

Máster en Física Avanzada

Especialidad en Astrofísica



Trabajo Fin de Máster

POLARIMETRÍA INTERFEROMÉTRICA MEDIANTE EL USO DE TRAZAS DE CLAUSURA

Ezequiel Albentosa Ruiz

Tutor (1): Iván Martí-Vidal
Tutor (2): José Carlos Guirado

Curso académico 2020/21

Índice

1. Introducción.	3
2. Fundamentos teóricos y desarrollo matemático.	6
2.1. Teoría de polarización de la luz.	6
2.2. RIME: la ecuación de medida de la radiointerferometría.	7
2.2.1. La matriz de visibilidad.	7
2.2.2. Contaminación de la matriz de visibilidad.	8
2.2.3. La ecuación de interferometría escalar.	9
2.3. Observables interferométricos tradicionales: las cantidades de clausura.	9
2.4. Las trazas de clausura.	10
2.4.1. Invariancia bajo rotaciones en la esfera de Poincaré.	11
2.4.2. El potencial de las trazas de clausura.	12
2.5. Conexión entre las trazas de clausura y las cantidades de clausura tradicionales.	13
3. Desarrollo analítico de la traza de clausura de la fuente doble.	14
3.1. Análisis de las trazas de clausura de la fuente doble para el caso $I_1 = I_2$	16
3.2. Análisis de las trazas de clausura de la fuente doble para el caso $I_1 \neq I_2$	21
4. Desarrollo computacional: obtención de las trazas de clausura para casos triviales y análisis de su comportamiento.	24
4.1. Creación del <i>software</i> : construcción de la matriz de visibilidades con herramientas de la infraestructura CASA y cálculo de la traza.	24
4.1.1. Comparación de resultados con el artículo de <i>Broderick & Pesce (2020)</i>	25
4.2. Resultados con datos sintéticos.	26
4.2.1. Un caso trivial: la fuente puntual.	26
4.2.2. Degeneraciones de la traza de la fuente doble.	27
4.2.3. Cambios de las trazas de la fuente doble bajo variaciones de polarización diferencial en la estructura de la fuente.	31
5. Aplicación de las trazas de clausura a datos reales del núcleo activo de la galaxia M87.	35
6. Conclusiones.	38
Apéndices.	40
A. Expresión analítica de la traza de la fuente doble.	40
B. Breve descripción de las antenas empleadas en la simulación de observaciones VLBI.	41
C. Reconstrucción de imágenes interferométricas en Astronomía.	42
C.1. El método MFS.	42
C.2. Desarrollo observacional: obtención de las imágenes de polarización en observaciones interferométricas. El algoritmo TCLEAN.	43
D. Rotación de Faraday por desarrollo en serie de los parámetros de Stokes.	45
Bibliografía	47

Resumen

En la radiointerferometría astronómica moderna, una de las mayores dificultades a resolver para poder analizar los datos obtenidos en las observaciones es la corrección de los efectos instrumentales que contaminan las matrices de visibilidad, construidas al descomponer la radiación incidente en cada par de antenas del interferómetro en dos componentes ortogonales de polarización y calcular los productos de correlación entre dichas antenas. Tradicionalmente, las clausuras de amplitud y fase han demostrado ser claves para la radiointerferometría gracias a su invariancia a efectos de ganancia en las antenas, aunque su uso es bastante limitado, al no ser invariantes a la calibración, pues son sensibles a efectos de polarización instrumental. No obstante, en 2020, Avery E. Broderick y Dominic W. Pesce propusieron las trazas de clausura o *closure traces*, un nuevo tipo de observable interferométrico invariante a cualquier efecto instrumental que sea expresable mediante matrices de Jones. La aplicación de las trazas de clausura a observaciones de interferometría astronómica puede permitirnos obtener información sobre el estado de polarización de las fuentes observadas que sea robusta e independiente de la polarización instrumental. No obstante, las clausuras no guardan toda la información relativa a la estructura de la fuente, sino que sufren de varias degeneraciones.

En esta tesis, se planteará un estudio detallado de las propiedades de las trazas de clausura y su conexión con las cantidades de clausura tradicionales, profundizando en el comportamiento de las trazas para el caso de una fuente doble. Hecho esto, se desarrollará un software de cálculo de las trazas de clausura y se hará un análisis del comportamiento de las trazas de clausura sobre un conjunto de datos interferométricos simulados, para comprobar su robustez frente a efectos instrumentales y, a su vez, estudiar las degeneraciones bajo cambios en la esfera de Poincaré. Finalmente, se calcularán las trazas de clausuras sobre datos reales tomados con el telescopio *Atacama Large mm/submm Array* (ALMA) y se compararán los resultados del análisis con los obtenidos a partir de las técnicas estándar de reconstrucción de imágenes. De esta forma, al finalizar la tesis, tendremos una comprensión más completa de las trazas de clausura y del potencial de este nuevo observable interferométrico en el análisis de observaciones de polarimetría interferométrica.

1. Introducción.

En radioastronomía, el estudio de los astros lejanos se realiza mediante la detección, en un interferómetro, de la radiación electromagnética que nos llega de ellos. Las observaciones interferométricas requieren que la radiación incidente en cada antena del interferómetro sea desacoplada en dos componentes ortogonales de polarización, algo posible gracias a que los radiotelescopios disponen de receptores sensibles a la polarización de la radiación incidente. De esta forma, los datos primarios que proporciona la radiointerferometría son las visibilidades, correlaciones complejas entre los campos eléctricos de cada una de las componentes ortogonales de polarización de la radiación incidente en cada antena. Así, para cada par de antenas $A - B$ del interferómetro, se obtienen cuatro visibilidades que permiten construir un observable interferométrico clave para la radioastronomía, la matriz de coherencia espacial entre los elementos del interferómetro o matriz de visibilidad, \mathbf{V}_{AB} , cuya construcción y propiedades se analizan con todo detalle en ref. [1].

La importancia de la matriz de visibilidad es debida a la *Radio Interferometer Measurement Equation* (RIME) (refs. [2, 3, 4, 5] y [1]), un modelo matemático basado en un formalismo matricial que relaciona, mediante la transformada de Fourier, la respuesta de un radiointerferómetro, es decir, los elementos de la matriz de visibilidad (las visibilidades de cada par de antenas), con los elementos de la matriz brillo, que son combinaciones de los parámetros de Stokes (I, Q, U, V). Sin embargo, en las observaciones interferométricas, las visibilidades están contaminadas por efectos instrumentales (ganancias en las antenas, fuga de polarización, ...) que se modelan como factores dependientes de cada antena, y que RIME permite modelar como matrices de Jones que se acoplan a la matriz de visibilidad. Por lo tanto, para poder relacionar la matriz de visibilidad con la matriz brillo y obtener la distribución de brillo de los parámetros de Stokes, es necesario caracterizar adecuadamente las matrices de Jones que contaminan las visibilidades medidas por cada antena y aplicarlas a la matriz de visibilidad observada, para así obtener la matriz de visibilidad calibrada (sin los efectos instrumentales).

La calibración de los efectos instrumentales que afectan a la matriz de visibilidad es una de las mayores dificultades a resolver en radiointerferometría para analizar correctamente la polarización de la radiación de las fuentes observadas, siendo esta calibración esencial para obtener las imágenes de polarización de los parámetros de Stokes de la fuente. Con el objetivo de construir cantidades invariantes a efectos instrumentales, en radiointerferometría se han construido *cantidades de clausura*. Tradicionalmente, se han empleado las clausuras de fase (ref. [6]) y de amplitud (ref. [7]), observables interferométricos invariantes a los efectos atmosféricos y a las ganancias electrónicas dependientes de cada antena, pero que no son invariantes a la calibración, al ser invariantes únicamente cuando la fuente no está polarizada y no hay polarización instrumental (*D-terms*).

En este contexto, entran las trazas de clausura, un observable interferométrico novedoso desarrollado por *Broderick & Pesce* en 2020 (ref. [8]), y con un gran potencial para el análisis de la estructura de polarización de los astros lejanos que se estudian en radioastronomía, ya que son invariantes a la calibración, es decir, son invariantes a los efectos de cualquier conjunto de matrices de Jones que contaminen las visibilidades, tal y como se demuestra en la sección 2.4. Se trata de una cantidad de clausura compleja construida a partir de las matrices de visibilidad \mathbf{V} medidas para líneas de base (*baselines*) que conectan un cuarteto de antenas, $\{A, B, C, D\}$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}_{ABCD} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}_{AB} \mathbf{V}_{CB}^{-1} \mathbf{V}_{CD} \mathbf{V}_{AD}^{-1}).$$

Como consecuencia de la invariancia de la traza de clausura a cualquier conjunto de matrices de Jones, este nuevo observable interferométrico presenta una degeneración a rotaciones globales en la esfera de Poincaré, como se demuestra en la subsec. 2.4.1. Esto implica que cualquier cambio en el valor de la traza de clausura calculada a partir de las visibilidades de un cuarteto de antenas se debe a un cambio en la polarización diferencial de la fuente (por *polarización diferencial*, se entienden cambios en las diferencias del estado de polarización de las distintas componentes de la distribución de brillo de la fuente). Por tanto, esta degeneración tiene un gran impacto en el análisis de la estructura de polarización de las fuentes observadas, pues solamente se observarán cambios en el comportamiento de las trazas si la polarización de la fuente cambia de forma inhomogénea.

Como muestra del potencial de esta nueva cantidad de clausura, sus propiedades se explotaron en el estudio de la estructura de polarización del agujero negro central de M87 a escalas de su horizonte de

sucesos (refs. [9, 10, 11, 12, 13, 14]), siendo esta la primera aplicación publicada de las trazas de clausura (ref. [15]).

En definitiva, sabemos que las trazas de clausura son observables interferométricos potentes, pues son independientes a efectos instrumentales, pero todavía es necesario profundizar en sus propiedades, las degeneraciones que se derivan de estas y en cómo se podrían utilizar las trazas en el modelado de la estructura de polarización de las fuentes observadas. En esta tesis, se ha realizado una aproximación a este problema al analizar con detalle el caso de una fuente doble. Con el objetivo de obtener unas reglas generales del comportamiento de las trazas de la fuente doble, en primer lugar hemos realizado un desarrollo analítico del problema, construyendo las matrices de visibilidad de un cuarteto de antenas observando una fuente doble y calculando la traza de clausura a partir de su definición (ver sec. 3).

De esta forma, obtenemos la expresión algebraica más general (ap. A), siendo este resultado una evidencia de que las trazas, si bien conceptualmente son sencillas, incluso para el caso más trivial presentan un comportamiento general no trivial en función de los parámetros de Stokes y de la posición de las antenas. Con la expresión general de la traza de clausura de la fuente doble, podemos estudiar con detalle cómo se comportan las trazas al modificar los parámetros de Stokes de una de las componentes de la fuente doble. Para ello, en primer lugar, fijaremos los parámetros de Stokes de la componente 1 y variaremos los parámetros de Stokes (Q, U, V) de la componente 2, tomando $I_1 = I_2$ (caso más sencillo de la fuente doble). Para poder analizar correctamente cómo la variación los parámetros de Stokes de una de las componentes de la fuente doble queda impresa en las trazas de clausura, estudiaremos la razón entre las distintas trazas calculadas al modificar los parámetros de Stokes, respecto de la traza de la fuente doble con $Q_2 = U_2 = V_2 = 0$ (es decir, con la componente 2 sin polarizar). Esta primera parte del desarrollo analítico se desarrolla en detalle en la subsec. 3.1. Para completar el análisis del comportamiento de la traza, se estudiará el caso en el que la intensidad de ambas componentes de la fuente doble es distinta, $I_1 \neq I_2$, fijando de nuevo los parámetros de Stokes de la componente 1, pero modificando tanto la intensidad I_2 como los parámetros de Stokes (Q_2, U_2) de la componente 2, tal y como se expone en la subsec. 3.2. Este análisis nos ha permitido obtener una serie de conclusiones generales del comportamiento de las trazas de una fuente doble:

- En el caso en el que las dos componentes de la fuente doble presentan la misma intensidad, tal y como se recoge en las figs. 3-10:
 - se observa un extremo (máximo o mínimo) en la amplitud cuando las dos componentes de la fuente doble presentan el mismo estado de polarización (misma intensidad y ángulo de polarización).
 - El hecho de que el estado de polarización (es decir, la intensidad y el ángulo de polarización) de una componente de la fuente doble se aleje del estado de polarización de la otra componente queda impreso en la amplitud de la traza como un aumento o una disminución de la amplitud, en función de si el extremo es un mínimo o un máximo, respectivamente.
 - La fase de la traza es más sensible a cambios en la intensidad de polarización cuando los ángulos de polarización (EVPA) de ambas componentes apuntan en la misma dirección, y es menos sensible cuando apuntan en distintas direcciones.
 - Alterar el orden de la combinación de antenas simplemente modifica si el extremo en la amplitud es un máximo o un mínimo, pero la interpretación del comportamiento de la traza no se modifica. De igual forma, modificar la distancia de la fuente doble es algebraicamente equivalente a escalar la distribución espacial de las antenas, por lo que ambos efectos pueden estudiarse de forma única.
- En el caso de la fuente doble con componentes de distinta intensidad, las figs. 11, 12 y 13 permiten concluir que:
 - se siguen obteniendo extremos (máximos o mínimos) en las amplitudes de las trazas cuando los ángulos de polarización (EVPA) son iguales, pero ya no hay una relación trivial entre los ratios de la intensidad de polarización y los ratios de intensidad entre ambas componentes.
 - El comportamiento de las fases de las trazas no presenta variaciones respecto del caso de ambas componentes con igual intensidad.

Además, esta expresión nos permite obtener, de forma directa, las trazas de clausura de los casos más triviales: la fuente puntual, con traza fase nula y amplitud unidad, y la fuente doble con una componente

sin polarizar, cuya traza está degenerada a cualquier rotación de la esfera de Poincaré, pues al presentar una sola componente polarizada, rotar la polarización de esta componente es equivalente a una rotación global en dicha esfera.

Como el desarrollo analítico nos ha proporcionado unas reglas básicas para interpretar las trazas de la fuente doble, a continuación, realizamos el desarrollo computacional (ver sec. 4), que consiste en calcular las trazas de clausura para casos triviales, empleando datos de simulaciones de observaciones VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) obtenidos con el *software* `polsimulate` (ref. [16]). Para ello, desarrollamos un *software* que, a partir de datos de observaciones interferométricas almacenados en una base de datos denominada *MeasurementSet* (.ms, refs. [17, 18]), construye la matriz de visibilidades con herramientas de la infraestructura CASA y calcula la traza de clausura de cada uno de los cuartetos de antenas del interferómetro, además de las cantidades escalares de clausura (clausuras de amplitud y de fase).

Con nuestro algoritmo de cálculo de trazas, podemos comprobar cómo tanto las trazas de clausura como las cantidades de clausura tradicionales se comportan de forma esperada para los casos triviales de fuente puntual y fuente doble con una componente sin polarizar, al ser invariantes bajo rotaciones en la esfera de Poincaré e insensibles a efectos instrumentales, como se muestra en las figs. 16 y 17. Sin embargo, al estudiar la fuente doble con ambas componentes polarizadas, se hace evidente que las cantidades de clausura tradicionales ya no son invariantes a efectos instrumentales, mientras que las trazas de clausura se mantienen insensibles a dichos efectos, como se comprueba al comparar las trazas presentadas en las figs. 18 y 19.

Para acabar con el estudio de la fuente doble, analizamos el comportamiento de las trazas de clausura de la fuente doble al modificar la polarización de una de las componentes mediante rotaciones en la esfera de Poincaré, mientras que la rotación de la otra componente se mantiene invariante, lo que implica que se modifica la polarización diferencial. Así, en la fig. 21, obtenemos que la amplitud y la fase de las trazas de clausura son sensibles a los cambios de la polarización diferencial entre ambas componentes de la fuente doble, pues se observa que son mayores (o menores) que la traza para la fuente con una componente polarizada, y al rotar la polarización de una de las componentes de la fuente en la esfera de Poincaré se mantiene el máximo o el mínimo en ese mismo instante de tiempo, tal y como esperábamos atendiendo a nuestras conclusiones del análisis del comportamiento de las trazas de la fuente doble.

Para finalizar con la tesis, ahora que conocemos con detalle el comportamiento de las trazas de clausura en la fuente doble, hemos aplicado nuestro software de cálculo de trazas a datos reales de observaciones radiointerferométricas del núcleo activo de M87, de tal forma que obtenemos las trazas correspondientes a esta fuente. En concreto, analizaremos unos datos tomados con el telescopio ALMA durante las observaciones del EHT en la campaña de abril de 2017. Las medidas se tomaron en cuatro ventanas espectrales distintas (0, 1, 2 y 3, correspondientes a frecuencias de 213.1GHz, 215.1GHz, 227.1GHz y 229.1GHz), para cuatro épocas distintas, obteniendo cuatro *tracks* de datos, aunque, para el cálculo de trazas, seleccionaremos el *track* B (2017-04-06). En la fig. 22 se muestra la estructura de polarización del núcleo activo y el chorro de M87, obtenida a partir de los datos de ALMA (ver ap. C). Esta figura nos permite analizar la estructura de polarización de M87. Así, se observan dos componentes claramente diferenciadas en polarización, el *core* y los *knots*, de forma que podemos aproximar esta fuente como una fuente doble y, a nivel cualitativo, emplear las conclusiones del desarrollo analítico para comparar las distintas trazas obtenidas en distintas ventanas espectrales.

En la fig. 24 se muestra la evolución de la amplitud y la fase de varias trazas de clausura a lo largo de la duración de las observaciones de M87. Podemos comprobar cómo en las trazas calculadas se observa que hay una variación de la amplitud y la fase de la traza con la frecuencia de observación, lo que se traduce necesariamente en una rotación de Faraday no homogénea (es decir, diferencial) en el núcleo/chorro de M87. Lo relevante de este resultado es que supone una comprobación robusta de que existe rotación de Faraday diferencial en M87, ya que es independiente de cualquier posible defecto de calibración instrumental en los datos. Estos resultados están en consonancia con los del TFG (ref. [19]), donde se encontró que la variación del EVPA (y por tanto la rotación de Faraday) con la frecuencia es significativamente mayor en el núcleo activo de M87 que en los *knots* (ver fig. 23).

Como conclusión, en esta tesis hemos estudiado con todo detalle el caso de la fuente doble, pero sería necesario extender el análisis a fuentes complejas, siendo este uno de los planes a futuro para aumentar nuestra comprensión de las trazas de clausura y explotar todo el potencial oculto en estos observables interferométricos.

2. Fundamentos teóricos y desarrollo matemático.

2.1. Teoría de polarización de la luz.

El estudio de astros lejanos se puede realizar observando la radiación electromagnética que nos llega de ellos, siendo la polarización uno de los aspectos de mayor relevancia. Para caracterizar el estado de polarización de una onda vectorial monocromática, basta con emplear tres variables independientes, existiendo diversas parametrizaciones que cumplen esta finalidad. Las convenciones seguidas en radioastronomía para caracterizar la polarización de los astros fueron establecidas por la *International Astronomical Union* (ref.[20]), siendo recogidas por Thompson, Moran y Swenson en 1986 (ref. [21]) y resumidas por Hamaker y Bregman en 1996 (ref. [2, 3, 4]).

En radioastronomía, se emplea un conjunto de cuatro parámetros para caracterizar la polarización de la radiación electromagnética, $\{I, Q, U, V\}$. I es una medida de la intensidad total de la onda, Q y U representan la componente linealmente polarizada, y V representa la componente circularmente polarizada. Con estas definiciones, se puede expresar el ángulo de posición de la elipse de polarización, también denominado EVPA (*Electric Vector Position Angle*) o ángulo de polarización, en función de los parámetros de Stokes:

$$\psi = \frac{1}{2} \text{atan} \left(\frac{U}{Q} \right). \quad (2.1)$$

Este observable nos proporciona la orientación de la polarización lineal. Por otro lado, se puede definir la elipticidad de la elipse de polarización como:

$$\chi = \frac{1}{2} \text{atan} \left(\frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2}} \right). \quad (2.2)$$

Adicionalmente, se define la intensidad de polarización lineal, m , como

$$m = p I = Q^2 + U^2$$

(donde p es el grado de polarización lineal), cuyo módulo es la luminosidad linealmente polarizada o *polarization brightness*:

$$m = \sqrt{Q^2 + U^2}. \quad (2.3)$$

Para simplificar la visualización de los distintos estados de polarización posibles, Poincaré introdujo una representación que interpretaba los ángulos 2ψ y 2χ como la longitud y la latitud de una esfera de radio S_0 (tal y como se visualiza en la figura 1). En esta representación, existe una relación inequívoca entre los distintos estados de polarización posibles, y los puntos de la esfera. Adicionalmente, esta representación permite interpretar los parámetros de Stokes como las coordenadas cartesianas de los puntos de la esfera:

$$\begin{aligned} S_0 &= I \\ S_1 &= Q = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ S_2 &= U = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ S_3 &= V = S_0 \sin 2\chi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además, la representación de los parámetros de Stokes en una esfera evidencia que, de los cuatro parámetros de Stokes, solamente tres son independientes ya que, por construcción, para luz parcialmente polarizada, se ha de cumplir la condición:

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2, \quad (2.5)$$

cumpliéndose la igualdad cuando la luz está totalmente polarizada. De esta forma, se puede definir el grado de polarización de la luz, p , como:

$$p = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}. \quad (2.6)$$

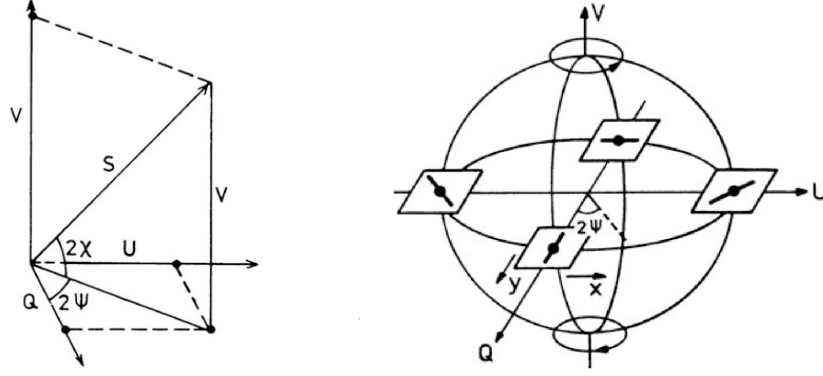


Figura 1: A la izquierda, se ilustra la definición de los parámetros de Stokes. A la derecha, se muestra la esfera de Poincaré y la polarización correspondiente a puntos concretos de la esfera. Estas representaciones han sido extraídas de ref. [22].

2.2. RIME: la ecuación de medida de la radiointerferometría.

La *Radio Interferometer Measurement Equation* (RIME) es un modelo matemático basado en un formalismo matricial que busca describir la respuesta de un radiointerferómetro a una señal. Este modelo fue planteado como un formalismo de matrices 4×4 por Hamaker et. al. en 1996 (refs. [2, 3]). No obstante, el uso de este formalismo estaba limitado a fuentes discretas. Sin embargo, en el año 2000, Hamaker (ref. [5]) propuso una versión 2×2 del formalismo, siendo este el punto de partida de Smirnov (ref. [1]) para, en 2011, extender el formalismo RIME a fuentes continuas, permitiendo así estudiar el caso más general: la totalidad del cielo que se explora en las observaciones radiointerferométricas.

Para obtener la denominada *full-sky RIME*, consideramos el cielo como una distribución de brillo continua, $\mathbf{B}(\vec{\Omega})$, donde $\vec{\Omega}$ es el ángulo sólido del cielo. Además, para describir los efectos que se acoplan a la señal en el camino desde la fuente hasta su detección, se emplean las denominadas matrices de Jones, \mathbf{J}_A , características de cada antena A . Estas matrices se pueden expresar como una cadena de matrices:

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{l}) = \mathbf{G}_A \mathbf{E}_A(\mathbf{l}) \mathbf{K}_A(\mathbf{l}), \quad (2.7)$$

donde \mathbf{l} es el vector dirección unitario, \mathbf{E}_A y \mathbf{G}_A son, respectivamente, las componentes dependiente e independiente de la dirección de la fuente, y \mathbf{K}_A es el término de fase.

Con este formalismo, se puede obtener la visibilidad medida por un interferómetro, para el par de antenas A y B , mediante la integral en todo el ángulo sólido:

$$\mathbf{V}_{AB} = \int_{\Omega} \mathbf{G}_A \mathbf{E}_A(\vec{\Omega}) \mathbf{B}(\vec{\Omega}) \mathbf{E}_B^\dagger(\vec{\Omega}) \mathbf{G}_B^\dagger \exp \left[2\pi j \frac{\vec{B} \vec{\Omega}}{\lambda} \right] d\Omega = \mathbf{G}_A \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_{AB}(\vec{\Omega}) \exp \left[2\pi j \frac{\vec{B} \vec{\Omega}}{\lambda} \right] d\Omega \right) \mathbf{G}_B^\dagger, \quad (2.8)$$

donde \vec{B} es el vector línea de base (*baseline*) que une las antenas A y B y λ es la longitud de onda de observación. Se define la distribución de brillo aparente del cielo como $\mathbf{B}_{AB} = \mathbf{E}_A \mathbf{B} \mathbf{E}_B^\dagger$; si los efectos que dependen de la dirección de la fuente son idénticos para cada antena, \mathbf{B}_{AB} es independiente de la línea de base. Esta expresión tiene la forma de una transformada de Fourier 2D con *kernel* igual a $\exp(2\pi j \vec{B} \vec{\Omega} / \lambda)$, salvo por los efectos dependientes de la dirección de la fuente, \mathbf{E}_A . Como consecuencia, en ausencia de estos efectos, la matriz brillo sería la transformada de Fourier de la matriz de visibilidad:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{J}_A \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}(\vec{\Omega}) \exp \left[2\pi j \frac{\vec{B} \vec{\Omega}}{\lambda} \right] d\Omega \right) \mathbf{J}_B^\dagger, \quad (2.9)$$

donde \mathbf{J}_A son las matrices de Jones que caracterizan los efectos independientes de la dirección que contaminan la señal.

