MATHEMATICAL SCIENCES

PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR A CIRCULAR SECTOR, RADIAL SIDES OF WHICH INTERACT WITH ELASTIC STRINGER AND RIGID STAMP WITHOUT FRICTION. PART II

Sargsyan A.M.
Institute of Mechanics of NAS Armenia,
Armenia, Yerevan 0005, st.Tigran Metsi 40, ap.47

УДК 659.1

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА, РАДИАЛЬНЫЕ СТОРОНЫ КОТОРОГО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮТ С УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ И С ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ БЕЗ ТРЕНИЯ. ЧАСТЬ II.

А.М. Саргсян
Институт Механики НАН Армении
Армения, Ереван 0005, ул. Тигран Меци 40, кв.47

Abstract

With the help of the method of variables division, a plane problem of elasticity theory for the circular sector, when on the arc part of the contour displacements are given, one radial side is in contact with the rigid stamp without friction, the other side is reinforced by absolutely rigid when stretched and absolutely flexible when bending, stringer, is solved. The characteristics of the stresses in the vicinity of the sector top and the coefficients behavior with the stress features are investigated. It is established, that the stated problem, depending on the angle opening of the sector, breaks down into separate independent problems

Аннотация

С помощью метода разделения переменных решена плоская задача теории упругости для кругового сектора, когда на дуговой части контура заданы перемещения, одна радиальная сторона соприкасается с жестким штампом без трения, другая сторона усилена упругим стрингером. Исследованы сингулярности напряжений в окрестности вершины сектора и поведение коэффициентов при сингулярности напряжений. Установлено, что поставленная задача, в зависимости от угла раствора сектора, распадается на отдельные независимые задачи.

Keywords: elastic sector, rigid smooth stamp, elastic stringer, stress singularity, coefficients of singularities.

Ключевые слова: упругий сектор, жесткий штамп, упругий стрингер, особенность напряжений, коэффициенты особенности.

Введение. Исследование сингулярности напряжений в упругих телах с угловыми точками на контуре имеет важное теоретическое и, особенно, прикладное значение, т.к. оно тесно связанно с проблемой обеспечения необходимой прочности и долговечности таких тел [1–7].

Определению характерных особенностей напряжений в окрестности вершины кругового сектора и поведение коэффициентов при особенностей напряжений, когда одна радиальная сторона соприкасается с жестким штампом без трения, вторая радиальная сторона взаимодействует с абсолютно жестким при растяжении и гибким при изгибе стрингером, а на дуговой части контура заданы хорошо известные граничные условия теории упругости, посвящены работы [8–11]. Установлено, что, с учетом конечности энергии упругой деформации в малой окрестности вершины сектора, данные задачи следует исследовать в четырех областях изменения угла раствора кругового сектора α : задача *I* $\left(0<\alpha\le 2\pi\right)$; задача *II* $\left(0<\alpha\le \pi/2\right)$; задача *III* $\left(\pi/2<\alpha\le 3\pi/2\right)$; задача *IV* $\left(3\pi/2<\alpha\le 2\pi\right)$. Однако, при удовлетворении уравнениям статического равновесия, выяснилось, что только в одном случае, когда на дуговой части контура заданы напряжения, задача не распадается на отдельные независимые задачи.

В работе [12,13] рассмотрено упругое равновесие кругового сектора, когда одна радиальная сторона соприкасается с жестким штампом без трения, вторая сторона усилена *упругим* стрингером, а на дуговой части контура заданы нормальные и касательные напряжения. Показано, что и эта задача не распадается на отдельные независимые задачи.

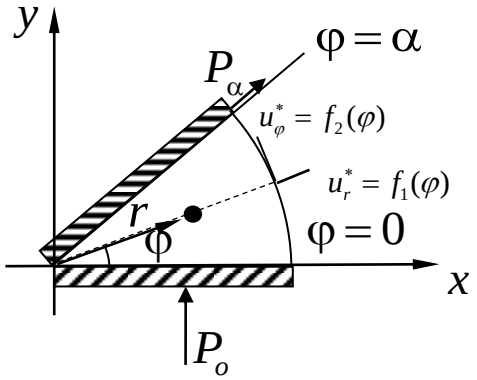
В данной работе рассматривается упругое равновесие кругового сектора, когда при прочих одинаковых условиях из [12,13], на дуговой части контура заданы перемещения.

