha}(t)$ con $\alpha = 2.23$. Con esto podemos definir: masa del núcleo, la dispersión de velocidad central y el tiempo de relajación en el núcleo, siendo:

$$M_0(t) \equiv \rho_0^3(t) \quad (2.98)$$

$$\sigma \propto \rho_0^{1/2} r_0 \quad (2.99)$$

$$t_{relax} \propto \sigma^3 / \rho_0 \quad (2.100)$$

respectivamente.

Recordando que el proceso de relajación es el medio para el colapso del núcleo, las escalas de tiempo pueden compaginarse como:

$$\frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dt} \propto \frac{1}{t_{relax}} \propto r_0^{\alpha/2-3} \quad (2.101)$$

en donde

$$r_0(t) \propto (t_{cc} - t)^{2/(6-\alpha)} \propto \tau^{0.53} \quad (2.102)$$

donde t_{cc} representa el momento del colapso y $\tau = t_{cc} - t$ el tiempo que queda antes del colapso. Este tiempo antes del colapso va de la mano con el tiempo de relajación del núcleo.

$$t_{relax}(r=0) \propto \tau \quad (2.103)$$

Algo que resulta interesante, es el hecho de que la existencia de estrellas binarias en el sistema, provoca un impedimento para la evolución del proceso del colapso del núcleo, aproximadamente cuando el núcleo tiene de 10 a 20 estrellas. Y debido a que mientras que en las partes más internas del cúmulo evoluciona mientras pierde energía para cederla al halo, el hecho de que se formen estas estrellas binarias proporciona una fuente de energía que detiene esta fuga hacia el halo.

La evolución del cúmulo posteriormente al colapso del núcleo tiene la forma como:

$$R \propto \tilde{\tau}^{2/3} \quad , \quad M \propto \text{constante} \quad , \quad \rho \propto \tilde{\tau}^{-2} \quad , \quad v \propto \tilde{\tau}^{-1/3} \quad (2.104)$$

en donde $\tilde{\tau}$ es el tiempo desde que el núcleo comenzó a colapsar [27].

La energía del cúmulo crece como

$$E \approx \frac{-GM^2}{R} \propto -\tilde{\tau}^{-2/3} \quad (2.105)$$

2.11. Modelo de King

King en 1965 [28], introduce modelos dinámicos basados en soluciones de la ecuación de Fokker-Planck, mencionada en las secciones previas. Estos están basados en una esfera isotérmica modificada con una función de distribución de la forma [29]:

$$f(\varepsilon) \propto \begin{cases} \exp(\varepsilon/\sigma_0^2) - 1 & (\varepsilon > 0), \\ 0 & (\varepsilon \leq 0). \end{cases} \quad (2.106)$$

donde ε es la energía relativa del sistema y la velocidad de dispersión asociada al modelo σ_0 viene dada por la expresión:

$$\sigma_0^2 = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{9} \quad (2.107)$$

con ρ_0 y r_0 la densidad central y el radio de King, respectivamente. Un ejemplo de estos modelos se muestran en la figura 2.2, en donde cerca del centro, las densidades son casi isotérmicas, sin embargo, conforme nos alejamos caen a 0.

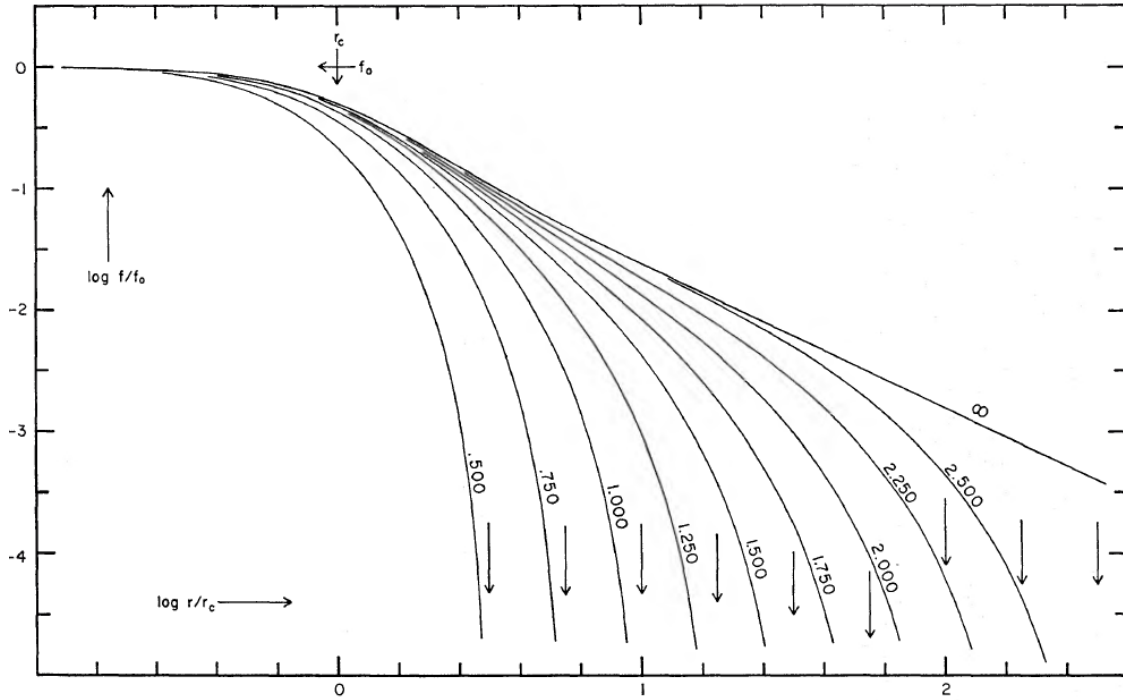


Figura 2.2: Modelos de densidad superficial de King para distintos índices de concentración c señalados en cada curva respectivamente [28].

King encontró que hay una fuerte dependencia entre cuántas estrellas logran escapar y la concentración central. Esto es que mientras más concentración se tenga, menos estrellas se pierden, evidentemente. En un cúmulo de baja concentración las fuerzas de marea tienen más influencia en los exteriores, por lo que es más sencillo para una estrella, su escape. En cuanto a la distribución de velocidades, un entorno extendido vuelve a la distribución más alargada, que se asemeja a la maxwelliana previamente comentada.

La pérdida de estrellas es importante ya que causa un cambio en el campo gravitacional del cúmulo y por consiguiente un reajuste en la densidad.

2.12. Modelo de Wilson

Wilson en 1975 [30], propuso un modelo para ajustar a los perfiles de brillo observados en galaxias elípticas, así como el modelo de King, éste también está basado en una esfera isotérmica modificada.

Una forma de la función de distribución para el modelo de Wilson es [29]:

$$f(\varepsilon) \propto \begin{cases} \exp(\varepsilon/\sigma_0^2) - 1 - \frac{\varepsilon}{\sigma_0^2} & (\varepsilon > 0), \\ 0 & (\varepsilon \leq 0). \end{cases} \quad (2.108)$$

La diferencia entre los modelos de King y Wilson es un sólo término en la función de distribución, en donde el término extra provee mayores halos que en el modelo de King.

2.13. Modelo Moffat-EFF

Elson, Fall y Freeman en 1987 [31] propusieron un modelo para ajustar a cúmulos ricos en la Gran Nube de Magallanes, en donde el modelo de King no ajustó de manera correcta debido a la extensión en los perfiles de brillo superficial por varios órdenes de magnitud.

Para esta sección y para obtener los parámetros estructurales, el cual es el objetivo principal de esta tesis; hacemos uso del modelo **Moffat-EFF**[31], el cual no tiene truncamiento por fuerzas de marea.

Se emplea la siguiente función para obtener los perfiles:

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\gamma/2} \quad (2.109)$$

de la cual al integrar, se obtiene una expresión para la luminosidad:

$$L_p(r) = \frac{2\pi\mu_0 a^2}{\gamma - 2} \left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{1-\gamma/2}\right] \quad (2.110)$$

Esto es importante, ya que para conocer la dinámica de los cúmulos, necesitamos información de la masa del mismo, no obstante, con el cociente de **masa-luminosidad** podemos obtenerla. Desde la dispersión de velocidades en el cúmulo y cálculos de poblaciones estelares puede ser obtenida esta relación.

Una de las cantidades más importantes para estudio es el **campo de marea**, el cuál está relacionado con el lóbulo de Roche del cúmulo, esto es, cuando dicho lóbulo se llena provocando que las estrellas que no están ligadas gravitacionalmente sean arrancadas del mismo.

La curva de velocidad de la galaxia está relacionada con la ecuación

$$4\Omega^2 - \kappa^2 = -R \frac{d}{dR} \left[\frac{V(R)}{R} \right]^2 \quad (2.111)$$

donde Ω y κ son la frecuencia circular y epicíclica de la galaxia en el pericentro de la órbita del cúmulo.

Esto es que la aceleración por marea de una estrella que está a una distancia r del centro del cúmulo, se toma como la aceleración diferencial a lo largo de una línea que une el centro del cúmulo al centro de la galaxia.

De acuerdo a la literatura el término $V(r)$ puede ser una curva kepleriana o plana, dependiendo de la curva de rotación de la galaxia, ya que éste término está gobernado por la distribución de masa.

La masa por unidad de volumen en un cúmulo se calcula con la ecuación 2.112:

$$\rho(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{M}{L} \int_r^\infty dx (x^2 - r^2)^{-1/2} \frac{d\mu(x)}{dx} = \boxed{\rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-(\gamma+1)/2}} \quad (2.112)$$

en donde se tiene que:

$$\rho_0 = \frac{\mu_0 \Gamma(\gamma/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi} a \Gamma(\gamma/2)} \frac{M}{L} \quad (2.113)$$

En el caso de los cúmulos globulares galácticos, la densidad en el núcleo llega a valores como $\rho_0 \sim 10^3 - 10^4 M_\odot \text{pc}^{-3}$.

Al integrar la ecuación 2.112, se obtiene la masa dentro de un radio r donde se tiene que integrar con $r \rightarrow \infty$ y para $\gamma > 2$:

$$M_\infty = \frac{2\pi\mu_0 a^2}{\gamma - 2} \frac{M}{L} \quad (2.114)$$

De acuerdo a la dispersión de velocidades radial (σ_r) y tangencial (σ_t), en un cúmulo esférico en equilibrio hidrostático, se relaciona con la densidad de la manera siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} (\rho \sigma_r^2) + \frac{2}{r} (\sigma_r^2 - \sigma_t^2) = -\frac{GM(r)}{r^2} + (4\Omega^2 - \kappa^2)r \quad (2.115)$$

tomando en cuenta que se busca obtener las regiones en donde el proceso de relajación ha tomado un papel clave. Siendo la solución:

$$\sigma^2(r) = \frac{G}{a} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{(1+\gamma)/2} I\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^2(4\Omega^2 - \kappa^2)}{(\gamma - 1)} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (2.116)$$

donde

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{M(ay)dy}{y^2(a + y^2)^{(y+1)/2}} \quad (2.117)$$

La dispersión de velocidades en el caso de nuestra Galaxia para los cúmulos globulares es aproximadamente $\sigma_0 \sim 10 \text{ km s}^{-1}$ y en los abiertos es de $\sigma_0 \sim 1 \text{ km s}^{-1}$. En la figura 2.3 se tienen la dispersión de velocidad para dos casos de cúmulo, uno aislado y el otro en un campo de marea, la parte izquierda y derecha, respectivamente.

También definen el tiempo de cruce, como:

$$\tau_c(r_h) = \frac{2r_h}{\sqrt{3}\sigma(r_h)} \quad (2.118)$$

donde r_h es el radio que contiene la mitad de la masa en tres dimensiones.

Para el valor del tiempo para el proceso de relajación de dos cuerpos, se puede calcular por:

$$\tau_r(r) = \frac{0.147\sigma^3(r)}{G^2 \langle m \rangle \rho(r) \log_{10} \Lambda} \quad (2.119)$$

Así como el tiempo de relajación definido como:

$$\tau_{rh} = \frac{0.060 M^{-1/2} r_h^{3/2}}{G^{1/2} \langle m \rangle \log_{10} \Lambda} \quad (2.120)$$

La ecuación anterior, es el tiempo de relajación con una densidad promedio dentro del radio r_h , donde Λ es el factor de Coulumb.

Finalmente, también se calcula el **radio de marea** como:

$$r_t = \left(\frac{GM_t}{3\Omega^2 - \kappa^2} \right)^{1/3} \quad (2.121)$$

Así como el radio del núcleo definido como:

$$r_c \approx a(2^{2/\gamma} - 1)^{1/2} \quad (2.122)$$

Así como la masa total del cúmulo, basada en el modelo de *King*[28] se puede expresar como:

$$M_t = \rho_0 r_c^3 g(c) \quad (2.123)$$

donde c es la concentración definida en la ecuación 2.72 y $g(c)$ es una función adimensional.

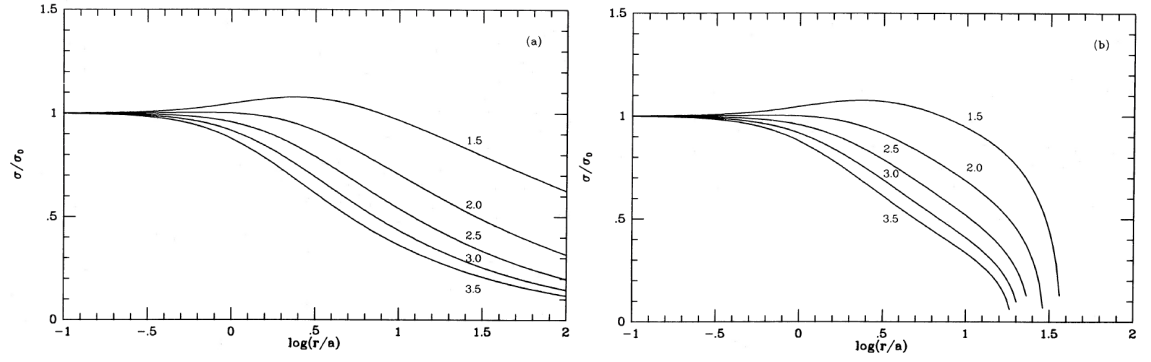


Figura 2.3: Dispersión de velocidades en función del radio para un cúmulo aislado y en fuerzas de marea para modelos de Moffat-EFF, los valores en el gráfico son de γ . [31]

Capítulo 3

Análisis

En este capítulo se obtienen los **parámetros estructurales** de **NGC 1569-A**, utilizando las siguientes herramientas computacionales:

- **IRAF** : Software para la reducción y análisis de imágenes astronómicas (Image Reduction and Analysis Facility), creado por el National Optical Astronomy Observatory (NOAO).
- **Pyraf** : Lenguaje de programación para utilizar las tareas de IRAF en un entorno de Python.
- **Python** : Lenguaje de programación de código abierto.
- **Jupyter notebook** : Plataforma de cómputo interactiva para lenguaje de programación.
- **DS9** : Software para la visualización y análisis de imágenes astronómicas.

Para comenzar con el análisis, se procedió a conocer las técnicas computacionales en las herramientas anteriormente mencionadas, a continuación se explicará cada una de ellas.

En primer lugar, se hizo un trabajo de consistencia, únicamente para denotar que todo el material y el software funcionaba de manera adecuada [32]. Así que se utilizaron datos de un cúmulo perteneciente a la galaxia *M82*, comenzando con obtener su SBP, esto mediante la *tarea ellipse*.

3.1. Tarea: ellipse

Dentro de IRAF se encuentra la tarea **ellipse**. La manera de acceder a ella, es la siguiente:

```
1 >stsdas
2 >analysis
3 >isophote
4 >ellipse
```

La tarea **ellipse** tiene la función de ajustar isofotas elípticas a imágenes astronómicas, ésta nos permite obtener una serie de parámetros integrados de la imagen.

Por ejemplo, estos parámetros pueden ser la longitud del semi-eje mayor (SMA), la media de la intensidad en cada isofota (INTENS), el error en cada una de las intensidades de la isofota correspondiente (INT_ERR), la elipticidad (ELLIP), el ángulo de posición (PA), el número total de píxeles dentro de cada elipse (NPIX_E), así como muchas otras; todas estas cantidades se guardan en un archivo manipulable.

Posteriormente, mediante Pyraf dentro de un cuaderno en **Jupyter**, se utilizó el archivo con los parámetros extraídos de la tarea **ellipse**, obteniendo el SBP de un cúmulo dentro de la galaxia *M82*, mostrado en la figura 3.1, en donde se observa una anomalía en el perfil, que va desde el valor 9 pix a 20 pix sobre el eje x (SMA), ésta anomalía corresponde a un objeto que no es parte del cúmulo que se estudia, lo que significa que contribuirá al SBP del cúmulo.

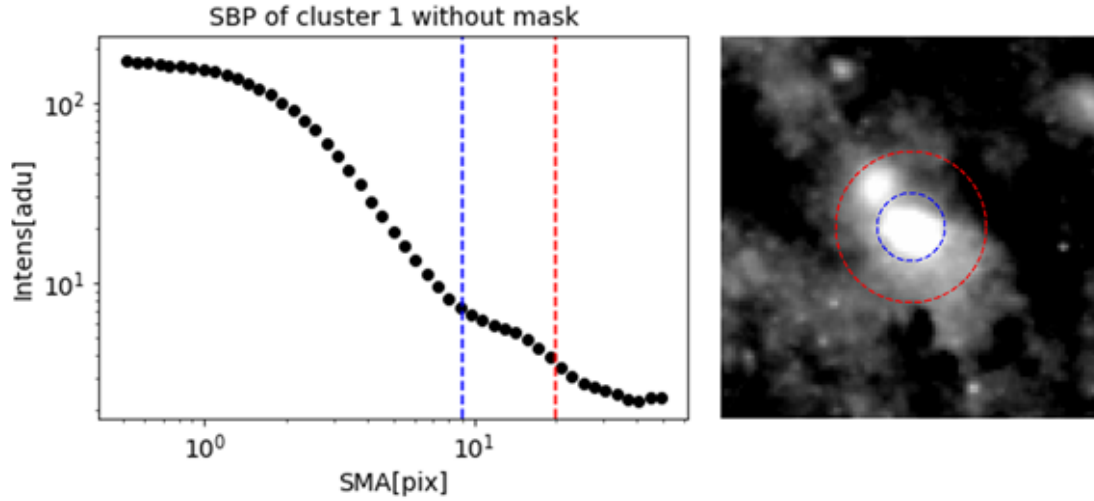


Figura 3.1: Gráfica del perfil de brillo superficial en pasos logarítmicos, para evidenciar más el cambio aproximado en el valor $SMA = 9$ por la afectación del objeto contaminante (izquierda). Imagen de un cúmulo en la galaxia M82, donde dentro de la región azul se observa el cúmulo en cuestión, entre la región roja con límite en la azul, se encuentra el objeto contaminante (derecha).

3.2. Tarea: imexpr

Debido a la anomalía en el perfil que causa el objeto contaminante, éste puede afectar en la correcta obtención de los **parámetros estructurales**, debido a que los contaminantes desvían el perfil de su forma teórica. Por esto es que es tan importante lograr que la contribución de este objeto contaminante sea removida del SBP del cúmulo, para lograr esto, el procedimiento es crear una **máscara**, la cual ignorará la contribución del objeto contaminante.

La **máscara** se creará mediante la tarea **imexpr** dentro de **IRAF** de la siguiente manera:

```
1 cl> type expr
2 (sqrt((I-b)**2 + (J-c)**2) <= d)
3 cl> imexpr @expr mask.pl b=256 c=256 d=100 dims=512,512
```

dentro de la cual se modifican a conveniencia los valores de la última línea de código, reemplazando en este caso la ubicación del contaminante (b y c), el diámetro del objeto en la máscara (d) y las dimensiones de la imagen original (dims). Modificando los valores correspondientes, obtendremos una máscara como la que se muestra en la figura 3.2, para finalmente implementarla a la imagen original del cúmulo para ignorar la contribución del objeto contaminante. Posteriormente, utilizando nuevamente la tarea **ellipse**, se obtiene el SBP del cúmulo, ahora con la ventaja de no ser totalmente afectado por el objeto contaminante.

3.3. NGC 1569-A

Posteriormente utilizando el software DS9, se analizó una imagen de la galaxia **NGC 1569**, tomada por el telescopio espacial **Hubble** utilizando el instrumento **Advanced Camera for Surveys** (ACS) con especificaciones de un tamaño de pixel de $21 \times 21 \mu m^2$ y dimensiones de 101×101 píxeles, con el detector **HRC** y el filtro **F555W**, la cual se muestra en la figura 3.3. Como se había dicho anteriormente en la [Subsección 1.4.2](#), gracias a la resolución del instrumento, se encuentra una subestructura en el súper cúmulo estelar A (**NGC 1569-A**), esto se puede ver en la secuencia de una región definida, ilustrada en la figura 3.4. Debido a esto y para una mejor

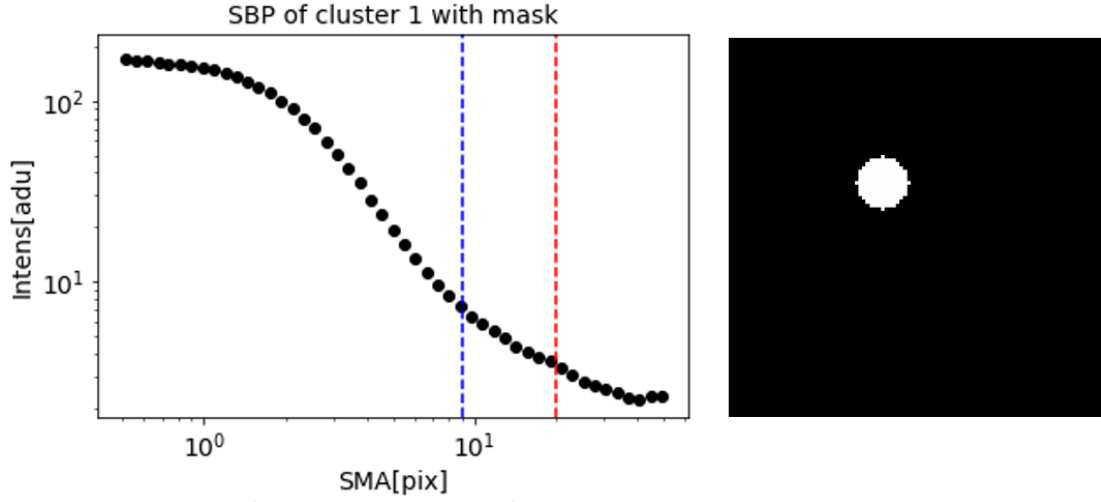


Figura 3.2: Perfil del cúmulo, sin la contribución del objeto contaminante (izquierda). Máscara en formato de imagen para ser visualizada (derecha).

visualización, la figura 3.5, es un acercamiento a la zona donde se nota claramente la existencia de sub-estructuras.