2.2.1. La matriz de visibilidad.

Las observaciones interferométricas requieren que la radiación incidente en cada telescopio sea desacoplada en dos componentes ortogonales de polarización. Ese paso es esencial para la construcción de la matriz

de coherencia espacial entre los elementos del interferómetro (p. ej., ref. [1]). Como los radiotelescopios disponen de receptores sensibles a la polarización de la radiación incidente, los datos primarios que proporciona la radiointerferometría son las correlaciones complejas entre los campos eléctricos que inciden en cada telescopio (antena) del *array*, en cada una de las componentes ortogonales de polarización. Si los polarizadores de dos antenas, A y B , del *array* dividen la radiación incidente en sus componentes de polarización circular, podemos calcular cuatro productos de correlación entre dichas antenas:

$$RR_{AB} \equiv \langle E_{R,A} E_{R,B}^* \rangle, \quad (2.10a)$$

$$RL_{AB} \equiv \langle E_{R,A} E_{L,B}^* \rangle, \quad (2.10b)$$

$$LR_{AB} \equiv \langle E_{L,A} E_{R,B}^* \rangle, \quad (2.10c)$$

$$LL_{AB} \equiv \langle E_{L,A} E_{L,B}^* \rangle, \quad (2.10d)$$

donde E es el campo eléctrico, E_R denota la componente de polarización dextrógira, y E_L la componente levógira; $*$ denota el complejo conjugado y $\langle \rangle$ el promedio temporal. Estas cuatro visibilidades permiten construir la matriz de visibilidad:

$$\mathbf{V}_{AB} = \begin{pmatrix} RR_{AB} & RL_{AB} \\ LR_{AB} & LL_{AB} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

La importancia de esta matriz radica en que permite conectar las visibilidades experimentales con la distribución de brillo de los parámetros de Stokes, que describen la polarización de la fuente, gracias a la ecuación RIME (ref. [1]), que relaciona, mediante la transformada de Fourier, los elementos de la matriz de visibilidad con los elementos de la denominada matriz brillo, que son combinaciones de los parámetros de Stokes:

$$\mathbf{B}_{\odot} = \begin{pmatrix} I + V & Q + iU \\ Q - iU & I - V \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde \odot denota que la matriz de brillo se da en la base de polarización circular.

2.2.2. Contaminación de la matriz de visibilidad.

En las observaciones interferométricas, las visibilidades están contaminadas por efectos instrumentales que, comúnmente, pueden modelarse como factores que dependen de cada antena. Como consecuencia, antes de realizar la transformada de Fourier de la matriz de visibilidades para obtener la matriz brillo, es necesario calibrar las observaciones para corregir estos efectos instrumentales. RIME permite modelar cualquier efecto instrumental en los receptores como matrices de Jones (dependientes de cada antena) que se acoplan a la matriz de visibilidades.

De esta forma, la visibilidad \mathbf{V}_{AB} observada se puede relacionar con la visibilidad $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$ 'calibrada' (que, en principio, se correspondería con la matriz de coherencia espacial, cuya transformada de Fourier es precisamente la matriz de brillo, \mathbf{B}_{\odot}), contaminando la matriz de visibilidad $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$ con términos de ganancia y de corrupción de señal en el receptor mediante una secuencia de transformaciones lineales:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{G}_A \mathbf{D}_A \bar{\mathbf{V}}_{AB} \mathbf{D}_B^{\dagger} \mathbf{G}_B^{\dagger}, \quad (2.13)$$

donde \dagger representa la hermítica conjugada. La matriz de Jones diagonal

$$\mathbf{G}_A = \begin{pmatrix} G_{R,A} & 0 \\ 0 & G_{L,A} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

contiene los términos de ganancias en la antena A (debidos a la electrónica de su receptor o a efectos atmosféricos). Estas ganancias son complejas, con lo que modulan la amplitud y la fase de la señal observada. Por otro lado, la matriz de Jones no diagonal

$$\mathbf{D}_A = \begin{pmatrix} 1 & D_{R,A} \\ D_{L,A} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

contiene la pérdida o fuga de polarización (*polarization leakage*). A este tipo de matrices se les denomina *D-terms*, y su relevancia física radica en que incorporan el efecto de acoplamiento de señal producida por el receptor al captar la señal, debido a que cuando el receptor capta la señal pura R (o L), hay una cierta impedancia instrumental; esto implica que una parte de la señal se emite al rebotar en el receptor,

y entra en el otro canal L (o R) con una fase y un retraso. En consecuencia, las polarizaciones R y L observadas por una antena no son señales puras, sino una mezcla de la señal en R y la señal en L, con lo que se pierde fidelidad en las imágenes obtenidas.

En definitiva, si podemos determinar las matrices de Jones que contaminan nuestros datos interferométricos, es decir, la matriz de visibilidad \mathbf{V}_{AB} observada por el par de antenas A y B, podemos obtener la visibilidad calibrada de la fuente observada, $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$, que está directamente relacionada con las transformadas de Fourier de los parámetros de Stokes ($\tilde{I}, \tilde{Q}, \tilde{U}, \tilde{V}$) como

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} = \begin{pmatrix} \tilde{I} + \tilde{V} & \tilde{Q} + i\tilde{U} \\ \tilde{Q} - i\tilde{U} & \tilde{I} - \tilde{V} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

de forma que se obtiene el cartografiado Stokes completo de la polarización de la fuente. El símbolo \sim denota la transformada de Fourier, calculada en el punto dado por la línea de base entre las antenas A y B (ref. [1]).

2.2.3. La ecuación de interferometría escalar.

RIME permite conectar las visibilidades experimentales con la distribución de brillo de los parámetros de Stokes, que describen la polarización de la fuente, mediante la transformada de Fourier de los elementos de la matriz de visibilidad, empleando un formalismo de matrices 2×2 complejas. Sin embargo, RIME se puede simplificar si consideramos el caso más sencillo, en el que las fuentes no están polarizadas, la señal no está sometida a efectos dependientes de dirección, y se pueden despreciar los efectos de polarización instrumental, con lo que solamente intervienen efectos atmosféricos (independientes de la polarización) y de ganancia electrónica de las antenas.

Al no estar polarizadas, el único parámetro de Stokes no nulo es Stokes I , y por tanto la matriz brillo de la fuente se convierte en una *matriz escalar*, puesto que se puede expresar como $\mathbf{B} = I \cdot \mathbf{I}_2$, es decir, el producto del parámetro de Stokes I , escalar complejo, por la matriz identidad \mathbf{I}_2 . De igual forma, la matriz de visibilidad es un escalar, $V_{AB} = \mathbf{I}_2 \cdot (RR_{AB} + LL_{AB})/2$, y se corresponde, puesto que ya no hay efectos dependientes de dirección ni de polarización instrumental, con la transformada de Fourier de Stokes I , salvo por los efectos (escalares) de ganancia, G_A , tal y como describe la RIME escalar:

$$V_{AB} = G_A \left(\int_{\Omega} I(\vec{\Omega}) \exp \left[2\pi j \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Omega}}{\lambda} \right] d\Omega \right) G_B^*. \quad (2.17)$$

En este caso, tanto G_A como G_B e I son escalares de dominio complejo.

2.3. Observables interferométricos tradicionales: las cantidades de clausura.

Para poder analizar adecuadamente los datos obtenidos de las observaciones radiointerferométricas, es necesario corregir los efectos instrumentales que contaminan a las matrices de visibilidad, introduciendo efectos de ganancia y de polarización instrumental (*D-terms*). Para ello, es necesario caracterizar adecuadamente las matrices de Jones de cada antena (ecs. 2.14, 2.15) y aplicarlas a la matriz de visibilidad observada, para así obtener la matriz de visibilidad calibrada, $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$.

Estimar los distintos términos de las matrices de Jones de las antenas no es tarea sencilla (ref. [1]), y una mala calibración afecta enormemente a las imágenes de polarización Stokes Q y Stokes U de la fuente. De hecho, este problema es una de las mayores dificultades a resolver para analizar correctamente la polarización de la emisión en radio de la fuente observada.

Es en este contexto donde surge la motivación para construir cantidades de clausura. Tradicionalmente, en radiointerferometría se han empleado dos cantidades de clausura: las clausuras de fase (introducidas por Jennison en [6]), y las clausuras de amplitud (introducidas por Twiss et al. en [7]). Ambas cantidades de clausura son un tipo de observables interferométricos que se caracterizan por ser invariantes a los efectos de ganancia desconocidos introducidos por las antenas. No obstante, no son invariantes a la calibración, al ser invariantes únicamente cuando la fuente no está polarizada y no hay polarización instrumental (*D-terms*), lo que supone una limitación en la utilidad de estos observables.

Por lo tanto, las cantidades de clausura son invariantes únicamente cuando se aplican al caso de fuentes no polarizadas, en observaciones en las que se pueden despreciar los efectos de polarización instrumental, de forma que intervienen únicamente efectos de ganancia. En estos casos particulares, se puede usar la ecuación RIME escalar (ec. 2.17), a partir de la cual se definen, precisamente, las clausuras de fase y amplitud.

Las clausuras de amplitud se definen a partir de las visibilidades medidas para líneas de base (*baselines*) que conectan un cuarteto de antenas, $\{A, B, C, D\}$, como:

$$\mathcal{C}_{ABCD} = \frac{|V_{AB}| \cdot |V_{CD}|}{|V_{CB}| \cdot |V_{AD}|}. \quad (2.18)$$

Esta cantidad se mantiene invariante al añadir términos de ganancia, ya que las ganancias son multiplicativas para una antena (ver ec. 2.17), y en la definición de la clausura de amplitud hay las mismas antenas tanto en el numerador como en el denominador. Por lo tanto, esta cantidad es independiente de cualquier ganancia, en cualquiera de las antenas. Por otro lado, las clausuras de fase están definidas como

$$\phi_{ABC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CA}, \quad (2.19)$$

donde ϕ_{ij} es la fase de la visibilidad media entre las antenas i y j . A partir de esta definición, la clausura de fase se entiende como la acumulación de la fase interferométrica a lo largo de un triángulo de antenas. Esto tiene como consecuencia que esta cantidad sea invariante a efectos de ganancia, pues introducir términos de ganancia en una de las antenas añade una ganancia de fase que se anula al sumar las fases ¹.

De esta forma, se puede concluir que ambas cantidades de clausura son independientes de los efectos instrumentales de ganancia que contaminan la señal, lo que permite que sean observables interferométricos robustos, aunque todavía susceptibles al *polarization leakage* descrito por los *D-terms* (ec. 2.15), al ser invariantes únicamente cuando la fuente no está polarizada y no hay polarización instrumental (*D-terms*). Esto es así porque las clausuras suponen que la ecuación de interferometría es escalar (ec. 2.17), lo que implica que no hay polarización, ni de la fuente ni instrumental. No obstante, si consideramos la RIME sin estas simplificaciones (ec. 2.9), estas clausuras dejan de ser invariantes, ya que el conjunto de matrices de Jones más general incluye matrices no proporcionales a la identidad, como los *D-terms*.

2.4. Las trazas de clausura.

Tradicionalmente, debido a la dificultad de caracterizar adecuadamente los términos de ganancia y de polarización instrumental (ecs. 2.14, 2.15) en observaciones interferométricas, se han empleado las clausuras de amplitud y de fase, observables de gran relevancia gracias a su invariancia a los efectos atmosféricos y a las ganancias electrónicas dependientes de cada antena. No obstante, *Broderick & Pesce* desarrollaron en 2020 (ref. [8]) una nueva cantidad de clausura, la traza de clausura, un observable interferométrico que se caracteriza por ser invariante a los efectos de cualquier conjunto de matrices de Jones que contaminen las visibilidades (es decir, es invariante tanto a los términos de ganancia como a los de polarización instrumental).

Para construir las trazas de clausura, se define una cantidad de clausura compleja, construida a partir de las matrices de visibilidad \mathbf{V} medidas para líneas de base (*baselines*) que conectan un cuarteto de antenas, $\{A, B, C, D\}$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}_{ABCD} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}_{AB} \mathbf{V}_{CB}^{-1} \mathbf{V}_{CD} \mathbf{V}_{AD}^{-1}). \quad (2.20)$$

Con esta definición se pueden construir un total de 24 trazas complejas para las diferentes combinaciones de antenas posibles, siendo solamente 6 trazas no redundantes: $\mathcal{T}_{ABCD}, \mathcal{T}_{ABDC}, \mathcal{T}_{ACBD}, \mathcal{T}_{ACDB}, \mathcal{T}_{ADBC}$ y \mathcal{T}_{ADCB} . Este resultado es consecuencia de la naturaleza cíclica de la traza, que implica que \mathcal{T} es simétrica bajo permutaciones cíclicas de las líneas de base,

$$\mathcal{T}_{ABCD} = \mathcal{T}_{CDAB},$$

junto con la relación entre la inversión de la línea de base y el hermítico conjugado en las cuatro visibilidades RR, RL, LR, LL que permiten construir la matriz de visibilidad (p. ej. $RR_{AB} = RR_{BA}^*$), lo que implica que

$$\mathcal{T}_{ABCD}^* = \mathcal{T}_{DCBA}.$$

¹Para una discusión más detallada de la invariancia de las cantidades de clausura a las ganancias en las antenas, ver [23]

Una vez definidas las trazas de clausura, es sencillo demostrar matemáticamente que estos nuevos observables interferométricos son invariantes a cualquier matriz de Jones (dependiente de la antena) que introduzca efectos instrumentales a las visibilidades, y por tanto son insensibles a cualquier defecto de calibración en el análisis de los datos de las observaciones interferométricas. Para ello, se incorporará a cada matriz de visibilidad en la definición de \mathcal{T}_{ABCD} (ec. 2.20) la relación entre la visibilidad \mathbf{V}_{AB} observada con la visibilidad $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$ calibrada (ec. 2.13). Adicionalmente, por la definición de la matriz de visibilidad dada por la ec. 2.16, tenemos la siguiente relación entre las matrices de visibilidad entre dos antenas:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{BA}^\dagger, \quad (2.21)$$

que se deduce empleando que las distribuciones de brillo de cada uno de los parámetros de Stokes son funciones reales y, por tanto, su transformada de Fourier es hermítica. Empleando esta propiedad, se obtiene que

$$\mathbf{V}_{CB}^{-1} = (\mathbf{V}_{BC}^\dagger)^{-1} = ((\mathbf{G}_B \mathbf{D}_B \bar{\mathbf{V}}_{BC} \mathbf{D}_C^\dagger \mathbf{G}_C^\dagger)^\dagger)^{-1} = (\mathbf{G}_C \mathbf{D}_C \bar{\mathbf{V}}_{BC}^\dagger \mathbf{D}_B^\dagger \mathbf{G}_B^\dagger)^{-1} = \mathbf{G}_B^{\dagger-1} \mathbf{D}_B^{\dagger-1} \bar{\mathbf{V}}_{CB}^{-1} \mathbf{D}_C^{-1} \mathbf{G}_C^{-1}, \quad (2.22)$$

donde se ha empleado las propiedades $(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$ y $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ de la matriz hermítica (conjugada-transpuesta) y la propiedad de la matriz inversa $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$. Esta última propiedad permite también demostrar la identidad

$$\mathbf{V}_{AD}^{-1} = (\mathbf{G}_A \mathbf{D}_A \bar{\mathbf{V}}_{AD} \mathbf{D}_D^\dagger \mathbf{G}_D^\dagger)^{-1} = \mathbf{G}_D^{\dagger-1} \mathbf{D}_D^{\dagger-1} \bar{\mathbf{V}}_{AD}^{-1} \mathbf{D}_A^{-1} \mathbf{G}_A^{-1}. \quad (2.23)$$

Introduciendo estos dos resultados en la (ec. 2.20) junto con la naturaleza cíclica de la traza ($\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}$), se demuestra que \mathcal{T}_{ABCD} es independiente de los términos de polarización instrumental \mathbf{D} y ganancia \mathbf{G} de señal en el receptor que contaminan las visibilidades observadas:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ABCD} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}_{AB} \mathbf{V}_{CB}^{-1} \mathbf{V}_{CD} \mathbf{V}_{AD}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}((\mathbf{G}_A \mathbf{D}_A \bar{\mathbf{V}}_{AB} \mathbf{D}_B^\dagger \mathbf{G}_B^\dagger)(\mathbf{G}_B^{\dagger-1} \mathbf{D}_B^{\dagger-1} \bar{\mathbf{V}}_{CB}^{-1} \mathbf{D}_C^{-1} \mathbf{G}_C^{-1})(\mathbf{G}_C \mathbf{D}_C \bar{\mathbf{V}}_{CD} \mathbf{D}_D^\dagger \mathbf{G}_D^\dagger)(\mathbf{G}_D^{\dagger-1} \mathbf{D}_D^{\dagger-1} \bar{\mathbf{V}}_{AD}^{-1} \mathbf{D}_A^{-1} \mathbf{G}_A^{-1})) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\mathbf{V}}_{AB} \bar{\mathbf{V}}_{CB}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_{CD} \bar{\mathbf{V}}_{AD}^{-1}), \end{aligned}$$

donde se emplea que las matrices de Jones son invertibles, lo que implica que la matriz por su inversa es la identidad, $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathcal{I}$, y también lo es su hermítica, es decir, $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}^{\dagger-1} = \mathcal{I}$.

2.4.1. Invariancia bajo rotaciones en la esfera de Poincaré.

Como consecuencia de la invariancia de la traza a los efectos de ganancia y de polarización instrumental en el receptor, dados por las matrices de Jones \mathbf{G} y \mathbf{D} (ecs. 2.14, 2.15), cualquier transformación de la matriz de visibilidad que pueda ser explicada mediante la combinación estos efectos, dada por la matriz

$$\mathbf{GD} = \begin{pmatrix} G_R & G_R D_R \\ G_L D_L & G_L \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

se manifestará como una degeneración en la traza. Este resultado se puede generalizar como una degeneración de las trazas de clausura a cualquier efecto sobre la matriz de visibilidad obtenida para un par de antenas del interferómetro que se pueda expresar como esta combinación de matrices de Jones, y tiene una implicación de gran relevancia para el análisis de la polarización de la fuente, ya que supone que la traza es invariante bajo rotaciones globales en la esfera de Poincaré. Para visualizar esta conclusión, conviene estudiar las matrices que inducen una rotación en la esfera de Poincaré.

Por un lado, la elección $G_R = \cos(\theta/2)$, $G_L = \cos(\theta/2)$, $D_R = \tan(\theta/2)$ y $D_L = -\tan(\theta/2)$ nos proporciona la matriz de rotación que induce una rotación acimutal (en torno al eje U) de un ángulo θ en la esfera de Poincaré:

$$\mathbf{GD}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

La matriz de visibilidad bajo esta rotación se modifica como

$$\mathbf{V}' = \mathbf{GD}_\theta \mathbf{V} (\mathbf{GD}_\theta)^\dagger = \begin{pmatrix} \tilde{I} + \tilde{V}' & \tilde{Q}' + i\tilde{U}' \\ \tilde{Q}' - i\tilde{U}' & \tilde{I} - \tilde{V}' \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

donde se han empleado las relaciones trigonométricas $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ y $\cos\theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$; como consecuencia de esta rotación acimutal, los parámetros de Stokes \tilde{Q}' y \tilde{V}' se relacionan con los parámetros \tilde{Q} y \tilde{V} como

$$\tilde{V}' = \sin\theta\tilde{Q} + \cos\theta\tilde{V} \quad (2.27)$$

$$\tilde{Q}' = \cos\theta\tilde{Q} - \sin\theta\tilde{V}. \quad (2.28)$$

Por otro lado, la elección $G_R = e^{i\phi/2}$, $G_L = e^{-i\phi/2}$ y $D_R = D_L = 0$ se corresponde con la matriz de rotación que induce una rotación en latitud (en torno al eje V) de un ángulo ϕ en la esfera de Poincaré:

$$\mathbf{GD}_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

En este caso, la matriz de visibilidad se modifica como

$$\mathbf{V}' = \mathbf{GD}_\phi \mathbf{V} (\mathbf{GD}_\phi)^\dagger = \begin{pmatrix} \tilde{I} + \tilde{V} & \tilde{Q}' + i\tilde{U}' \\ \tilde{Q}' - i\tilde{U}' & \tilde{I} - \tilde{V} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

donde se han redefinido los parámetros de Stokes \tilde{Q}' y \tilde{U}' , empleando la fórmula de Euler $e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\sin\phi$, en función de los parámetros \tilde{Q} y \tilde{U} , debido a la rotación en latitud, de forma que

$$\tilde{Q}' = \cos\phi\tilde{Q} - \sin\phi\tilde{U} \quad (2.31)$$

$$\tilde{U}' = \sin\phi\tilde{Q} + \cos\phi\tilde{U}. \quad (2.32)$$

De forma general, la traza \mathcal{T} es invariante a cualquier rotación coherente de la esfera de Poincaré, que se puede inducir mediante las matrices de rotación anteriores (ecs. 2.25, 2.29). Como caso particular de interés, se puede relacionar la matriz de visibilidad dada por receptores circulares (ec. 2.11) con la obtenida con el uso de receptores lineales, mediante la rotación sucesiva de un ángulo $\theta = \pi/2$ en torno al eje U y, a continuación, un ángulo $\phi = -\pi/2$ en torno al eje V , dando la siguiente matriz de rotación:

$$\mathbf{Q}_{CL} = \mathbf{GD}_{CL} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

donde se puede omitir la fase global, obteniendo la matriz de transformación

$$\mathbf{Q}_{CL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

La matriz \mathbf{Q}_{CL} induce una rotación de la esfera de Stokes que mueve $Q \rightarrow U$, $U \rightarrow V$ y $V \rightarrow Q$, de forma que la matriz de visibilidad es:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{Q}_{CL} \mathbf{V} (\mathbf{Q}_{CL})^\dagger = \begin{pmatrix} \tilde{I} + \tilde{Q} & \tilde{U} + i\tilde{V} \\ \tilde{U} - i\tilde{V} & \tilde{I} - \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XX_{AB} & XY_{AB} \\ YX_{AB} & YY_{AB} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

que coincide con la transformada de Fourier de la matriz de brillo para receptores lineales (ref. [1]).

2.4.2. El potencial de las trazas de clausura.

En la descripción de las trazas de clausura, hemos demostrado dos propiedades de gran utilidad para el análisis de observaciones de polarimetría interferométrica. Por un lado, las trazas de clausura son insensibles a la calibración de los datos de las observaciones interferométricas, al ser invariantes a cualquier conjunto de matrices de Jones que introduzca efectos instrumentales a las visibilidades. Esta propiedad permite asegurar que las trazas son observables robustos, pues la observación de cualquier fenómeno físico que quede impreso en las trazas será independiente de cualquier posible defecto de calibración instrumental en los datos. Por otro lado, las trazas de clausura están degeneradas a rotaciones globales en la esfera de Poincaré. Esta degeneración tiene una consecuencia de gran importancia en el análisis de la estructura de polarización de las fuentes observadas, pues solamente se observarán cambios en el comportamiento de las trazas si se producen cambios en la polarización diferencial de la fuente, es decir, si

la polarización de la fuente cambia de forma inhomogénea (por lo que no es expresable como una rotación global en la esfera de Poincaré).

Todas estas propiedades se explotaron en el estudio de la estructura de polarización del agujero negro central de M87 a escalas de su horizonte de sucesos (refs. [9, 10, 11, 12, 13, 14]), siendo esta la primera aplicación publicada de las trazas de clausura (ref. [15]). En esta publicación, las trazas permitieron la determinación, independiente a cualquier posible defecto de calibración, de una variación temporal (en el transcurso de 4 a 6 días) de la intensidad de polarización de M87 en los alrededores del horizonte de sucesos del AGN (*Active Galactic Nucleus*) central, tal y como se muestra en la fig. 2, extraída de ref. [15], en la que se recogen las fases de las trazas de clausura de cuatro cuartetos de antenas del *Event Horizon Telescope* (EHT). En esta figura, se muestran trazas no triviales con variaciones de fase en la duración total del experimento. Lo interesante de este resultado es que en la fase de la traza queda patente una evolución distinta entre las observaciones del 5/6 de abril de 2017 y del 10/11 de abril de 2017, lo que proporciona una evidencia directa de una evolución de la emisión polarizada del agujero negro de M87. Además, por haber empleado trazas de clausura, esta observación es robusta e independiente de todos los efectos instrumentales que contaminan las visibilidades, siendo por tanto independiente de cualquier posible defecto de calibración de los datos.