Постановка и решение задачи. Пусть упругий круговой сектор модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν, отнесенная, как показано на рисунке, к прямоугольной и полярной системам координат находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

В полярной системе координат упругое состояние сектора определяется решением бигармонического уравнения для функции напряжения Эри

$$\Delta\,\Delta\,\Phi^*\left(r,\varphi\right)=0. \qquad (1)$$

Граничные условия данной задачи имеют вид



$$u_\varphi^*\left(r,0\right)=\tau_{r\varphi}^*\left(r,0\right)=0, \qquad (2)\ u_r^*\left(r,\alpha\right)=br\ \ (3),\ \ \sigma_\varphi^*\left(r,\alpha\right)=0 \qquad (3')$$

$$u_r^*\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\qquad u_\varphi^*\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right), \qquad (4)$$

$$f_1\left(\alpha\right)=b,\ \ f_2\left(0\right)=0,$$

где $f_j\left(\varphi\right)$ – функции из класса Дирихле, b – параметр, характеризующий упругость стрингера.

Граничные условия (2) связанны с контактными задачами о вдавливании гладких штампов в упругое основание без трения [2], а условия (3) и (3') – с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к упругим основаниям [14–15].

Учитывая граничные условия (3) и (3'), общее решение уравнения (1) с неоднородными граничными условиями (2) – (4) ищем в виде

$$\Phi^*\left(r,\varphi\right)=\Phi\left(r,\varphi\right)+\tilde{\Phi}\left(r,\varphi\right),$$

$$\Phi\left(r,\varphi\right)=r^{\lambda+1}\left[A\sin\left(\lambda+1\right)\varphi+B\cos\left(\lambda+1\right)\varphi+C\sin\left(\lambda-1\right)\varphi+D\cos\left(\lambda-1\right)\varphi\right], \qquad (5)$$

$$\tilde{\Phi}\left(r,\varphi\right)=r^2\left(G_1+G_2\cos 2\varphi\right),$$

где $\tilde{\Phi}\left(r,\varphi\right)$ – частное решение неоднородной задачи (1), (2) – (4), $\Phi\left(r,\varphi\right)$ – общее решение соответствующей однородной задачи; $A,\ B,\ C,\ D,\ \lambda, G_1, G_2$ – произвольные постоянные.

Напряжения и перемещения выражаются через функции $\Phi^*\left(r,\varphi\right)$ в виде

$$\sigma_\varphi^*=\lambda\left(\lambda+1\right)r^{\lambda-1}\left[AS_\varphi^+ + BC_\varphi^+ + CS_\varphi^- + DC_\varphi^-\right]+2\left(G_1+G_2\cos 2\varphi\right),$$

$$\sigma_r^*=-r^{\lambda-1}\left[A\lambda^+\lambda S_\varphi^+ + B\lambda^+\lambda C_\varphi^+ + C\left(3-\lambda\right)\lambda S_\varphi^- + D\left(3-\lambda\right)\lambda C_\varphi^-\right]+2\left(G_1-G_2\cos 2\varphi\right),$$

$$\tau_{r\varphi}^*=-\lambda r^{\lambda-1}\left[A\lambda^+C_\varphi^+ - B\lambda^+S_\varphi^+ + C\lambda^-C_\varphi^- - D\lambda^-S_\varphi^-\right]+2G_2\sin 2\varphi, \qquad (6)$$

$$Eu_r^*=r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+S_\varphi^+ - B\lambda^+\nu^+C_\varphi^+ + C\left(4-\lambda^+\nu^+\right)S_\varphi^- + D\left(4-\lambda^+\nu^+\right)C_\varphi^-\right]+2r\left(G_1\nu^- - G_2\nu^+\cos 2\varphi\right),$$

$$Eu_\varphi^*=r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+C_\varphi^+ + B\lambda^+\nu^+S_\varphi^+ - C\left(4+\lambda^-\nu^+\right)C_\varphi^- + D\left(4+\lambda^-\nu^+\right)S_\varphi^-\right]+2rG_2\nu^+\sin 2\varphi,$$