Como primer paso para abordar esto y realizar el estudio de estas estructuras, se procedió a hacer una estimación del valor de **ruido de fondo** con la tarea `imstat` la cual utiliza estimadores estadísticos para obtener cantidades como la media, mediana y desviación estándar de imágenes. Esto se aborda analizando las cuatro esquinas de la imagen que tiene dimensiones de 101×101 píxeles, obteniendo el valor de la media y la desviación estándar para las cuatro esquinas con dimensiones de 10×10 cada una, el valor mínimo de la media es el escogido como el valor de ruido de fondo siendo $\sigma_{rms} = 0.2199$. Este parámetro es de suma importancia, debido a que los SBP obtenidos por la tarea `ellipse`, contienen ésta contribución de ruido de fondo. Por lo anterior, buscamos restar este valor para sólo tener la contribución del cúmulo, obteniendo así un SBP más confiable ya que si no se puede sobrestimar parámetros como el *radio de marea*.

Teniendo una imagen sin la contribución de ruido de fondo se procedió a obtener el perfil, ilustrado en la figura 3.6, en donde podemos observar la evidencia de ciertos contaminantes a un radio de $SMA = 10$ pix, así como en la partes más exteriores del perfil en donde hay otras fuentes contaminantes.

Para tener un entendimiento más claro de la estructura y sus características, se utiliza la tarea `imexam`, la cual tiene la función de examinar imágenes por medio de distintos tipos de gráficos, nos permite hacer un uso interactivo de los mismos. En este caso se utilizó para conocer los contornos de la estructura, así como su superficie como se muestra en la figura 3.7. Esto nos proporciona un entendimiento más claro y sobre todo gráfico de cuál es la forma de la estructura estudiada, permitiéndonos posteriormente hacer uso de esto en una imagen simulada.

Analizando los gráficos en la figura 3.7, se sospechó la existencia no sólo de una sub-estructura a la derecha de la sección más intensa, sino una sub-estructura entre estas dos. Haciendo otra prueba para reafirmar estas suposiciones, se procedió a hacer un sobremuestreo debido a que en la zona donde necesitamos observar, está muy limitada en el número de píxeles. Debido a esto, se utilizó la tarea `magnify`, la cual tiene la función de expandir o contraer las imágenes por medio del proceso de **interpolación**, el cual es un método numérico en donde se obtienen nuevos datos partiendo del conocimiento de un conjunto de datos. En este caso se utiliza interpolación lineal la cual es un caso particular, debido a que se utiliza un polinomio de interpolación de grado 1, denotándose de

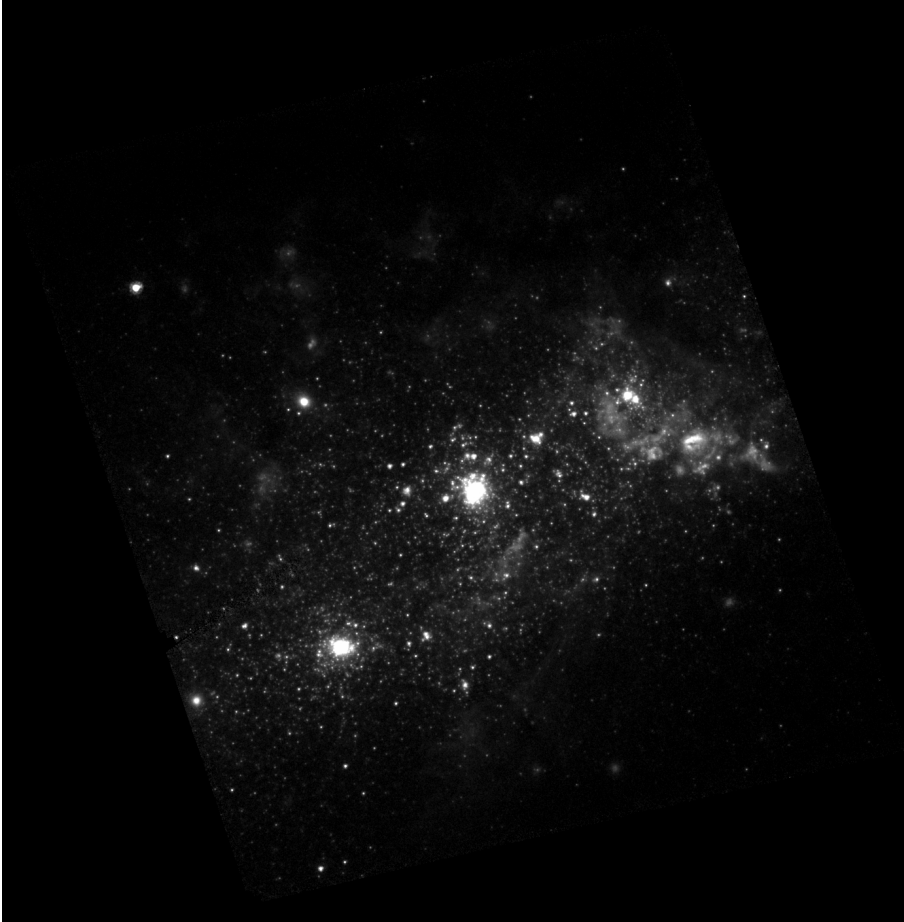


Figura 3.3: Imagen de la galaxia NGC 1569, tomada por el HST.

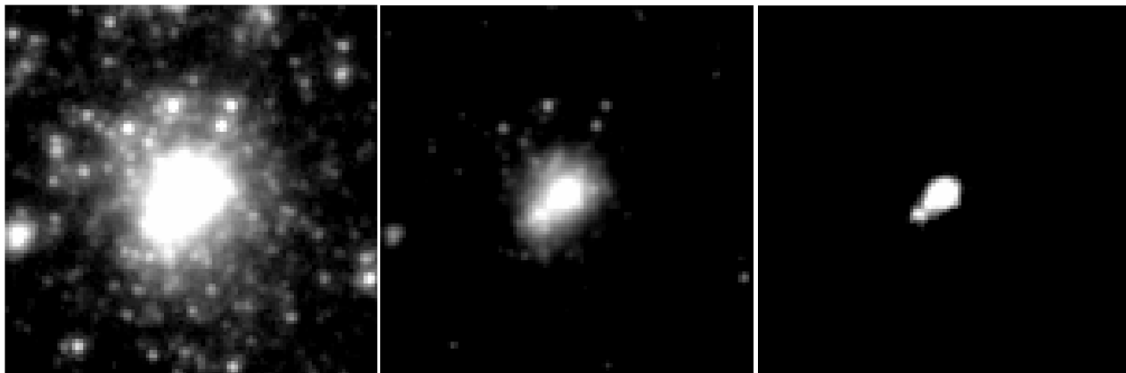


Figura 3.4: Secuencia de cambios de contraste, en la región de NGC 1569-A, imagen recortada de la Figura [3.3](#)

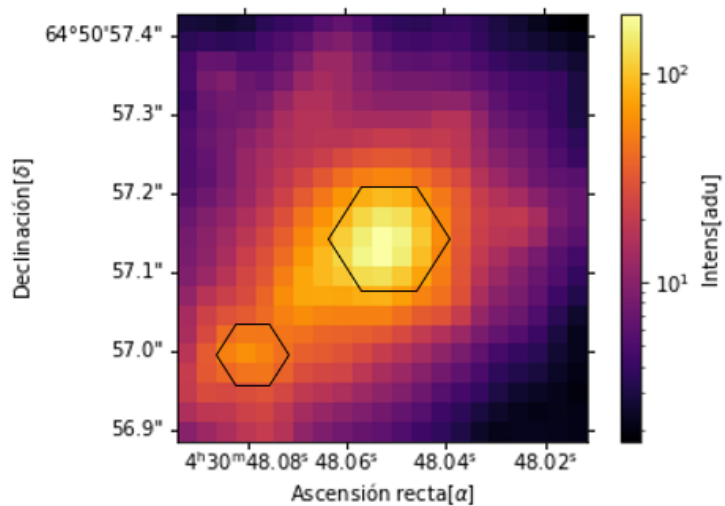


Figura 3.5: Acercamiento a NGC 1569-A, denotando la existencia de una sub-estructura.

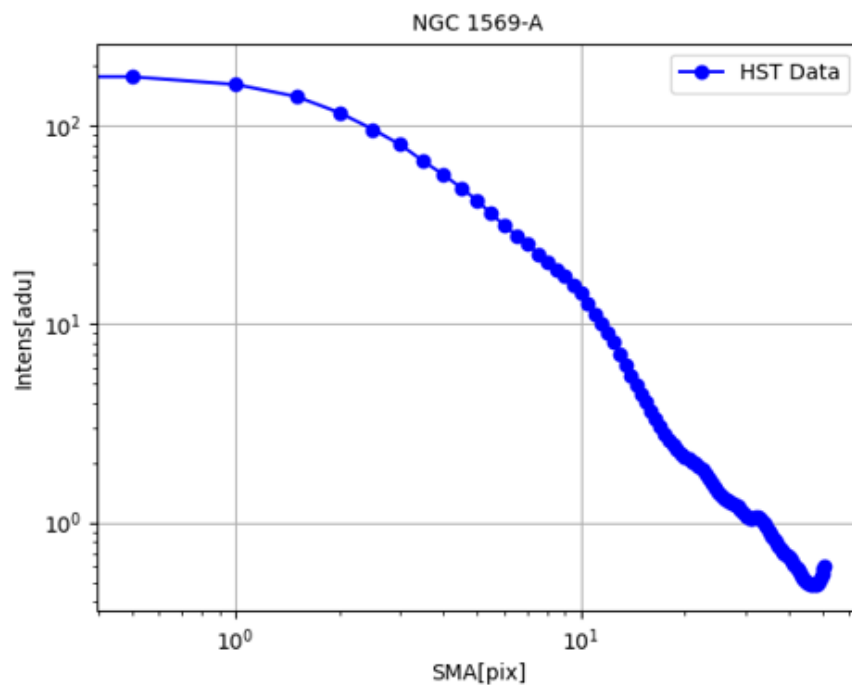


Figura 3.6: Perfil de brillo superficial de NGC 1569-A, obtenido con la *tarea ellipse*.

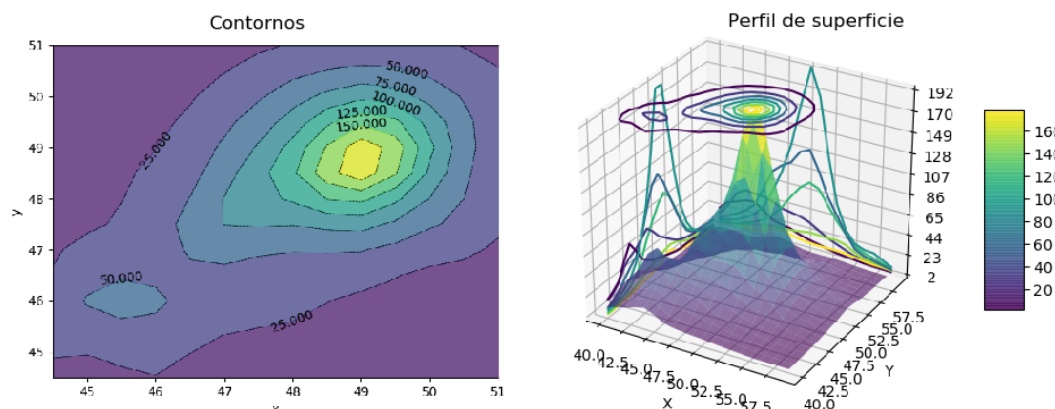


Figura 3.7: Gráfico de los contornos de la estructura NGC 1569-A (izquierda), gráfico de superficie de la estructura NGC 1569-A (derecha), obtenidos con `imexam` en el entorno de `python`.

la siguiente manera:

$$f(x|x_1; x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

En la tarea `magnify` el factor de magnificación determina el tamaño o el intervalo de los píxeles. En este caso, se hizo una magnificación positiva como se ve en el ejemplo siguiente:

```
1 ecl>magnify
2 Input two dimensional images: input.fits
3 Output magnified images: output.fits
4 X magnification factor: 10
5 Y magnification factor: 10
```

en este ejemplo se muestra un factor de magnificación de 10 en ambos casos (X y Y). Este factor se utilizó para el caso límite en la investigación, utilizando como imagen la figura 3.5 en donde se buscó denotar todos los puntos donde había una contribución importante en intensidad. Específicamente en la zona de la estructura donde hay la mayor contribución, esperando observar alguna particularidad en ella.

Haciendo el proceso correspondiente con la tarea `magnify` ya antes explicada, en donde se obtuvo la figura 3.8, podemos observar del lado izquierdo la existencia de dos sub-estructuras marcadas como la región roja y verde, así como del lado derecho, cambiando los contrastes, se nota la evidencia de una sub-estructura más compleja delimitadas en las regiones azul y morada.

Esto permite plantear la hipótesis de la existencia de tres o más sub-estructuras dentro del complejo estelar **NGC 1569-A**. Por lo tanto el siguiente paso de la investigación es proponer un **modelo simulado** de este súper cúmulo estelar, incluida la premisa de las sub-estructuras, para finalmente poder replicar de la manera más exacta posible el perfil obtenido de la imagen original.

3.4. PSF

La **función de dispersión de punto (PSF)**, por sus siglas en inglés) nos permite caracterizar los efectos ópticos del instrumento, por lo anterior es que se introduce dentro de las simulaciones, para que el resultado reproduzca las condiciones instrumentales.

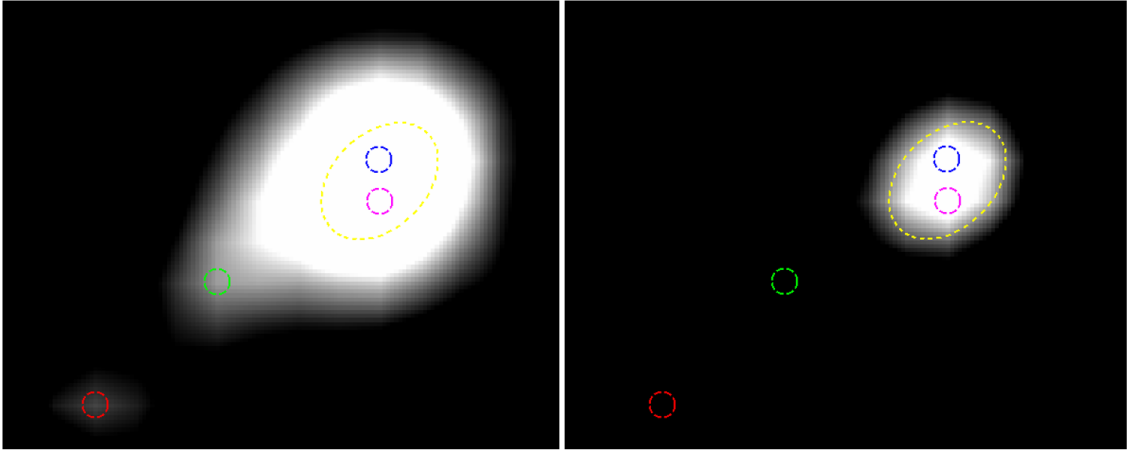


Figura 3.8: Imagen obtenida de la región NGC 1569-A con menor (izquierda) y mayor (derecha) contraste, mediante la tarea `magnify`.

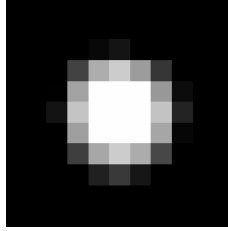


Figura 3.9: Imagen de la PSF obtenida con `SEXTRACTOR` y `PSFex` de la galaxia **NGC 1569**.

El proceso de obtención de las mismas, se hizo en primer lugar usando `SEXTRACTOR` el cual extrae fuentes puntuales de una imagen. A partir de este proceso se utiliza `PSFex` para finalmente obtener la **PSF**. Una estrella es una buena candidata para la PSF cuando es aislada, lo suficientemente brillante pero no saturada [32], haciendo este proceso, se obtiene la PSF con la cual la modelación tendrá los efectos ópticos del instrumento, simulando el proceso de observación, la **PSF** se ilustra en la figura 3.9.

3.5. Convolución

En el proceso de la simulación, para obtener una imagen incluidos los efectos ópticos instrumentales, se hace uso de la **convolución**, un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función $f * g$ la cual denota como la forma de una de las funciones es modificada por la otra. Un ejemplo gráfico se ilustra en la figura 3.10 y se define de la siguiente manera:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(t - \eta)d\eta \quad (3.1)$$

definida como la integral del producto de dos funciones después de que una ha sido invertida y desplazada.

Desafortunadamente, esto es muy costoso computacionalmente, es por esto que se utiliza la **transformada rápida de Fourier (FFT)**, debido a que es un algoritmo eficaz reduciendo el tiempo de ejecución. Dentro de las bibliotecas en `Python`, se encuentra `astropy`, que contiene esta rutina.

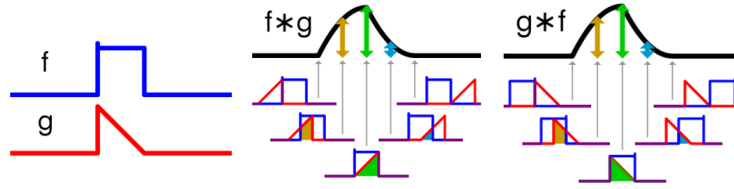


Figura 3.10: Explicación visual de la convolución, expresando cada función como f y g .

De manera que nuestra función f será la simulación realizada en la tarea `mkobjects` la cual se describirá posteriormente, mientras que la función g será la PSF ilustrada en la figura 3.9. Este proceso se hizo mediante una línea de código en el entorno de `Jupyter notebook`, como se muestra en lo siguiente:

```
1 import astropy.convolution
2 convolution = astropy.convolution.convolve(simulacion,kernel,boundary='extend')
```

en donde el `kernel` es la **PSF** y la `simulación` es el modelo creado en la tarea `mkobjects`. Es importante remarcar que para la convolución, es necesario que los datos estén en pasos lineales, esto se tomará en cuenta en las secciones siguientes.

Una de las partes más importantes que se discutió con anterioridad, es el valor de ruido de fondo, el cual se midió para la imagen original de **NGC 1569-A**, así que este valor también se agregó a la simulación, para finalmente complementar en su totalidad todos los elementos necesarios para reproducir la observación.

Lo anterior se hace creando una distribución gaussiana mediante python de la siguiente manera:

```
1 import numpy as np
2 import scipy
3 bg=scipy.random.normal(0.2,0.1,100*100).reshape(101,-1)
```

en este caso los valores entre paréntesis son de la forma: (*mean, standar deviation, output shape*). La densidad de probabilidad para esta distribución Gaussiana es:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

En donde μ es la media y σ es la desviación estándar. Creando esto, obtenemos la figura 3.11.

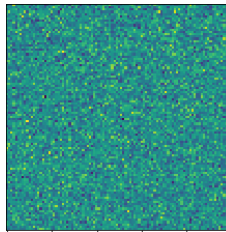


Figura 3.11: Imagen de una distribución normal con media 0.2 y desviación estándar 0.1

3.6. Tarea: mkobjects

Finalmente para realizar la **simulación de las sub-estructuras**, se utilizó la tarea `mkobjects`, las instrucciones para acceder en `IRAF` son:

```
1 >artdata
2 >mkobjects
```

La tarea `mkobjects`, nos permite crear imágenes en donde se añaden modelos de objetos astronómicos, como estrellas o galaxias. Estas imágenes se crean introduciendo los parámetros necesarios, estos son:

- Posición

La cual se refiere a las coordenadas x y y del centro del objeto en la imagen.

- Radio

Define el tamaño en píxeles del objeto a simular, en este caso para los perfiles *gaussian* y *moffat*, se refiere al *half intensity radius*.

- Magnitud

Define una medida del brillo del objeto, dada por la expresión:

$$\text{flux} = \left(\frac{\text{exptime}}{\text{distance}} \right)^2 \cdot 10^{-0.4 \cdot (\text{magnitude} - \text{magzero})} \quad (3.3)$$

- Modelo

Los modelos son definidos en términos de una función analítica, en función de la intensidad de flujo radial o cumulativa.

- Relación axial

Define la proporción entre el eje mayor y el eje menor.

- Ángulo de posición

Define el ángulo de posición del eje mayor del objeto.

En cuanto al parámetro *modelo* se escogió **Moffat**, siendo su expresión la siguiente:

$$I = \left[1 + (2^{\frac{1}{\beta}} - 1) \left(\frac{R}{radius} \right)^2 \right]^{-\beta} \quad (3.4)$$

en donde R está definido por la tarea `mkobjects`, *radius* es el parámetro de escala y β es el parámetro de Moffat el cual está definido por la extensión o concentración de la luminosidad del cúmulo. Posteriormente, con ayuda de algunas pruebas, los parámetros se determinarán para cada uno de los objetos.