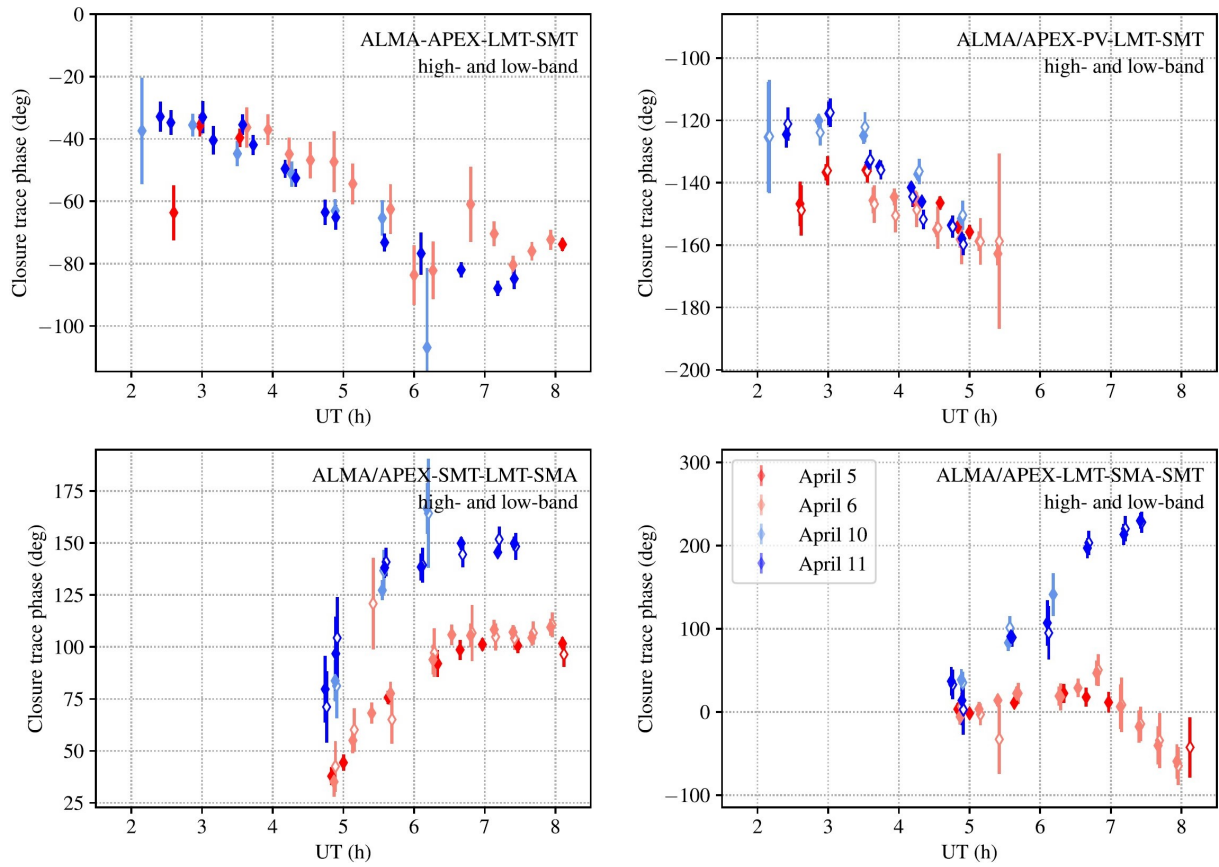


Figura 2: Fases de las trazas de clausura de M87 para cuatro cuartetos ilustrativos en los diferentes días de observación del Event Horizon Telescope en su campaña de 2017. Figura extraída de ref. [15], fig. 14.

2.5. Conexión entre las trazas de clausura y las cantidades de clausura tradicionales.

Para acabar con el estudio de las trazas de clausura, podemos analizar la relación entre este nuevo observable interferométrico y las cantidades de clausura tradicionales (las clausuras de amplitud y de fase descritas en la sección 2.3). Con este fin, partiendo de la definición de la traza de clausura, mediante una serie de simplificaciones, podemos obtener los observables tradicionales, siendo por tanto estas cantidades un caso particular de las trazas de clausura. Si la fuente no está polarizada, lo que implica que las matrices de visibilidad son diagonales ($RL_{AB} = LR_{AB} = 0$) y proporcionales a la identidad ($RR_{AB} = LL_{AB} =$

V_{AB} , de tal forma que $\mathbf{V}_{AB} = V_{AB} \cdot \mathbf{I}$, y además no hay polarización instrumental (no hay D -terms contaminando la matriz de visibilidad), se puede escribir la traza de clausura (ec. 2.20) como:

$$\mathcal{T}_{ABCD} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}_{AB} \mathbf{V}_{CB}^{-1} \mathbf{V}_{CD} \mathbf{V}_{AD}^{-1}) = \frac{V_{AB} V_{CD}}{V_{CB} V_{AD}} \frac{\text{tr}(\mathbf{I}_2)}{2} = \frac{V_{AB} V_{CD}}{V_{CB} V_{AD}}. \quad (2.35)$$

Empleando la representación exponencial de los números complejos, se puede separar la traza en su módulo, $|\mathcal{T}_{ABCD}|$, y su fase, \mathcal{T}_{ABCD}^ϕ :

$$\mathcal{T}_{ABCD} = |\mathcal{T}_{ABCD}| \cdot e^{i\mathcal{T}_{ABCD}^\phi} = \frac{|V_{AB}| \cdot |V_{CD}|}{|V_{CB}| \cdot |V_{AD}|} \cdot e^{i(\phi_{AB} + \phi_{CD} - \phi_{CB} - \phi_{AD})}. \quad (2.36)$$

De esta forma, se obtiene que, para este caso particular, la amplitud de las trazas de clausura es la clausura de amplitud,

$$|\mathcal{T}_{ABCD}| = \mathcal{C}_{ABCD} = \frac{|V_{AB}| \cdot |V_{CD}|}{|V_{CB}| \cdot |V_{AD}|}, \quad (2.37)$$

que utiliza las amplitudes de la visibilidad medida por cada par de antenas. Además, se obtiene que la fase de las trazas de clausura es, para este caso concreto,

$$\mathcal{C}_{ABCD}^\phi = \phi_{AB} + \phi_{CD} - \phi_{CB} - \phi_{AD} = \phi_{AB} + \phi_{CB} + \phi_{CD} + \phi_{DA}, \quad (2.38)$$

donde se ha empleado que $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$ (ya que $\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{ji}^\dagger$); atendiendo a este resultado, se hace evidente que la fase de la traza es invariante a ganancias de fase, ya que cierran un cuadrado.

Finalmente, un caso particular de interés en interferometría son las denominadas *trazas boomerang* (ref. [8]), en las que un par de antenas del *array* son co-locales, de tal forma que están mucho más próximas entre sí en comparación con el conjunto de antenas restantes del *array*. Empleando que, como consecuencia de la proximidad de las antenas, la fase entre las antenas co-locales $A - A'$ (donde $A' \equiv D$) es nula, $\phi_{DA} \sim 0$, se obtiene que la clausura de fase, \mathcal{C}_{ABC}^ϕ , es la fase de las *trazas boomerang*:

$$\mathcal{T}_{ABCA'}^\phi = \phi_{ABC} = \phi_{AB} + \phi_{CA'} - \phi_{CB} - \phi_{AA'} = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CA}. \quad (2.39)$$

Como conclusión, hemos obtenido que las trazas de clausura se pueden reducir a las clausuras de amplitud y fase considerando dos simplificaciones: fuente no polarizada y ausencia de efectos de polarización instrumental. Si recordamos las secciones 2.2 y 2.3, para obtener las cantidades de clausura tradicionales a partir de la RIME, es necesario emplear las mismas simplificaciones para obtener la RIME escalar, que nos permite construir las clausuras de amplitud y fase. Por lo tanto, podemos concluir que las condiciones que permiten definir la ecuación RIME escalar (a saber, fuentes no polarizadas y ausencia de polarización instrumental) son las mismas que nos permiten derivar las clausuras de amplitud y fase (aplicables a la RIME escalar) a partir de las trazas de clausura.

3. Desarrollo analítico de la traza de clausura de la fuente doble.

Para analizar las propiedades de las trazas de clausura en casos triviales, podemos plantear una fuente doble y simular analíticamente la detección de la señal procedente de la fuente en un interferómetro; es decir, se busca simular la obtención de la transformada de Fourier los parámetros de Stokes por cada par de antenas del *array*, y por tanto construir la matriz de visibilidad (ec. 2.16, sec. 2.2.1). De esta forma, se pueden construir las matrices de visibilidad \mathbf{V} analíticas para *baselines* que conectan un cuarteto de antenas, $\{A, B, C, D\}$, lo que permite obtener una expresión analítica de la traza de clausura de la fuente doble (ec. 2.20, sec. 2.4).

Simplificando el problema al caso de una dimensión espacial, la distribución de intensidad de la fuente doble, dada por el parámetro de Stokes I , se puede expresar como una suma de deltas de Dirac situando el origen de coordenadas en el punto intermedio de separación de las dos componentes de la fuente doble:

$$I(x) = I_1 \cdot \delta(x + d/2) + I_2 \cdot \delta(x - d/2), \quad (3.1)$$

donde I_1 e I_2 designan la intensidad total de las dos componentes de la fuente doble, y d caracteriza la separación entre ambas componentes. La transformada de Fourier de la distribución de intensidad es, evaluada para la frecuencia espacial u , en unidades de longitud de onda λ :

$$\begin{aligned}\tilde{I}(u) &= \mathcal{F}\{I(x), u/\lambda\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [I_1 \cdot \delta(x + d/2) + I_2 \cdot \delta(x - d/2)] \exp\left(-i\frac{2\pi u}{\lambda}x\right) dx \\ &= I_1 \cdot \exp\left(i\frac{2\pi u}{\lambda}d\right) + I_2 \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi u}{\lambda}d\right).\end{aligned}$$

Este resultado se puede generalizar para el resto de parámetros de Stokes como:

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}(u) \\ \tilde{Q}(u) \\ \tilde{U}(u) \\ \tilde{V}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \cdot \exp\left(i\frac{2\pi u}{\lambda}d\right) + \begin{pmatrix} I_2 \\ Q_2 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi u}{\lambda}d\right), \quad (3.2)$$

donde (I_1, Q_1, U_1, V_1) y (I_2, Q_2, U_2, V_2) son los parámetros de Stokes de cada una de las componentes (1 y 2) de la fuente doble.

En una observación en radioastronomía, las medidas interferométricas (que, tal y como hemos visto en la sec. 2.2, se pueden relacionar con la transformada de Fourier de los parámetros de Stokes) se distribuyen en el *plano UV*. En este plano, las coordenadas (u, v) describen la separación vectorial entre cada par de elementos del interferómetro, medida en longitudes de onda. Sin embargo, como todo interferómetro contiene un número finito de antenas, el cubrimiento *UV*, es decir, el muestreo de datos en el plano (u, v) , es parcial. En definitiva, sólo se obtienen medidas de la transformada de Fourier de los parámetros de Stokes de la fuente en aquellos puntos en los que hay una línea de base observando, que viene dada por las posiciones de las antenas que conforman el interferómetro. De esta forma, mediante la autocorrelación de la distribución de antenas del interferómetro (una operación matemática que da los puntos del *plano UV* en los que hay líneas de base observando), se genera una máscara en el plano de Fourier. Para el caso unidimensional de la fuente doble, esto implica que únicamente habrá medidas en las coordenadas u donde un par de antenas $A - B$ de la distribución de antenas del interferómetro presente una línea de base; es decir, sólo habrá observación en la coordenada $u = u_{AB}$ del plano de Fourier.

En definitiva, para cada par de antenas del interferómetro se obtiene una medida de la transformada de Fourier de la distribución de brillo de la fuente (es decir, la visibilidad), evaluada en un punto concreto en el plano de Fourier, dado por la línea de base del par de antenas. Esto nos permite construir, a partir de las transformadas de Fourier de los parámetros de Stokes evaluadas en la coordenada $u = u_{AB}$ del plano de Fourier (ec. 3.2), la matriz de visibilidad medida por el par de antenas $A - B$:

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} = \begin{pmatrix} \tilde{I}(u_{AB}) + \tilde{V}(u_{AB}) & \tilde{Q}(u_{AB}) + i\tilde{U}(u_{AB}) \\ \tilde{Q}(u_{AB}) - i\tilde{U}(u_{AB}) & \tilde{I}(u_{AB}) - \tilde{V}(u_{AB}) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, a partir de las matrices de visibilidad \mathbf{V} medidas para líneas de base (*baselines*) que conectan un cuarteto de antenas, $\{A, B, C, D\}$, se puede calcular la traza de clausura a partir de su definición (ec. 2.20), obteniendo así una expresión analítica de la traza de clausura de una fuente doble (ver ap. A), que será función de los parámetros de Stokes de las dos componentes de la fuente doble, de la separación d entre las componentes 1 y 2, y de la posición de las antenas, pues distintas distribuciones de antenas darán distintas coordenadas u del espacio de Fourier donde cada par de antenas del cuarteto presenta una línea de base.

Podemos aprovechar este desarrollo analítico para obtener dos resultados triviales de las trazas de clausura. Por un lado, si eliminamos una de las componentes de la fuente doble (tomando como 0 la intensidad I_2 y el resto de parámetros de Stokes de esta componente), la fuente doble se reduce a una fuente puntual. Para este caso, se obtiene traza unidad:

$$\mathcal{T}_{ABCD} = e^{\frac{i\pi d}{\lambda}(u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} - u_{AD})} = 1. \quad (3.3)$$

Por otro lado, si tomamos nulos los parámetros de Stokes (Q_2, U_2, V_2) , siendo por tanto la componente 2 una fuente no polarizada, la traza de clausura está degenerada a cualquier rotación en la esfera de Poincaré, pues aunque solamente se modifica la polarización de la componente 1, como la componente 2 no está polarizada, rotar la polarización de la componente 1 en la esfera de Poincaré es equivalente a una rotación global (o sea, de toda la estructura de polarización de la fuente) en dicha esfera.

Con la expresión general de la traza de clausura de la fuente doble, podemos estudiar con detalle cómo se comportan las trazas al modificar los parámetros de Stokes de una de las componentes de la fuente doble. Para ello, en primer lugar, fijaremos los parámetros de Stokes de la componente 1 y variaremos los parámetros de Stokes (Q, U, V) de la componente 2, tomando $I_1 = I_2$ (caso más sencillo de la fuente doble). Para poder analizar correctamente cómo la variación los parámetros de Stokes de una de las componentes de la fuente doble queda impresa en las trazas de clausura, estudiaremos la razón entre las distintas trazas calculadas al modificar los parámetros de Stokes, usando como referencia la traza de la traza de la fuente doble con $Q_2 = U_2 = V_2 = 0$ (es decir, con la componente 2 sin polarizar). Para completar el análisis del comportamiento de la traza, se estudiará el caso en el que la intensidad de ambas componentes de la fuente doble es distinta, $I_1 \neq I_2$, fijando de nuevo los parámetros de Stokes de la componente 1, pero modificando tanto la intensidad I_2 como los parámetros de Stokes (Q_2, U_2) de la componente 2².

3.1. Análisis de las trazas de clausura de la fuente doble para el caso $I_1 = I_2$.

Para estudiar cómo se comportan las trazas de clausura de una fuente doble con ambas componentes de igual intensidad, estudiaremos por separado las variaciones en la amplitud y la fase de la traza al modificar, por un lado, los parámetros de Stokes Q_2 y U_2 , y por otro, el parámetro de Stokes V_2 , de la componente 2, de tal forma que se analiza cómo quedan impresas en las trazas las variaciones en la intensidad de polarización m y el ángulo de polarización (EVPA), y la transferencia de polarización lineal a circular, respectivamente.

Para estudiar cómo afecta a la traza el cambio de intensidad de polarización lineal de una componente respecto de la otra, fijamos los parámetros de Stokes de la componente 1, $(I_1, Q_1, U_1, V_1) = (1, 0.3, 0.15, 0)$, y tomamos, además de $I_2 = I_1 = 1$, $V_2 = V_1 = 0$. De esta forma, podemos dar valores entre 0 e I_2 a cada uno de los parámetros de Stokes (Q_2, U_2) y calcular las trazas para cada pareja de valores que cumpla la condición $I_2 \geq m_2 = \sqrt{Q_2^2 + U_2^2}$, pues la intensidad de polarización lineal no puede ser mayor que la intensidad de la fuente. Para acabar, calculamos el ratio de la traza en cada caso, respecto de la traza de la fuente doble con $Q_2 = U_2 = 0$ (es decir, la fuente doble con la componente 2 sin polarizar), y obtenemos un mapeado que muestra la variación de la amplitud y la fase de la traza al añadir polarización lineal a la componente 2, tal y como se muestra en la figura 3.

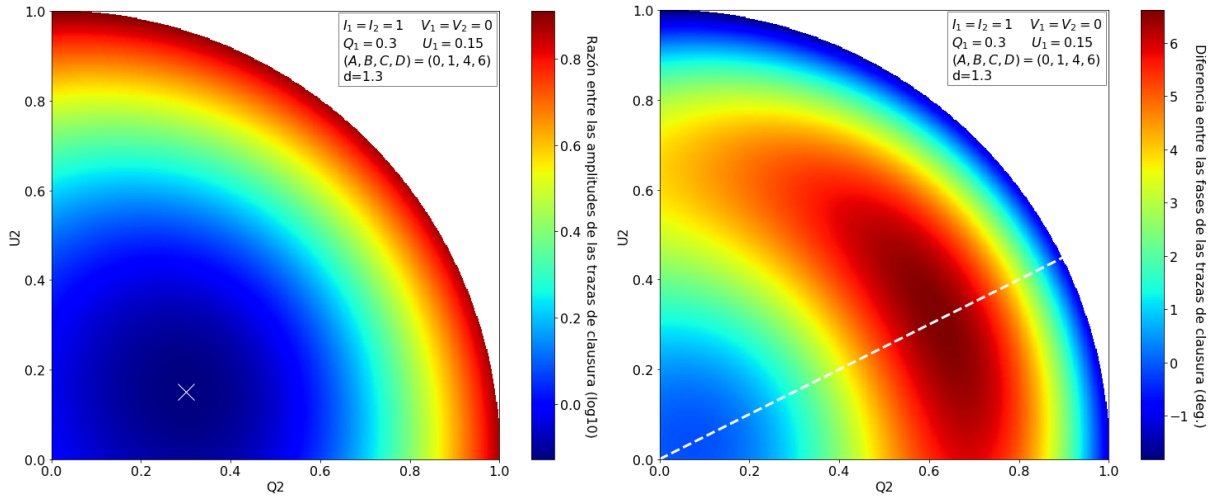


Figura 3: Mapeado de la amplitud y la fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de los parámetros de Stokes Q_2 y U_2 , tomando como traza de referencia la traza de la fuente doble con $Q_2 = U_2 = 0$ (componente 2 sin polarizar). Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 6)$, en unidades de longitud de onda. En el mapeado de la amplitud de la traza (panel izquierdo de la figura), se resalta el punto en el que se obtiene un extremo de amplitud con la \times blanca. Por otro lado, en el mapeado de la fase de la traza (panel derecho), la línea blanca discontinua visualiza la dirección del ángulo de polarización de la componente 2 para la que la variación de las fases es máxima, es decir, más sensible a cambios en la intensidad de polarización.

²El script de Jupyter empleado para obtener los resultados presentados en esta sección se adjunta junto con la tesis.

Un hecho de interés es que el comportamiento de la traza observado en la fig. 3 depende de la distribución de antenas, con lo que modificar la posición de las antenas o trasponer antenas modifica el comportamiento de las trazas, tal y como podemos observar en las figs. 4 y 5, respectivamente. Además, modificar la separación d de las dos componentes de la fuente doble también modifica el comportamiento de la traza, tal y como podemos observar en las figs. 6 y 7, siendo equivalente a una expansión de la separación de las antenas. En definitiva, escalar la separación entre las antenas y la separación entre las componentes de la fuente doble son dos efectos algebraicamente equivalentes, teniendo similares efectos sobre la traza. Esta equivalencia queda patente en la expresión de la traza de la fuente doble (presentada en el ap. A), donde se ve que la separación d multiplica a las coordenadas u en el plano de Fourier donde hay líneas de base observando.

Analizando las figuras presentadas, podemos concluir que se observa un extremo (mínimo o máximo, como p.ej. las figs. 3 y 4, respectivamente) en la amplitud de la traza de clausura cuando las dos componentes de la fuente doble presentan la misma polarización. Además, como es evidente, el hecho de que se observe un máximo o un mínimo en la amplitud de la traza depende tanto de la posición de las antenas, como se puede ver al comparar las figs. 3 (mínimo) y 4 (máximo), como de la combinación del cuarteto de antenas estudiado, pues la trasposición de antenas también modifica el comportamiento de la traza, tal y como puede verse en la fig. 5, donde, al permutar las antenas de la fig. 3, pasamos de observar un mínimo de amplitud a un máximo. De igual forma, la separación de las dos componentes de la fuente doble también puede causar que pasemos de un mínimo de amplitud a un máximo, como se muestra en la fig. 6, o viceversa, como es el caso de la fig. 7, mostrando en ambos casos cómo varía el comportamiento de la traza al aumentar d respecto de las figs. 3 y 4, respectivamente.

En cuanto a la fase de las trazas de clausura presentadas en estas figuras, en todas ellas se puede concluir que la dirección en la que se observa un mayor cambio (gradiente) en la fase es aquella en la que la relación (el ratio) entre los parámetros de Stokes U y Q son los mismos tanto para la componente 1 como para la componente 2 de la fuente doble, lo que implica que los EVPA de ambas componentes apuntan en la misma dirección. Por lo tanto, las fases de las trazas son más sensibles a cambios de la intensidad de polarización cuando el ángulo de polarización de la componente 2 es paralelo al de la componente 1 (es decir, cuando ambas componentes están polarizadas en la misma dirección), tal y como se evidencia en la línea blanca discontinua dibujada en las figuras presentadas.

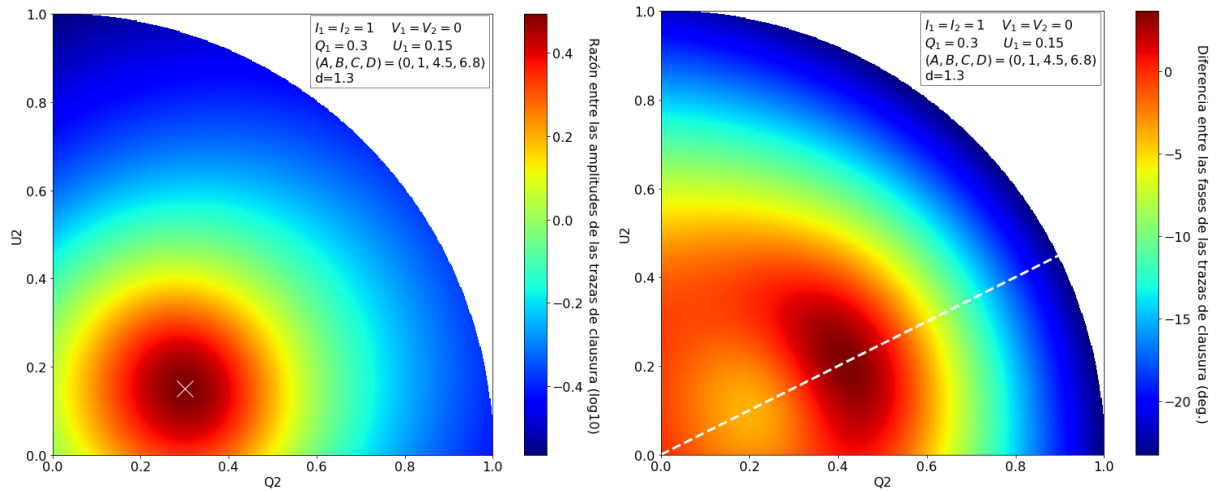


Figura 4: Mapeado de la amplitud y la fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes Q_2 y U_2 , respecto la traza con $Q_2 = U_2 = 0$. Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4.5, 6.8)$, de tal forma que se encuentran desplazadas respecto a las posiciones en la fig. 3.

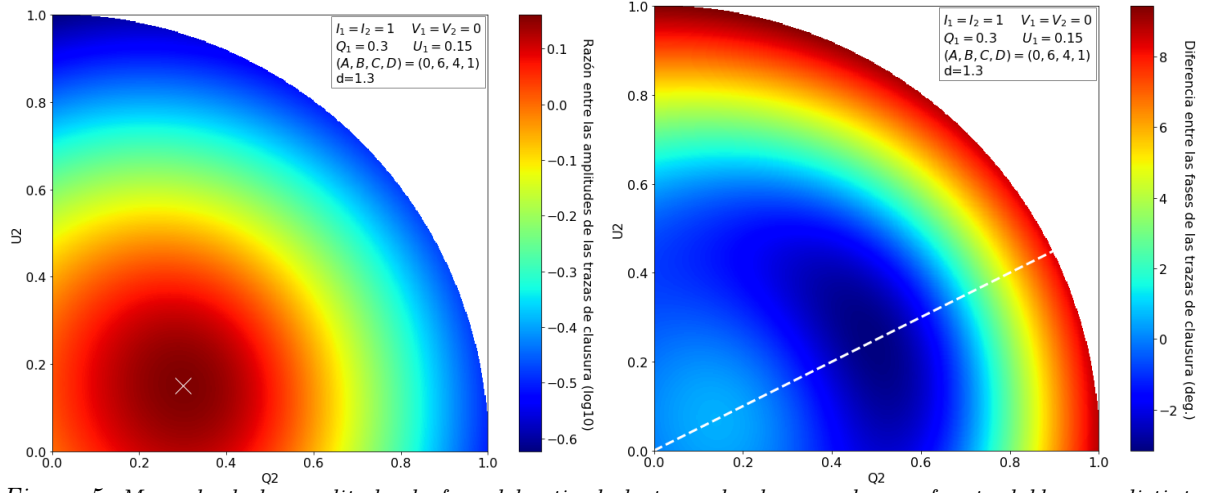


Figura 5: Mapeado de la amplitud y la fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes Q_2 y U_2 , respecto la traza con $Q_2 = U_2 = 0$. Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 6, 4, 1)$, lo que se corresponde con un intercambio de antenas respecto a la fig. 3.