где $\lambda^\pm=\lambda\pm 1,\ \ \nu^\pm=1\pm\nu,\ S_\varphi^\pm=\sin\left(\lambda\pm 1\right)\varphi,\ C_\varphi^\pm=\cos\left(\lambda\pm 1\right)\varphi.$

Как следует из (6), напряжения при $0<\mathrm{Re}\,\lambda<1$ будут обладать у вершины кругового сектора сингулярностью (напряжения стремятся к бесконечности) порядка $\left(1-\mathrm{Re}\,\lambda\right)$.

Очевидно, что параметр b в правой части граничного условия (3) не меняет порядок особенности напряжений в окрестности вершины сектора. Коэффициенты при особенностей, естественно, зависят и от

этого параметра. Возникает еще вопрос об определении параметра b в зависимости от угла раствора сектора α и функции $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$.

Из требования удовлетворения функции $\tilde{\Phi}(r,\varphi)$ неоднородным граничным условиям (3) и (3′), для неизвестных постоянных G_1 и G_2 получим

$$G_1 = bE/4,\ G_2 = -bE/4\cos 2\alpha,\ \alpha \neq k\pi/4 \quad (k = 1,3,5,7) \tag{7}$$

В случае $\alpha = k\pi/4 \quad (k = 1,3,5,7)$ параметр $b = 0$.

Удовлетворяя граничным условиям (2) – (4), для определения произвольных постоянных $A,\ B,\ C,\ D$ получим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\lambda^+ A + \lambda^- C = 0,\ \lambda^+ \nu^+ A + (\lambda^- \nu^+ + 4)C = 0, \\ &S_\alpha^+ A + C_\alpha^+ B + S_\alpha^- C + C_\alpha^- D = 0, \\ &-\lambda^+ \nu^+ S_\alpha^+ A - \lambda^+ \nu^+ C_\alpha^+ B + (4 - \lambda^+ \nu^+) S_\alpha^- C + (4 - \lambda^+ \nu^+) C_\alpha^- D = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, нахождение функций $\Phi^*(r,\varphi)$ для рассматриваемой задачи приведено к определению функций $\Phi(r,\varphi)$ для задачи, рассмотренной в работе [12,13].

Т.е., задача упругого стрингера приведена к соответсвующей задаче абсолютно жесткого при растяжении и гибкого при изгибе стрингера.

Из системы (8) следует $A = C = 0$ и тригонометрическое уравнение

$$\cos(\lambda + 1)\alpha \cdot \cos(\lambda - 1)\alpha = 0,$$

действительные и простые корни которого имеют следующий вид

$$\lambda_k = \alpha_0(2k+1) + 1,\ \tilde{\lambda}_n = \alpha_0(2n+1) - 1,\ \alpha_0 = \pi/2\alpha,\ (k,n) = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Условие конечности энергии упругой деформации в малой окрестности вершины кругового сектора накладывает на корни (9) ограничения

$$\lambda_k > 0,\ \tilde{\lambda}_n > 0, \tag{10}$$

которые, в зависимости от угла раствора кругового сектора α, ограничивают область изменения параметров k и n :

I. при $0 < \alpha < 2\pi$ имеем $k = 0,1,2,\ldots;\ n = 2,3,4,\ldots$

II. при $0 < \alpha < \pi/2$ имеем $k = 0,1,2,\ldots;\ n = 0,1,2,\ldots$

III. при $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ имеем $k = -1,0,1,\ldots;\ n = 1,2,3,\ldots$

IV. при $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ имеем $k = -2,-1,0,\ldots;\ n = 2,3,4,\ldots$

Учитывая, что функции вида

$$\Phi_{kn}(r,\varphi) = D_k r^{\lambda_k + 1}\cos(\lambda_k - 1)\varphi + B_n r^{\tilde{\lambda}_n + 1}\cos(\tilde{\lambda}_n + 1)\varphi$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3), функция напряжения Эри для всех четырех случаев принимает вид

$$\Phi^*(r,\varphi) = \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = 0 \\ a = -1 \\ a = -2 \end{Bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k r^{\lambda_k + 1} + B_k r^{\tilde{\lambda}_k + 1} \right] \cos\alpha_0(2k+1)\varphi + \frac{bE}{4} r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha} \right),$$