Es importante resaltar que la ecuación 3.4 es la expresión dentro de la tarea `mkobjects`, sin embargo, la que se utiliza en el análisis es ligeramente diferente, la cual es:

$$I = \left[1 + \left(\frac{R}{r_d} \right)^2 \right]^{-\gamma/2} \quad (3.5)$$

Dado lo anterior, se busca tener la relación directa entre las variables de la ecuación (3.4) y (3.13), la cual es:

$$r_d = \frac{radius}{\sqrt{2^{1/\beta} - 1}} \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{\gamma}{2} \quad (3.7)$$

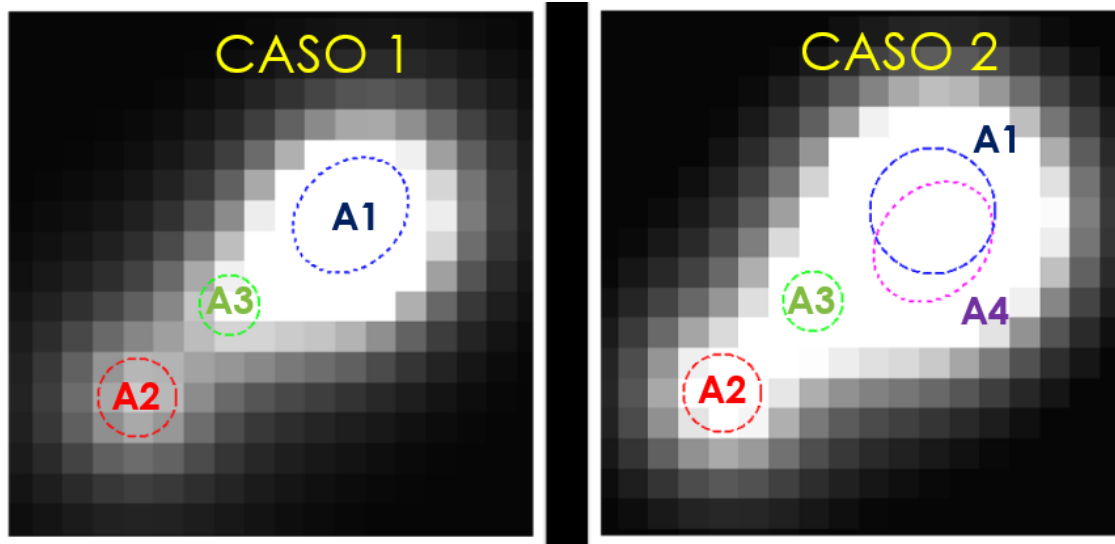


Figura 3.12: Casos de simulación para NGC 1569-A. 3 sub-estructuras (izquierda) y 4 sub-estructuras (derecha).

3.7. Simulación

El proceso de simulación se abordó desde el análisis de la imagen de la región NGC 1569-A, mediante las diferentes pruebas como el sobremuestreo, contornos, gráficos de intensidad y manipulación de la misma, las cuales se mostraron anteriormente, por lo que de acuerdo con lo anterior, se obtiene para cada sub-estructura la posición, la magnitud en función del valor de intensidad en la imagen, así como una estimación del parámetro *radius* para que finalmente con estos valores se comenzara el proceso de simulación.

Cada una de las simulaciones tienen distintos valores en cada uno de los parámetros, esto se muestra en las tablas 3.1 y 3.2, cada una de estas corresponde a un caso específico (ver Fig. 3.12):

- **Caso 1:** 3 sub-estructuras (A1, A2 y A3)
- **Caso 2:** 4 sub-estructuras (A1, A2, A3 y A4)

Los valores de las tablas 3.1 y 3.2 corresponden a los parámetros de entrada en la tarea `mkobjects`, para obtener los modelos para cada prueba.

Al tener los siguientes componentes: simulación, PSF, simulación del ruido de fondo, se procedió a incorporar cada uno de estos elementos a un resultado final, una simulación con contribución de ruido de fondo convolucionada con la PSF en cuestión. Este proceso se llevó a cabo de manera similar en Jupyter notebook, como se muestra a continuación:

```
1 import numpy as np
2 import scipy
3 import astropy.convolution
4 bg = scipy.random.normal(0.2,0.1,101*101).reshape(100,-1)
5 conv = astropy.convolution.convolve(modelo_simulado+bg,kernel,boundary='extend')
```

Con lo anterior, se obtuvieron 22 pruebas satisfactorias mostradas en el Apéndice A, desde la figura A.1 hasta la A.22. Donde se observa cada una incluyendo una imagen conteniendo a las sub-estructuras, una gráfica de su perfil de brillo superficial, sus contornos y su perfil de superficie, ésto para cada una de las simulaciones.

Prueba	Cúmulo	$radius$	β	Relación axial	Ángulo de posición
1	A1	3	1.5	1	-
	A4	3	1.5	1	-
	A3	1	2	1	-
	A2	1	2	1	-
2	A1	3	1.3	1	-
	A4	3	1.3	1	-
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.2	1	-
3	A1	2.7	1.5	1	-
	A4	2.7	1.4	1	-
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.2	1	-
4	A1	2.5	1.7	1	-
	A4	2.4	1.5	1	-
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.2	1	-
5	A1	2.1	2.2	0.8	45°
	A4	2.2	2.0	1	-
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.2	1	-
6	A1	2.1	2.2	0.8	45°
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.2	1	-
7	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.2	1	-
8	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	2.0	1	-
9	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.3	1	-
	A2	1.3	1.4	1	-
10	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A2	1.3	1.4	1	-
	A3	1	2.3	1	-
11	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	0.9	2.3	1	-
	A2	1.3	1.2	1	-
12	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
13	A1	2.1	2.2	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
14	A1	2.1	2.3	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
15	A1	2.1	2.4	1	-
	A4	2.2	2.0	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-

Tabla 3.1: Valores de cada parámetro para las pruebas 1-15 correspondientes al **caso 2**, siendo estos los parámetros de entrada en la tarea **mkobjects** para finalmente obtener un modelo de la región **NGC 1569-A**.

Prueba	Cúmulo	<i>radius</i>	β	Relación axial	Ángulo de posición
16	A1	2.1	2.4	0.8	48°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
17	A1	2.1	2.4	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
18	A1	2.1	2.4	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
19	A1	2.1	2.4	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
20	A1	2.1	2.4	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
21	A1	2.1	2.4	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-
22	A1	2.1	2.4	0.8	45°
	A3	1	2.4	1	-
	A2	1.3	1.01	1	-

Tabla 3.2: Valores de cada parámetro para las pruebas 16-22 correspondientes al **caso 1**, siendo estos los parámetros de entrada en la tarea `mkobjects` para finalmente obtener un modelo de la región **NGC 1569-A**.

Habiendo concluido el proceso de simulación, se comparó cada prueba con el perfil de brillo y los contornos de la observación, permitiéndonos escoger las pruebas más precisas: **prueba 22** y **prueba 15**, mostradas en la figuras [A.15](#) y [A.22](#), respectivamente.

La comparación entre los modelos escogidos (prueba 22 y prueba 15) y la observación se hizo respecto con sus gráficos de contornos (ver [3.13](#) y [3.14](#)) y sus perfiles de brillo (ver [3.15](#) y [3.16](#)).

3.8. Prueba estadística χ^2

Para el siguiente paso de la investigación se introduce la prueba estadística χ^2 (chi cuadrado), la cual se utilizará para extraer los parámetros estructurales de los SBP y calcular los errores sobre estos parámetros estructurales.

esta prueba describe el mejor ajuste de un modelo a los datos reales y está definida como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(I_{obs_i} - \tilde{I}_{model_i})^2}{\sigma_i^2} \quad (3.8)$$

en donde I_{obs_i} es el i-ésimo punto en el SBP observado de la imagen original y \tilde{I}_{model_i} es el i-ésimo punto en la simulación convolucionada con la PSF. El término σ_i se refiere a los errores en las observaciones, definiéndose por la siguiente formula:

$$\sigma_{obs} = \sqrt{\frac{\sigma_{intens}^2}{N_{pix_e}} + \frac{\sigma_{rms}^2}{N_{pix_e}}} \quad (3.9)$$

En donde σ_{intens} es el error en la intensidad de cada isofota y N_{pix_e} es el número total de píxeles válidos dentro de cada elipse (ver Fig [3.17](#)).

La hipótesis nula H_0 supone lo contrario a lo que se quiere probar, con lo que con las pruebas necesarias se demuestra que esto es falso, por lo tanto se rechaza. La distribución del muestreo bajo

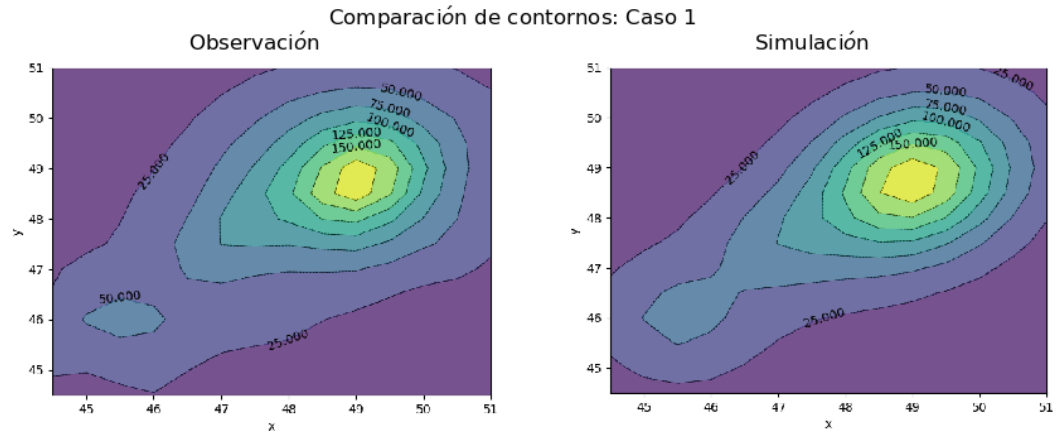


Figura 3.13: **Prueba 22:** Gráficos de contornos para el **caso 1: 3 sub-estructuras** (derecha) y la observación (izquierda).

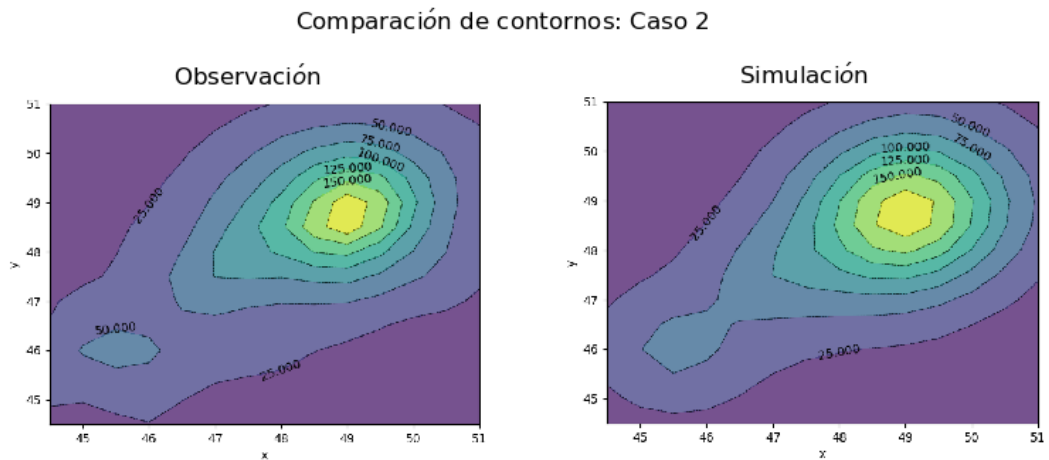


Figura 3.14: **Prueba 15:** Gráficos de contornos para el **caso 2: 4 sub-estructuras** prueba 15 (derecha) y la observación (izquierda).

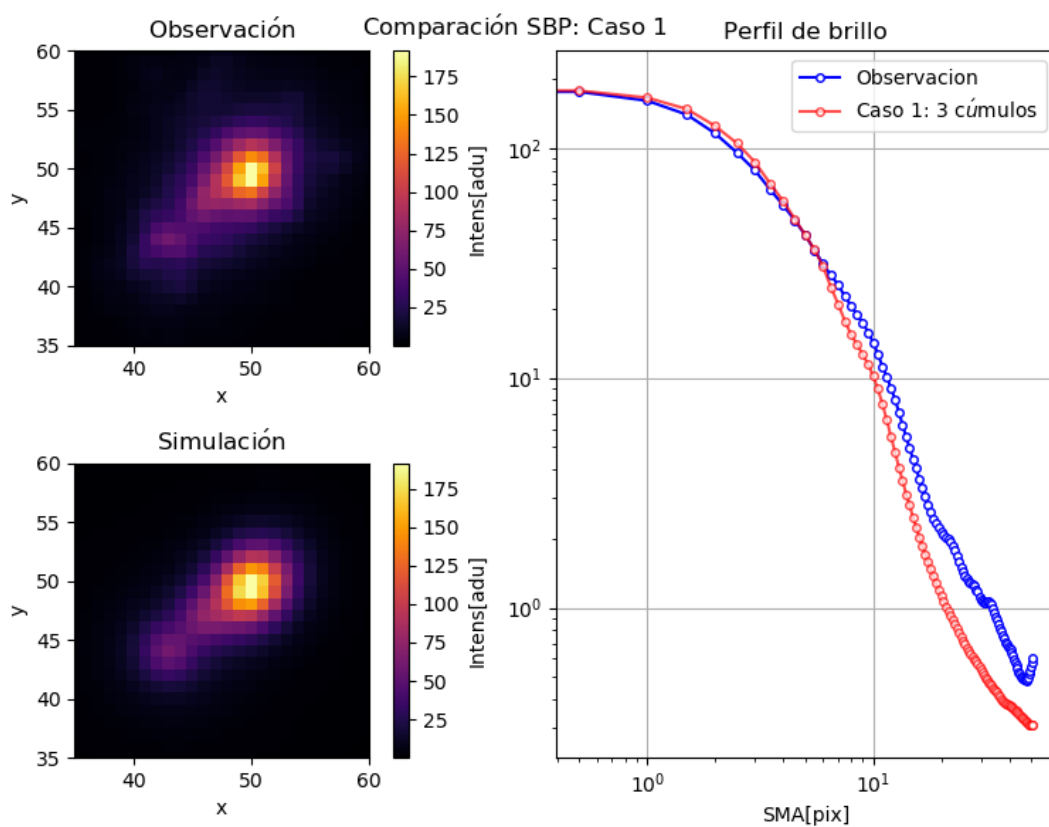


Figura 3.15: **Prueba 22:** Gráfico donde se muestran las imágenes de la observación y la simulación del **caso 1: 3 sub-estructuras**, así como la comparación de su perfil de brillo superficial.

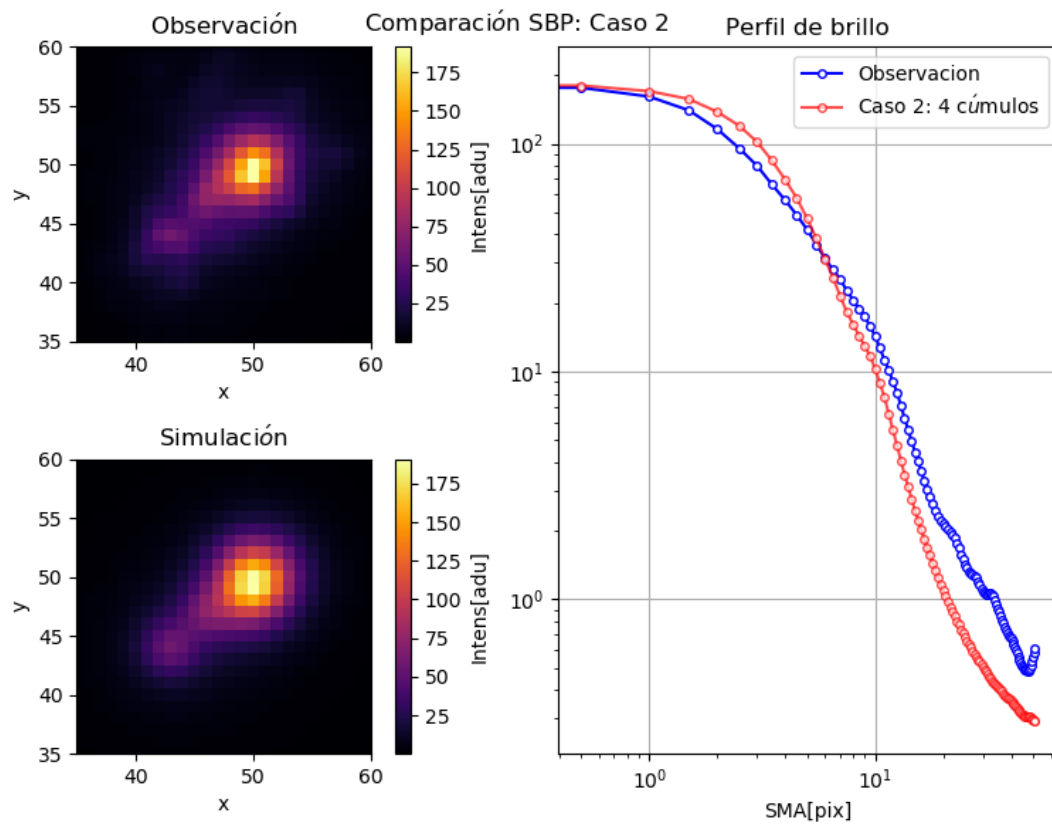


Figura 3.16: **Prueba 15:** Gráfico donde se muestran las imágenes de la observación y la simulación del **caso 2: 4 sub-estructuras**, así como la comparación de su perfil de brillo superficial.

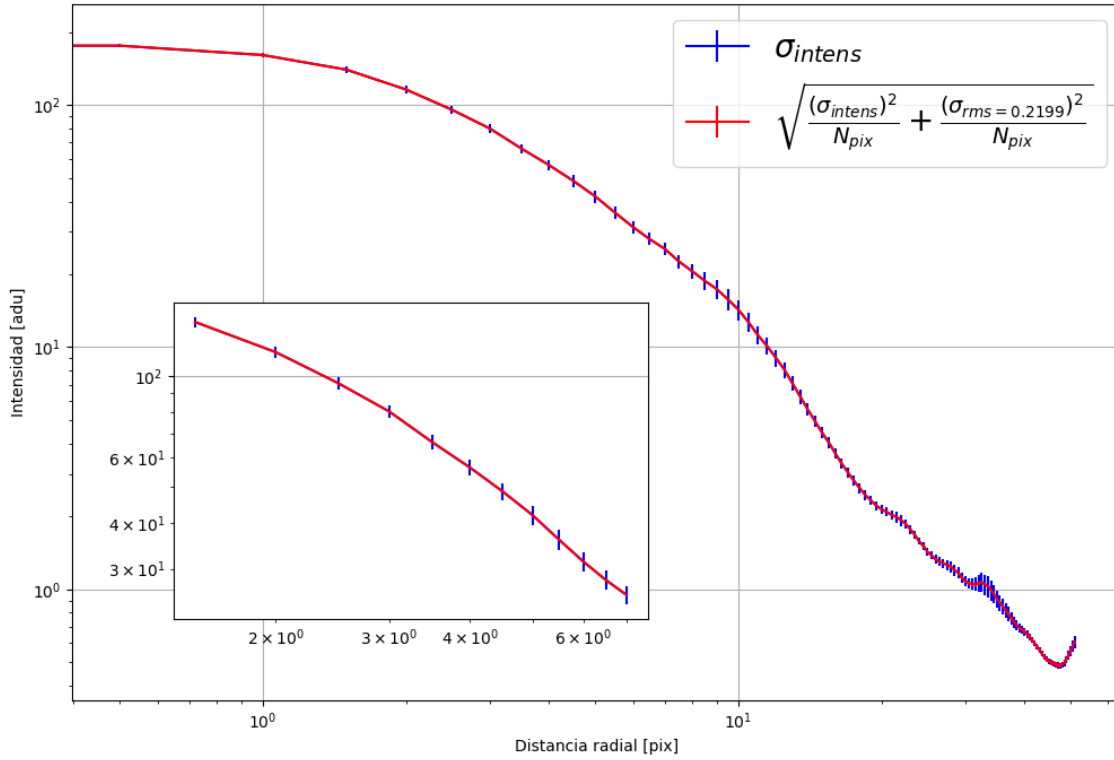


Figura 3.17: Gráfica del perfil de brillo superficial del SSC-A. Los puntos en **azul** corresponden a los errores obtenidos de la intensidad mediante la tarea **ellipse** (σ_{intens}), en **rojo** están los errores en la observación mediante propagación de errores (ver ecuación (3.9)).

H_0 de χ^2 sigue la distribución chi-cuadrado con $\nu = (k - 1)$ grados de libertad. La distribución chi-cuadrado está dada por:

$$f(x) = \frac{2^{-\nu/2}}{\Gamma[\nu/2]} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} \quad (3.10)$$

Esta prueba estadística se programó en líneas de código en el entorno de **jupyter notebook**, de la siguiente manera:

```
1 import numpy as np
2 chi=np.sum((f_obs-f_model)**2/(sigma_obs)**2)
```

Para mostrar el valor de los parámetros que ajustan mejor para cada modelo, basándonos en la prueba χ^2 , se define una serie de elipses de error donde las variables son r_d y γ .

La región de confianza (nivel de confianza α), se define como:

$$\chi_\alpha^2 = \chi_{min}^2 + \Delta(\nu, \alpha) \quad (3.11)$$

para nuestro caso $\Delta(\nu, \alpha) = 2.30$, lo que significa que:

$$\chi_\alpha^2 = \chi_{min}^2 + 2.30 \quad (3.12)$$

Lo que implica que las elipses están definidas para los modelos que su valor de χ^2 es menor igual que $\chi^2 + 2.30$. El intervalo entre los máximos y mínimos de γ y r_d corresponden al semieje mayor y menor de la elipse, respectivamente, proyectados en los ejes x y y .

3.9. Pruebas χ^2

A continuación se muestran distintas pruebas en donde se evalúa la metodología y la técnica de ajuste utilizada en este análisis, por medio del test estadístico χ^2 . Dentro de estas pruebas tomaremos una simulación de un cúmulo arbitrario producido con la tarea `mkobjects`, tomando éste como si fuese la **observación** y el **modelo** en este caso será el ajuste del modelo de Moffat[31], ambas pruebas convolucionadas con la misma PSF.

Como se había expresado anteriormente en la [Sección 3.6](#), las definiciones del modelo de Moffat para el análisis y la utilizada por la tarea `mkobjects` son distintas, recordando:

- Moffat-EFF:

$$I = \left[1 + \left(\frac{R}{r_d} \right)^2 \right]^{-\gamma/2} \quad (3.13)$$

- Definición de Moffat en la tarea `mkobjects`:

$$I = \left[1 + \left(2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right) \left(\frac{R}{radius} \right)^2 \right]^{-\beta} \quad (3.14)$$

Debido a esto, las variables que introducimos en la tarea `mkobjects` y en la definición de Moffat-EFF serán distintas, éstas son: *radius* y r_d , así como β y γ . Debido a esto se procede a obtener la definición de r_d y γ en función de las otras variables. Siendo así lo siguiente:

$$r_d = \frac{radius}{\sqrt{2^{1/\beta} - 1}} \quad (3.15)$$

$$\beta = \frac{\gamma}{2} \quad (3.16)$$

Teniendo estos componentes, se listan las pruebas y sus características.