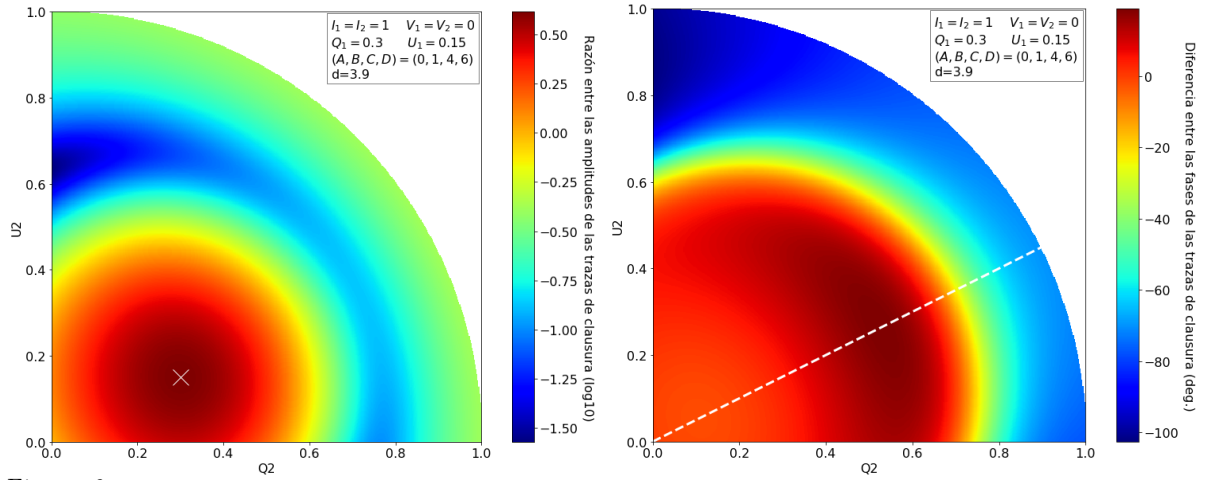


Figura 6: Mapeado de la amplitud y la fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes Q_2 y U_2 , respecto la traza con $Q_2 = U_2 = 0$. Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 6)$, al igual que en la fig. 3. No obstante, la separación d entre las dos componentes se ha aumentado a $d = 3.9$.

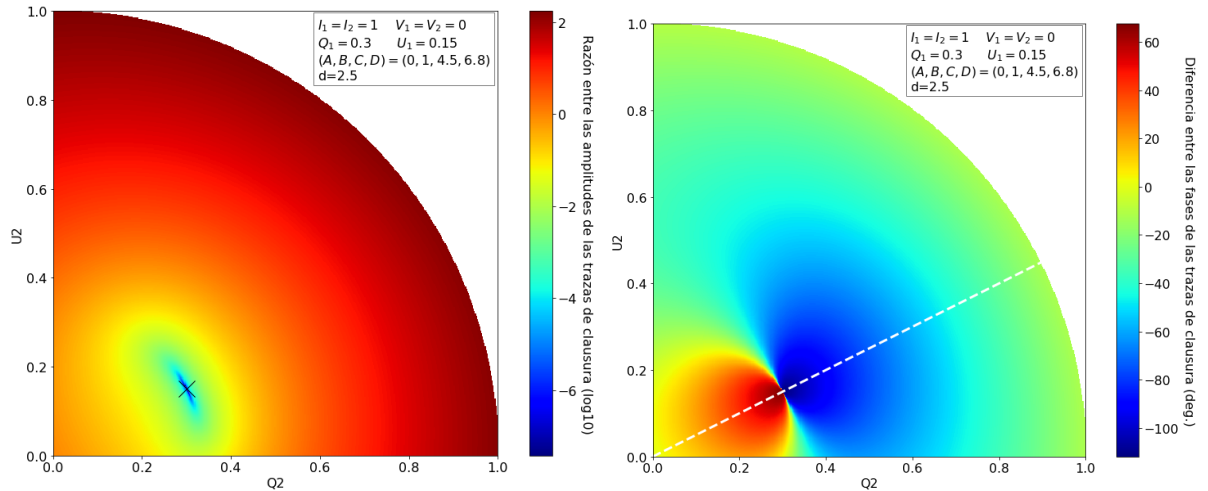


Figura 7: Mapeado de la amplitud y la fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes Q_2 y U_2 , respecto la traza con $Q_2 = U_2 = 0$. Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4.5, 6.8)$, al igual que en la fig. 4. No obstante, la separación d entre las dos componentes se ha aumentado a $d = 2.5$.

Para acabar, falta realizar el análisis de cómo se modifica el valor de la traza cuando existe una diferencia en el parámetro de Stokes V de ambas componentes de la fuente doble, lo que supone una distinta componente de polarización circular (mayor cuanto mayor es Stokes V). Para ello, de forma similar al caso anterior, fijamos los parámetros de Stokes de la componente 1, $(I_1, Q_1, U_1, V_1) = (1, 0.1, 0, 0.3)$, y tomamos, además de $I_2 = I_1 = 1$, $Q_2 = Q_1 = 0.1$ y $U_2 = U_1 = 0$, para que, en este caso, ambas componentes presenten el mismo estado de polarización lineal (es decir, misma intensidad de polarización lineal y mismo EVPA). Fijados los parámetros de Stokes, damos valores a V_2 acotados entre 0 y $\sqrt{I_2^2 - Q_2^2 - U_2^2}$, ya que la intensidad de polarización no puede ser mayor que la intensidad de la fuente. Para acabar, calculamos el ratio de la traza para cada valor de V_2 respecto de la traza de la fuente doble con $V_2 = 0$ (es decir, la fuente doble en la que la componente 2 no tiene polarización circular), obteniendo así cómo se modifica la traza (su amplitud y fase) al aumentar la cantidad de polarización circular de la componente 2, tal y como se muestra en la figura 8.

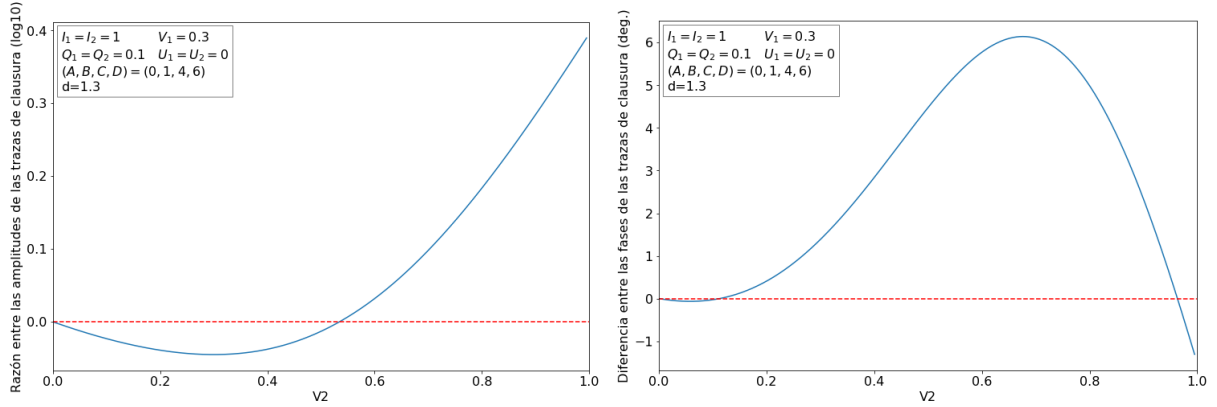


Figura 8: Amplitud y fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes V_2 , tomando como traza de referencia la traza de la fuente doble con $V_2 = 0$ (componente 2 sin polarización circular). Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 6)$, en unidades de longitudes de onda.

Analizando el comportamiento de la traza, obtenemos nuevamente un extremo en la amplitud de la traza cuando ambas componentes presentan un mismo estado de polarización, y que, como era de esperar, modificar la posición de las antenas puede producir que el tipo de extremo cambie, como es el caso de las figs. 8 y 9, que se corresponden con un mínimo y un máximo de amplitud, respectivamente. De igual forma, un cambio en la separación de las componentes puede causar un distinto comportamiento de la traza, como ocurre con la fig. 10, donde se observa un mínimo de amplitud muy pronunciado en $V_1 = V_2$, mientras que en la fig. 9 se obtenía un máximo más suave.

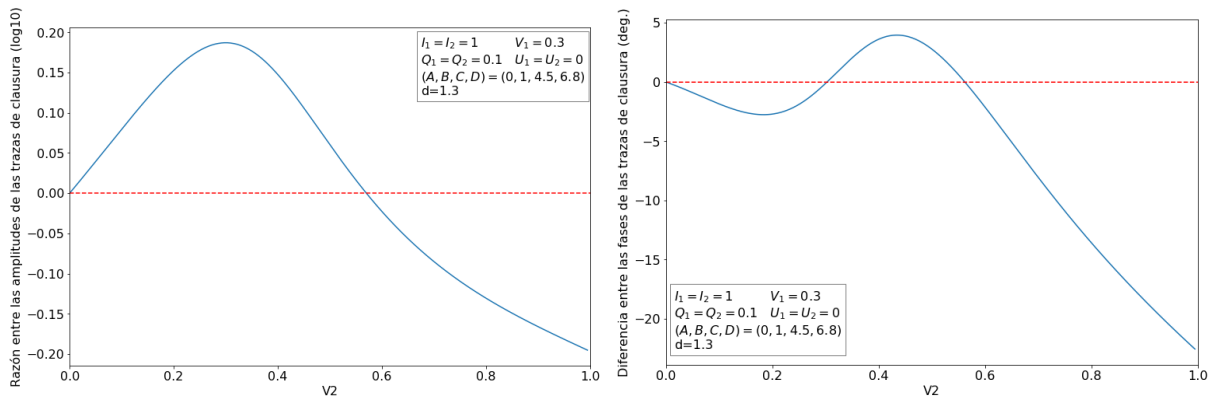


Figura 9: Amplitud y fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes V_2 , respecto de la traza con $V_2 = 0$. Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4.5, 6.8)$, de tal forma que se encuentran desplazadas respecto las posiciones de antenas de la fig. 8.

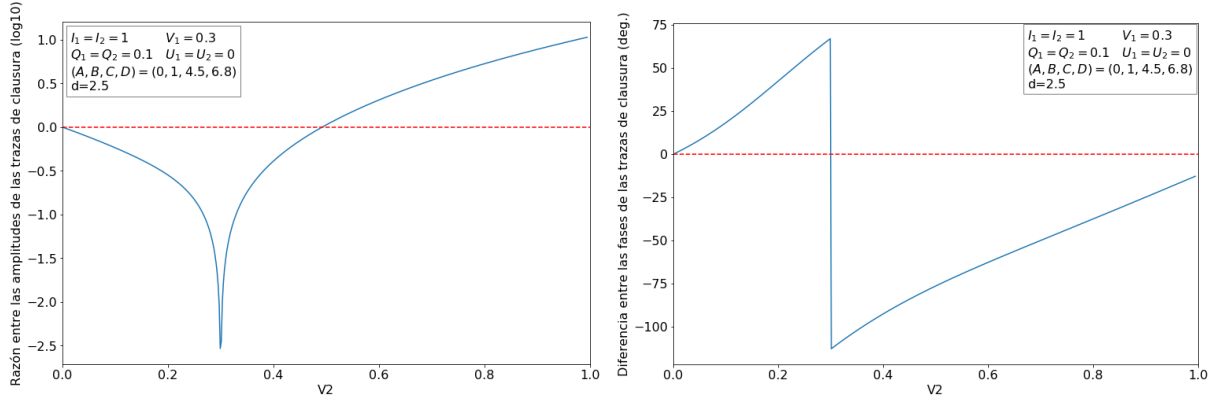


Figura 10: Amplitud y fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble para distintos valores de Stokes V_2 , respecto de la traza con $V_2 = 0$. Las posiciones de las antenas son las mismas que en la fig. 9, pero se ha aumentado la separación d entre las componentes.

Resumen del análisis de trazas de clausura en la fuente doble.

Como resumen del análisis realizado para el comportamiento de las trazas de clausura, obtenemos que:

- se observa un extremo (máximo o mínimo) en la amplitud de la traza de clausura cuando las dos componentes de la fuente doble presentan la misma polarización, tal y como puede verse en las figuras presentadas, obtenidas al calcular las trazas para fuentes dobles al modificar, por un lado, los parámetros de Stokes Q y U , lo que se traduce en variaciones del EVPA (rotaciones en acimut en la esfera de Poincaré), y por otro, el parámetro de Stokes V , lo que implica transferencia de la componente de polarización lineal a circular (rotaciones en latitud en la esfera de Poincaré).
- El hecho de que el estado de polarización (es decir, la intensidad y el ángulo de polarización) de una componente de la fuente doble se aleje del estado de polarización de la otra componente queda impreso en la amplitud de la traza como un aumento o una disminución de la amplitud, en función de si el extremo es un mínimo o un máximo, respectivamente, y esto se observa tanto si la fuente se aleja en intensidad de polarización lineal y en EVPA como si se aleja en Stokes V , siendo el máximo o mínimo de amplitud de la traza cuando el EVPA apunta en la misma dirección para ambas componentes, o cuando la fuente presenta la misma proporción de polarización circular, respectivamente.
- Se obtiene el mismo tipo de extremo en amplitud (máximo o mínimo) tanto para variaciones de Stokes Q y U como para variaciones de Stokes V , para una misma distribución de antenas.
- Alterar el orden de la combinación de antenas simplemente modifica si el extremo en la amplitud es un máximo o un mínimo, pero la interpretación del comportamiento de la traza no se modifica. Así, como es evidente si atendemos a la definición de la traza y a su expresión analítica, el valor de la traza dependerá de la posición de las antenas, siendo por tanto el hecho de que se observe un máximo o un mínimo en la amplitud de la traza dependiente de la distribución de antenas del interferómetro. De igual forma, modificar la distancia de la fuente doble es algebraicamente equivalente a escalar la distribución espacial de las antenas, por lo que ambos efectos pueden estudiarse de forma única.

En conclusión, dependiendo de la combinación de antenas y de cómo estén organizadas, se observa un máximo o un mínimo en la amplitud de la traza cuando las dos componentes de la fuente doble presentan la misma polarización. En cuanto a la fase de la traza, podemos concluir que las fases de las trazas son más sensibles a los cambios de intensidad de polarización cuando el ángulo de polarización es el mismo para ambas componentes, es decir, cuando los EVPA de ambas componentes de la fuente doble apuntan en la misma dirección. Finalmente, un detalle interesante es que, al realizar rotaciones en latitud (Stokes V) y en acimut (EVPA) en una de las componentes de la fuente doble, los cambios de la fase de la traza presentan los mismos máximos y mínimos. Por tanto, podemos concluir que las fases de las trazas son tan sensibles a Stokes V como a variaciones en el EVPA. Por el contrario, si nos fijamos en los cambios en amplitud de la traza, se hace evidente que es más sensible a variaciones en Stokes Q y U que a variaciones en Stokes V , ya que los máximos y mínimos de amplitud de la traza son mayores.

3.2. Análisis de las trazas de clausura de la fuente doble para el caso $I_1 \neq I_2$.

Para completar el análisis de las trazas de clausura de la fuente doble, estudiaremos el caso no trivial en el que ambas componentes presentan distinta intensidad. Para ello, de forma similar a la subsec. 3.1, fijamos los parámetros de Stokes de la componente 1, $(I_1, Q_1, U_1, V_1) = (1, 0.3, 0.15, 0)$, pero esta vez sólo fijamos $V_1 = V_2 = 0$, dando valores a I_2 desde 0 hasta I_1 . A continuación, para cada valor de I_2 , damos valores entre 0 e I_2 a cada uno de los parámetros de Stokes (Q_2, U_2) y calculamos las trazas para cada pareja de valores que cumpla la condición $I_2 \geq m_2 = \sqrt{Q_2^2 + U_2^2}$, ya que es una condición necesaria que la intensidad de polarización lineal sea menor o igual que la intensidad de la fuente. Para acabar, calculamos el ratio de la traza para cada pareja de parámetros de Stokes respecto de la traza de la fuente doble con $Q_2 = U_2 = 0$ (es decir, la fuente doble con la componente 2 sin polarizar), y calculamos los parámetros de Stokes (Q_2, U_2) para los que, para los distintos valores de I_2 estudiados, obtenemos un extremo de amplitud de la traza. Esto nos permite calcular, para cada valor de I_2 , la intensidad y el ángulo de polarización de la componente 2 para el caso en el que la traza de la fuente doble presenta un extremo de amplitud.

Con estos resultados, podemos representar los ratios de la intensidad de polarización de la componente 2 respecto la componente 1, tal y como se recoge en la fig. 11. De esta forma, se puede comprobar cómo, para el caso más sencillo en el que la intensidad de ambas componentes es la misma, la razón de la intensidad de polarización es la unidad cuando se obtiene un extremo en la amplitud de la traza (dicho de otro modo, ambas componentes deben tener los mismos parámetros de Stokes para que las amplitudes de las trazas sean extremas). Sin embargo, al estudiar los casos en los que las dos componentes no presentan la misma intensidad total, se observa que el ratio de la intensidad de polarización de la componente 2 respecto de la componente 1 para el que se obtiene un extremo en la amplitud de la traza no tiene una dependencia trivial con el ratio entre las intensidades totales de la componente 1 y 2. Esto se puede ver claramente en la fig. 11, donde se observan relaciones entre ambos ratios completamente diferentes al modificar las posiciones de las antenas, presentando incluso discontinuidades debidas a que, al aumentar la intensidad de la componente 2, puede ocurrir que se cambie el extremo de amplitud de mínimo a máximo o viceversa.

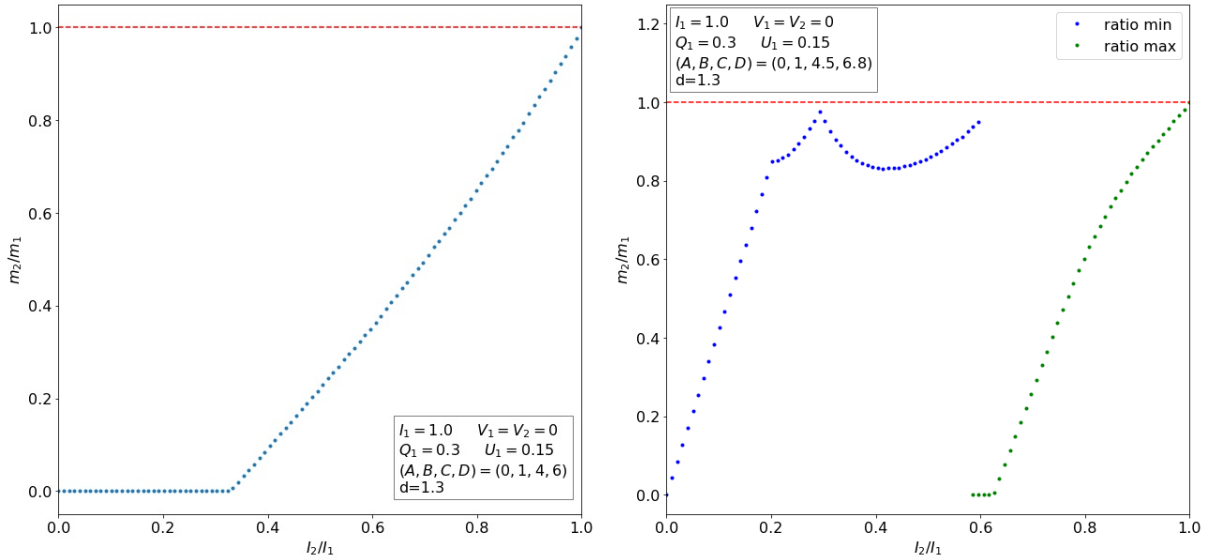


Figura 11: Ratios entre las intensidades de polarización de las componentes 2 y 1, m_2/m_1 , para los que se obtiene un extremo de amplitud de la traza, para distintos ratios entre las intensidades totales, I_2/I_1 . Las figuras están generadas para el cuarteto de antenas $(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 6)$ y $(A, B, C, D) = (0, 1, 4.5, 6.8)$.

Es de resaltar que, incluso para el caso en el que la intensidad de las dos componentes de la fuente doble no coincide, el extremo en la amplitud de las trazas de clausura se sigue obteniendo para ángulos de polarización (EVPA) iguales entre las dos componentes, tal y como se evidencia en la fig. 12. En dicha figura se aprecia que, incluso si al aumentar la intensidad total de la componente 2 se produce un cambio en el extremo de amplitud de la traza de mínimo a máximo (o viceversa), este extremo se da para la fuente doble cuyas dos componentes presentan ángulos de polarización paralelos.

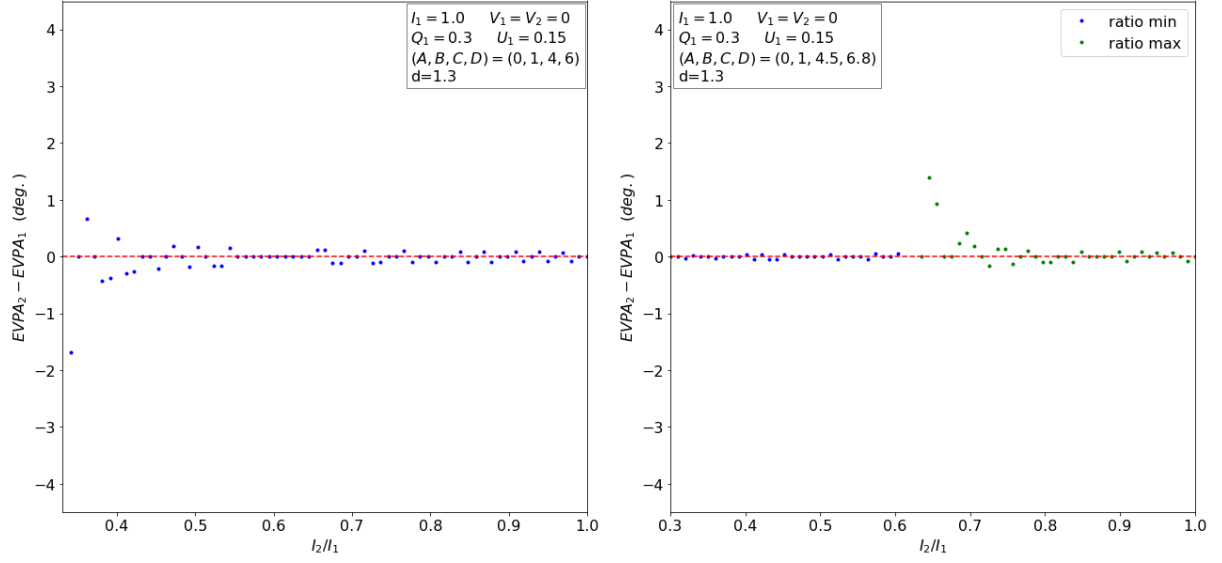
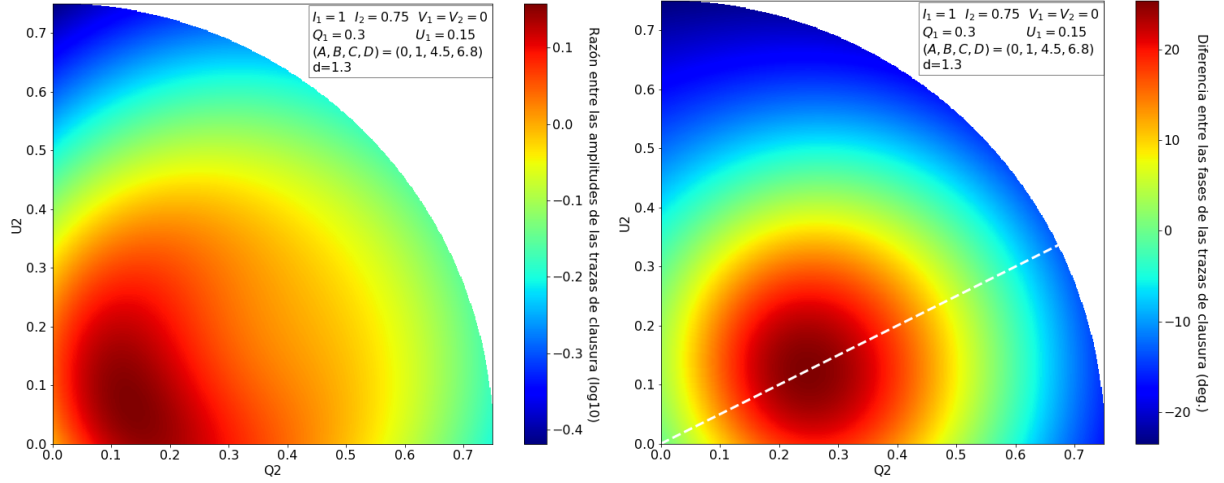
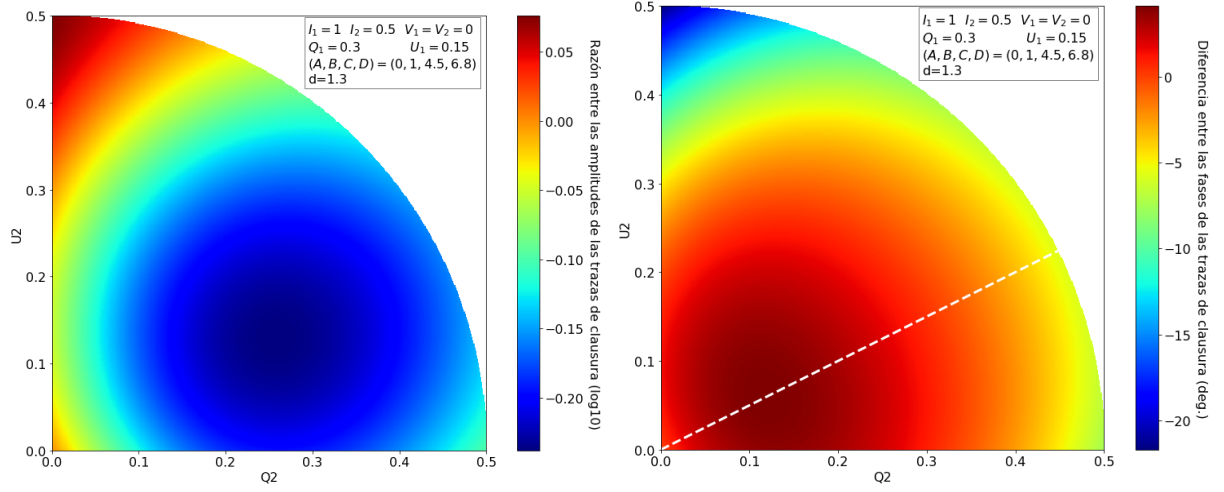


Figura 12: Diferencia entre los ángulos de polarización (EVPA) de las componentes 1 y 2 en los que se obtiene un extremo de amplitud de la traza, para distintos ratios de intensidad I . Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 6)$ y $(A, B, C, D) = (0, 1, 4.5, 6.8)$.