причем, здесь и далее $B_0 = B_1 = 0$ для задачи *I;* $B_{-1} = B_0 = 0$ для задачи *III*; $B_{-2} = B_{-1} = B_0 = B_1 = 0$ для задачи *IV*.

Компоненты напряжений, соответствующие этой функции, будут иметь вид

$$\begin{Bmatrix}\sigma^*_{\varphi I}\\ \sigma^*_{\varphi II}\\ \sigma^*_{\varphi III}\\ \sigma^*_{\varphi IV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(\lambda_k+1\right)r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{\lambda_k-1}\right]\cos\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi+ \tag{11}$$

$$+\frac{bE}{2}\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right),$$

$$\begin{Bmatrix}\tau^*_{r\varphi I}\\ \tau^*_{r\varphi II}\\ \tau^*_{r\varphi III}\\ \tau^*_{r\varphi IV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(\lambda_k-1\right)r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\sin\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi+ \tag{12}$$

$$+\frac{bE}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right),$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma^*_{rI}\\ \sigma^*_{rII}\\ \sigma^*_{rIII}\\ \sigma^*_{rIV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(3-\lambda_k\right)r^{\lambda_k-1}-B_k\tilde{\lambda}_k\left(\tilde{\lambda}_k+1\right)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\cos\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi+ \tag{13}$$

$$+\frac{bE}{2}\left(1+\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right).$$

$$E\begin{Bmatrix}u^*_{rI}\\ u^*_{rII}\\ u^*_{rIII}\\ u^*_{rIV}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)r^{\lambda_k}+B_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde{\lambda}_k}\right]\cos\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi+ \tag{14}$$

$$+\frac{bE}{2}\left(\nu^-+\nu^+\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right)r,$$

$$E\begin{Bmatrix}u^*_{\varphi I}\\ u^*_{\varphi II}\\ u^*_{\varphi III}\\ u^*_{\varphi IV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)r^{\lambda_k}+B_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde{\lambda}_k}\right]\sin\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi-\frac{bE}{2}\nu^+\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\alpha}r. \tag{15}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4) для D_k и B_k получим систему уравнений

$$\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\cos\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi=-E\ f_1^*\left(\varphi\right), \tag{16}$$

$$\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi=E\ f_2^*\left(\varphi\right), \tag{16}$$

$$f_1^*(\varphi)=f_1(\varphi)-\frac{bE}{2}\left(\nu^-+\nu^+\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right)r,\quad f_2^*(\varphi)=f_2(\varphi)+\frac{bE}{2}\nu^+\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\alpha}r.$$

Приступим к решению системы (16). Предварительно обратимся к многочленам Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n=0,1,2,...)$, которые составляют в пространстве $L_\omega^2(-1,1)$, где $\omega(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha,\beta>-1)$, полную ортогональную систему функций. В частных случаях

$$P_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}},\quad P_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\quad (n=1,2,...).$$

В этих частных случаях условия ортогональности многочленов Якоби имеют вид

$$\int_{-1}^{1}P_m^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}P_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\begin{cases}h_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases},\quad h_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{2n+1}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)}{(n!)^2}.$$

Отсюда после простых преобразований получим

$$\int_0^\pi\sin\left(\frac{2m+1}{2}\right)\vartheta\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\vartheta d\vartheta=\begin{cases}\pi/2 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}\quad (m,n=1,2,3,...).$$

Следовательно, система функций $\left\{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\vartheta\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна и ортогональна в пространстве $L_2(0,\pi)$. Аналогичные соотношения имеют место для косинусов.