- Prueba 1: cúmulo aislado.

Esta prueba consta de un cúmulo aislado con ruido de fondo. En la [Tabla 3.3](#), se encuentran los valores de los parámetros de entrada para su simulación tanto en su versión `mkobjects` (ver ecuación 3.13) como en Moffat-EFF (ver ecuación 3.14), finalmente las últimas tres columnas muestran los valores resultantes del método estadístico χ^2 .

La [figura 3.18](#) representa los resultados de la simulación y su correspondiente prueba χ^2 , conteniendo la imagen de la simulación del cúmulo aislado en la parte superior izquierda, el perfil de brillo de la simulación en conjunto con la función Moffat-EFF (ver ecuación 3.14) en la parte superior derecha y finalmente, el ajuste de la prueba estadística χ^2 en la parte inferior.

Prueba 1						
mkobjects		Moffat-EFF		Prueba χ^2		
<i>radius</i>	β	r_d	γ	r_d	γ	χ^2
5	1.01	5.034551	2.02	5.040816	2.0	0.4801243

Tabla 3.3: Resultados de la prueba estadística χ^2 para un cúmulo aislado arbitrario.

- Prueba 2: cúmulo binario.

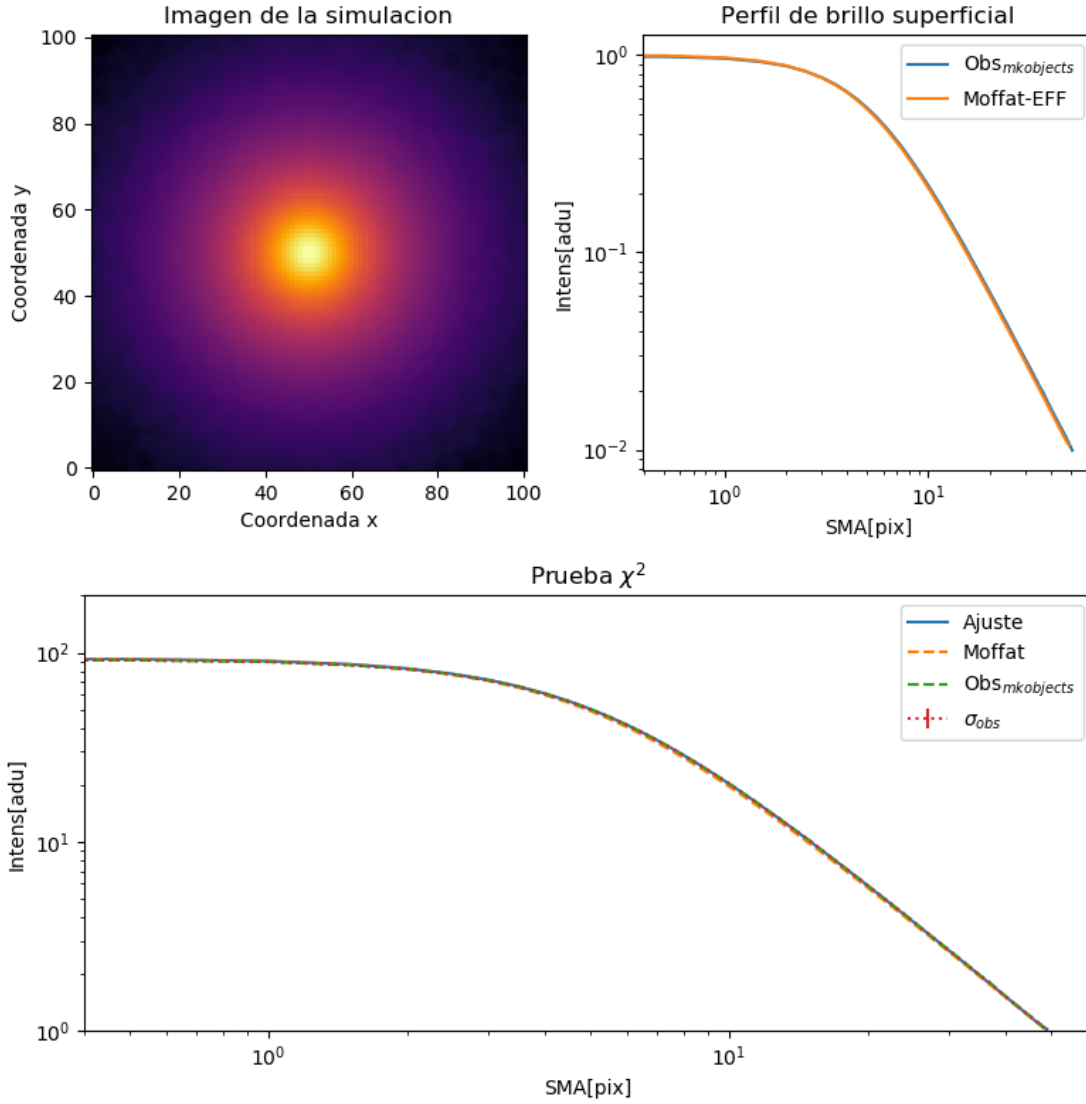


Figura 3.18: **Prueba 1:** Imagen de la simulación de un cúmulo aislado (superior izquierda), perfil de brillo superficial de la simulación comparado con la función de Moffat-EFF (superior derecha) y ajuste de la prueba estadística χ^2 (inferior).

Esta prueba consta de un par de cúmulos donde el principal está siendo contaminado por el secundario. En la tabla 3.4, se encuentran los valores de los parámetros de entrada para su simulación tanto en su versión *mkobjects* (ver ecuación 3.13) como en Moffat-EFF (ver ecuación 3.14), finalmente las últimas tres columnas muestran los valores resultantes del método estadístico χ^2 para éste caso.

La figura 3.19 representa los resultados de la simulación y su correspondiente prueba χ^2 , conteniendo la imagen de la simulación del cúmulo binario en la parte superior izquierda, el perfil de brillo de la simulación en conjunto con la función Moffat-EFF (ver ecuación 3.14) en la parte superior derecha, el ajuste de la prueba estadística χ^2 en la parte inferior izquierda y finalmente la elipse de error en la parte inferior derecha. Como se puede notar en los resultados de la prueba, el ajuste no es confiable, debido al contaminante que compone este sistema. Por lo tanto para

poder obtener un resultado confiable se procedió haciendo un **corte radial**, es decir, no se toma en cuenta la contribución a partir de ese radio, evitando la contaminación del cúmulo secundario, esto permite que el ajuste sea óptimo.

Prueba 2.						
mkobjects		Moffat-EFF		Prueba χ^2		
<i>radius</i>	β	r_d	γ	r_d	γ	χ^2
2	1.8	2.9181	3.6	2.1020	2.3265	38.42

Tabla 3.4: Resultados de la prueba estadística χ^2 para el cúmulo principal en un sistema binario sin corte radial.

En la Tabla 3.5, se encuentran los valores de los parámetros de entrada para su simulación con corte radial, tanto en su versión **mkobjects** (ver ecuación 3.13) como en Moffat-EFF (ver ecuación 3.14), finalmente las últimas tres columnas muestran los valores resultantes del método estadístico χ^2 .

La figura ?? representa los resultados de la simulación y su correspondiente prueba χ^2 , conteniendo la imagen de la simulación del cúmulo binario en la parte superior izquierda, el perfil de brillo de la simulación en conjunto con la función Moffat-EFF (ver ecuación 3.14) en la parte superior derecha, el ajuste de la prueba estadística χ^2 en la parte inferior izquierda y finalmente la elipse de error en la parte inferior derecha.

Prueba 2: con corte radial.						
mkobjects		Moffat-EFF		Prueba χ^2		
<i>radius</i>	β	r_d	γ	r_d	γ	χ^2
2	1.8	2.9181	3.6	2.8367	3.3061	1.7503

Tabla 3.5: Resultados de la prueba estadística χ^2 para el cúmulo principal en un sistema binario con corte radial.

Es importante denotar que dentro del gráfico del perfil de brillo superficial en la figura ?? se encuentra una línea roja punteada, la cuál representa el corte del ajuste.

Debido a la cercanía de los cúmulos teóricos en la simulación, el corte se hace muy complicado para distinguir entre ellos, sin embargo, por separado, la prueba estadística mencionada y probada anteriormente, nos da resultados favorables de que los parámetros con los que se simuló y se obtuvo el producto final, fueron los adecuados. Con este paso, se concluye todo el proceso de análisis y creación de la simulación, para que con los datos simulados, se obtengan los **parámetros estructurales** buscados.

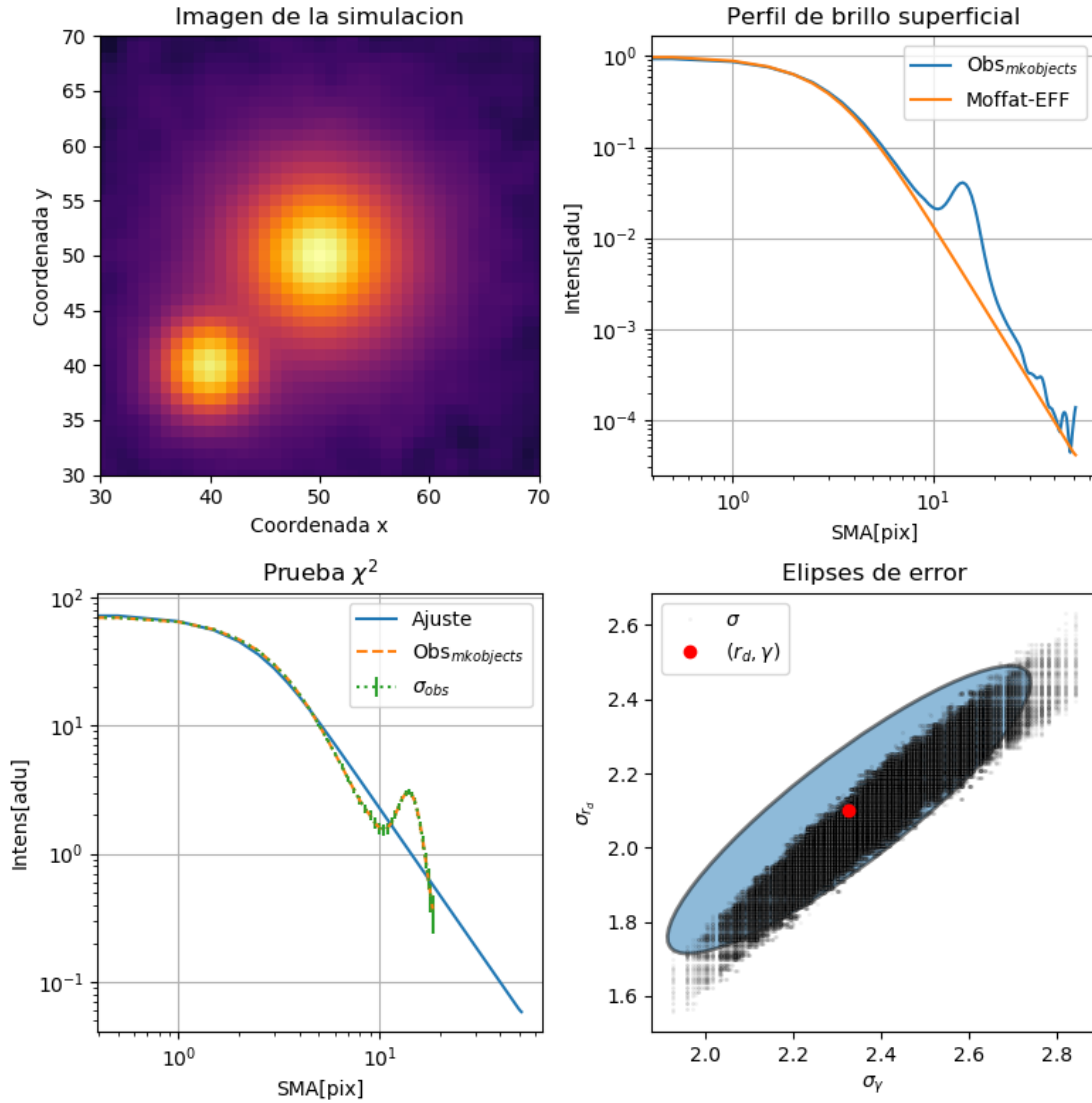


Figura 3.19: **Prueba 2:** Imagen de la simulación de un cúmulo binario (superior izquierda) sin corte radial, perfil de brillo superficial de la simulación comparado con la función de Moffat-EFF (superior izquierda), ajuste de la prueba estadística χ^2 (inferior izquierda) y elipses de error (inferior derecha).

Capítulo 4

Resultados

A continuación, en la figura 4.1, se muestran los casos anteriormente simulados, donde ambas imágenes son la misma observación tomada por el HST. Los dos casos a simular, **Caso 1: 3** sub-estructuras y **Caso 2: 4** sub-estructuras, correspondiéndoles la imagen de la izquierda y derecha, respectivamente, en donde las regiones circulares y elípticas marcadas con colores, denotan las sub-estructuras para cada uno de los casos.

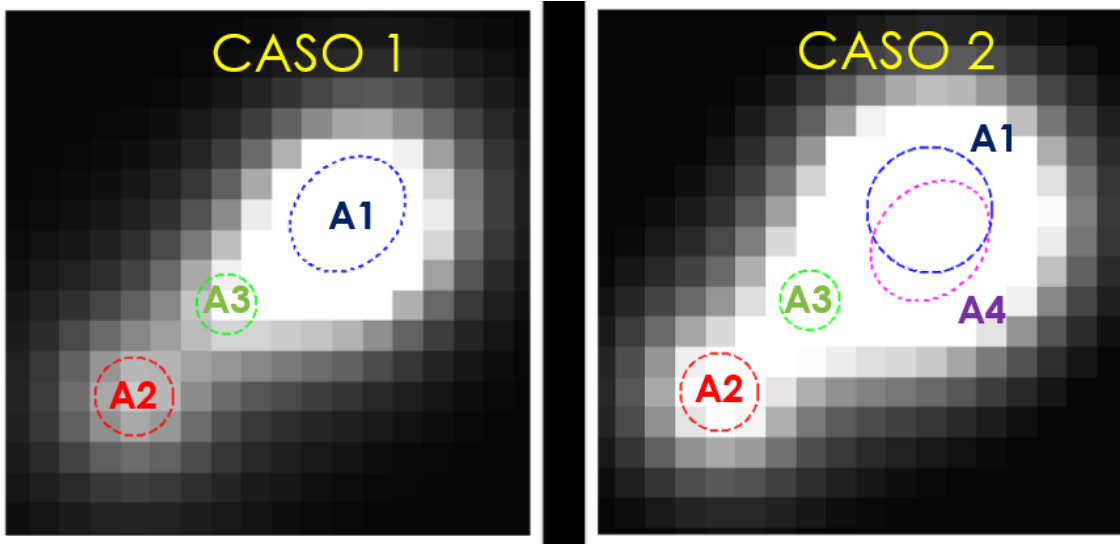


Figura 4.1: Casos de simulación para NGC 1569-A. 3 sub-estructuras (izquierda) y 4 sub-estructuras (derecha).

4.1. Caso 1: 3 subestructuras.

Haciendo las simulaciones para el **Caso 1** y obteniendo la figura 4.2, en donde se tiene en la parte izquierda el resultado de la simulación sin la PSF, con mayor facilidad se pueden observar las tres sub-estructuras y en la derecha, la simulación ya convolucionada con la PSF, haciendo difusa las delimitaciones de las sub-estructuras.

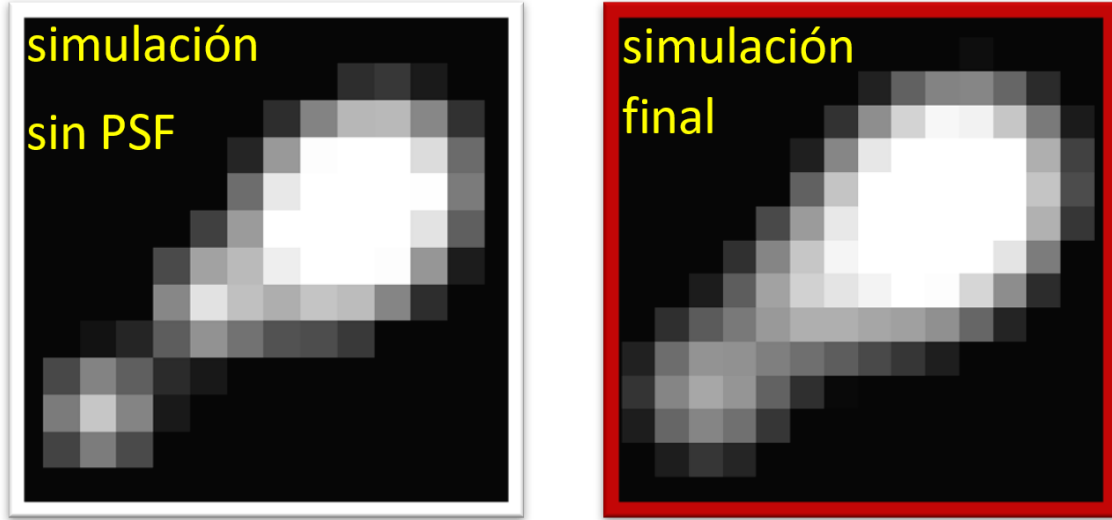


Figura 4.2: Resultado de la simulación para el **Caso 1** con 3 subestructuras. En la izquierda se tiene sin la PSF y a la derecha con ella.

Los parámetros de entrada para la simulación se pueden visualizar en la tabla 4.1.

Cúmulo	$radius[pix]$	β	$r_d[pix]$	γ	ar	AP
A1	2.1	2.4	3.62	4.8	0.8	45°
A3	1	2.4	1.72	4.8	1	-
A2	1.3	1.01	1.30	2.02	1	-

Tabla 4.1: Parámetros de entrada de la simulación para el caso 1.

Finalmente, para obtener los **parámetros estructurales** de cada una de las subestructuras, se utilizó el programa **nProFit**, su función es ajustar perfiles de brillo superficial de cúmulos estelares con modelos dinámicos [29]. Específicamente para este caso, basándose en el contenido del [Sección 2.13](#), de donde se obtienen finalmente los resultados referenciados en la tabla 4.2 y 4.3.

Cúmulo	$R_g[pc]$	$r_d[pix]$	$r_d[pc]$	γ	$\mu[mag/arcsec^2]$	$\log I_0$	$r_c[pc]$
A1	465.7510	3.6291	1.2339	4.8	11.5292	5.9643	0.7140
A2	453.9643	1.3089	0.4450	2.0200	12.7712	5.4675	0.4420
A3	459.1655	1.7281	0.5876	4.8	12.5304	5.5638	0.3400

Tabla 4.2: Parámetros estructurales obtenidos para la simulación del caso 1, relacionado con 3 subestructuras.

Cúmulo	r_h [pc]	r_t [pc]	$L_t[L_\odot]$	$M_t[M_\odot]$	$j\phi[L/\text{pc}^3]$	$\rho_0[M/\text{pc}^3]$	$\sigma[\text{km/s}]$
A1	0.98	12.0143	2.9×10^6	9.4×10^4	5.7921	4.2692	9.0124
A2	5×10^{14}	11.0044	1.8×10^7	5.4×10^5	5.5208	3.9979	2.3258
A3	0.47	13.6079	2.8×10^5	8.5×10^3	5.7139	4.1910	2.8754

Tabla 4.3: Parámetros estructurales obtenidos para la simulación del caso 1, relacionado con 3 subestructuras.

4.2. Caso 2: 4 subestructuras.

De manera similar, que lo mencionado anteriormente, haciendo las simulaciones para el **Caso 2** en donde se tienen **4 subestructuras**, obteniendo la figura 4.3, en donde se tiene en la parte izquierda el resultado de la simulación sin la PSF, observando las subestructuras y en la parte de la derecha, la simulación ya convolucionada con la PSF, haciendo difusas las estructuras. Los parámetros de entrada para la simulación se pueden visualizar en la tabla 4.4. Finalmente, los resultados de los **parámetros estructurales** se referencian en las tablas 4.5 y 4.6.

Cúmulo	$radius$ [pix]	β	r_d [pix]	γ	ar	AP
A1	2.1	2.4	3.62	4.8	1	-
A4	2.2	2.0	3.41	4.0	0.8	45°
A3	1.0	2.4	1.72	4.8	1	-
A2	1.3	1.01	1.30	2.02	1	-

Tabla 4.4: Parámetros de entrada de la simulación para el caso 2.

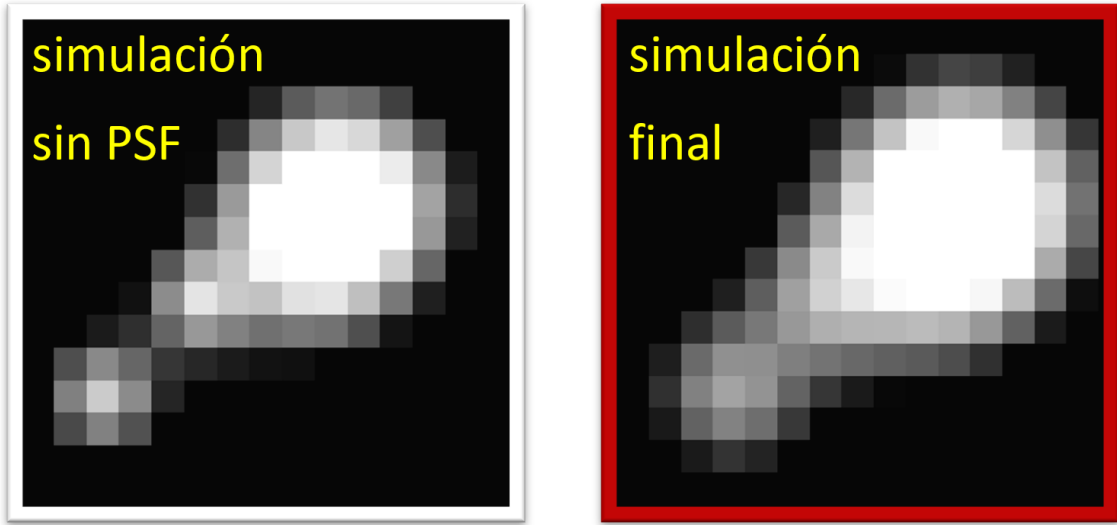


Figura 4.3: Resultado de la simulación para el **Caso 2** con 4 subestructuras. En la izquierda se tiene sin la PSF y a la derecha con ella.