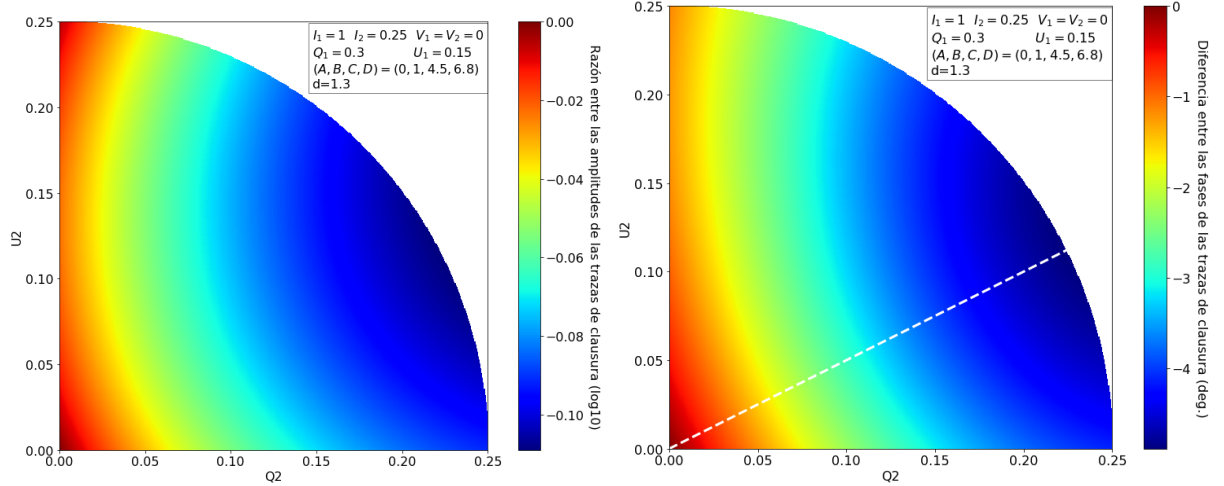
Finalmente, con los ratios de las trazas calculados, podemos generar un mapeado que muestra la variación de la amplitud y la fase de la traza al añadir polarización lineal a la componente 2. Los resultados se muestran en la fig. 13. Tal y como ocurría en el caso particular en el que $I_1 = I_2$ (sec. 3.1), el gradiente de las fases de las trazas es máximo cuando los ángulos de polarización de ambas componentes apuntan en la misma dirección, siendo por tanto las conclusiones del apartado anterior igualmente válidas. Además, como se puede ver en las figuras presentadas, modificar la intensidad de las componentes puede modificar la traza de tal forma que, para una misma distribución de antenas (mismo cubrimiento del espacio de Fourier), se observe un máximo o un mínimo en amplitud para distintos valores de intensidad. Sin embargo, como ya hemos comentado, este comportamiento de las trazas no altera la interpretación de que este extremo en la amplitud se obtiene cuando los EVPA apuntan en la misma dirección, tal y como se ve en la fig. 12.



(a) $I_1 = 1, I_2 = 0.75$



(b) $I_1 = 1, I_2 = 0.5$



(c) $I_1 = 1, I_2 = 0.25$

Figura 13: Mapeado de la amplitud y la fase del ratio de la traza de clausura de una fuente doble con componentes de distinta intensidad, para distintos valores de los parámetros de Stokes Q_2 y U_2 , tomando como traza de referencia la traza de la fuente doble con $Q_2 = U_2 = 0$ (componente 2 sin polarizar). Las antenas están distribuidas en las posiciones $(A, B, C, D) = (0, 1, 4.5, 6.8)$. En el mapeado de la fase de la traza, la línea blanca discontinua visualiza la dirección del ángulo de polarización de la componente 2 para la que la variación de las fases es máxima, es decir, más sensible a cambios en la intensidad de polarización. Las tres filas de la figura, (a), (b) y (c), muestran los resultados para distintos ratios entre las intensidades I_1 e I_2 .

4. Desarrollo computacional: obtención de las trazas de clausura para casos triviales y análisis de su comportamiento.

A continuación, se desarrollará el algoritmo de cálculo de las trazas de clausura, dado un *measurement set*, para todas las combinaciones de antenas del *array*, y se realizarán una serie de pruebas para comprobar el correcto funcionamiento del código ³. Para ello, se calcularán las trazas de clausura a partir de datos obtenidos con el *software* `polsimulate` (ref. [16]), que permite realizar simulaciones de observaciones VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) para distintos tipos de fuentes, incluyendo polarización y rotaciones de la esfera de Poincaré, además de la posibilidad de incluir polarización instrumental en los datos de la simulación. Comprobado el correcto funcionamiento del código, se compararán la amplitud y la fase de las trazas de clausura calculadas con las clausuras de amplitud y fase, de forma que se comprobarán las limitaciones de estas herramientas tradicionales de la radiointerferometría y se hará evidente cómo las trazas de clausura superan estas limitaciones, justificando así la utilidad de emplear las trazas de clausura para el análisis de datos interferométricos.

4.1. Creación del *software*: construcción de la matriz de visibilidades con herramientas de la infraestructura CASA y cálculo de la traza.

En la sección 2.4 hemos definido el concepto de traza de clausura, \mathcal{T}_{ABCD} , una cantidad de clausura compleja, definida por Broderick & Pesce en 2020 (ref. [8]), que se construye a partir de las matrices de visibilidad \mathbf{V} medidas para líneas de base (*baselines*) que conectan un cuarteto de antenas, $\{A, B, C, D\}$ (ec. 2.20). Además, como consecuencia de esta definición, de un total de 24 trazas complejas para las diferentes combinaciones de antenas posibles, solamente 6 trazas son no redundantes: $\mathcal{T}_{ABCD}, \mathcal{T}_{ABDC}, \mathcal{T}_{ACBD}, \mathcal{T}_{ACDB}, \mathcal{T}_{ADBC}$ y \mathcal{T}_{ADCB} .

Atendiendo a su definición, para calcular las trazas de clausura es necesario construir en primer lugar la matriz de visibilidad para cada par de antenas del interferómetro (ec. 2.11), empleando para ello los cuatro productos de correlación entre el par de antenas (RR, RL, LR, LL (ec. 2.10), si los polarizadores de cada par de antenas dividen la radiación incidente en sus componentes de polarización circular). Todos los datos de las observaciones interferométricas, incluyendo las correlaciones entre antenas, son almacenados en bases de datos para su posterior análisis. Entre los distintos tipos de bases de datos existentes, nos centraremos en *MeasurementSet* (*.ms*, refs. [17, 18]), una base de datos diseñada para contener datos radioastronómicos de tal forma que su posterior análisis sea compatible con el formalismo de RIME propuesto por Hamaker, Bregman y Sault (ref. [2]). En esta base de datos, se distinguen, por un lado, las ventanas espectrales (que abarcan distintos rangos de frecuencia del espectro de la radiación incidente sobre el interferómetro) en las que se realizan las observaciones, y por otro lado, los canales espectrales de cada ventana espectral (que separan la ventana espectral en distintos rangos de frecuencias).

Para extraer y analizar los datos de las observaciones radiointerferométricas almacenados en un *measurement set*, empleamos la infraestructura CASA (*Common Astronomy Software Applications*), de gran utilidad para el procesamiento de datos interferométricos. Como un *measurement set* es en realidad un directorio en el que los datos se almacenan en tablas y subdirectorios, la herramienta de CASA `tb` (table box) nos permite leer y almacenar los datos de las correlaciones necesarios para el cálculo de las trazas de clausura (almacenados en la columna *DATA* del *measurement set*), junto con el tiempo de observación (columna *TIME*) y las dos antenas empleadas en cada observación (columnas *ANTENNA1* y *ANTENNA2*). Los datos de las correlaciones se almacenan como una matriz de 3 dimensiones, $DATA[i, j, k]$, donde $i = 0, 1, 2, 3$ se corresponde con los productos de correlación entre el par de antenas (RR, RL, LR, LL , respectivamente), j indica el canal de frecuencia de la observación, y k es el índice que proporciona los datos correspondientes a cada par de antenas, para cada tiempo de observación. Por lo tanto, podemos construir la matriz de visibilidad V_{AB} de cada par de antenas del *array* AB , para cada tiempo de observación, a partir de las correlaciones $RR_{AB}, RL_{AB}, LR_{AB}, LL_{AB}$ medidas por el par de antenas (ec. 2.11). Obtenida la matriz de visibilidad para los pares de antenas del cuarteto A, B, C, D , podemos al fin calcular la traza de clausura a partir de su definición (ec. 2.20), y adicionalmente, se pueden calcular las clausuras de amplitud (ec. 2.18) y de fase (ec. 2.19, en el caso en el que un par de antenas del cuarteto estén próximas en comparación al resto de antenas del *array*, formando así un *boomerang*).

³El script de Python empleado para el cálculo de las trazas y las cantidades de clausura se adjunta como un resultado de esta tesis.

4.1.1. Comparación de resultados con el artículo de *Broderick & Pesce (2020)*.

Una vez completado el *software* para el cálculo de las trazas de clausura desarrollado para esta tesis, podemos comprobar su correcto funcionamiento contrastando los resultados del mismo con los presentados por *Broderick & Pesce* en su artículo (ref. [8]). Para ello, solicitamos los datos sintéticos que emplearon para obtener sus resultados y ejecutamos nuestro algoritmo de cálculo de trazas de clausura, obteniendo los resultados presentados en la fig. 15. Al comparar nuestros resultados con los presentados en ref. [8] (fig. 14), podemos comprobar cómo se obtiene exactamente las mismas trazas, con lo que podemos concluir que nuestro algoritmo de cálculo de las trazas de clausura funciona correctamente.

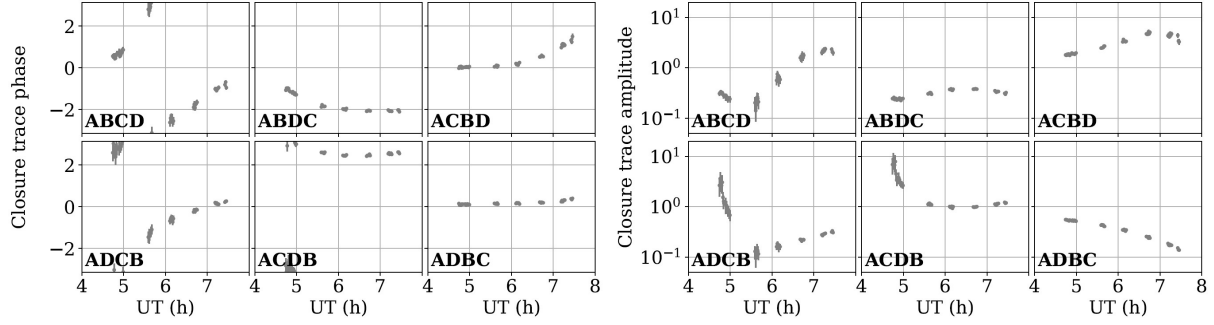


Figura 14: Figura extraída del artículo de *Broderick & Pesce* (ref. [8], fig. 3). Se muestra la amplitud y la fase de las trazas de clausura no redundantes para una simulación realista de observaciones con el Event Horizon Telescope. Las antenas A, B, C y D son, respectivamente, las antenas AA (Atacama mm/submm Array, en Chile), AZ (Submillimeter Telescope, en Arizona), SM (Submillimeter Array, en Hawái) y LM (Large Millimeter Telescope, México).

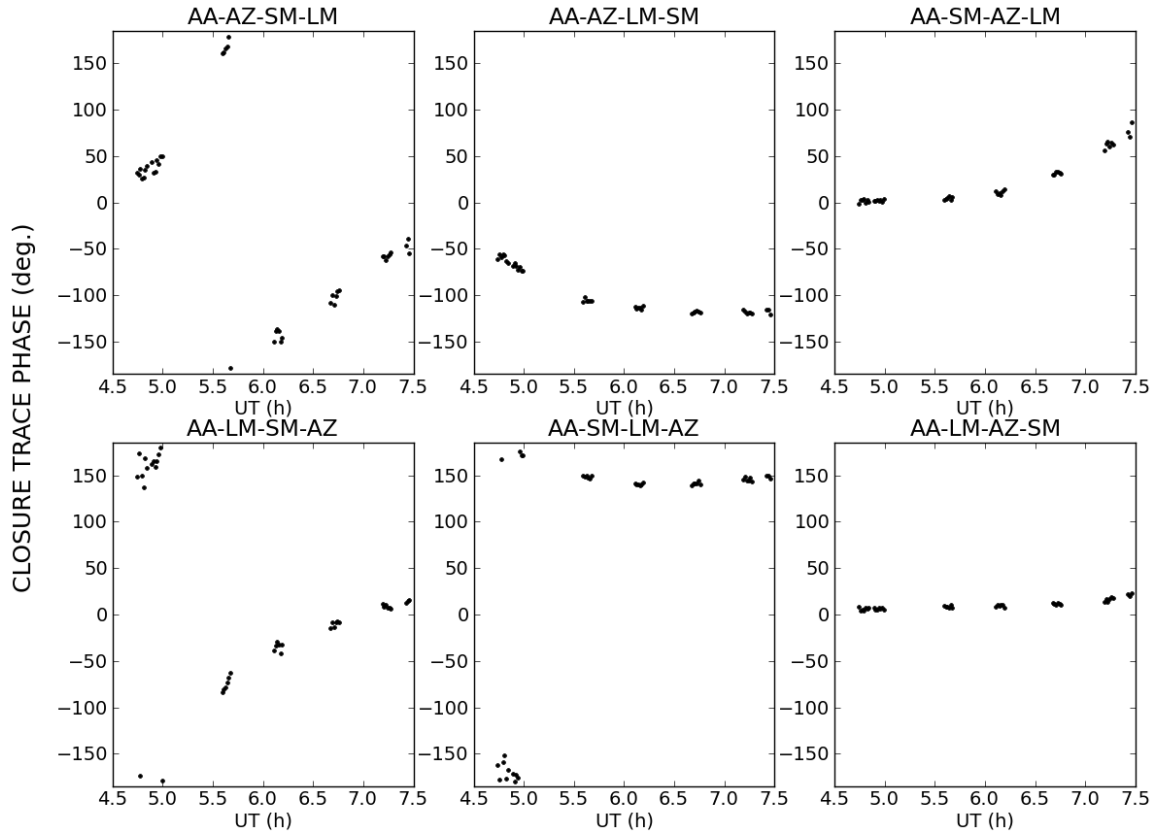


Figura 15: Fase de las trazas de clausura no redundantes del cuarteto de antenas AA – AZ – SM – LM, para los datos sintéticos empleados por *Broderick & Pesce* en su artículo (ref. [8], fig. 3).

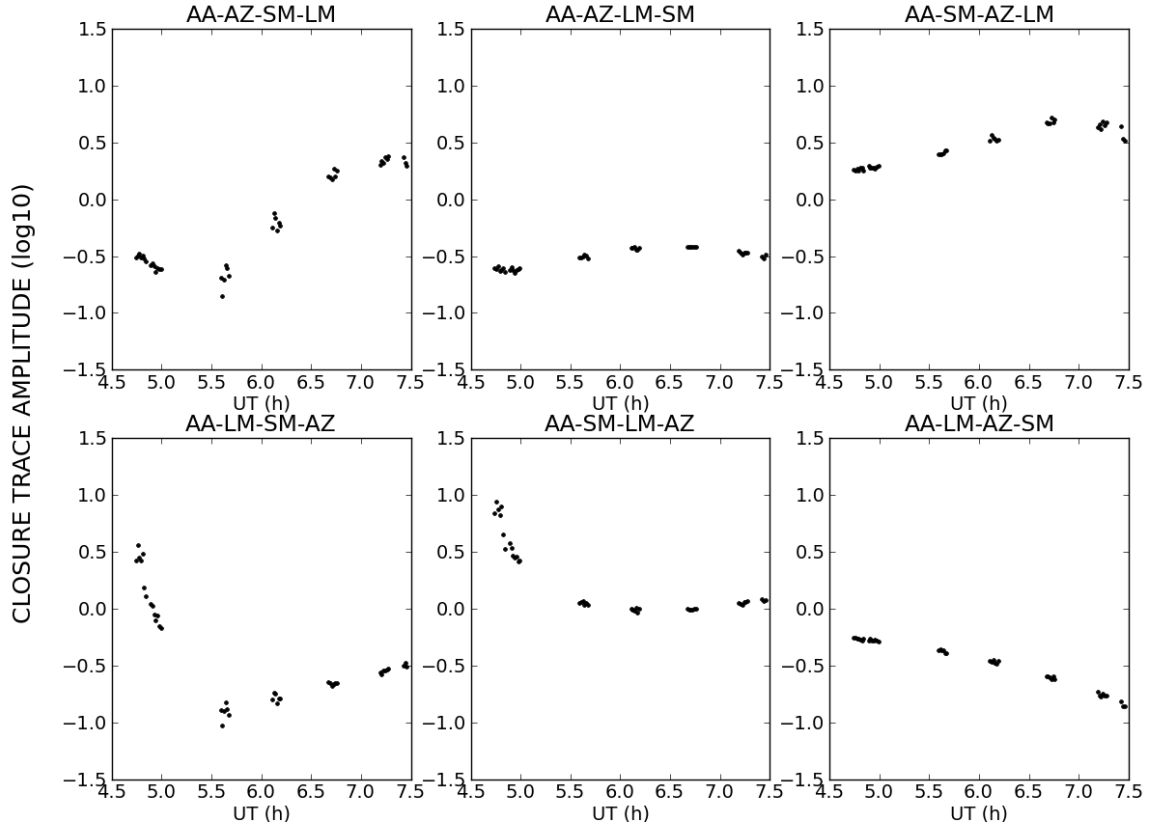


Figura 15: (cont.) Amplitud de las trazas de clausura no redundantes del cuarteto de antenas AA–AZ–SM–LM, para los datos sintéticos empleados por Broderick & Pesce en su artículo (ref. [8], fig. 3).

4.2. Resultados con datos sintéticos.

En esta sección, se analizarán resultados de las trazas de clausura para datos de simulaciones de observaciones VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), obtenidos con el *software* `polsimulate` (ref. [16]), para distintos tipos de fuentes, incluyendo rotaciones de la esfera de Poincaré y ruido térmico sobre los datos, además de la posibilidad de incluir polarización instrumental en los datos de la simulación⁴. Los datos proporcionados por este *software* tienen el formato `SOU_PolN_PoincRot_A-B.msD`, donde:

- `SOU` especifica el tipo de fuente (`Point` si es puntual o `Double` si es doble),
- `N` se refiere al modelo de polarización, y será 0 si la fuente no está polarizada, 1 si solamente una fuente está polarizada y 2, únicamente para `Double`, si ambas componentes de la fuente doble están polarizadas,
- `A-B` cuantizan, respectivamente, la rotación acimutal y en latitud (`EVPA` y `V`) en la esfera de Poincaré, en grados; en el caso de `Double` solamente aplica a una de las componentes de la fuente doble. Finalmente,
- `D` indica si los datos están contaminados (`D='Dt'`) o no (`D=''`) por polarización instrumental.

4.2.1. Un caso trivial: la fuente puntual.

Comprobado el correcto funcionamiento de nuestro algoritmo de cálculo de trazas, podemos analizar un caso trivial en radioastronomía, la fuente puntual, cuya traza presenta fase nula y amplitud normalizada a la unidad (ver demostración desarrollada en la sec. 3). Con datos procedentes de una simulación de observaciones de una fuente puntual polarizada, incluyendo contaminación por polarización instrumental, obtenemos los resultados presentados en la fig. 16. En primer lugar, podemos comprobar cómo nuestros resultados de la amplitud y la fase de la traza de clausura para la fuente puntual coinciden con los valores esperados; las ligeras desviaciones respecto la amplitud unidad y la fase nula se pueden explicar por el

⁴En el ap. B, se da una breve descripción de las antenas cuyas observaciones simula este *software*.

ruido instrumental introducido y por la separación entre las antenas del *array*. Por otro lado, es interesante analizar el comportamiento de las trazas y las cantidades de clausura. Para el caso de la fuente puntual, las cantidades de clausura, al igual que la traza, son invariantes a rotaciones en la esfera de Poincaré y a efectos de polarización instrumental, ya que afectan a una única fuente y, como consecuencia, la clausura de amplitud y la amplitud de la traza convergen a la unidad, mientras que la clausura de fase y la fase de la traza son nulas, tal y como podemos observar en la fig. 16.

4.2.2. Degeneraciones de la traza de la fuente doble.

Tras analizar la fuente puntual, el siguiente caso más sencillo es la fuente doble. Para esta fuente, hay dos casos de interés por estudiar: la fuente doble con una única componente polarizada y la fuente doble en la que ambas componentes están polarizadas (sin tener por qué coincidir sus parámetros de Stokes). En primer lugar, estudiaremos la fuente doble con una única componente polarizada; las trazas de clausura de este tipo de fuentes son invariantes a rotaciones en la esfera de Poincaré y a efectos de polarización instrumental, tal y como puede verse en la fig. 17. Adicionalmente, podemos ver cómo las cantidades de clausura tradicionales también se mantienen invariantes (presentan una degeneración) a las rotaciones en la esfera de Poincaré. Esto se debe a que, en este caso particular de la fuente doble, tan sólo una de las componentes presenta polarización, con lo que una rotación en la esfera de Poincaré solo tiene efecto en la componente polarizada (sec. 2.4.1).

Por el contrario, si analizamos el caso de la fuente doble con ambas componentes polarizadas, podemos observar cómo las cantidades escalares de clausura dependen notablemente de los efectos de polarización instrumental, mientras que las trazas de clausura son, por construcción, invariantes a los mismos. Este extremo se aprecia claramente en las figs. 18 y 19. También se aprecia (fig. 18) que las cantidades escalares de clausura dependen del estado de polarización de la fuente (incluso si la polarización instrumental es nula). Este resultado no es inesperado, ya que la versión escalar de la RIME presupone una polarización nula, tanto del instrumento como de la fuente observada (sec. 2.5).

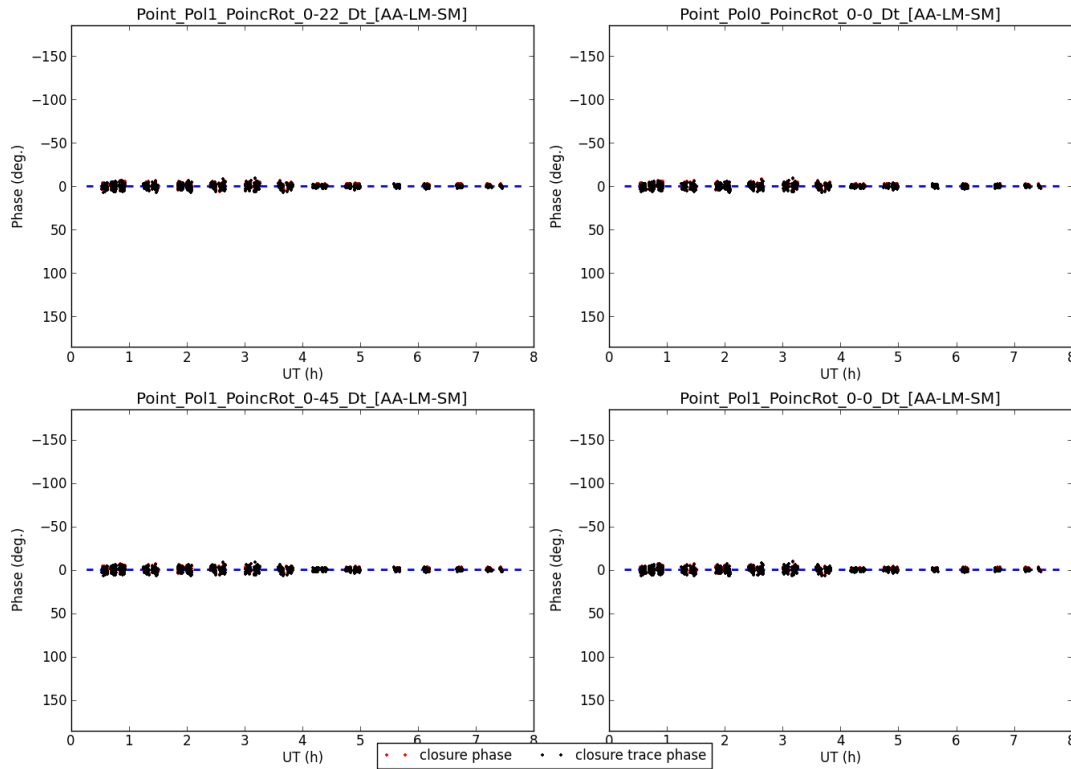


Figura 16: Clausuras de fase del triplete de antenas AA – LM – SM (en rojo) y fases de las trazas de clausura para el cuádruplete AA – LM – SM – AP (donde AP es la antena APEX, situada a solo dos kilómetros del centro geométrico de AA). Dada la proximidad geográfica entre AA y AP, el cuádruplete AA – LM – SM – AP es una traza boomerang en la que $AA \rightarrow AP$. Datos procedentes de la simulación de una fuente puntual polarizada, incluyendo contaminación por polarización instrumental y distintas rotaciones de la esfera de Poincaré.