Тогда, умножая первое уравнение на $\cos\alpha_0(2m+1)\varphi$, а второе – на $\sin\alpha_0(2m+1)\varphi$, интегрируя по φ в интервале $(0,\alpha)$, для всех четырех случаев находим неизвестные постоянные D_k и B_k

Задача I. $D_0=-\frac{2}{\alpha}\frac{E\,\tilde f_{10}^*}{\lambda_0^+\nu^+-4}=\frac{2}{\alpha}\frac{E\,\tilde f_{20}^*}{\lambda_0^-\nu^++4},\ D_1=-\frac{2}{\alpha}\frac{E\,\tilde f_{11}^*}{\lambda_1^+\nu^+-4}=\frac{2}{\alpha}\frac{E\,\tilde f_{21}^*}{\lambda_1^-\nu^++4},$

$$D_k=-\frac{E}{\alpha}\frac{\tilde f_{1k}^*+\tilde f_{2k}^*}{\nu^+-4},\quad B_k=\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_k^-\nu^++4)\tilde f_{1k}^*+\tilde f_{2k}^*(\lambda_k^+\nu^+-4)}{(\nu^+-4)\lambda_k^-\nu^+},\quad (k=2,3,4,...),$$

$$\tilde f_{1k}^*=\int_0^\alpha f_1^*(\varphi)\cos\alpha_0(2k+1)\varphi,\quad \tilde f_{2k}^*=\int_0^\alpha f_2^*(\varphi)\sin\alpha_0(2k+1)\varphi d\varphi,\quad (k=0,1,2,...).$$

При этом между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ возникают соотношения

$$(\lambda_0^-\nu^++4)\tilde f_{10}^*+(\lambda_0^+\nu^+-4)\tilde f_{20}^*=0,\quad (\lambda_1^-\nu^++4)\tilde f_{11}^*+(\lambda_1^+\nu^+-4)\tilde f_{21}^*=0.\tag{17}$$

Задача II. В данном случае для D_k и B_k получаются те же формулы (14), однако здесь $k=0,1,2,....$

Задача III.

$$D_{-1}=-\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_0^-\nu^++4)\tilde f_{10}^*-(\lambda_0^+\nu^+-4)\tilde f_{20}^*}{(\alpha_0^2\nu^+\nu^+-8\nu^++16)},\ D_0=\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_{-1}^-\nu^++4)\tilde f_{10}^*-(\lambda_{-1}^+\nu^+-4)\tilde f_{20}^*}{(\alpha_0^2\nu^+\nu^+-8\nu^++16)},\ D_k,B_k$$

имеют вид (14), $k=1,2,3,....$

Задача IV.

$$D_{-2}=\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_1^-\nu^++4)\tilde f_{11}^*+(\lambda_1^+\nu^+-4)\tilde f_{21}^*}{9\nu^+\nu^+(\alpha_0^2-8\nu^++16)},\ D_1=\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_{-2}^-\nu^++4)\tilde f_{11}^*-(\lambda_{-2}^+\nu^+-4)\tilde f_{21}^*}{9\nu^+\nu^+(\alpha_0^2\nu^+\nu^+-8\nu^++16)},$$

$$D_{-1}=\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_0^-\nu^++4)\tilde f_{10}^*+(\lambda_0^+\nu^++4)\tilde f_{20}^*}{\nu^+\nu^+(\alpha_0^2-\alpha_0+1)-8\nu^++16},\ D_0=\frac{E}{\alpha}\frac{(\lambda_{-1}^-\nu^++4)\tilde f_{10}^*-(\lambda_{-1}^+\nu^+-4)\tilde f_{20}^*}{\nu^+\nu^+(\alpha_0^2-\alpha_0+1)-8\nu^++16},$$

D_k и B_k имеют вид (14), $k=2,3,4,....$

Итак, решение данной задачи получено в виде сходящихся рядов (11) – (13), коэффициенты которых определяются в явном виде.

Исследуем сингулярности напряжений и поведение коэффициентов при сингулярности напряжений в окрестности вершины кругового сектора.