Cúmulo	R_g [pc]	r_d [pix]	r_d [pc]	γ	μ [mag/arcsec ²]	$\log I_0$	r_c [pc]
A1	465.7510	3.6291	1.2339	4.8	11.5329	5.9628	0.7140
A2	453.9643	1.3089	0.4450	2.0200	12.7969	5.4572	0.4420
A3	459.1655	1.7281	0.5876	4.8	12.5377	5.5609	0.3400
A4	465.4451	3.4183	1.1622	4.000	11.5286	5.9645	0.7480

Tabla 4.5: Parámetros estructurales obtenidos para la simulación del caso 2, relacionado con 4 subestructuras.

Cúmulo	r_h [pc]	r_t [pc]	L_t [L_\odot]	M_t [M_\odot]	jo [L/pc ³]	ρ_0 [M/pc ³]	σ [km/s]
A1	0.98	12.0005	3.1×10^6	9.4×10^4	5.7906	4.2677	8.9969
A2	5×10^{14}	10.9075	1.7×10^7	5.3×10^5	5.5105	3.9876	2.2983
A3	0.47	13.5776	2.8×10^5	8.4×10^3	5.7110	4.1881	2.8658
A4	1.16	13.9256	3.9×10^6	1.1×10^5	5.7743	4.2514	8.9693

Tabla 4.6: Parámetros estructurales obtenidos para la simulación del caso 2, relacionado con 4 subestructuras.

4.3. Comparación final y residuos

Finalmente, se hicieron dos pruebas residuales, para el caso en 2D y del SBP, utilizando:

$$\frac{I_{obs} - I_{model}}{I_{model}} \quad (4.1)$$

Esto se ve en la figura 4.4, en donde en la parte superior se tienen los casos de residuo 2D para las imágenes entre la simulación y la observación, donde se puede observar en las zonas en las que la simulación tiene valores más grandes de intensidad que la observación en ambos casos, sin embargo, el centro de la subestructura A1 y A4 en ambos casos (coordenadas (51,51)), las diferencias en intensidad son de 0.7 y 1.3, respectivamente. Las partes más externas prácticamente no tienen cambios debido a la contaminación que tiene el cúmulo observado.

En la parte inferior se tienen los residuos con sus barras de error obtenidas en la Sección 3.8, de igual manera que lo anterior, para cada uno de los casos, donde se puede observar que en ambos casos tanto el perfil es cercano al valor cero y que los errores son más significativos en las partes internas del perfil, mientras que a partir de la sub-estructura más externa, el perfil difiere del observado.

La figura 4.5, contiene los residuos del caso 1 y el caso 2, en la misma gráfica, permitiendo la comparación entre ambos modelos, en donde se puede observar que sus diferencias son mínimas pero significativas en la zona interna del perfil, notándose una menor diferencia entre el caso 1 con 3 sub-estructuras y la observación. Las barras de error denotan que ambos casos son excelentes candidatos para reproducir la observación, sin embargo, el mejor candidato es el caso 1 con 3 sub-estructuras.

Finalmente, en la figura 4.6 se tiene la comparación de cada uno de los perfiles de brillo superficial, en donde la observación se tiene en azul, así como el caso 1 y el caso 2 en rojo y negro, respectivamente. Como se indicó anteriormente, en la zona interior del perfil (< 6 [pix]) las diferencias son más sustanciales, sin embargo, después de este límite prácticamente ambos casos son comparables, denotando la contaminación de la observación.

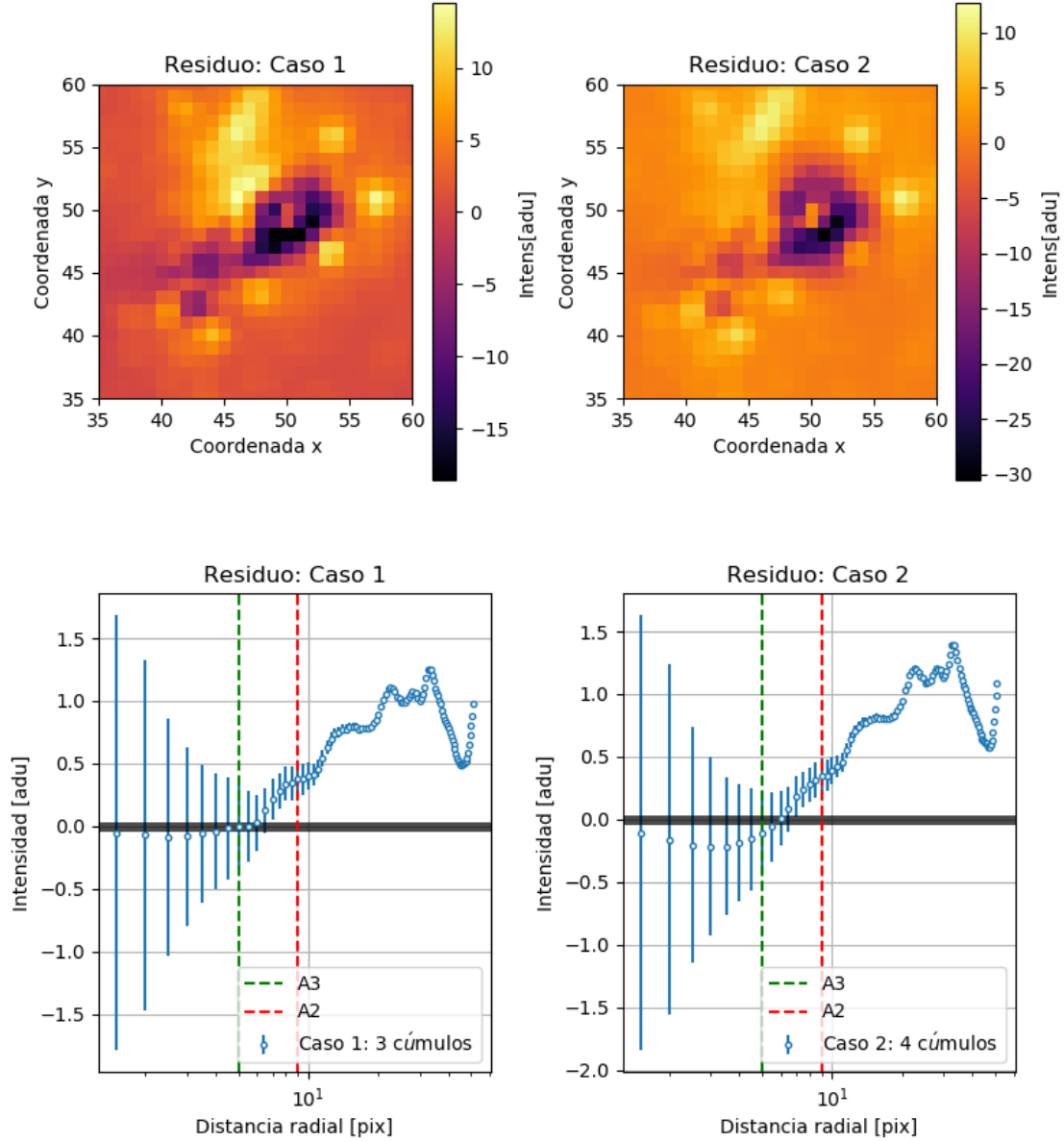


Figura 4.4: Residuales: Residuos 2D entre las imágenes de la observación y del modelo para los diferentes casos (fila superior). Residuo del SBP entre la observación y el modelo con sus barras de error y las líneas punteadas representando la localización de las sub-estructuras A2 y A3 (fila inferior).

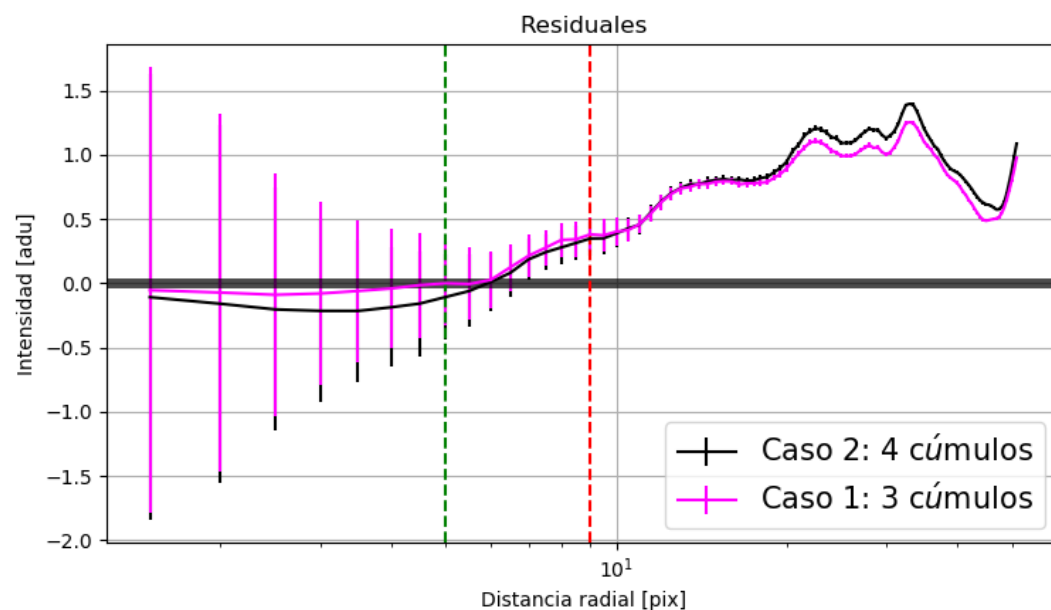


Figura 4.5: Residuo del SBP entre la observación y el modelo con sus barras de error y las líneas punteadas representando la localización de las sub-estructuras A2 y A3.

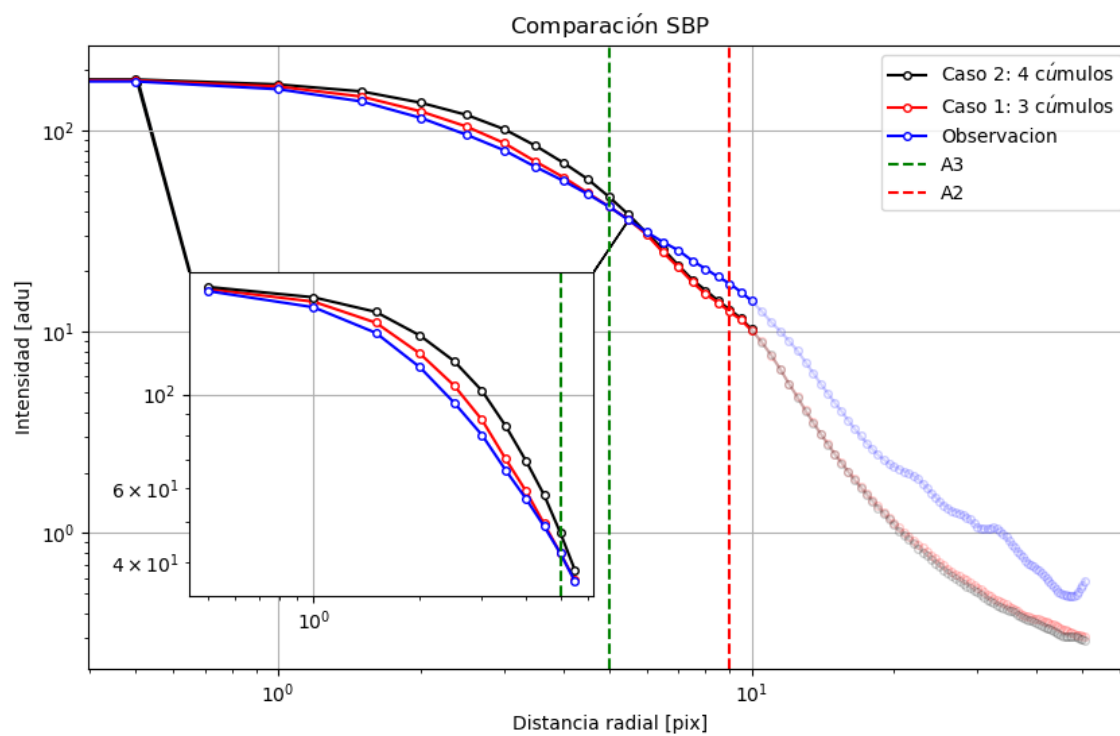


Figura 4.6: Perfil de brillo superficial para la observación y los casos de simulación en distintos colores, así como un acercamiento a la zona más interna del perfil.

4.4. Evolución dinámica

Con el fin de estudiar la evolución dinámica de este cúmulo SSC-A, se utilizó el programa *Evolve Me A Cluster of StarS* (**EMACSS**) [33], con base a una metodología ya probada [34].

El código esta basado en una serie de ecuaciones diferenciales acopladas que describen la la dinámica estelar así como la consideración de los métodos de escape. Es importante resaltar que la evolución se da en términos de la masa y el radio; es por esta razón que la relación masa-radio es de suma importancia.

Usamos los parámetros estructurales obtenidos anteriormente como los parámetros de entrada del código, junto con otros parámetros externos, cómo el radio galactocéntrico y la curva de rotación [35], debido a que los cúmulos que se buscan evolucionar se encuentran bajo la fuerza gravitacional de la galaxia huésped.

Los resultados de la simulación evolutiva se llevaron a cabo tanto para el **caso 1** y también para el **caso 2**, de donde se obtuvieron los gráficos ilustrados en las figuras 4.7 y 4.8 para el caso 1 y las figuras 4.9 y 4.10 para el caso 2.

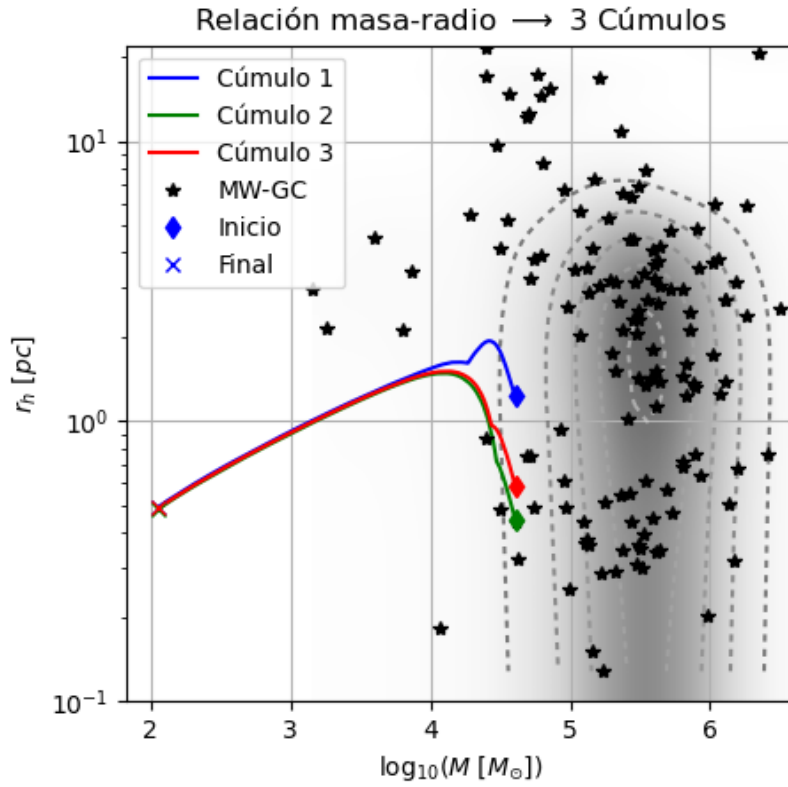


Figura 4.7: Gráfico de la simulación de evolución dinámica para el **caso 1**, refiriéndose a 3 subestructuras, hecha con el código **EMACSS**. Donde se tiene la relación masa-radio, las líneas de colores corresponden a las trayectorias evolutivas de cada uno de los cúmulos, su inicio se marca con rombos y su final con una cruz, para cada una de las subestructuras, con su correspondiente color, las estrellas en color negro corresponden a cúmulos globulares galácticos del catálogo de Harris, también se muestran los isocontornos que representan qué cúmulos se concentran en ciertos radios.

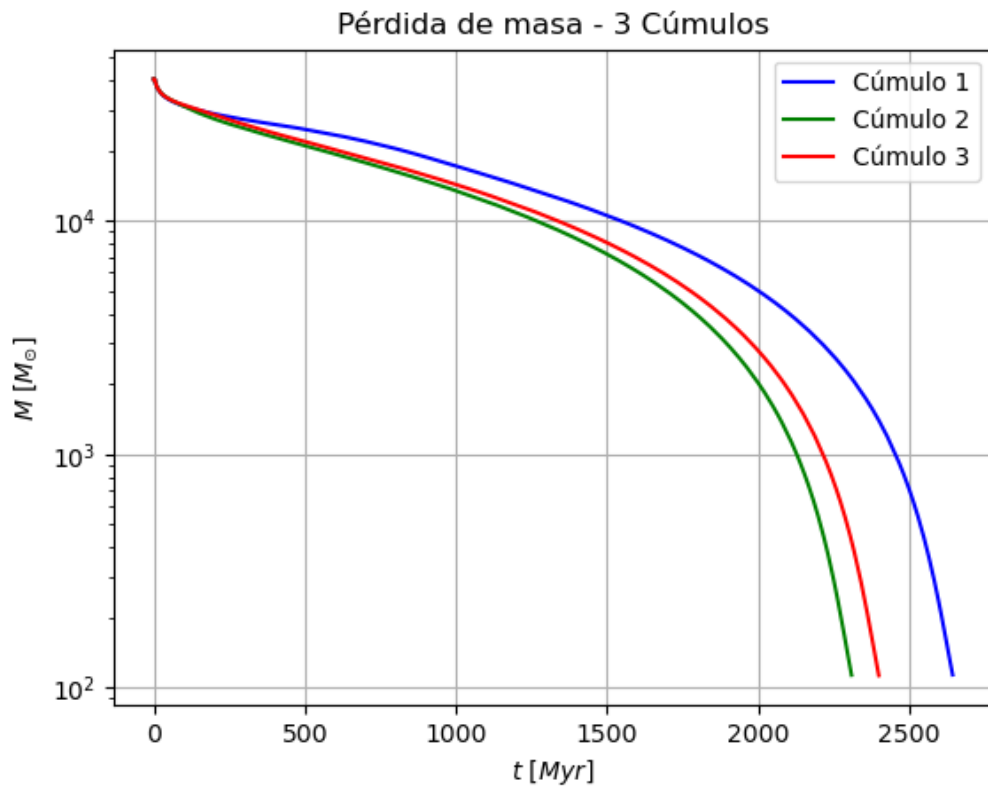


Figura 4.8: Gráfico de la simulación de evolución dinámica para el **caso 1**, refiriéndose a 3 subestructuras, hecha con el código **EMACSS**. Se muestra la tasa de pérdida de masa en función del tiempo.

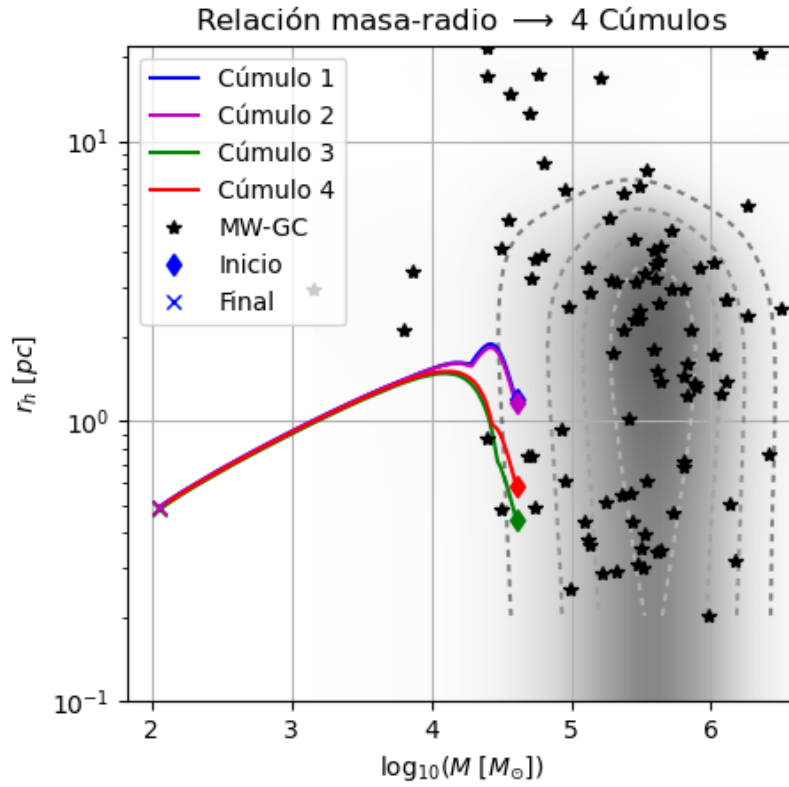


Figura 4.9: Gráfico de la simulación de evolución dinámica para el **caso 2**, refiriéndose a 4 subestructuras, hecha con el código **EMACSS**. Donde se tiene la relación masa-radio, las líneas de colores corresponden a las trayectorias evolutivas de cada uno de los cúmulos, su inicio se marca con rombos y su final con una cruz, para cada una de las subestructuras, con su correspondiente color, las estrellas en color negro corresponden a cúmulos globulares galácticos del catálogo de Harris, también se muestran los isocontornos que representan qué cúmulos se concentran en ciertos radios.