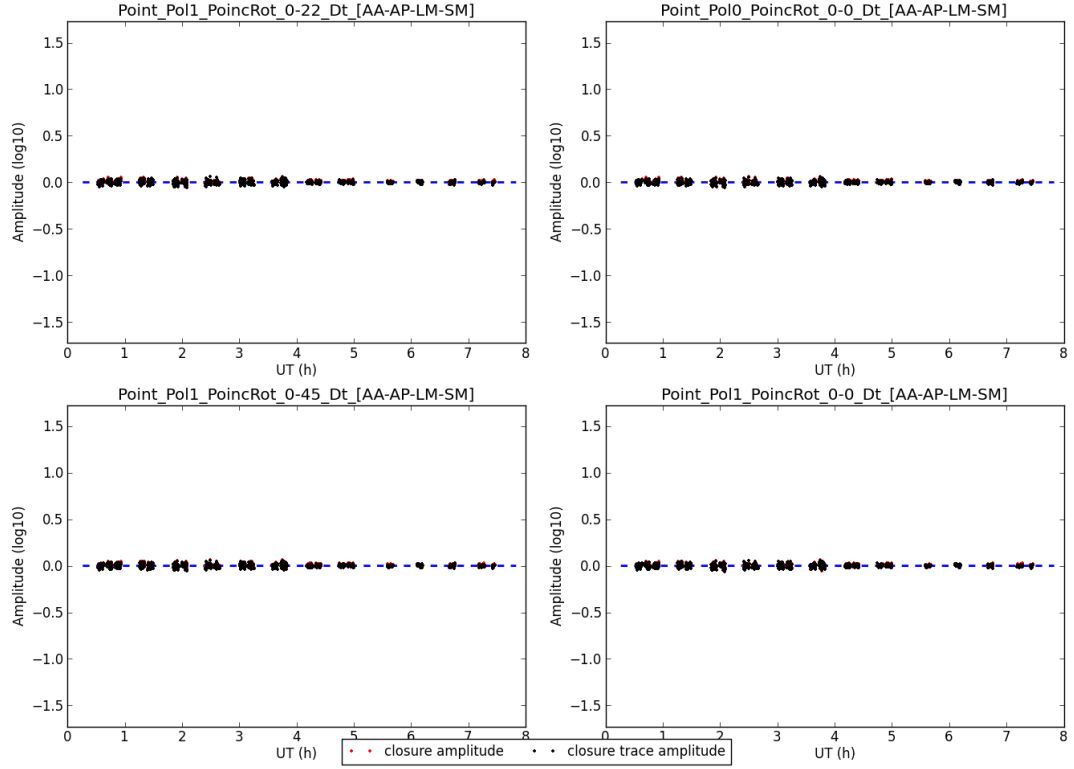


Figura 16: (cont.) Amplitud de las trazas de clausura del cuarteto AA – AP – LM – SM, junto con las clausuras de amplitud (en rojo), para datos procedentes de la simulación de una fuente puntual polarizada, incluyendo contaminación por polarización instrumental y distintas rotaciones de la esfera de Poincaré.

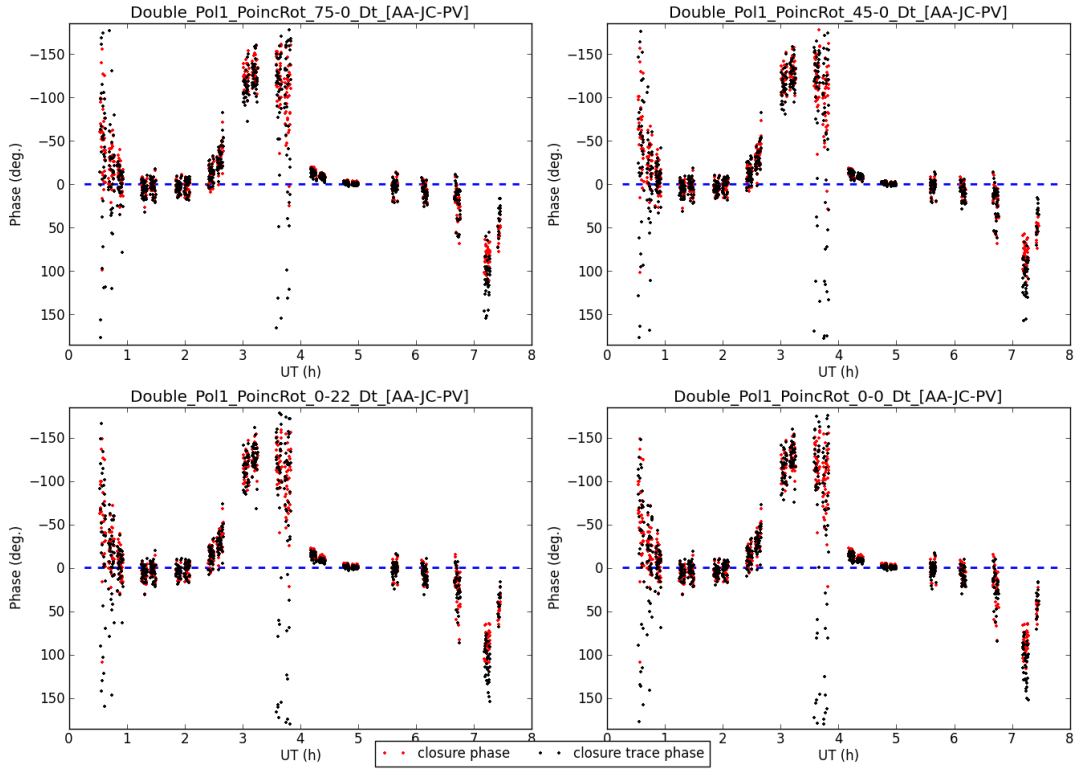


Figura 17: Fase de las trazas de clausura del cuarteto AA – AP – JC – PV, junto con las clausuras de fase (en rojo) del boomerang AA – JC – PV, para datos procedentes de la simulación de una fuente doble con una sola componente polarizada, incluyendo contaminación por polarización instrumental y distintas rotaciones de la esfera de Poincaré. Nótese que AA – JC – PV – AP también definen una traza boomerang, dada la cercanía entre las antenas AA y AP.

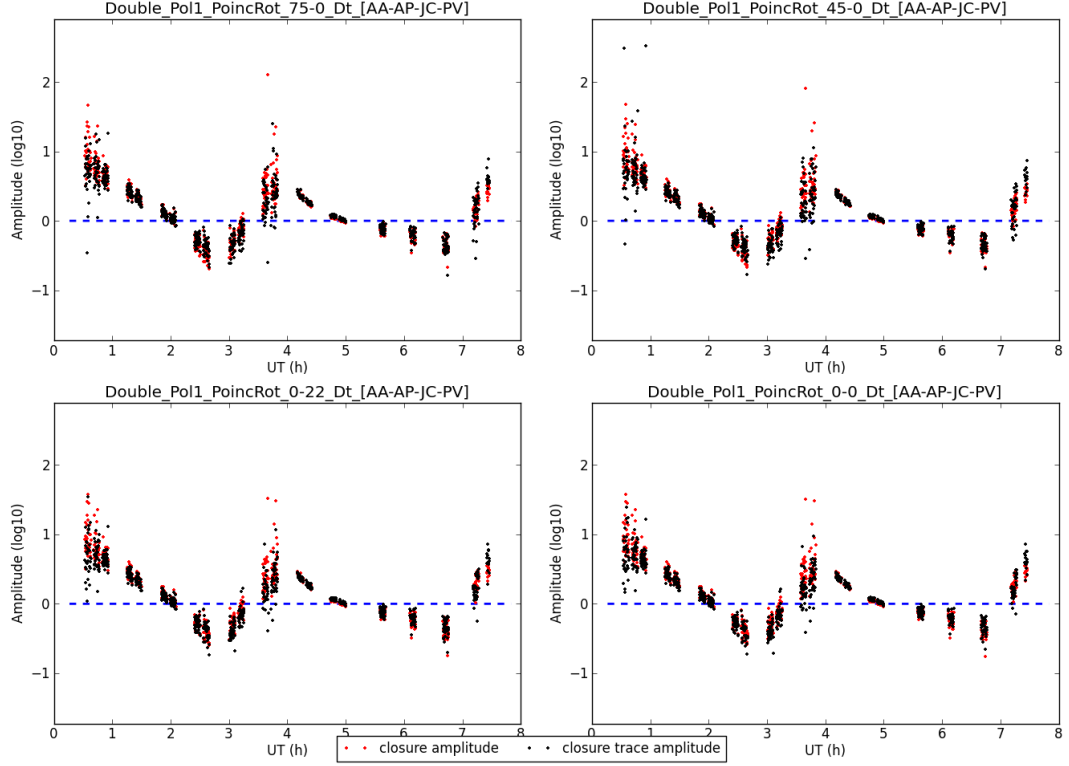


Figura 17: (cont.) Amplitud de las trazas de clausura del cuarteto AA – AP – JC – PV, junto con las clausuras de amplitud (en rojo), para datos procedentes de la simulación de una fuente doble con una sola componente polarizada, incluyendo contaminación por polarización instrumental y distintas rotaciones de la esfera de Poincaré.

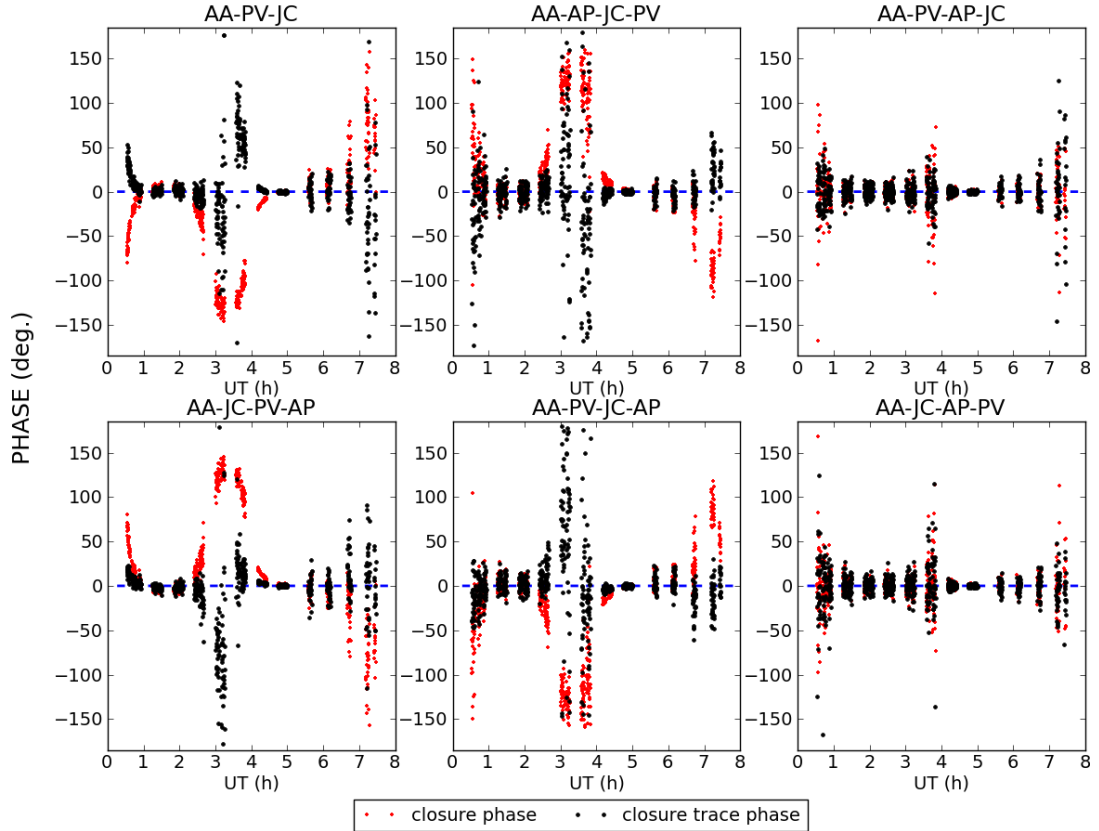


Figura 18: Fase de las trazas de clausura no redundantes del cuarteto de antenas AA – AP – PV – JC, para datos procedentes de la simulación de una fuente doble con ambas componentes polarizadas. Las clausuras de fase (en rojo) se calculan para el boomerang AA – PV – JC.

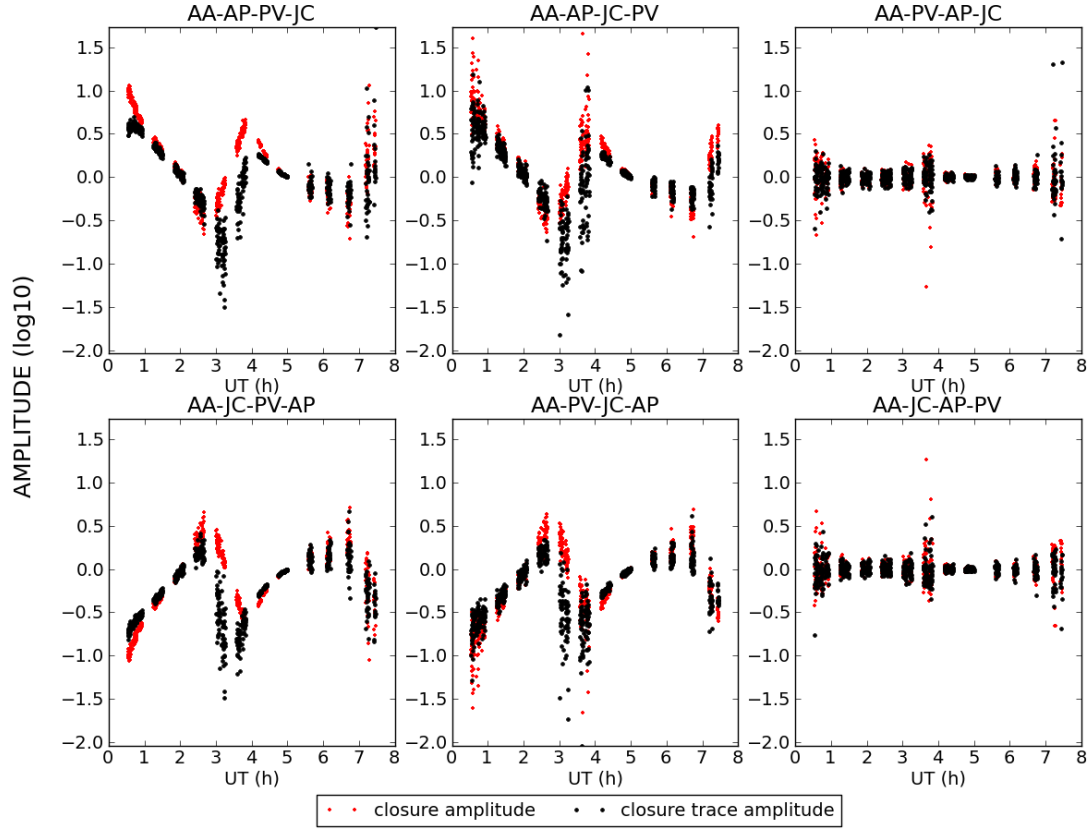


Figura 18: (cont.) Amplitud de las trazas de clausura y clausuras de amplitud (en rojo) del cuarteto AA – AP – JC – PV para datos procedentes de la simulación de una fuente doble con ambas componentes polarizadas.

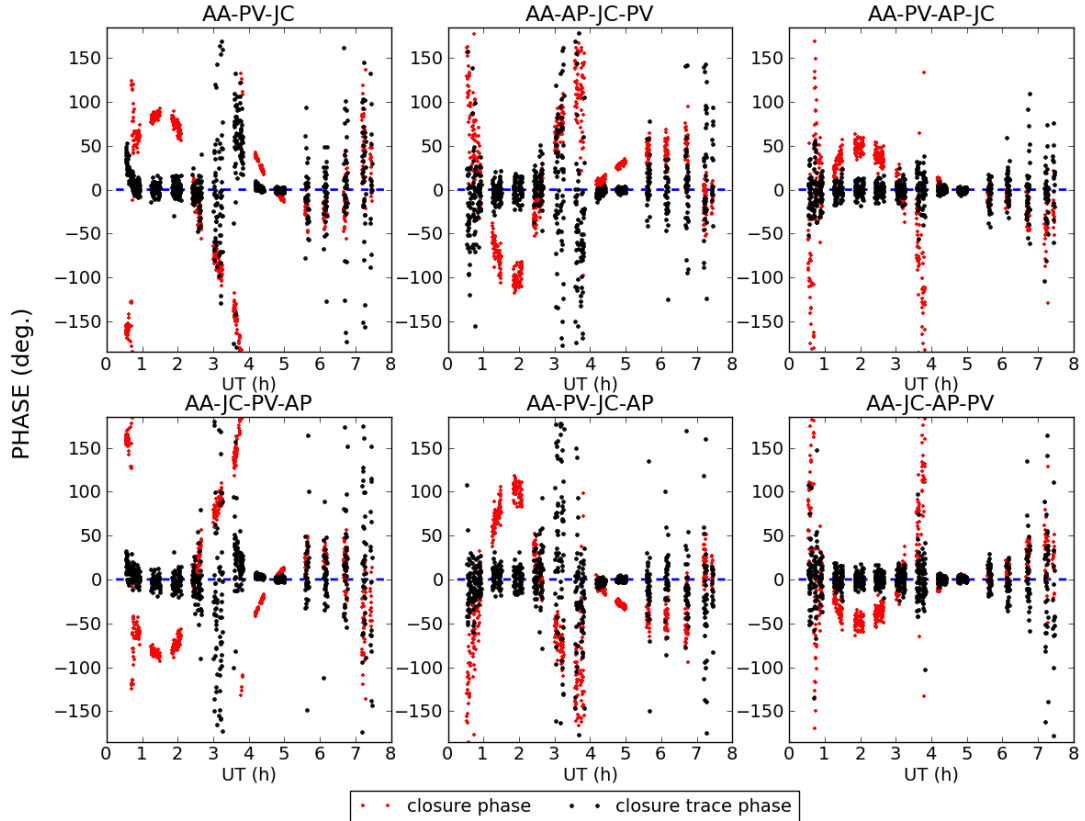


Figura 19: Fase de las trazas de clausura no redundantes del cuarteto de antenas AA–AP–PV–JC, para datos de la simulación de una fuente doble con ambas componentes polarizadas, incluyendo contaminación por polarización instrumental. Las clausuras de fase (en rojo) se calculan para el boomerang AA–PV–JC. Compárese esta figura con la fig. 18, donde se muestran los resultados para la simulación libre de efectos de polarización instrumental.

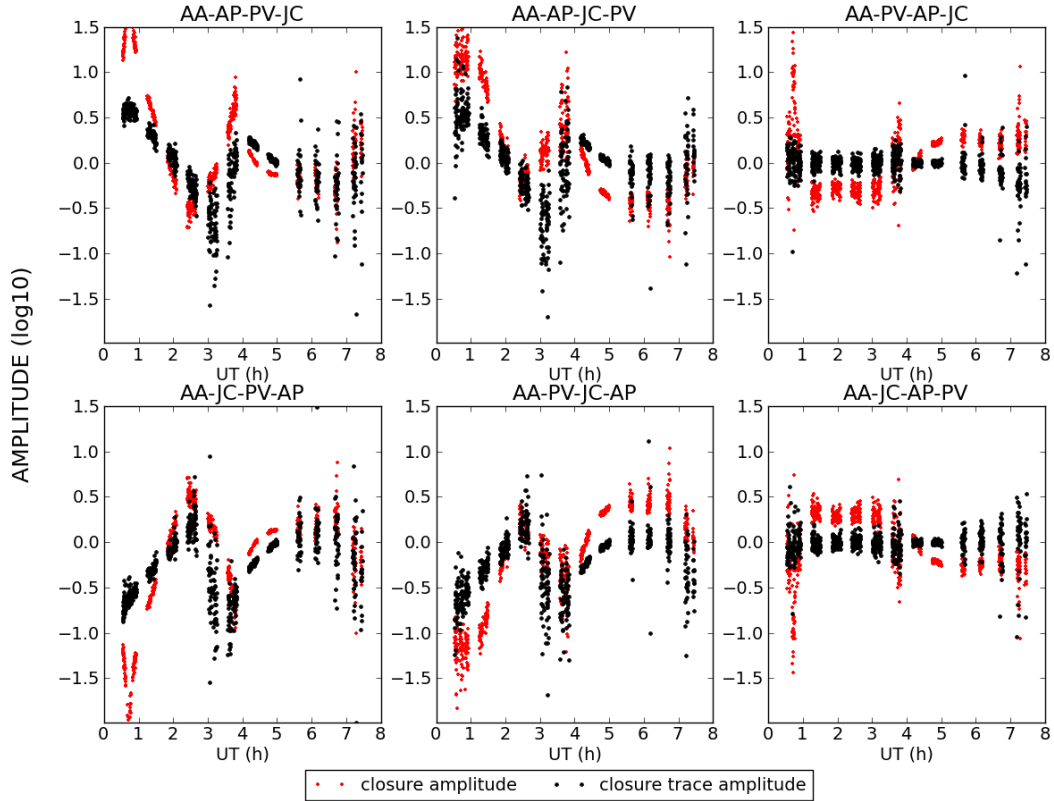
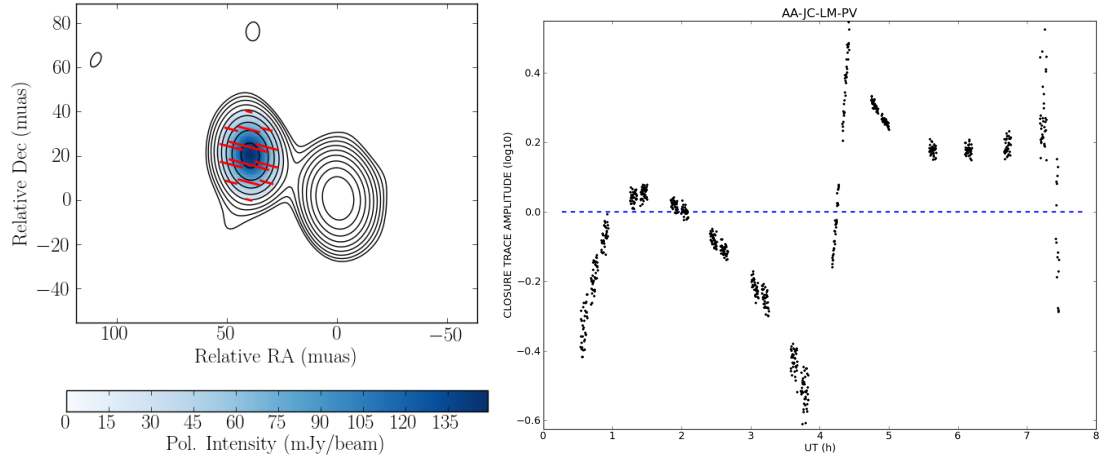


Figura 19: (cont.) Amplitud de las trazas de clausura del cuarteto AA – AP – JC – PV, junto con las clausuras de amplitud (en rojo), para datos procedentes de la simulación de observaciones de una fuente doble con ambas componentes polarizadas, incluyendo contaminación por polarización instrumental. Compárese esta figura con la fig. 18, en la que se muestran los resultados para la simulación libre de efectos de polarización instrumental.

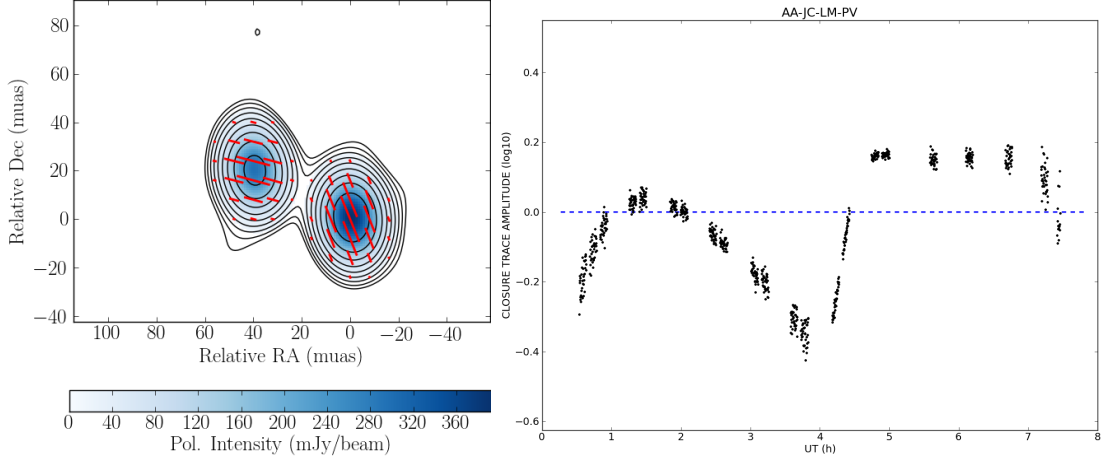
4.2.3. Cambios de las trazas de la fuente doble bajo variaciones de polarización diferencial en la estructura de la fuente.

Finalmente, podemos estudiar el comportamiento de las trazas de clausura de la fuente doble al simular modificar la polarización de una de las componentes mediante rotaciones en la esfera de Poincaré, mientras que la rotación de la otra componente se mantiene invariante, lo que implica que se modifica la polarización diferencial. Si para un mismo cuarteto de antenas las trazas de la fuente doble con dos componentes polarizadas son mayores (o menores) que la traza para la fuente doble con una componente polarizada, al rotar la polarización de una de las componentes de la fuente en la esfera de Poincaré se mantendrá el máximo o el mínimo en ese mismo instante de tiempo, tal y como hemos visto en el análisis del comportamiento de las trazas de la fuente doble en la sec. 3.