Задача I. Из формул (11) – (13) следует, что окрестность вершины сектора $(r \to 0)$ находится в малонапряженном состоянии – МС [5], т.е. напряжения стремятся к нулю, если $\alpha < 5\pi/4\ (k=2)$. Когда $\alpha > 5\pi/4,$ напряжения стремятся к бесконечности (в окрестности угловой точки имеет место концентрационное состояние – КС [5]). В предельном случае $\alpha_{пр} = 5\pi/4$ напряжения в окрестности вершины сектора конечны и вообще отличны от нуля.

Порядок особенности напряжений $1-\tilde{\lambda}_k = 2-\alpha_0(2k+1)$ изменяется в пределах

$$0<1-\tilde{\lambda}_k \le 3/4\ \ (k=2),\ \ 0<1-\tilde{\lambda}_k \le 1/4\ \ (k=3).$$

Коэффициенты при таких особенностей напряжений в случае нагружения дуговой части контура сектора условиями, удовлетворяющие соотношениям (17), отличны от нуля. Однако, подходящим подбором параметра b можно добиться того, чтобы коэффициент B_k при $k=2$ приравнивался к нулю. Из условий $B_2 = 0$ следует что

$$b = \frac{\left(\lambda_2^- \nu^+ + 4\right)\tilde{f}_{12} + \left(\lambda_2^+ \nu^+ - 4\right)\tilde{f}_{22}}{\left(\lambda_2^- \nu^+ + 4\right)\beta_1(\alpha_0,\nu) - \left(\lambda_2^+ \nu^+ - 4\right)\beta_2(\alpha_0,\nu)},$$

где $$\beta_1(\alpha_0,\nu) = \frac{\nu^-}{5\alpha_0} + \frac{5\alpha_0\nu^+}{4-25\alpha_0^2},\ \ \beta_2(\alpha_0,\nu) = -\frac{10\alpha_0\nu^+(5\alpha_0-1)}{4-25\alpha_0^2}.$$

И если функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ таковы, что $B_3 = 0,$ тогда в разложениях (11) – (13) исчезают также второй тип особенностей напряжений при $k=3.$

В этой задаче уравнения статики для сектора удовлетворяются без учета соотношений (17).

Задача II. Здесь предельный угол $\alpha_{пр} = \pi/4.$ Если $0<\alpha<\pi/4,$ вблизи вершины сектора имеет место МС, а при $\pi/4<\alpha<\pi/2$ – КС $(k=0).$ Причем, в зависимости от величины угла $\alpha,$ порядок сингулярности напряжений $1-\tilde{\lambda}_k = 2-\alpha_0$ изменяется в пределах $0<2-\alpha_0<1.$ Коэффициент при этой особенности в общем случае нагружения дуговой части контура сектора отличен от нуля, т.к. здесь отсутствуют условия (17). Когда $\alpha \to \pi/2,$ хотя порядок особенности напряжений стремится к единице, коэффициент при этой особенности стремится к нулю, благодаря множителю $\tilde{\lambda}_0$.

А это означает, что в решениях (11) – (13) исчезают слагаемые с "неинтегрируемыми" особенностями напряжений типа $r^{-1+\varepsilon}\ (\varepsilon \to 0\ при\ \alpha \to \pi/2),$ которые с точки зрения хрупкого разрушения материала недопустимы [1,2]. Уравнения статики для кругового сектора удовлетворяются автоматически.

Задача III. Здесь также имеем два предельных угла: $\alpha_{пр} = 3\pi/4$ при $k=1$ и $\alpha_{пр} = 5\pi/4$ при $k=2.$ Порядок особенности напряжений обусловлены как первыми членами формул (11) – (13), содержащими множитель $r^{-\alpha_0}\ (k=-1),$ так и соответствующими членами рядов (11) –(13) с множителями $r^{\tilde{\lambda}_k - 1}$ при $k=1,\ k=2,$ причем

$$1/3 \le \alpha_0 < 1\ \ (k=-1),\ \ 0<1-\tilde{\lambda}_k<1\ \ (k=1),\ \ 0<1-\tilde{\lambda}_k \le 1/3\ \ (k=2). \tag{18}$$

И в этом случае, когда $\alpha \to 3\pi/2,$ порядок сингулярности напряжений стремится к единице при $k=1,$ а коэффициенты при такой сингулярности стремятся к нулю, благодаря множителю $\tilde{\lambda}_1$. Уравнения статического равновесия удовлетворяются тождественно.