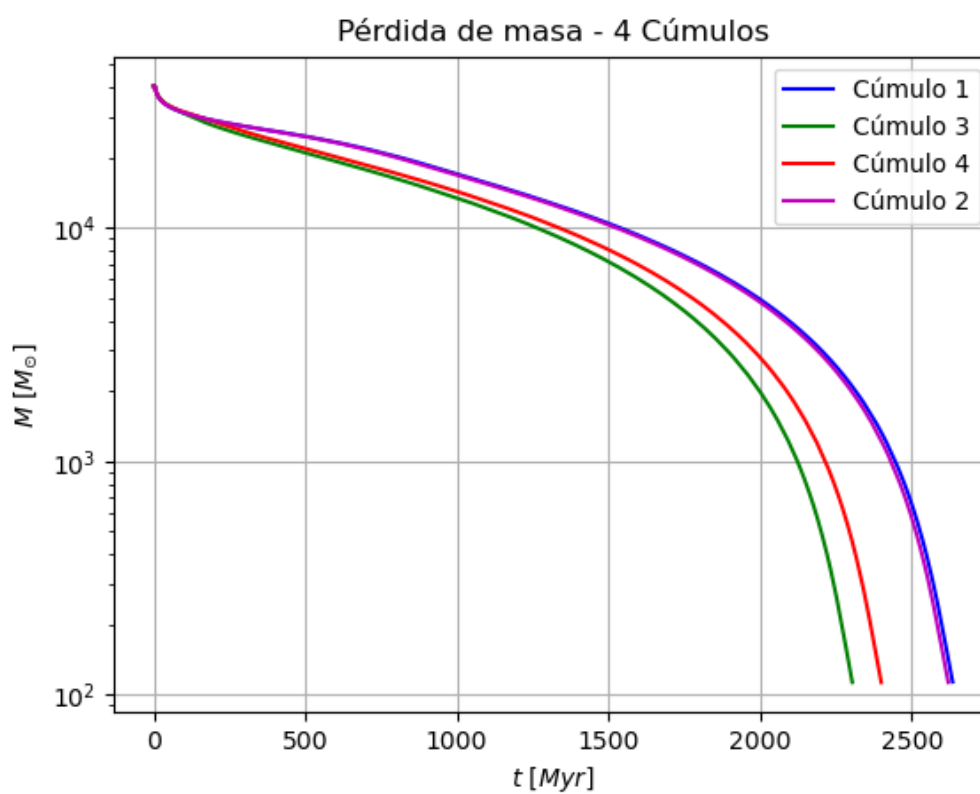


Figura 4.10: Gráfico de la simulación de evolución dinámica para el **caso 2**, refiriéndose a 4 subestructuras, hecha con el código **EMACSS**. Se muestra la tasa de pérdida de masa en función del tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis, se presentan los resultados relacionados a la búsqueda de los **parámetros estructurales** del súper cúmulo estelar A en la galaxia **NGC 1569**, así como un bosquejo de su evolución dinámica, usando observaciones hechas con el telescopio espacial Hubble y códigos de programación, así como teoría dinámica.

Las conclusiones se listan a continuación:

- Debido a que el proceso de **relajación** el cual hace que la distribución de velocidades interna se acerque a una Gaussiana, el cual tiene una escala de tiempo de aproximadamente 250 millones de años, mientras que el **SSC-A** de acuerdo con Mayya et. al. (2020) tiene tan sólo 4 millones de años de edad, nos permite utilizar el perfil de **Moffat-EFF** ya que éste se utiliza para cúmulos jóvenes, en donde el proceso de relajación no ha permeado al cúmulo.
- De Marchi et. al (1986) mostró la existencia de dos subestructuras componiendo al **SSC-A**, de acuerdo a ésta tesis se confirma la existencia de subestructuras, sin embargo, se necesita una extra para poder reproducir desde las simulaciones, la observación, así como su perfil de brillo superficial.
- Gracias a la nueva distancia publicada por Grocholski et. al., 2012 de 3.06 Mpc, la separación entre las subestructuras más externas, esto es entre el cúmulo negro y rojo para el caso 1, así como el cúmulo azul y rojo para el caso 2, es de 3 pc. Dado los radios de marea para cada subestructura son mayores que esta separación, se puede afirmar que están en interacción gravitacional.
- Debido a la existencia de las subestructuras, se simularon 3 ó 4 de las mismas, se buscó que la subestructura más grande no tuviese que ser elíptica, sin embargo, en cualquiera de los dos casos, una de las estructuras es elíptica. Siendo lo anterior, se eligió el **caso 1** como la mejor candidata para representar la observación del HST, debido al valor obtenido por la prueba estadística χ^2 .
- Los parámetros estructurales muestran en ambos casos, que las masas están en la magnitud de $\sim 10^5 M_\odot$, así como sus radios sólo los más grandes llegan hasta ~ 1 pc, sin embargo los más pequeños solo tienen un radio de $\sim .5$ pc. Las variaciones en las masas y la densidad, muestran una clara dependencia del valor del parámetro de entrada β que se refiere a que tan concentrado o extendido es el perfil del cúmulo.
- De acuerdo con la simulación de la evolución dinámica hecha con el programa **EMACSS**, para los dos casos, el tiempo de vida de estos cúmulos es de ~ 2.5 Gyr. Hunter et. al (2000) comentaba que estos cúmulos podrían ser precursores de los cúmulos globulares en comparación a los galácticos, sin embargo, debido a que no tienen la masa ni el radio suficiente para

sobrevivir a los campos de marea de la galaxia huésped no son candidatos para convertirse en cúmulos globulares.

- Debido a que la edad del cúmulo no permite tomar en cuenta los encuentros y todo lo que lleva a cabo este proceso, no se toman en cuenta para este trabajo.

Capítulo 6

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi madre Margarita, mi tía Ana María y a mi tío Raymundo por siempre impulsarme tanto en lo profesional como en lo personal; a Mariana por apoyarme, alentarme y acompañarme en este camino.

A mi asesor, Dr. Divakara por aceptarme desde ese verano en el 2019, abriendo mi panorama al conocer el increíble mundo de la investigación en la astrofísica.

A la Dra. Bolivia, por su apoyo, tiempo, paciencia y esfuerzo, éste trabajo no sería el mismo sin su tutela.

A la Dra. Rosario, por su continuo apoyo durante la licenciatura y en este trabajo.

Finalmente, agradezco al CONACyT por otorgar la beca usando los recursos del proyecto CB-A1-S-25070 (Investigador Principal: Yalia Divakara Mayya).

Apéndice A

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

A continuación se muestran los resultados de cada una de las pruebas hechas con el fin de reproducir la observación con modelos teóricos.

Cada figura cuenta con la imagen de la simulación (superior izquierda), el perfil de brillo superficial (superior derecha), contornos (inferior izquierda) y perfil de superficie (inferior derecha) para cada prueba.

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

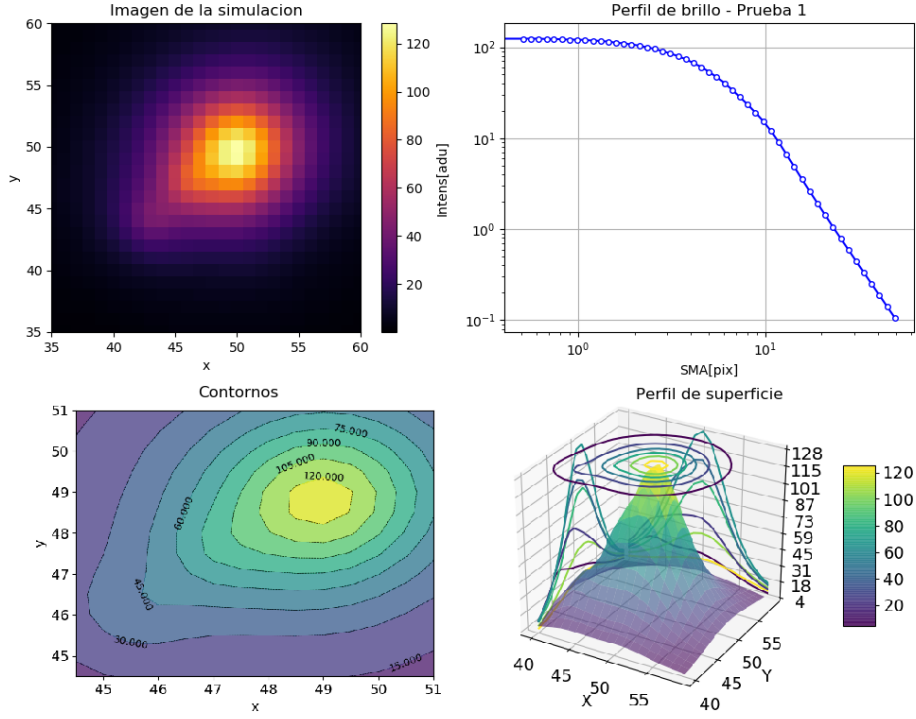


Figura A.1: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 1.

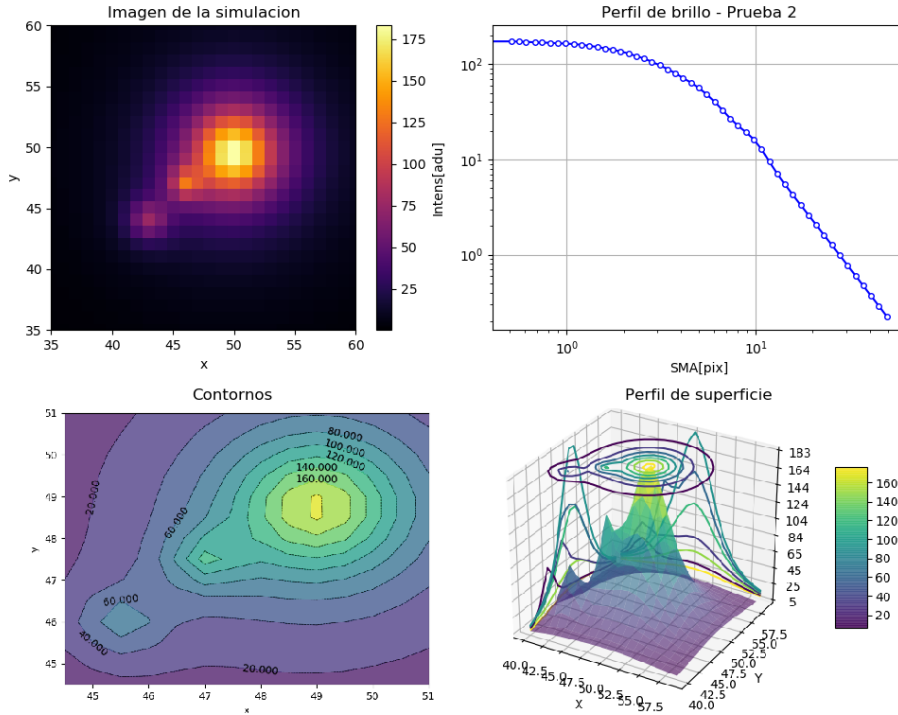


Figura A.2: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 2.

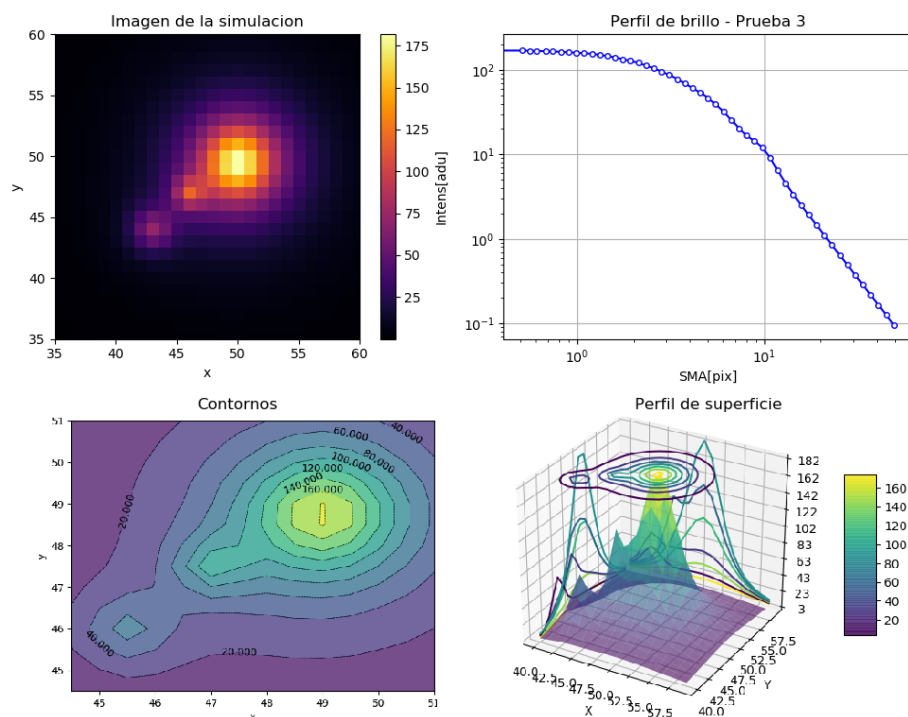


Figura A.3: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 3.

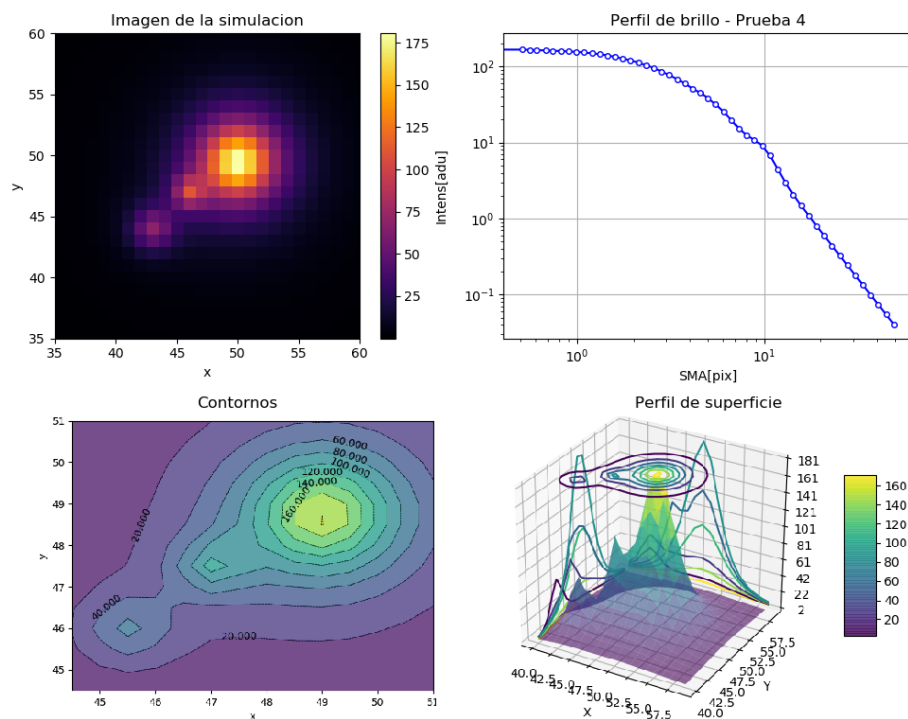


Figura A.4: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 4.

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

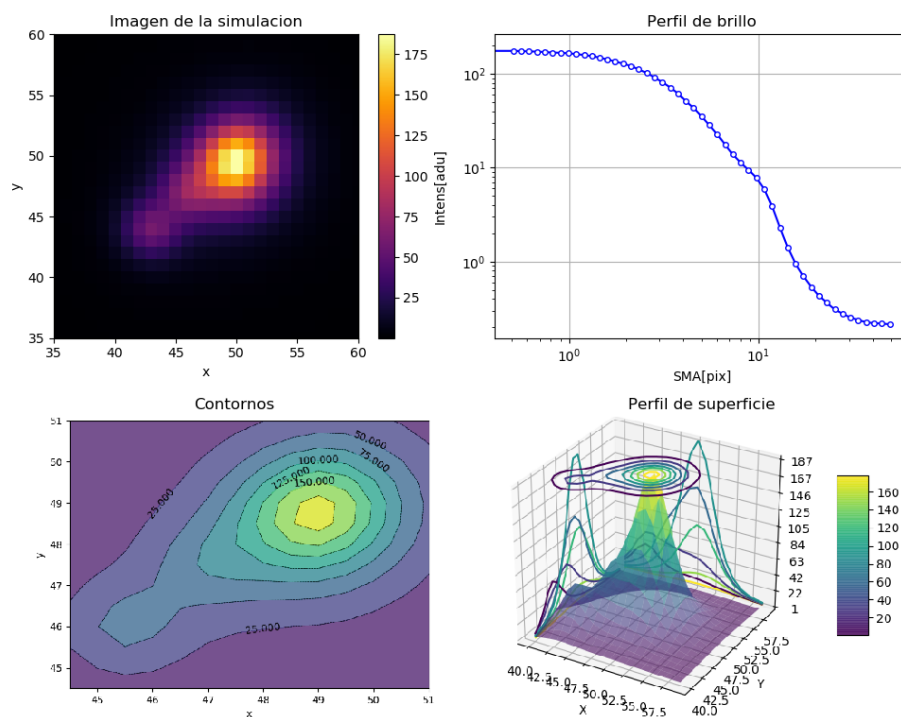


Figura A.5: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 5.

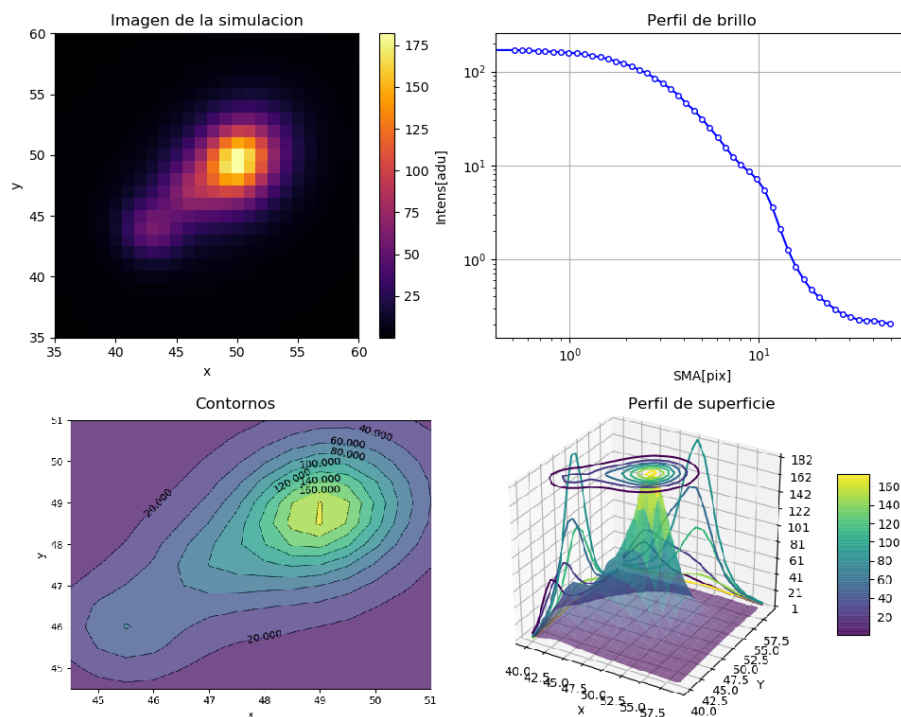


Figura A.6: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 6.

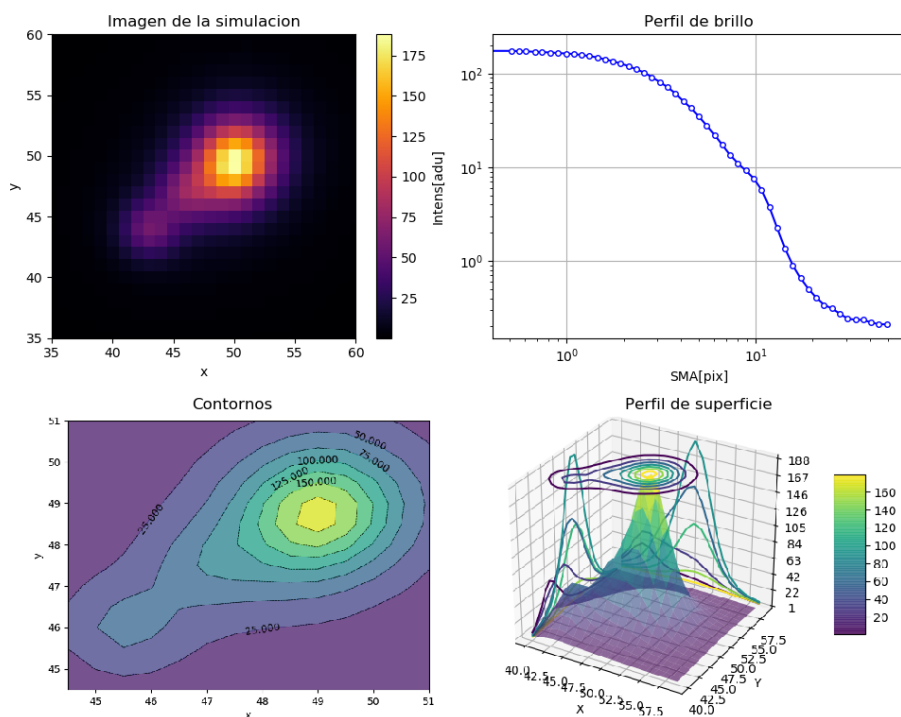


Figura A.7: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 7.

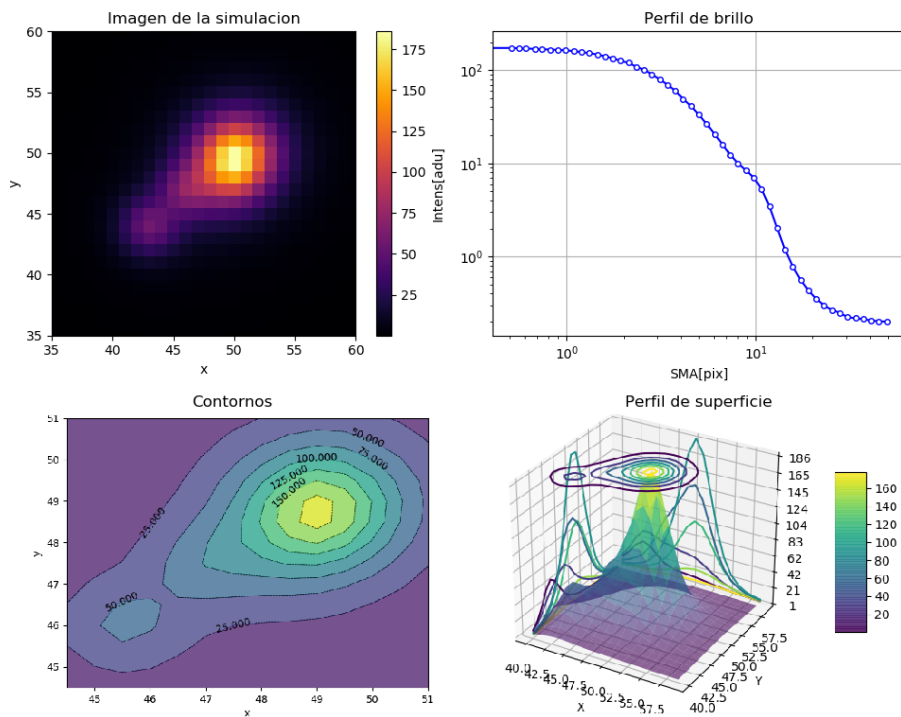


Figura A.8: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 8.