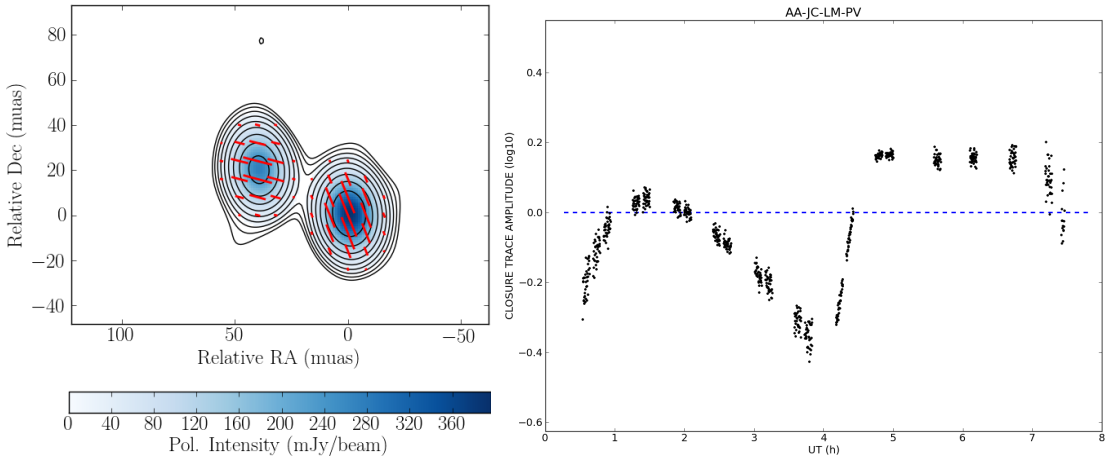
Para hacer este estudio, realizamos varias simulaciones de observaciones de una fuente doble. En primer lugar, generamos una fuente doble con solo una componente polarizada. Las trazas de esta fuente se compararán con las trazas de una fuente doble con las dos componentes polarizadas, y se realizarán distintas rotaciones en la esfera de Poincaré de la polarización de una de las componentes, de tal forma que se modifica la polarización diferencial de la estructura de la fuente. Para visualizar las distintas fuentes dobles simuladas, se obtienen las imágenes de la estructura de polarización de cada simulación (siguiendo el procedimiento planteado en el ap. C), tal y como se recoge en la fig. 20. Analizando con detalle los ratios entre las distintas trazas, se evidencia cómo tanto la rotación acimutal (que afecta al EVPA) como la rotación en latitud (y que consiste en la transferencia de polarización lineal a circular) modifican el comportamiento de la traza, tal y como puede verse en la fig. 21. En definitiva, obtenemos que la amplitud y la fase de las trazas de clausura son sensibles a los cambios de la polarización diferencial entre ambas componentes de la fuente doble. Finalmente, que el ratio de las trazas de clausura calculadas, en todo el tiempo que dura el experimento, oscile entre valores mayores y menores que la unidad (es decir, las trazas son mayores o menores, respectivamente, para la fuente doble con dos componentes polarizadas respecto de la fuente doble con una componente polarizada), se debe a que las líneas de base rotan, debido a la rotación de la Tierra, de forma que se modifica la posición relativa de las antenas respecto de la fuente.



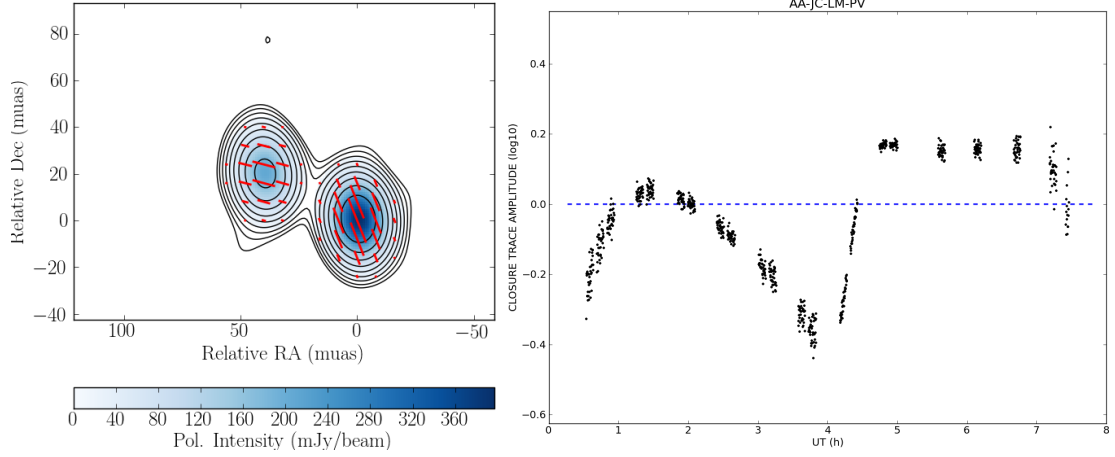
(a) Fuente doble con una componente sin polarizar. $(V/I)_{peak} = 0.000$.



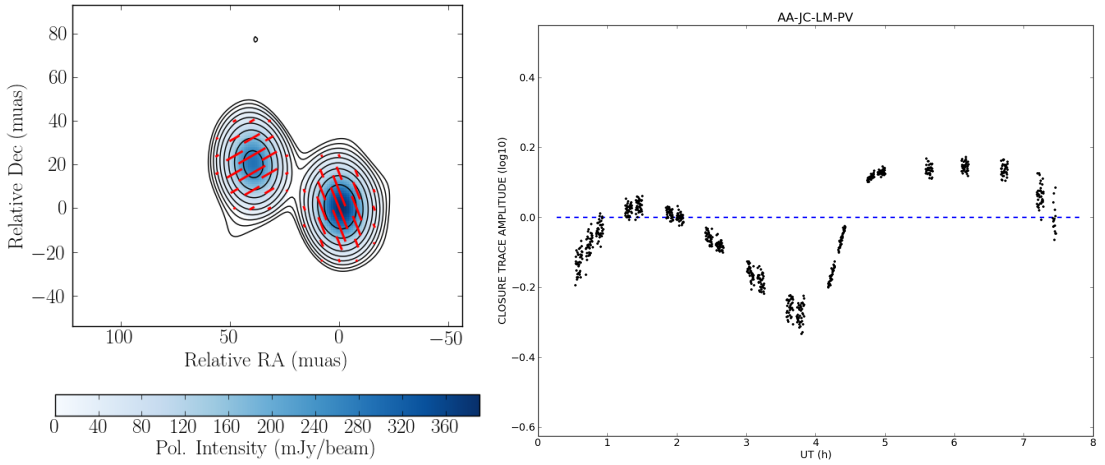
(b) Fuente doble con ambas componentes polarizadas. $(V/I)_{peak} = 0.001$.



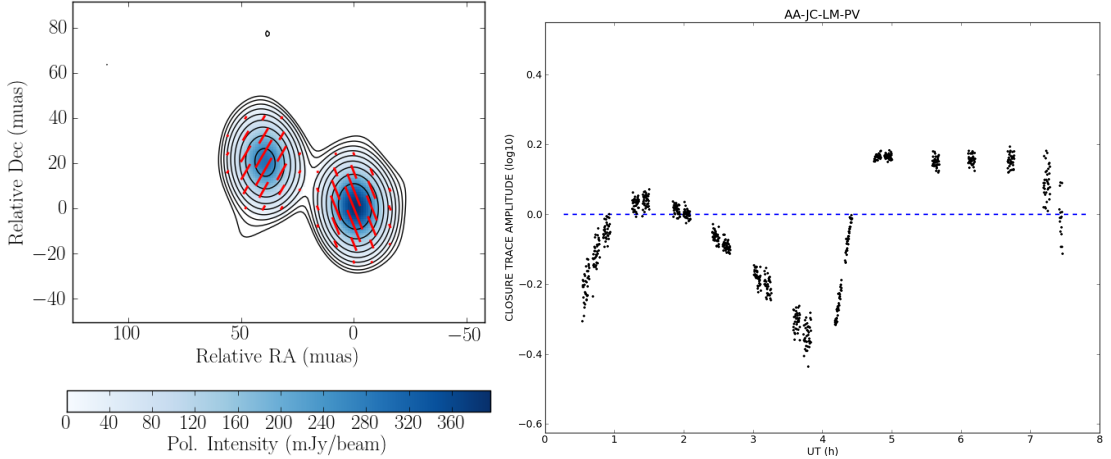
(c) Rotación en latitud 22° . $(V/I)_{peak} = 0.114$.



(d) Rotación en latitud 45° . $(V/I)_{peak} = 0.216$.



(e) Rotación acimutal 45° . $(V/I)_{peak} = 0.001$.



(f) Rotación acimutal 75° . $(V/I)_{peak} = 0.001$.

Figura 20: Imágenes de la estructura de polarización de las fuentes dobles cuya observación con el Event Horizon Telescope ha sido simulada usando el programa *polsimulate*. La escala de azules se corresponde con el mapeado de la intensidad de polarización lineal, en Jy/beam (Janskys por haz de convolución). Las líneas rojas muestran la orientación del ángulo de polarización (EVPA) de las dos componentes de la fuente doble. Finalmente, los contornos cuantifican la intensidad total (Stokes I). El contorno más bajo es de aprox. 16mJy/beam (que se corresponde con 5 veces el ruido estimado en la imagen), y los contornos están espaciados logarítmicamente entre este valor y el pico de intensidad, cuyo valor es 0.985Jy/beam. El ratio $(V/I)_{peak}$ cuantifica el pico de componente circular de polarización en la estructura de polarización de la fuente doble. En los paneles de la derecha, se muestra la evolución de la amplitud de la traza de clausura para el cuarteto de antenas AA – JC – LM – PV.

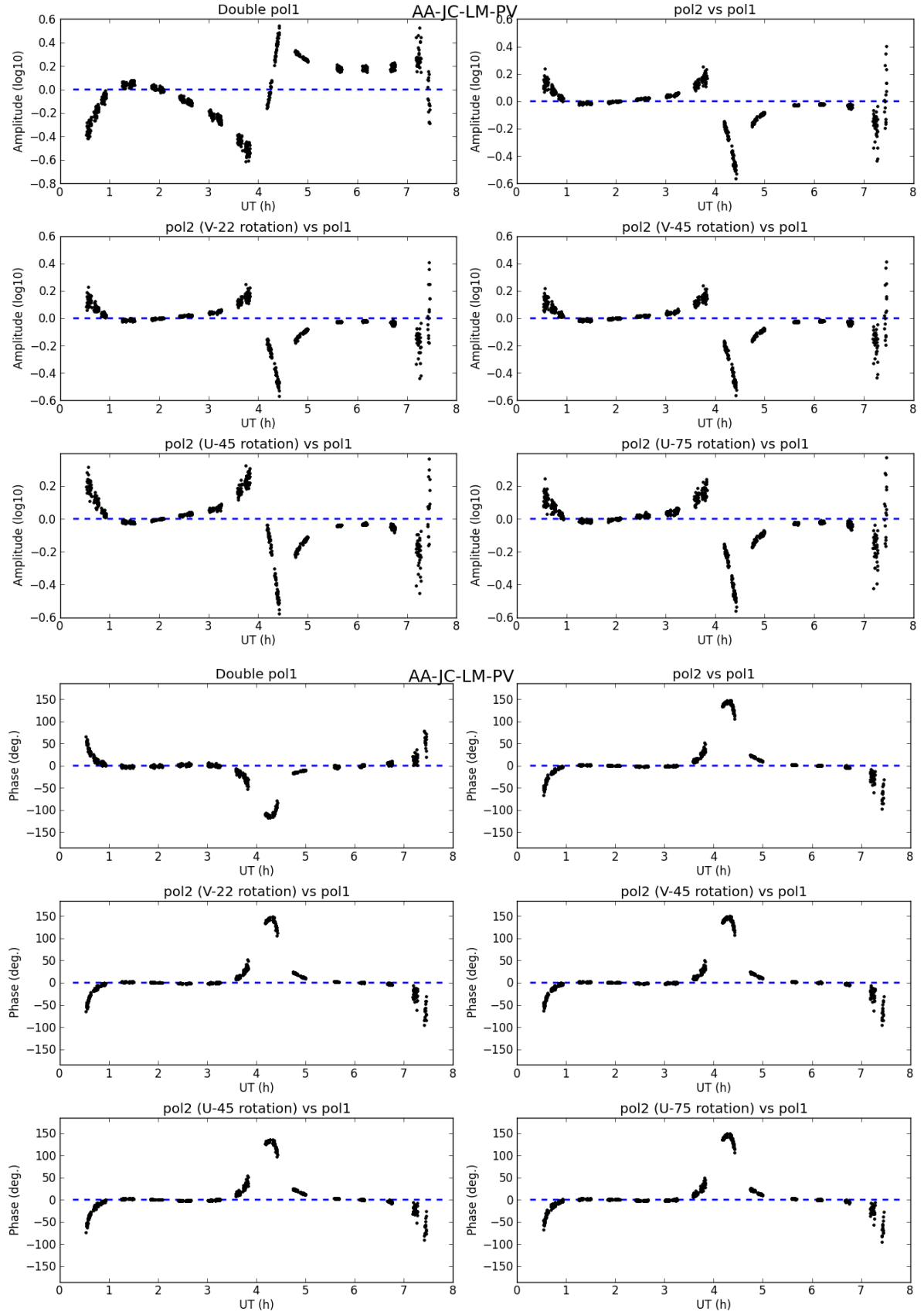


Figura 21: Amplitud y fase de los ratios de las trazas de clausura del cuarteto de antenas AA – JC – LM – PV, para datos procedentes de la simulación de observaciones de una fuente doble. Como referencia, en la gráfica con título *Double pol1* se muestra la evolución temporal de la amplitud y la fase de la traza para la fuente doble con una única componente polarizada. Por tanto, las figuras presentadas se corresponden con el ratio entre las trazas para la fuente doble con ambas componentes polarizadas al aplicar distintas rotaciones en la esfera de Poincaré y la traza de la fuente doble con una componente sin polarizar.

5. Aplicación de las trazas de clausura a datos reales del núcleo activo de la galaxia M87.

Para finalizar la tesis, se calcularán las trazas de clausura aplicando el software desarrollado a datos de observaciones radiointerferométricas reales. En concreto, analizaremos unos datos tomados con el telescopio ALMA, pieza clave del EHT. Durante las observaciones del EHT en la campaña de abril de 2017, el observatorio ALMA grabó la señal de las fuentes observadas en una terminal VLBI, para su posterior procesamiento con el resto de estaciones del EHT, pero también procesó todas las observaciones interferométricas entre las propias antenas de ALMA. Por tanto, haremos uso de las observaciones interferométricas (o visibilidades, $V(u, v)$), debidamente calibradas por el observatorio ALMA, del núcleo activo de M87, procedentes de las observaciones realizadas en abril del año 2017 obtenidas con receptores en banda 6 (es decir, longitud de onda de 1mm). Los receptores heterodinos de ALMA pueden muestrear la señal radio en varias partes del espectro de forma simultánea; en concreto, el espectro accesible a ALMA en una observación se divide en cuatro partes, de hasta 2GHz cada una, separadas en dos subconjuntos (llamados *sidebands* o bandas laterales). En el modo en que observó ALMA estos datos de M87, cada una de estas bandas laterales, (que están separadas una de la otra por 12 GHz), tiene dos ventanas espectrales o *spectral windows* (*spw*) de 2GHz cada una. Las *spw* 0 y 1 forman parte de una de las *sidebands*, mientras que las *spw* 2 y 3 forman parte de la otra. Las medidas se tomaron en cuatro ventanas espectrales distintas (0, 1, 2 y 3, correspondientes a frecuencias de 213.1GHz, 215.1GHz, 227.1GHz y 229.1GHz, respectivamente), para cuatro épocas distintas, obteniendo cuatro *tracks* de datos, donde cada *track* se corresponde a observaciones tomadas en abril de 2017, en un día concreto: A (2017-04-10), B (2017-04-06), D (2017-04-05) y E (2017-04-11). Para el cálculo de trazas, seleccionaremos el *track* B. En la fig. 22 se muestra la estructura de polarización del AGN y el chorro de M87, obtenida a partir de los datos de ALMA (ver ap. C).

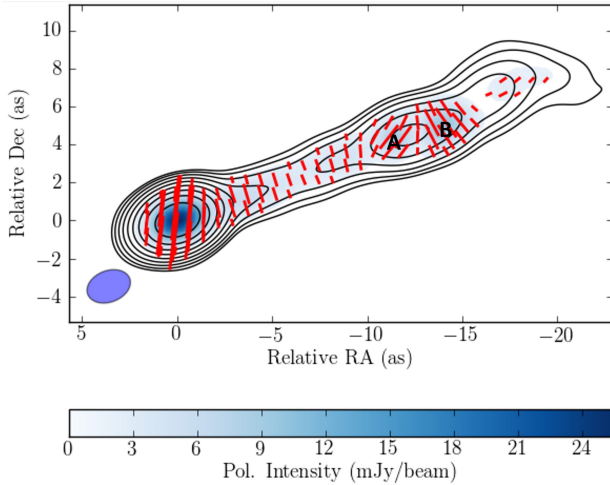


Figura 22: Imagen de la estructura de polarización del núcleo activo de la galaxia M87. La escala de azules se corresponde con el mapeado de la intensidad de polarización lineal. Las líneas rojas muestran la orientación del EVPA. Finalmente, los contornos cuantifican la intensidad total (Stokes I); el contorno más bajo es de aprox. 1.624 mJy/beam (que se corresponde con 5 veces el ruido estimado en la imagen), y los contornos están espaciados logarítmicamente entre este valor y el pico de intensidad, $I_{\text{peak}} = 1.207 \text{ Jy/beam}$. Puede encontrarse una versión alternativa de esta figura en Goddi et al. (2021) (ref. [24]).

En la figura 22, se pueden distinguir tanto el núcleo activo de M87 como el conjunto de dos picos de intensidad de polarización denotados como *knots* o puntos A y B, según la nomenclatura estándar para M87. Se puede apreciar que los dos picos A y B en intensidad de polarización no coinciden con el pico en intensidad (Stokes I). Esto podría indicar que el pico de intensidad está relacionado con un choque magneto-hidrodinámico interno en el chorro, ya que las turbulencias que podrían originarse en el campo magnético de tales regiones resultarían en una depolarización neta de la luz. Dado que estas componentes en el chorro de M87 se han observado en distintas bandas del espectro y han perdurado durante años (refs. [25, 26, 27, 28, 29]), queda patente que en esta región se encuentra, de hecho, un choque estacionario. Por otro lado, analizando la orientación del campo eléctrico a lo largo del chorro, se comprueba que es perpendicular a la dirección del chorro hasta llegar al punto A, donde se produce un cambio en la orientación del campo, siendo paralela al chorro, para luego recuperar la orientación inicial en el punto B, lo que podría ser una consecuencia del choque interno estacionario. Adicionalmente, se añade a la tesis la fig. 23 (extraída del TFG, ref. [19]), que consiste en una imagen de la medida de rotación del núcleo activo y el chorro de M87, cuantificando así la rotación de Faraday a lo largo de la estructura de M87 ⁵.

⁵Una introducción breve al fenómeno de rotación de Faraday, junto con la metodología a seguir para obtener la fig. 23 se plantean en el ap. D.

Una conclusión directa de la fig. 23 es que las distintas partes del chorro muestran diferentes rotaciones de Faraday. Concretamente, en la región del núcleo se detecta una alta medida de rotación con signo positivo, que no se aprecia en el resto del chorro. Por consiguiente, es de esperar que la estructura del EVPA a lo largo de la fuente dependa sensiblemente de la frecuencia de observación, tal y como ya se analizó en el TFG (ref. [19]).

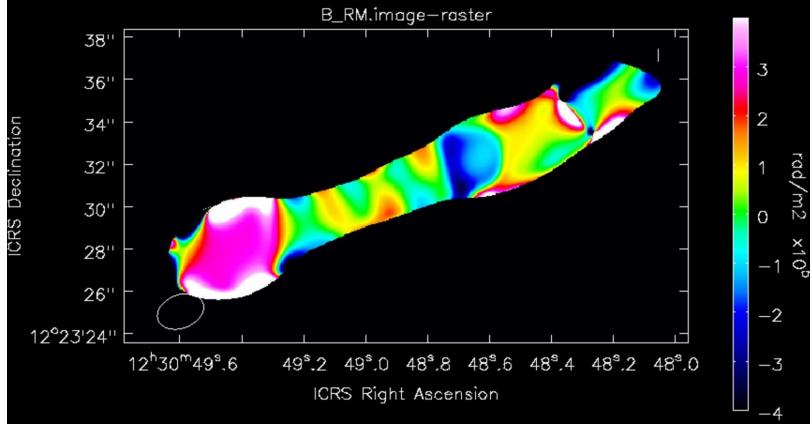


Figura 23: Imagen de la medida de rotación detectada en las observaciones de ALMA de la galaxia M87.

Pese a que M87 no es una fuente doble en intensidad total, sí podría aproximarse a una fuente doble (o triple, a lo sumo) en intensidad polarizada. Esto se debe a que la polarización está dominada por el núcleo y por los dos puntos *A* y *B*, cercanos entre sí. Por lo tanto, ya a nivel cualitativo, podemos aplicar las conclusiones de las secciones 3 y 4 al análisis de las trazas de clausura de estas observaciones de M87. Como hemos visto en el desarrollo analítico de la traza de una fuente doble, una rotación en el EVPA de una componente con respecto a la otra modifica la amplitud y la fase de la traza, con lo que, cuando haya una rotación de Faraday diferente entre las distintas componentes de la estructura de M87, esto quedará impreso en las trazas. Por consiguiente, encontrar trazas diferentes entre las distintas ventanas espectrales nos proporcionaría una evidencia robusta de la presencia de rotación (diferencial) de Faraday en M87. Si, por el contrario, la rotación de Faraday en M87 fuese homogénea (es decir, la misma en todos los puntos del chorro, incluido el núcleo) no se apreciaría ninguna dependencia espectral de las trazas de clausura.

En la fig. 24 se muestra la evolución de la amplitud y la fase de varias trazas de clausura a lo largo de la duración de las observaciones de M87, calculadas con el software desarrollado en esta tesis (ver subsec. 4.1). Podemos comprobar que tanto la amplitud como la fase de las trazas de clausura para las ventanas espectrales 0 y 1 quedan por encima de la amplitud y la fase para las ventanas espectrales 2 y 3. En definitiva, en las trazas calculadas se observa que hay una variación de la amplitud y la fase de la traza con la frecuencia de observación, lo que se traduce necesariamente en una rotación de Faraday no homogénea (es decir, diferencial) en el núcleo/chorro de M87. La importancia de este resultado radica en que es independiente de los efectos instrumentales que contaminan la señal, al haber empleado trazas de clausura y ser estas insensibles a todos estos efectos (es decir, independientes de cualquier posible defecto de calibración instrumental en los datos). Estos resultados están en consonancia con los del TFG (ref. [19]), donde se encontró que la variación del EVPA (y por tanto la rotación de Faraday) con la frecuencia es significativamente mayor en el núcleo activo de M87 que en los *knots* (ver fig. 23).

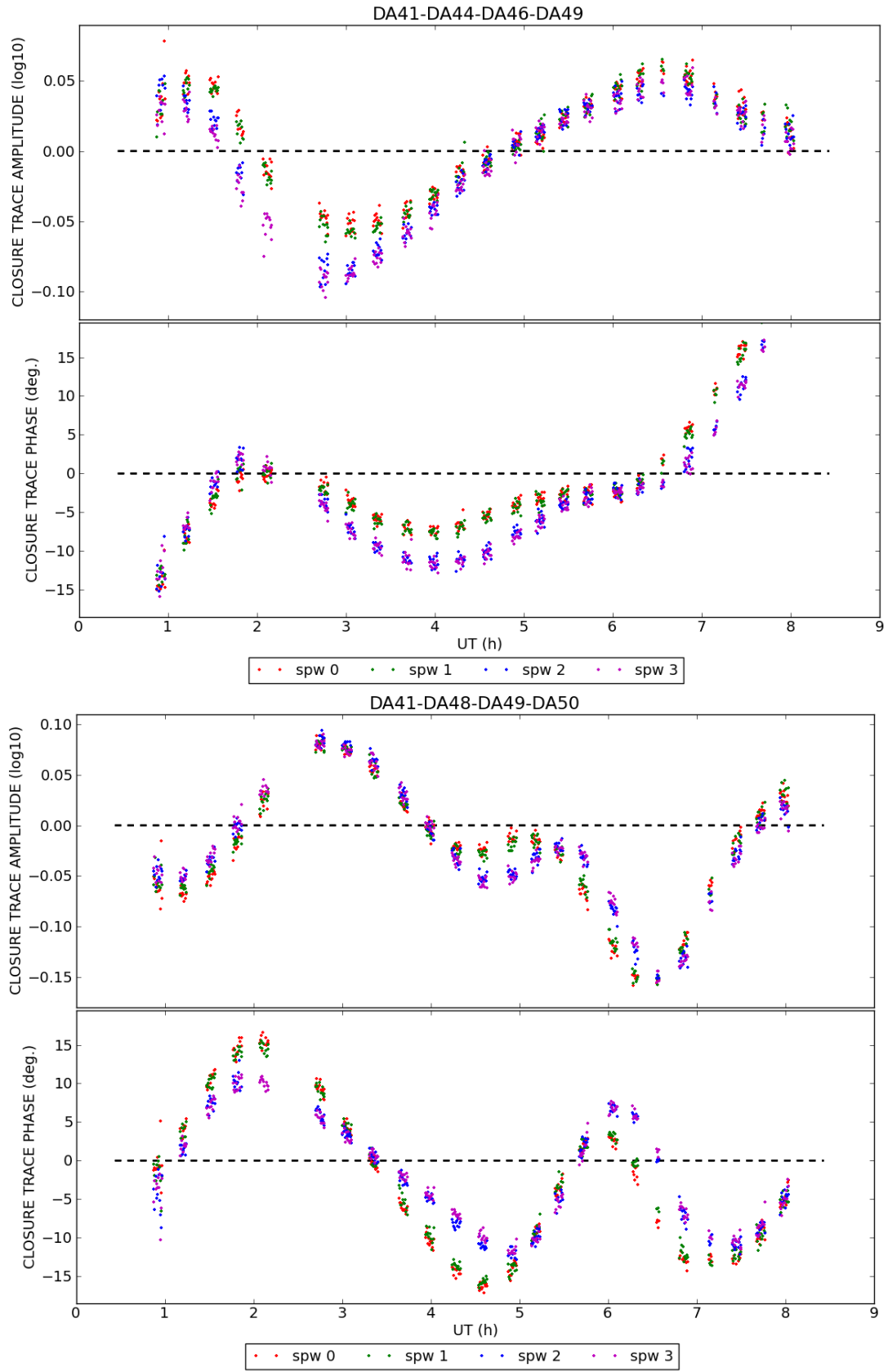


Figura 24: Amplitud y fase de la traza de clausura calculada para dos cuartetos de antenas diferentes, a partir de los datos de las observaciones interferométricas del núcleo activo de M87 generados por ALMA, para cada una de las ventanas espectrales (spw) de observación.