Задача IV. Предельный угол $\alpha_{пр} = 7\pi/4\ \ (k=3).$ Особенность напряжений обусловлены первыми двумя членами с множителями $r^{-3\alpha_0}$ и $r^{-\alpha_0}$, причем

$$3/4 \le 3\alpha_0 < 1\ \ \ (k=-2),\ 1/4 \le \alpha_0 \le 1/3\ \ \ (k=-1)$$

и соответствующими членами рядов (11) – (13)

$$1/3 \le 1-\tilde{\lambda}_k \le 3/4\ \ \ (k=2),\ \ 3/2\pi \le \alpha \le 2\pi;\ 0<1-\tilde{\lambda}_k \le 1/4\ \ (k=3),\ \ 7/4\pi \le \alpha \le 2\pi.$$

Коэффициенты при таких особенностей отличны от нуля при $k=1$ и $k=3.$

И здесь уравнения статического равновесия удовлетворяются без учета соотношений (15).

Следовательно, задача (1) – (4) распадается на четыре отдельные независимые задачи.

References

1. *Williams M.L.* Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. – J.Appl. Mech. 1952. Vol. 19. №4. P.526-528.

2. *Kalandia A.I.* Remarks on singularities of elastic solutions near corners. –Applied mathematics and mechanics. 1969. V.33№1. P.132 – 135.

3. *Uflyand Ya.S.* Integral transformations in problems of elasticity theory. M., Publishing house of the AS USSR. 1963. 367p.

4. *Cherepanov G.P.* Brittle Fracture Mechanics. M., Science. 1974.–640p.

5. *Chobanyan K.S.* Stresses in composite elastic bodies. Yerevan, Publishing house of the AS ArmSSR. 1987. – 338p.

6. *Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H, Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S.* On a Mixed Problem For An Elastic Space With A Crack Under Antiplane Deformations. – Collection of Papers. Yerevan. 2005. – 282p.

7. *Sargsyan A.M.* On the concentration of stresses in the elastic sector and the piezoelectric wedge. Germany. LAB LAMBERT Academic Publishing. 2016. – 77p.

8. *Sargsyan A.M.* Elastic equilibrium of the circular sector reinforced with a stringer and in contact with a rigid stamp without friction. – The problem of interaction dynamics of deformable media. Proceedings of the IX International Conference. Goris, October 01 – 06, 2018. pp. 258 – 262.

9. *Sargsyan A.M.* Elastic equilibrium of the circular sector, one side of which is reinforced with a stringer, the other side is in contact with a rigid stamp without friction. Part II. – American Scientific Journal, 2022, #57, issue #1, c.46 – 50.

10. *Sargsyan A.M.* Elastic equilibrium of the circular sector, one side of which is reinforced with a stringer, the other side is in contact with a rigid stamp without friction. Part III. – Journal of Science, Lyon, №34, 2022, p.21 – 25.

11. *Sargsyan A.M.* Elastic equilibrium of the circular sector, one side of which is reinforced with a stringer, the other side is in contact with a rigid stamp without friction. Part IV. –Journal of Science, Lyon, №35, 2022, p.30 – 35.

12. *Sargsyan A.M.* Plane problem of elasticity theory for a circular sector, the radial sides of which interact with an elastic stringer and with a rigid stamp without friction. –The scientific heritage, 2022, Vol.2, №87, p.38 – 41.

13. *Sargsyan A.M.* Plane problem of elasticity theory for a circular sector, the radial sides of which interact with an elastic stringer and with a rigid stamp without friction. Part II. – Scientific journal of Italy, 2023, №41, p.43 – 48.

14. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theoretic geschweisseter Verbindungen. // Ing. –Archiv. 1932. Bd.3. Heft 2. p.123.

15. *Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M.* Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Science. 1983. – 488 p.

16. *Sege G.* Orthogonal polynomials. M., Fizmathgiz. 1962. – 500p.