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

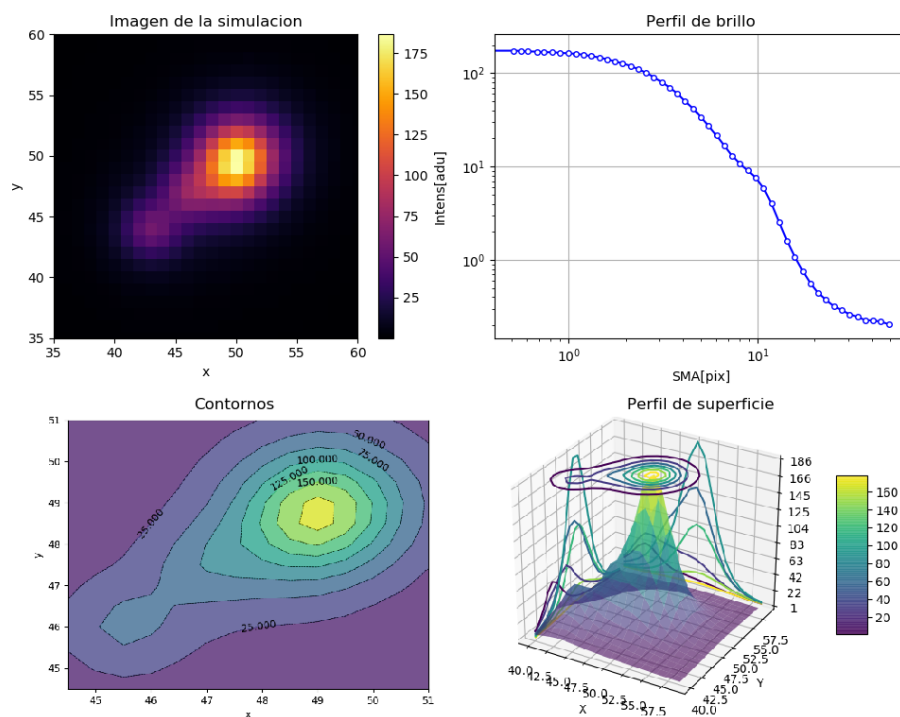


Figura A.9: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 9.

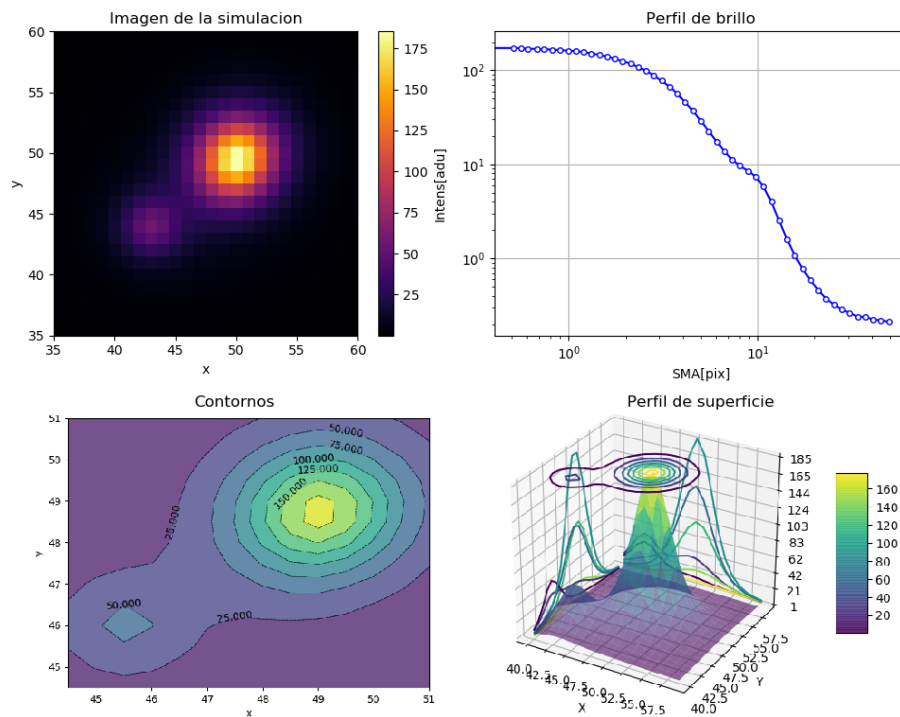


Figura A.10: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 10.

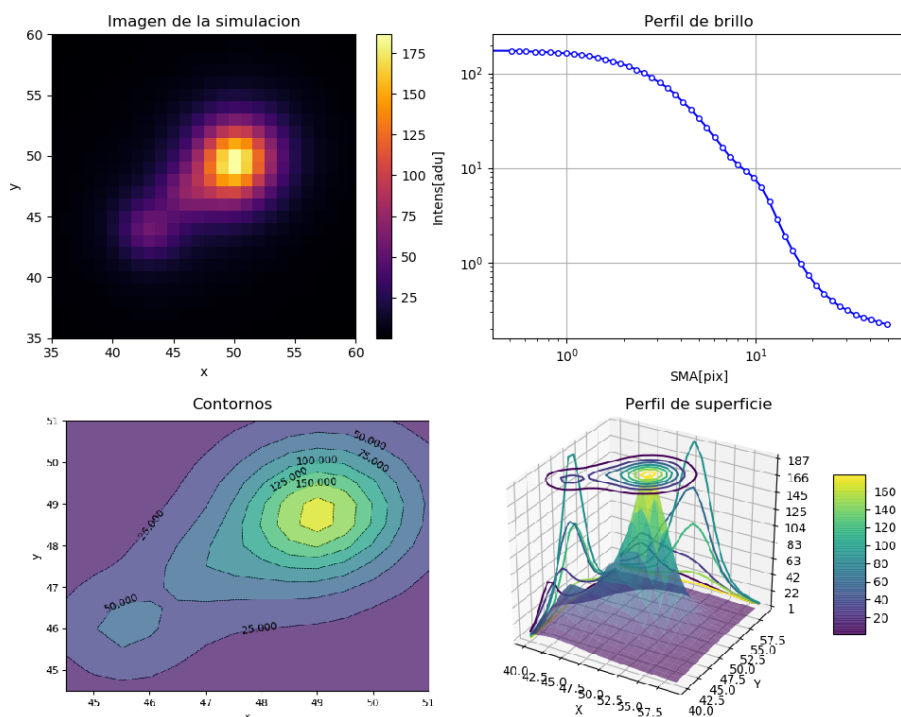


Figura A.11: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 11.

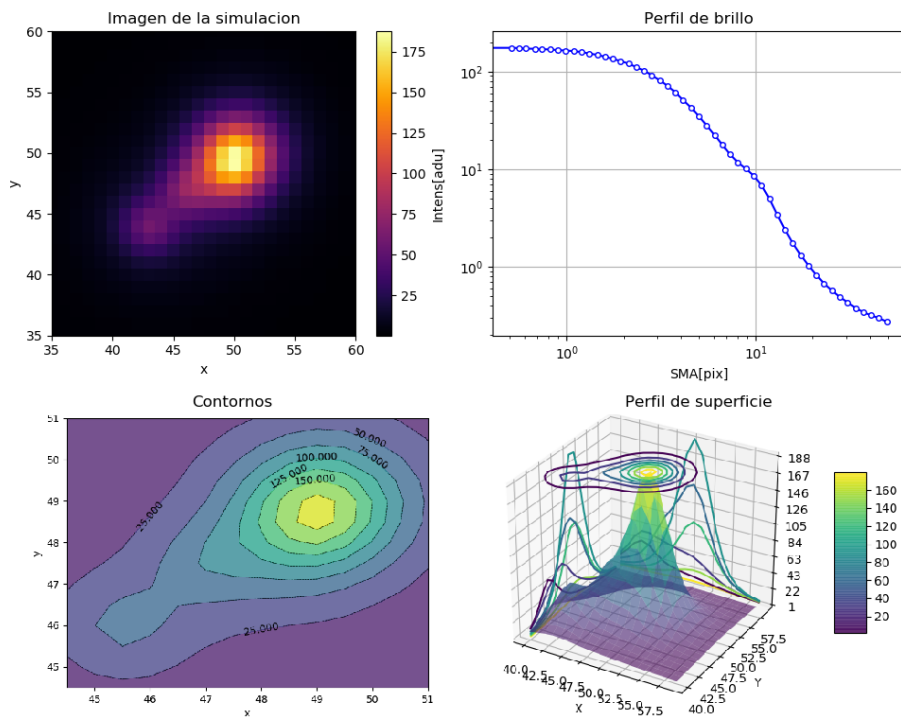


Figura A.12: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 12.

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

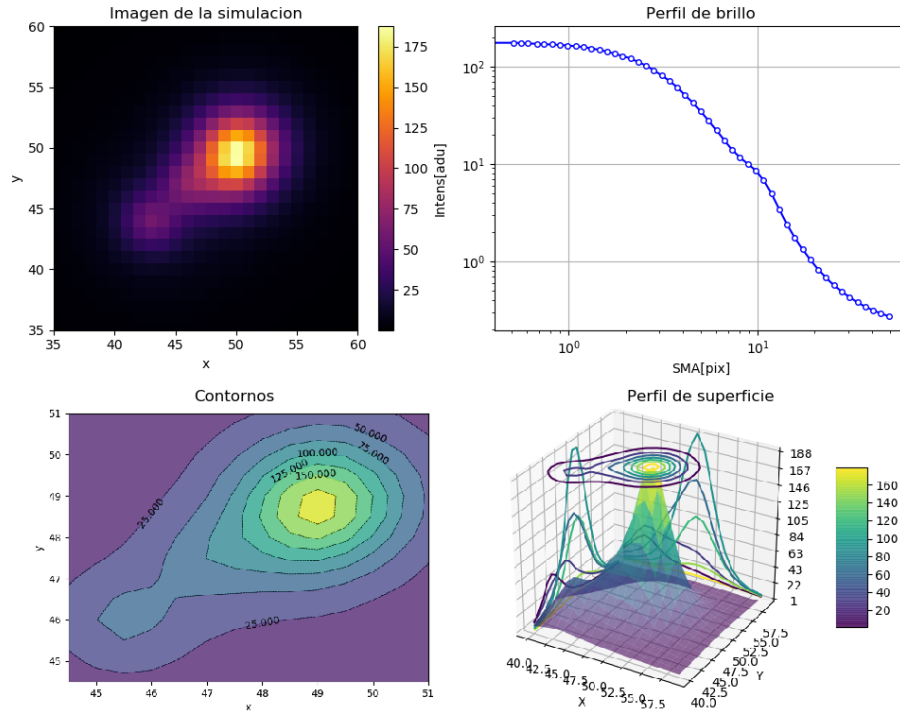


Figura A.13: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 13.

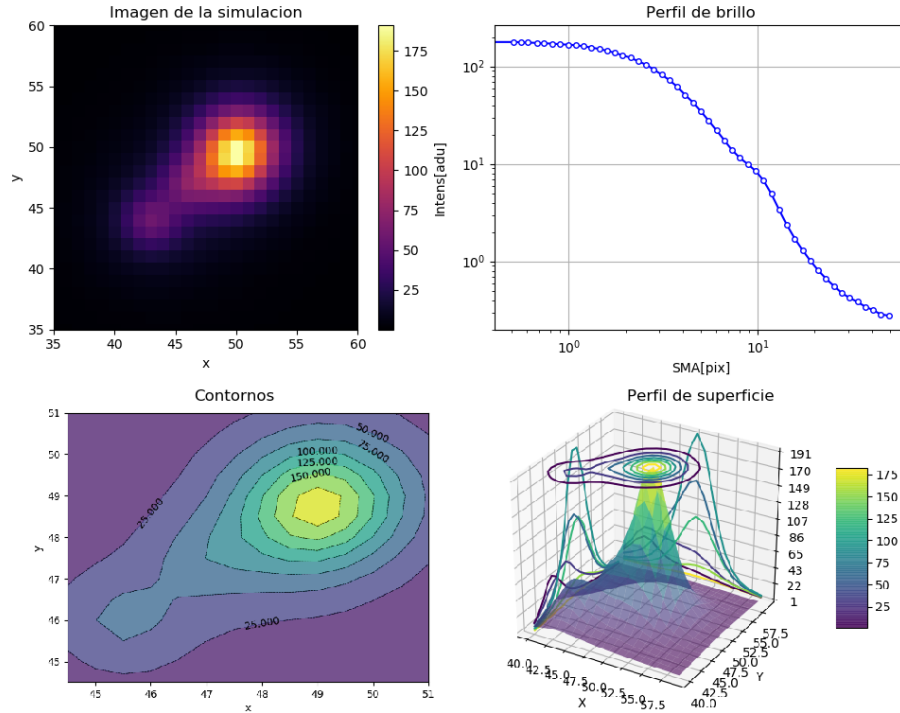


Figura A.14: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 14.

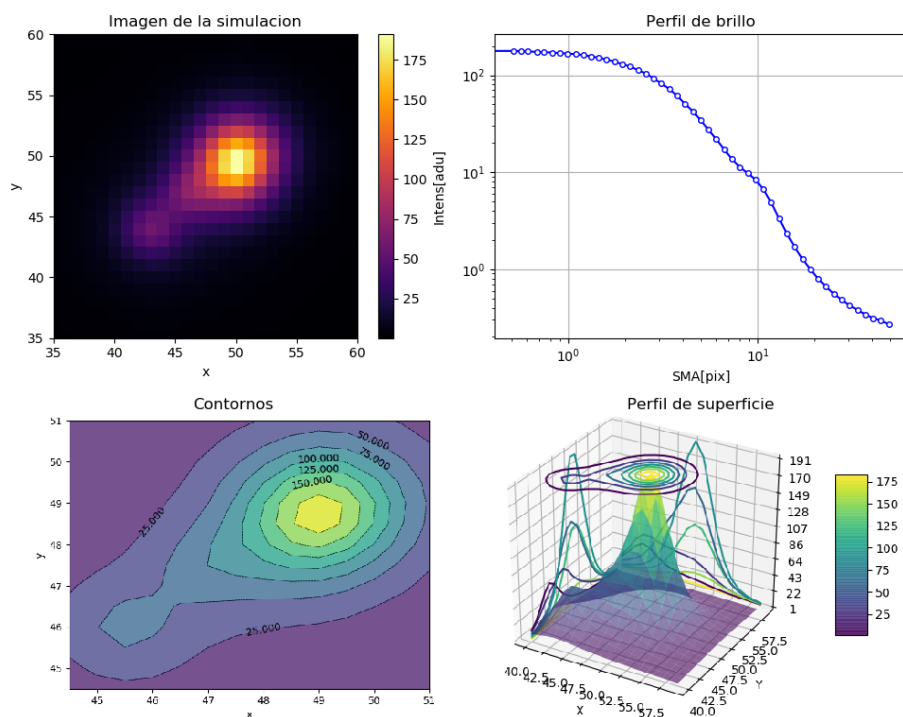


Figura A.15: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 15.

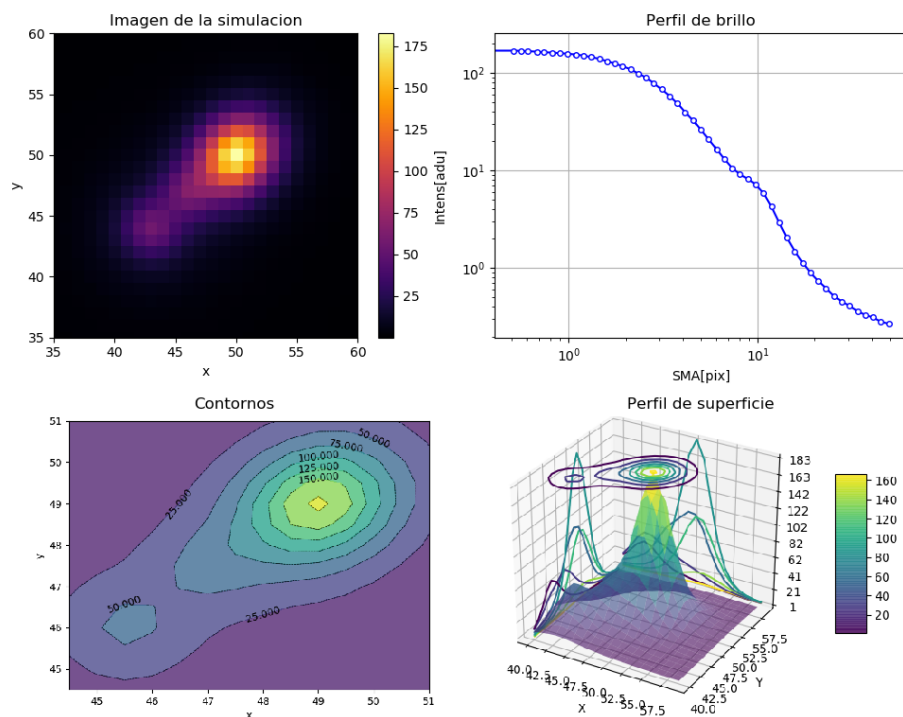


Figura A.16: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 16.

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

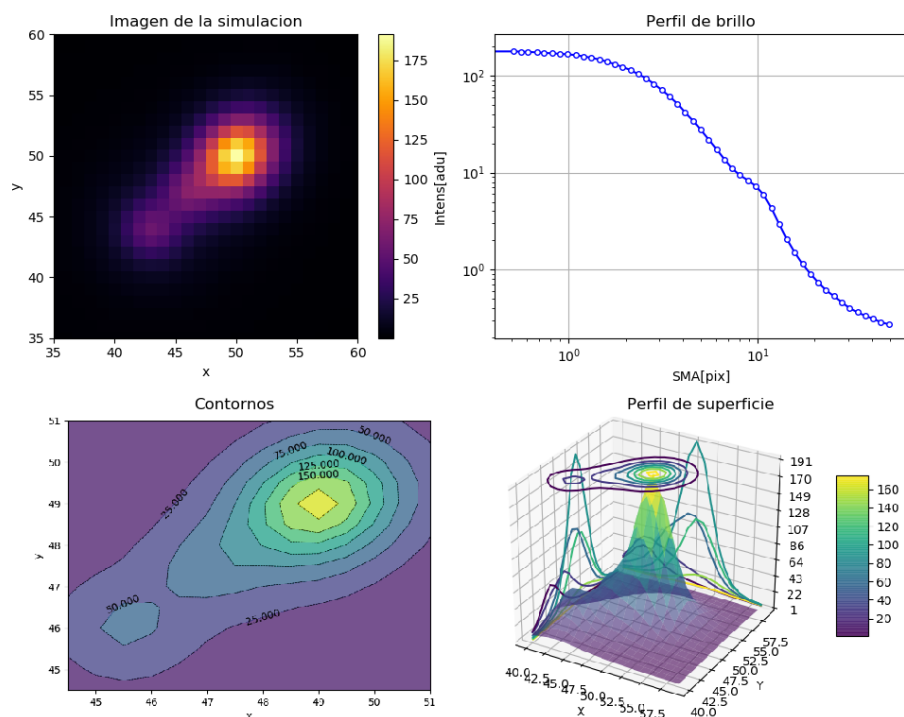


Figura A.17: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 17.

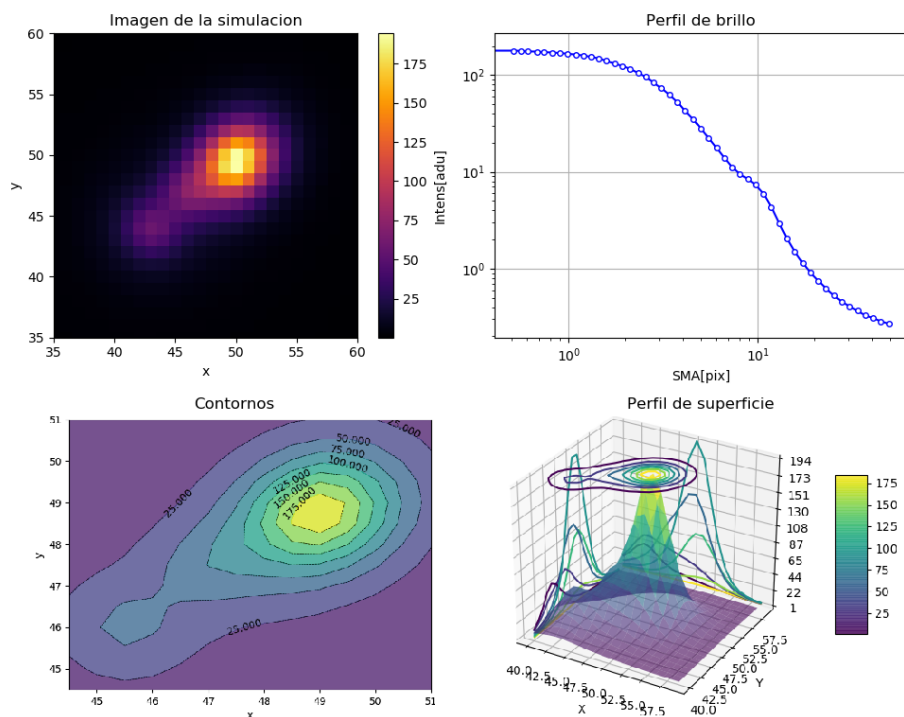


Figura A.18: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 18.

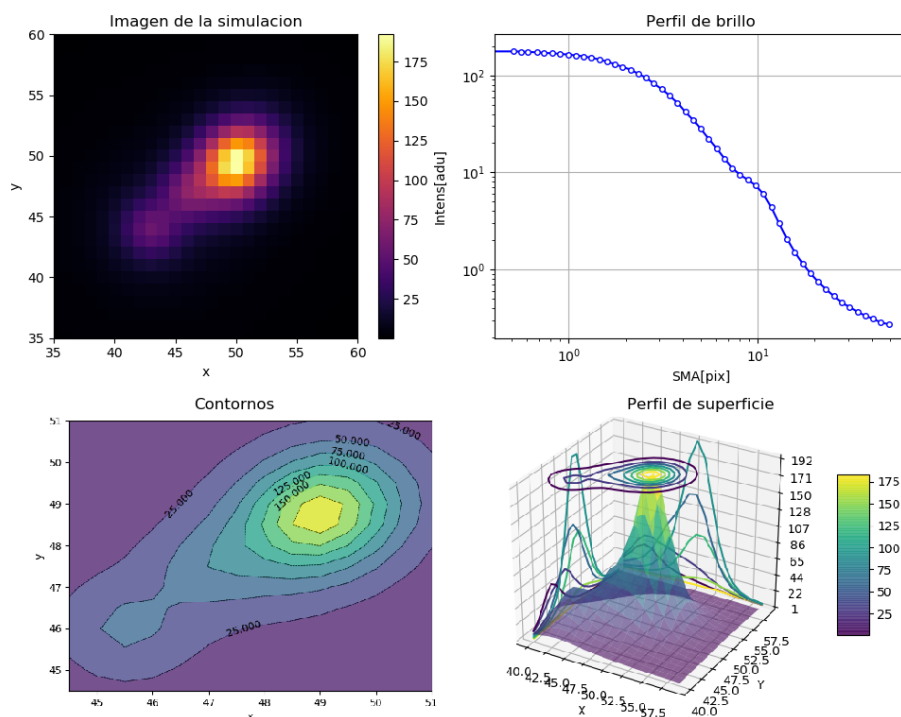


Figura A.19: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 19.

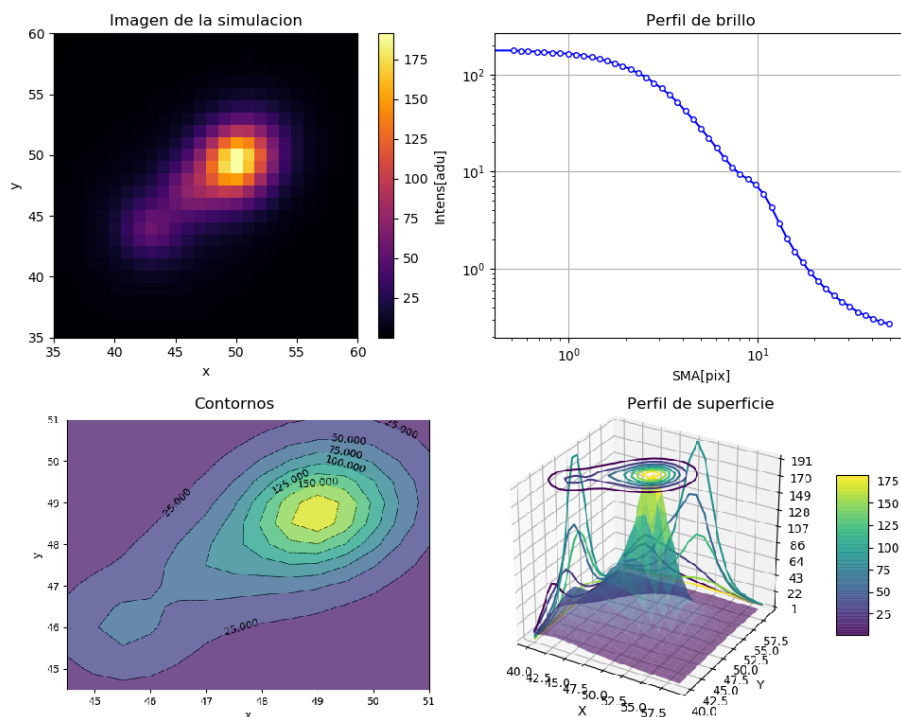


Figura A.20: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 20.

Resultados de simulaciones de NGC 1569-A.

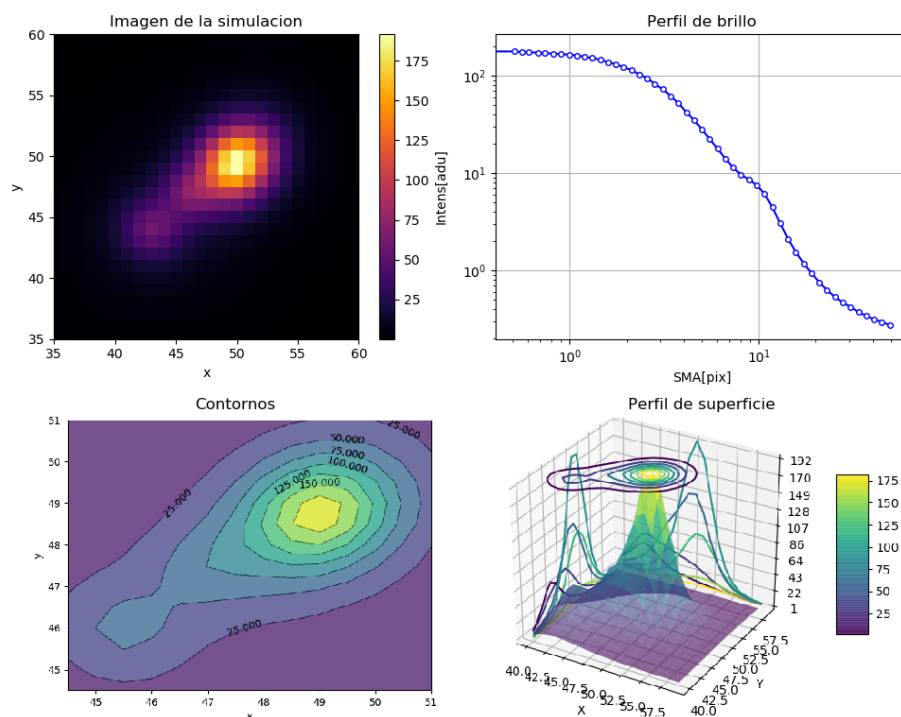


Figura A.21: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 21.

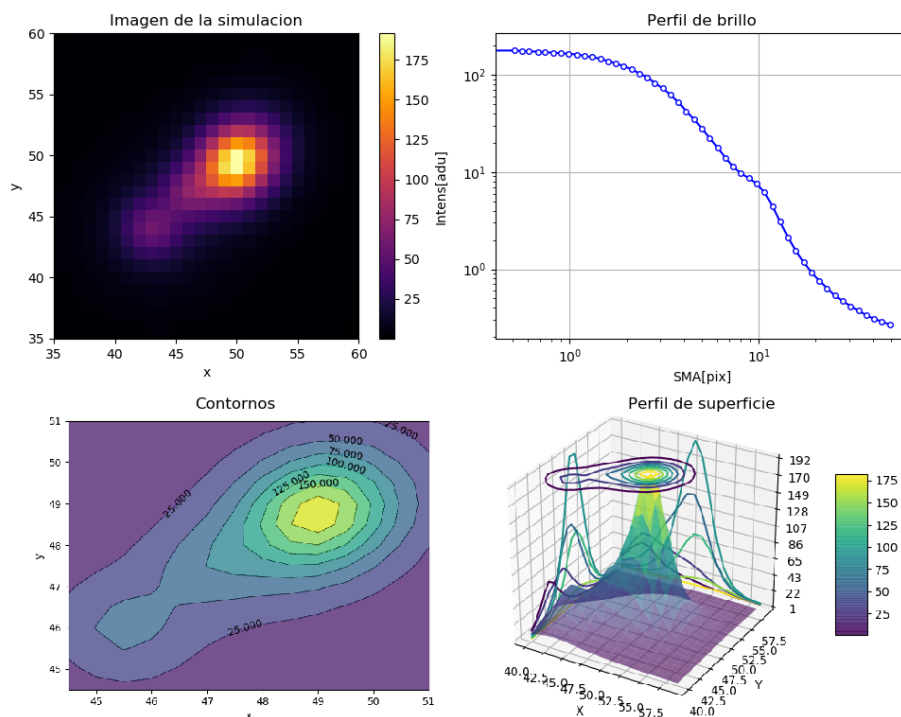


Figura A.22: Simulación de la región NGC 1569-A, prueba 22.

Bibliografía

- [1] NASA, *How Many Stars in the Milky Way?* URL:<https://asd.gsfc.nasa.gov/blueshift/index.php/2015/07/22/how-many-stars-in-the-milky-way/>, 2015.
- [2] Astronomy, *Meet the stars next door*, URL:<https://astronomy.com/magazine/2019/10/meet-the-stars-next-door>, 2019.
- [3] W. E. Harris, “A Catalog of Parameters for Globular Clusters in the Milky Way,” vol. 112, pág. 1487, oct. de 1996. DOI: [10.1086/118116](https://doi.org/10.1086/118116).
- [4] N. V. Kharchenko, A. E. Piskunov, S. Röser, E. Schilbach y R. .-. Scholz, “Astrophysical parameters of Galactic open clusters,” vol. 438, n.º 3, págs. 1163-1173, ago. de 2005. DOI: [10.1051/0004-6361:20042523](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20042523). arXiv: [astro-ph/0501674](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0501674) [astro-ph].
- [5] D. A. Hunter, R. W. O’Connell, J. S. Gallagher y T. A. Smecker-Hane, “The Star Clusters in the Starburst Irregular Galaxy NGC 1569,” *The Astronomical Journal*, vol. 120, n.º 5, págs. 2383-2401, nov. de 2000, ISSN: 0004-6256. DOI: [10.1086/316810](https://doi.org/10.1086/316810). dirección: <http://dx.doi.org/10.1086/316810>.
- [6] Y. D. Mayya, R. Romano, L. H. Rodríguez-Merino, A. Luna, L. Carrasco y D. Rosa-González, “HST ACS Imaging of M82: A Comparison of Mass and Size Distribution Functions of the Younger Nuclear and Older Disk Clusters,” vol. 679, n.º 1, págs. 404-419, mayo de 2008. DOI: [10.1086/587541](https://doi.org/10.1086/587541). arXiv: [0802.1922](https://arxiv.org/abs/0802.1922) [astro-ph].
- [7] E. Noyola y K. Gebhardt, “Surface Brightness Profiles of Galactic Globular Clusters from Hubble Space Telescope Images,” vol. 132, n.º 2, págs. 447-466, ago. de 2006. DOI: [10.1086/505390](https://doi.org/10.1086/505390). arXiv: [astro-ph/0604251](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0604251) [astro-ph].
- [8] S. Kamann, E. Dalessandro, N. Bastian y col., “The peculiar kinematics of the multiple populations in the globular cluster Messier80 (NGC6093),” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 492, n.º 1, págs. 966-977, dic. de 2019, ISSN: 1365-2966. DOI: [10.1093/mnras/stz3506](https://doi.org/10.1093/mnras/stz3506). dirección: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz3506>.
- [9] M. G. H. Krause, S. S. R. Offner, C. Charbonnel y col., “The Physics of Star Cluster Formation and Evolution,” *Space Science Reviews*, vol. 216, n.º 4, jun. de 2020, ISSN: 1572-9672. DOI: [10.1007/s11214-020-00689-4](https://doi.org/10.1007/s11214-020-00689-4). dirección: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-020-00689-4>.
- [10] M. Zamora-Avilés, J. Ballesteros-Paredes, J. Hernández, C. Román-Zúñiga, V. Lora y M. Kounkel, “Flipping-up the field: gravitational feedback as a mechanism for young clusters dispersal,” vol. 488, n.º 3, págs. 3406-3415, sep. de 2019. DOI: [10.1093/mnras/stz1897](https://doi.org/10.1093/mnras/stz1897). arXiv: [1907.04316](https://arxiv.org/abs/1907.04316) [astro-ph.SR].
- [11] E. E. Salpeter, “The Luminosity Function and Stellar Evolution.,” vol. 121, pág. 161, ene. de 1955. DOI: [10.1086/145971](https://doi.org/10.1086/145971).
- [12] J. Binney, M. Michael y M. Merrifield, *Galactic Astronomy*, ép. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, 1998, ISBN: 9780691025650. dirección: <https://books.google.com.mx/books?id=arYYRoYjKacC>.

- [13] C. A. Bertulani, *Nuclei in the Cosmos*. WORLD SCIENTIFIC, 2013. DOI: [10.1142/8573](https://doi.org/10.1142/8573). eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/8573>. dirección: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/8573>.
- [14] J. Binney y S. Tremaine, *Galactic Dynamics: Second Edition*. 2008.
- [15] D. Lynden-Bell y P. P. Eggleton, "On the consequences of the gravothermal catastrophe," vol. 191, págs. 483-498, mayo de 1980. DOI: [10.1093/mnras/191.3.483](https://doi.org/10.1093/mnras/191.3.483).
- [16] E. P. Hubble, "Extragalactic nebulae.," vol. 64, págs. 321-369, dic. de 1926. DOI: [10.1086/143018](https://doi.org/10.1086/143018).
- [17] G. de Vaucouleurs, "Classification and Morphology of External Galaxies.," *Handbuch der Physik*, vol. 53, pág. 275, ene. de 1959. DOI: [10.1007/978-3-642-45932-0_7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45932-0_7).
- [18] A. J. Grocholski, R. P. van der Marel, A. Aloisi, F. Annibali, L. Greggio y M. Tosi, "HST/ACS PHOTOMETRY OF OLD STARS IN NGC 1569: THE STAR FORMATION HISTORY OF A NEARBY STARBURST," *The Astronomical Journal*, vol. 143, n.º 5, pág. 117, abr. de 2012. DOI: [10.1088/0004-6256/143/5/117](https://doi.org/10.1088/0004-6256/143/5/117). dirección: <https://doi.org/10.1088/0004-6256/143/5/117>.
- [19] R. M. González Delgado, C. Leitherer, T. Heckman y M. Cerviño, "Are the Super-Star Clusters of NGC 1569 in a Poststarburst Phase?," vol. 483, n.º 2, págs. 705-716, jul. de 1997. DOI: [10.1086/304279](https://doi.org/10.1086/304279).
- [20] Y. D. Mayya, E. Carrasco, V. M. A. Gómez-González y col., "MEGARA-IFU detection of extended Heii4686 nebular emission in the central region of NGC1569 and its ionization budget," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 498, n.º 1, págs. 1496-1514, ago. de 2020, ISSN: 1365-2966. DOI: [10.1093/mnras/staa2335](https://doi.org/10.1093/mnras/staa2335). dirección: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa2335>.
- [21] G. De Marchi, M. Clampin, L. Greggio, C. Leitherer, A. Nota y M. Tosi, "The Structure of the Super-Star Clusters in NGC 1569 from Hubble Space Telescope WFPC2 Images," vol. 479, n.º 1, págs. L27-L30, abr. de 1997. DOI: [10.1086/310579](https://doi.org/10.1086/310579).
- [22] L. Origlia, C. Leitherer, A. Aloisi, L. Greggio y M. Tosi, "The Stellar Content of the Super-Star Clusters in NGC 1569," *The Astronomical Journal*, vol. 122, n.º 2, págs. 815-824, ago. de 2001, ISSN: 0004-6256. DOI: [10.1086/321152](https://doi.org/10.1086/321152). dirección: <http://dx.doi.org/10.1086/321152>.
- [23] R. della Ceca, R. E. Griffiths, T. M. Heckman y J. W. MacKenty, "ASCA Observations of Starbursting Dwarf Galaxies: The Case of NGC 1569," vol. 469, pág. 662, oct. de 1996. DOI: [10.1086/177813](https://doi.org/10.1086/177813).
- [24] A. Vallenari y D. J. Bomans, "Star formation history of the POST starburst galaxy NGC 1569.," vol. 313, págs. 713-722, sep. de 1996.
- [25] M. Harwit, *Astrophysical Concepts*, 4th, ép. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, 2008, ISBN: 0-387-33228-6. dirección: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=de99cca1c48b462ab588befad8a4c2b3>.
- [26] P. E. R. Alexander, M. Gieles, H. J. G. L. M. Lamers y H. Baumgardt, "A prescription and fast code for the long-term evolution of star clusters – III. Unequal masses and stellar evolution," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 442, n.º 2, págs. 1265-1285, jun. de 2014, ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/stu899](https://doi.org/10.1093/mnras/stu899). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/442/2/1265/5715676/stu899.pdf>. dirección: <https://doi.org/10.1093/mnras/stu899>.
- [27] J. Goodman, "Homologous evolution of stellar systems after core collapse," vol. 280, págs. 298-312, mayo de 1984. DOI: [10.1086/161996](https://doi.org/10.1086/161996).
- [28] I. R. King, "The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models," vol. 71, pág. 64, feb. de 1966. DOI: [10.1086/109857](https://doi.org/10.1086/109857).

- [29] B. Cuevas-Otahola, Y. D. Mayya, I. Puerari y D. Rosa-González, “nProFit: A Tool for Fitting the Surface Brightness Profiles of Star Clusters with Dynamical Models,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 134, n.º 1032, pág. 024 502, feb. de 2022. DOI: [10.1088/1538-3873/ac477a](https://doi.org/10.1088/1538-3873/ac477a). dirección: <https://doi.org/10.1088/1538-3873/ac477a>.
- [30] C. P. Wilson, “Dynamical Models of Elliptical Galaxies,” en *Dynamics of the Solar Systems*, A. Hayli, ed., vol. 69, ene. de 1975, pág. 207.
- [31] R. A. W. Elson, S. M. Fall y K. C. Freeman, “The Structure of Young Star Clusters in the Large Magellanic Cloud,” vol. 323, pág. 54, dic. de 1987. DOI: [10.1086/165807](https://doi.org/10.1086/165807).
- [32] B. Cuevas-Otahola, Y. D. Mayya, I. Puerari y D. Rosa-González, “Structural analysis of disc super star clusters of M82: size and profile shape at intermediate ages,” vol. 492, n.º 1, págs. 993-1007, feb. de 2020. DOI: [10.1093/mnras/stz3524](https://doi.org/10.1093/mnras/stz3524). arXiv: [1912.06164](https://arxiv.org/abs/1912.06164) [astro-ph.GA].
- [33] P. E. R. Alexander y M. Gieles, “A prescription and fast code for the long-term evolution of star clusters,” vol. 422, n.º 4, págs. 3415-3432, jun. de 2012. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20867.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20867.x). arXiv: [1203.4744](https://arxiv.org/abs/1203.4744) [astro-ph.GA].
- [34] B. Cuevas-Otahola, Y. D. Mayya, I. Puerari y D. Rosa-González, “Mass-radius relation of intermediate-age disc super star clusters of M82,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 500, n.º 4, págs. 4422-4438, nov. de 2020, ISSN: 1365-2966. DOI: [10.1093/mnras/staa3513](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3513). dirección: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa3513>.
- [35] J. G. O’Brien, T. L. Chiarelli, J. Dentico y col., “Alternative Gravity Rotation Curves for the LITTLE THINGS Survey,” *The Astrophysical Journal*, vol. 852, n.º 1, pág. 6, dic. de 2017. DOI: [10.3847/1538-4357/aa99e1](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa99e1). dirección: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa99e1>.
- [36] W. S. Klaas Sjoerds de Boer, *Stars and Stellar Evolution*. EDP SCIENCES, 2008, ISBN: 978-2-7598-0356-9. dirección: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=3c1b5fdd6da611ce6582850462a83507>.
- [37] S. F. Portegies Zwart, S. L. McMillan y M. Gieles, “Young Massive Star Clusters,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 48, n.º 1, págs. 431-493, ago. de 2010, ISSN: 1545-4282. DOI: [10.1146/annurev-astro-081309-130834](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081309-130834). dirección: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-081309-130834>.
- [38] M. S. Westmoquette, N. Bastian, L. J. Smith y col., “AN OPTICAL-NEAR-IR STUDY OF A TRIPLET OF SUPER STAR CLUSTERS IN THE STARBURST CORE OF M82,” *The Astrophysical Journal*, vol. 789, n.º 2, pág. 94, jun. de 2014, ISSN: 1538-4357. DOI: [10.1088/0004-637x/789/2/94](https://doi.org/10.1088/0004-637x/789/2/94). dirección: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637x/789/2/94>.
- [39] M. Johnson, D. A. Hunter, S.-H. Oh y col., “THE STELLAR AND GAS KINEMATICS OF THE LITTLE THINGS DWARF IRREGULAR GALAXY NGC 1569,” *The Astronomical Journal*, vol. 144, n.º 5, pág. 152, oct. de 2012, ISSN: 1538-3881. DOI: [10.1088/0004-6256/144/5/152](https://doi.org/10.1088/0004-6256/144/5/152). dirección: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-6256/144/5/152>.
- [40] L. Greggio, M. Tosi, M. Clampin y col., “The Resolved Stellar Population of the Poststarburst Galaxy NGC 1569,” *The Astrophysical Journal*, vol. 504, n.º 2, págs. 725-742, sep. de 1998, ISSN: 1538-4357. DOI: [10.1086/306100](https://doi.org/10.1086/306100). dirección: <http://dx.doi.org/10.1086/306100>.
- [41] S. Recchi, G. Hensler, L. Angeretti y F. Matteucci, “Dynamical and chemical evolution of NGC1569,” *Astronomy Astrophysics*, vol. 445, n.º 3, págs. 875-888, ene. de 2006, ISSN: 1432-0746. DOI: [10.1051/0004-6361:20053442](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20053442). dirección: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20053442>.
- [42] S. S. Larsen, L. Origlia, J. Brodie y J. S. Gallagher, “Anatomy of a young massive star cluster: NGC 1569-B,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 383, n.º 1, págs. 263-276, dic. de 2007, ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2007.12528.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12528.x). dirección: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12528.x>.

- [43] P. Anders, R. de Grijs, U. Fritze-v. Alvensleben y N. Bissantz, “Star cluster formation and evolution in the dwarf starburst galaxy NGC 1569,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 347, n.º 1, págs. 17-28, ene. de 2004, ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.07171.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07171.x). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/347/1/17/4096356/347-1-17.pdf>. dirección: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07171.x>.
- [44] D. Maoz, L. C. Ho y A. Sternberg, “The Super-Star Cluster NGC 1569-A Resolved on Sub-parsec Scales with [ITAL]Hubble Space Telescope[/ITAL] Spectroscopy,” *The Astrophysical Journal*, vol. 554, n.º 2, págs. L139-L142, jun. de 2001, ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/321701](https://doi.org/10.1086/321701). dirección: <http://dx.doi.org/10.1086/321701>.
- [45] D. E. McLaughlin, *Fitting Dynamical Models to Observations of Globular Clusters*, 2003. arXiv: [astro-ph/0302283](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302283) [astro-ph].
- [46] K. E. Johnson, “The properties of super star clusters in a sample of starburst galaxies,” Tesis doct., University of Colorado at Boulder, ene. de 2001.