6. Conclusiones.

Las trazas de clausura son un observable interferométrico novedoso y que demuestra tener un gran potencial para el análisis de observaciones de polarimetría interferométrica, tal y como se evidencia en ref. [15], que muestra la primera aplicación publicada de la traza de clausura. Sin embargo, aún falta realizar un análisis sistemático de las trazas de clausura y cómo rotaciones diferenciales de la esfera de Poincaré las afectan. En el artículo de Broderick y Pesce (ref. [8]) se demuestra que son degeneradas (invariantes) a rotaciones globales en la esfera de Poincaré, pero aún no se ha realizado un análisis sistemático de otras posibles degeneraciones de las trazas de clausura. En definitiva, sabemos que las trazas de clausura son observables potentes independientes a efectos instrumentales, pero todavía es necesario profundizar en sus propiedades, las degeneraciones que se derivan de estas y en cómo se podrían utilizar las trazas en el modelado de la estructura de polarización de las fuentes observadas. En esta tesis, se ha realizado una aproximación a este problema al analizar con detalle el caso de una fuente doble, evidenciando que, si bien conceptualmente son sencillas, incluso para el caso más trivial se obtiene una expresión algebraica con una gran cantidad de términos, y un comportamiento general no trivial de las trazas en función de los parámetros de Stokes y de la posición de las antenas.

Por lo tanto, un aspecto muy relevante de esta tesis ha sido el desarrollo de un modelo analítico en el que podemos estudiar cómo dependen la amplitud y la fase de las trazas de clausura de los distintos parámetros de Stokes de una fuente doble, tomando como referencia una de las componentes y modificando los parámetros de Stokes de la otra, junto con la dependencia con la localización de las antenas y la distancia entre ambas componentes de la fuente doble. Con este modelo analítico, hemos comprobado que las trazas, debido a la complejidad presente en el proceso de su construcción, se relacionan de forma no trivial con la estructura de polarización de la fuente. Esta complejidad queda patente en el estudio de la fuente doble realizado en esta tesis. El primer aspecto que otorga complejidad a la interpretación de las trazas de clausura es que la distribución de antenas modifica el comportamiento de estas cantidades. Por otro lado, al estudiar el caso más trivial en el que ambas componentes presentan la misma intensidad, hemos podido obtener unas reglas básicas del comportamiento de las trazas. No obstante, al modificar la intensidad de ambas componentes de la fuente doble surgen relaciones no triviales que dificultan la interpretación de la estructura de polarización a partir de la traza, al no haber una relación unívoca entre la intensidad de polarización de ambas componentes para obtener el valor extremo de la traza, pese a ser observado trivialmente para el caso en el que las dos componentes tienen misma intensidad de polarización.

No obstante, este análisis sí nos ha permitido obtener una serie de conclusiones generales del comportamiento de las trazas de una fuente doble:

- En el caso en el que las dos componentes de la fuente doble presentan la misma intensidad, podemos concluir que:
 - se observa un extremo (máximo o mínimo) en la amplitud cuando las dos componentes de la fuente doble presentan el mismo estado de polarización (misma intensidad y ángulo de polarización), y
 - las fases de las trazas son más sensibles a cambios en la intensidad de polarización cuando los ángulos de polarización (EVPA) de ambas componentes apuntan en la misma dirección. Así, cuando los EVPA de ambas componentes de la fuente doble apuntan en distintas direcciones, la fase de la traza es cada vez menos sensible a cambios en la intensidad de polarización.
- Por otro lado, al estudiar la fuente doble con componentes de distinta intensidad:
 - se siguen obteniendo extremos (máximos o mínimos) en las amplitudes de las trazas cuando los ángulos de polarización (EVPA) son iguales, pero ya no hay una relación trivial entre los ratios de la intensidad de polarización y los ratios de intensidad entre ambas componentes, y
 - el comportamiento de las fases de las trazas no presenta variaciones respecto del caso de ambas componentes con igual intensidad.

Otro resultado de esta tesis es la creación de un software, basado en CASA, capaz de calcular las trazas de clausura de cualquier observación interferométrica. Además, hemos comparado sus resultados con los publicados en Broderick y Pesce (ref. [8]) a partir de observaciones sintéticas del *Event Horizon Telescope* (EHT), confirmando así que el software funciona adecuadamente. De esta forma, con el uso de

este software y datos sintéticos de observaciones de una fuente doble, hemos confirmado que las reglas generales obtenidas en el desarrollo analítico permiten interpretar cambios en la polarización diferencial de las componentes de la fuente doble, mediante el cálculo de las trazas y el análisis de su comportamiento en toda la duración del experimento simulado.

Para finalizar, conocido el comportamiento de las trazas de clausura en la fuente doble, hemos aplicado nuestro software de cálculo de trazas a datos reales de observaciones radiointerferométricas del núcleo activo de M87, de tal forma que hemos obtenido las trazas correspondientes a esta fuente. Como al analizar la estructura de polarización de M87 se observan dos componentes claramente diferenciadas en polarización, el *core* y los *knots*, podemos aproximar esta fuente como una fuente doble y emplear las conclusiones del desarrollo analítico para comparar las distintas trazas obtenidas en distintas ventanas espectrales. Así, como se observan variaciones significativas de las fases de las trazas en las distintas ventanas espectrales, se puede concluir que hay una variación del EVPA diferencial entre las dos componentes de la estructura de M87, y por tanto se puede concluir que existe una rotación de Faraday diferencial en M87, tal y como se reportó en el TFG. Lo relevante de este resultado es que supone una comprobación robusta de que existe rotación de Faraday diferencial en M87, ya que es independiente de cualquier posible defecto de calibración instrumental en los datos.

Como conclusión final, en esta tesis hemos estudiado con todo detalle el caso de la fuente doble, pero sería necesario extender el análisis a fuentes complejas, siendo este uno de los planes a futuro para aumentar nuestra comprensión de las trazas de clausura y explotar todo el potencial oculto en estos observables interferométricos.

Para cerrar esta tesis, planteamos una posible utilidad futura, más allá del EHT, de este observable radiointerferométrico. A lo largo de esta tesis, se ha analizado con detalle el caso de la fuente doble, y en el proceso se ha evidenciado la complejidad existente tras la sencillez del concepto de la traza de clausura, que dificultaría su uso para analizar los detalles de la variación temporal de la estructura de polarización de la fuente que se encuentran impresos en la variación de la amplitud y la fase de las trazas de clausuras. No obstante, aunque las trazas de clausura para casos reales de mayor complejidad no tengan interpretación cualitativa directa, esto no impide que las trazas de clausura sean de gran utilidad para la reconstrucción de imágenes a partir de los datos obtenidos en las observaciones radiointerferométricas, mediante el uso, por ejemplo, de algoritmos de deconvolución basados en la información codificada en las trazas de clausura.

En el proceso de deconvolución de una imagen, se busca comparar lo bien que ajusta la reconstrucción del modelo de la fuente a los datos observacionales. Para ello, se puede usar el método de χ^2 para estudiar la bondad del ajuste, pero si se construye la χ^2 para las visibilidades directamente, los resultados del método estadístico serán sensibles a los efectos instrumentales (ganancias, efectos de polarización instrumental, ...) Por este motivo, se busca calcular un valor de χ^2 para observables robustos que sean más insensibles a la calibración. El cálculo de χ^2 se realiza partiendo de un modelo de la estructura de la fuente que se está estudiando. De esta forma, se pueden calcular cantidades de clausura modelo, como clausuras de amplitud y fase o trazas de clausura, y por tanto se puede calcular χ^2 utilizando como observables las trazas de clausura, invariantes a los efectos instrumentales, de forma que los resultados del test χ^2 son insensibles a los efectos instrumentales. Para ello, a partir del modelo de la estructura de polarización de la fuente estudiada, se podría calcular la transformada de Fourier en los puntos dados por las líneas de base del interferómetro, obteniendo las visibilidades modelo en esos puntos del espacio de Fourier. Con las visibilidades modelo para cada par de antenas del interferómetro, se calcularían las trazas de clausura modelo empleando las visibilidades de cada cuádruplete de antenas según la definición de este observable. Comparando las trazas modelo con las trazas calculadas a partir de los datos de la observación radiointerferométrica, se calcularía el parámetro χ^2 y se realizaría el correspondiente test estadístico para comprobar la bondad de nuestra reconstrucción de la fuente a los datos de la observación. A día de hoy, el algoritmo aquí propuesto todavía no existe.

En definitiva, una posible explotación de las trazas de clausura es introducirlas en el término de la función error de un nuevo algoritmo de reconstrucción de imágenes de polarización, ya que se añadiría a la función error un nuevo término de χ^2 que, al calcularse a partir de las trazas de clausura, sería insensible a efectos instrumentales y a la calibración.

Apéndices.

A. Expresión analítica de la traza de la fuente doble.

Para mostrar la extensión de la expresión más general para el cálculo de la traza en el estudio de la fuente doble, se incluye en este anexo la expresión algebraica obtenida siguiendo los pasos indicados en la sección 3:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{ABCD}(d, u_{AB}, u_{BC}, u_{CD}, u_{AD}, I_1, Q_1, U_1, V_1, I_2, Q_2, U_2, V_2) = & \\
 & (I_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + I_1^3 I_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + I_1^2 I_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} + 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - 2I_1^2 Q_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & - I_1^2 Q_1 Q_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & - I_1^2 Q_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - 2I_1^2 U_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & - I_1^2 U_1 U_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & - I_1^2 U_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - 2I_1^2 V_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & - I_1^2 V_1 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & - I_1^2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + I_1 I_2^3 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & - I_1 I_2 Q_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - 8I_1 I_2 Q_1 Q_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} \\
 & - I_1 I_2 Q_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) - I_1 I_2 U_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & - 8I_1 I_2 U_1 U_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} - I_1 I_2 U_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & - I_1 I_2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - 8I_1 I_2 V_1 V_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} \\
 & - I_1 I_2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) + I_1^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} \\
 & - I_2^2 Q_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - I_2^2 Q_1 Q_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & - 2I_2^2 Q_2^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} - I_2^2 U_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & - I_2^2 U_1 U_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) - 2I_2^2 U_2^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} \\
 & - I_2^2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - I_2^2 V_1 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & - 2I_2^2 V_2^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} + Q_1^3 Q_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + Q_1^3 Q_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + Q_1^2 Q_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} + 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + 2Q_1^2 U_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & + Q_1^2 U_1 U_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + Q_1^2 U_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + 2Q_1^2 V_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & + Q_1^2 V_1 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + Q_1^2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + Q_1 Q_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & + Q_1 Q_2 U_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + Q_1 Q_2 U_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) + Q_1 Q_2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + 8Q_1 Q_2 V_1 V_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} + Q_1 Q_2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) + Q_1^4 e^{2.0i\pi d u_{BC}} \\
 & + Q_2^2 U_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + Q_2^2 U_1 U_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & + 2Q_2^2 U_2^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} + Q_2^2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + Q_2^2 V_1 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) + 2Q_2^2 V_2^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} + U_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & + U_1^3 U_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + U_1^3 U_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} + 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + 2U_1^2 V_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) \\
 & + U_1^2 V_1 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + U_1^2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + U_1 U_2^3 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & + U_1 U_2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + 8U_1 U_2 V_1 V_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} \\
 & + U_1 U_2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) + U_1^4 e^{2.0i\pi d u_{BC}} \\
 & + U_2^2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + U_2^2 V_1 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & + 2U_2^2 V_2^2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} + V_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + V_1^3 V_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\
 & + V_1^2 V_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} + 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + V_1 V_2^3 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\
 & + V_2^4 e^{2.0i\pi d u_{BC}}) e^{1.0i\pi d(-u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}-u_{CD})} \\
 & (-I_1^2 - 2I_1 I_2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} - I_2^2 e^{4.0i\pi d u_{BC}} + Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} + Q_2^2 e^{4.0i\pi d u_{BC}} + U_1^2 + 2U_1 U_2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} + U_2^2 e^{4.0i\pi d u_{BC}} + V_1^2 + 2V_1 V_2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} \\
 & + V_2^2 e^{4.0i\pi d u_{BC}}) (-I_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} - 2I_1 I_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} - I_2^2 + Q_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} + 2Q_1 Q_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} + Q_2^2 + U_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} + 2U_1 U_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} + U_2^2 + V_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} \\
 & + 2V_1 V_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} + V_2^2)
 \end{aligned}$$

En esta expresión, (I_1, Q_1, U_1, V_1) y (I_2, Q_2, U_2, V_2) son los parámetros de Stokes de las dos componentes de la fuente doble, d es la separación entre ambas componentes, en unidades de longitud de onda, λ , y u_{AB} , u_{BC} , u_{CD} y u_{AD} son las coordenadas en el plano de Fourier donde hay líneas de base entre antenas observando, en unidades de longitud de onda, λ .

A partir de esta expresión general, tomando los parámetros de Stokes (Q_2, U_2, V_2) nulos, siendo por tanto la componente 2 una fuente no polarizada, pero con intensidad $I_2 \neq 0$, podemos obtener la expresión algebraica de la traza de la fuente doble con una componente polarizada y otra sin polarizar:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ABCD}(d, u_{AB}, u_{BC}, u_{CD}, u_{AD}, I_1, Q_1, U_1, V_1, I_2, Q_2 = 0, U_2 = 0, V_2 = 0) = \\ (I_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + I_1^3 I_2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\ + I_1^2 I_2^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} + 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) - 2I_1^2 Q_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} \\ - 2I_1^2 U_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} - 2I_1^2 V_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + I_1 I_2^3 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{BC}+u_{CD})} + 1) \\ - I_1 I_2 Q_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\ - I_1 I_2 U_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\ - I_1 I_2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{CD})} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + I_2^4 e^{2.0i\pi d u_{BC}} \\ - I_2^2 Q_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\ - I_2^2 U_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) \\ - I_2^2 V_1^2 (e^{2.0i\pi d u_{AB}} - 2e^{2.0i\pi d u_{AD}} + e^{2.0i\pi d u_{CD}} + e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{BC})} + e^{2.0i\pi d(u_{AD}+u_{BC}+u_{CD})}) + Q_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + 2Q_1^2 U_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} \\ + 2Q_1^2 V_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + U_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + 2U_1^2 V_1^2 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})} + V_1^4 e^{2.0i\pi d(u_{AB}+u_{AD}+u_{CD})}) e^{1.0i\pi d(-u_{AB}+u_{AD}+u_{BC}-u_{CD})} \\ (-I_1^2 - 2I_1 I_2 e^{2.0i\pi d u_{BC}} - I_2^2 e^{4.0i\pi d u_{BC}} + Q_1^2 + U_1^2 + V_1^2) (-I_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} - 2I_1 I_2 e^{2.0i\pi d u_{AD}} - I_2^2 + Q_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} + U_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}} + V_1^2 e^{4.0i\pi d u_{AD}}) \end{aligned}$$

B. Breve descripción de las antenas empleadas en la simulación de observaciones VLBI.

El software `polsimulate` (ref. [16]) genera datos de simulaciones de observaciones VLBI de cada uno de los radiotelescopios que forman parte del *array* del *Event Horizon Telescope* (EHT):

- ALMA (*Atacama Large Millimeter/submillimeter Array*) es un interferómetro constituido por una red de antenas de 12 metros de diámetro, distribuidas en una región amplia para poder realizar las observaciones astronómicas, de forma que se consigue sintetizar una resolución angular más allá del límite de difracción de cada antena por separado. La distancia entre las antenas del observatorio ALMA puede variar desde pocos metros hasta 16 kilómetros, dependiendo de las observaciones deseadas, y cambia con el tiempo, ya que las antenas mueven de un lado para otro de la planicie. Para el caso concreto del EHT, las antenas de ALMA se distribuyen de tal forma que el área efectiva de recolección es equivalente a una antena de diámetro de 75m, restringiendo las *baselines* o líneas de base (la separación entre antenas) a 1km (ref. [30]). La señal recibida por cada antena de la red puede amplificarse casi sin deterioro en la misma, pues la contribución del ruido producido por la antena es pequeña, y posteriormente es digitalizada. En el proceso de análisis de los datos interferométricos, la distribución de las antenas produce un efecto de tipo convolutivo en las imágenes reconstruidas, consistente en una PSF (*Point Spread Function*), que se define como la respuesta del interferómetro a una fuente puntual. La imagen obtenida con ALMA está, por lo tanto, convolucionada con esta PSF, que la distorsiona notablemente ⁶.
- El *Atacama Pathfinder Experiment* (APEX, ref. [33]) es un radiotelescopio diseñado para realizar observaciones a longitudes de onda submilimétricas localizado en el Observatorio Llano de Chajnantor en el desierto de Atacama en el norte de Chile. Consiste en un reflector principal con un diámetro de 12 metros y un espejo hiperboloide secundario oscilante de 0.75 metros.
- El *Submillimeter Telescope* (ref. [34]) es un radiotelescopio de longitud de onda submilimétrica ubicado en Mount Graham, Arizona, EE. UU., a una elevación de 3.185m. Consiste en un reflector principal de 10 metros de diámetro, con un reflector secundario hiperboloide de 0.69 metros.
- El *IRAM 30-meter telescope* (ref. [35]) es un radiotelescopio para observaciones astronómicas en el rango milimétrico de longitudes de onda, ubicado en Pico Veleta, en la Sierra Nevada española. El telescopio es una antena parabólica de un solo plato, y está equipado con una serie de receptores heterodinos y cámaras continuas que operan a 3, 2, 1 y 0,9 mm.

⁶Para más información sobre ALMA, se puede acceder al sitio web oficial [31]. Adicionalmente, el proceso de obtención de imágenes astronómicas con ALMA se desarrolla con detalle en el artículo [32].

- El *James Clerk Maxwell Telescope* (JCMT, ref. [36]) es un radiotelescopio de longitud de onda submilimétrica localizado en el Observatorio Mauna Kea en Hawái, EE. UU. El reflector primario de 15 metros de diámetro del JCMT está compuesto por 276 paneles ligeros individuales. Además, presenta un espejo secundario que se puede ajustar en tres ejes para compensar los cambios de enfoque y los cambios en la figura del primario. En cuanto a la instrumentación del radiotelescopio, el JCMT hace uso de receptores heterodinos, instrumentos de matriz de bolómetros continuos (SCUBA-2) y un instrumento continuo lineal auxiliar POL-2.
- El *Submillimeter Array* (SMA, ref. [37]) es un radiointerferómetro de 8 elementos, de 6 metros de diámetro cada uno, que opera a frecuencias de 180 GHz a 420 GHz. Ubicado cerca de la cima de Maunakea en Hawái, los 8 elementos pueden disponerse en configuraciones con líneas de base de hasta 509m, de forma que puede llegar a producir un haz sintetizado de anchura por debajo del segundo de arco. Cada elemento puede observar con dos receptores simultáneamente, con hasta 8 GHz de ancho de banda cada uno.
- El *Large Millimeter Telescope* (LMT, ref. [38]) es un radiotelescopio diseñado para hacer observaciones astronómicas en longitudes de onda milimétricas, ubicado en la cima del Volcán Sierra Negra en México. Se trata de un sistema óptico Cassegrain curvo consistente en una superficie reflectora primaria de 50 m, junto con un espejo secundario de 2.5 m de diámetro y un espejo terciario plano localizado en el eje de elevación del telescopio.
- El *South Pole Telescope* (SPT, ref. [39]) es un radiotelescopio de 10 metros de diámetro diseñado para realizar observaciones en longitudes de onda milimétricas y submilimétricas del espectro electromagnético. Está ubicado en la estación Amundsen-Scott del Polo Sur, en la Antártida.

C. Reconstrucción de imágenes interferométricas en Astronomía.

Las medidas interferométricas (consistentes en el cómputo de las correlaciones cruzadas de las señales para cada par de antenas) se distribuyen en el llamado *plano UV*, cuyas coordenadas (u,v) son las frecuencias espaciales de las imágenes de las fuentes observadas. Antes de la reconstrucción de la imagen, los datos en el plano UV se organizan en una cuadrícula homogénea (se *pixelizan*) de forma que el proceso deconvolutivo de reconstrucción de la imagen pueda formularse a partir de transformadas rápidas de Fourier (ref. [40]). La forma en la que se promedian las medidas interferométricas en cada píxel (y el peso estadístico que se le da al mismo) puede tener un efecto decisivo en la imagen final, afectando a la sensibilidad y a la resolución obtenidas (ref. [22], caps. 4,9).

La construcción de esta cuadrícula de los datos obtenidos a partir de las ondas provenientes de la fuente observada es clave, pues permite obtener imágenes mejoradas mediante algoritmos que involucran la transformada de Fourier usando la técnica de la síntesis de apertura. De esta forma, se reduce el ruido y otras fuentes de error, y se consiguen imágenes con mayor grado de detalle. Actualmente, existen multitud de algoritmos para eliminar el efecto de la PSF en imágenes interferométricas (son los llamados *algoritmos deconvolutivos*). Entre ellos, destaca CLEAN (ref. [23], cap. 11), una de cuyas variantes es el *método MFS*.

C.1. El método MFS.

Un aspecto importante a considerar en la obtención de imágenes astronómicas es que todo interferómetro contiene un número finito de antenas, de tal forma que el muestreo de datos en el plano (u,v) es parcial, presentando vacíos en el mapeado de las frecuencias espaciales. En este sentido, los algoritmos de deconvolución se encargan de interpolar los puntos muestreados del plano (u,v) , lo que equivale a deconvolucionar los efectos de la PSF en el plano imagen. Sin embargo, la imagen deconvolucionada contendrá errores procedentes del procesado y reconstrucción de la imagen, que serán tanto mayores cuanto peor sea la cobertura del plano (u,v) .

Para disminuir estos errores y así obtener imágenes astronómicas de alta fidelidad, sin necesidad de aumentar el número de antenas del interferómetro, se emplea el algoritmo de deconvolución CLEAN, que puede mejorarse (para el caso de observaciones con un ancho de banda relativo no despreciable) con

el llamado *Multi-Frequency Synthesis* (MFS).⁷ Este método hace uso del hecho de que las coordenadas (u, v) se miden en longitudes de onda, de tal forma que variando la frecuencia a la que se realizan las observaciones (dentro del ancho de banda de observación), se modifica el punto del plano UV donde el interferómetro está midiendo la transformada de Fourier de la distribución de brillo de la fuente. De esta forma, mediante el muestreo de datos para distintas frecuencias, podemos sintetizar cubrimientos del plano UV ligeramente más completos que los que obtendríamos con el CLEAN clásico, en el que las observaciones se promedian en todo el ancho de banda antes de ser proyectadas en el plano UV.

El mapeado de la esfera celeste se realiza para distintas coordenadas de ascensión recta α y declinación δ , relativas a las coordenadas de referencia de la fuente observada. Si la distribución de intensidad I de la fuente depende de la frecuencia, la aplicación del algoritmo MFS permite obtener una aproximación a la función $I(\alpha, \delta, \nu)$ dada por la expansión de Taylor en el espacio de frecuencias.

Si el método MFS es realizado para una expansión a primer orden en torno a ν_0 , la distribución de intensidad viene dada por la expresión

$$I(\alpha, \delta, \nu) \approx I(\alpha, \delta, \nu_0) + \left. \frac{\partial I(\alpha, \delta, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu_0} (\nu - \nu_0), \quad (\text{C.1})$$

donde ν_0 es la frecuencia de referencia, respecto a la cual se calcula el desarrollo en serie de Taylor. De esta forma, se obtienen dos *imágenes* (funciones que dependen únicamente de las coordenadas α y δ). La primera imagen se corresponde con la distribución de brillo de la fuente en ν_0 ,

$$I_0(\alpha, \delta) \equiv \text{TT0}_I(\alpha, \delta) = I(\alpha, \delta, \nu_0) \quad (\text{C.2})$$

mientras que la segunda se corresponde con el gradiente del brillo en el espacio de frecuencias, centrado en ν_0 ,

$$I_1(\alpha, \delta) \equiv \text{TT1}_I(\alpha, \delta) = \left. \frac{\partial I(\alpha, \delta, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu_0}. \quad (\text{C.3})$$

Finalmente, cabe destacar que, aunque el algoritmo MFS se aplica normalmente al parámetro de Stokes I , no hay ninguna limitación para aplicarlo al resto de parámetros de Stokes. Por lo tanto, a partir de las imágenes obtenidas de estos parámetros, para observaciones astronómicas se puede construir píxel a píxel una imagen del EVPA (ec. 2.1):

$$\psi(\alpha, \delta, \nu) = \frac{1}{2} \text{atan} \left(\frac{U(\alpha, \delta, \nu)}{Q(\alpha, \delta, \nu)} \right), \quad (\text{C.4})$$

y de la intensidad de polarización lineal (ec. 2.3):

$$m(\alpha, \delta, \nu) = \sqrt{U(\alpha, \delta, \nu)^2 + Q(\alpha, \delta, \nu)^2}, \quad (\text{C.5})$$

donde $\psi(\alpha, \delta, \nu)$ y $P(\alpha, \delta, \nu)$ se expresan en función de las coordenadas ecuatoriales (α, δ) y de la frecuencia de observación ν .

C.2. Desarrollo observacional: obtención de las imágenes de polarización en observaciones interferométricas. El algoritmo TCLEAN.

La reconstrucción de imágenes de los parámetros de Stokes que permiten analizar la polarización de la luz procedente de la fuente analizada se realiza mediante el uso del algoritmo de deconvolución CLEAN. Este algoritmo se aplica empleando la infraestructura CASA (*Common Astronomy Software Applications* [17]), de gran utilidad para el procesamiento de datos interferométricos. En concreto, se empleará la herramienta `tclean`, una implementación mejorada de `clean`, especializada en la reconstrucción de imágenes radiointerferométricas que lleva incorporado el algoritmo MFS.

Antes de emplear esta herramienta, es necesario especificar ciertos argumentos para el algoritmo, es decir, opciones que modifican su funcionamiento. Los argumentos más básicos son:

⁷En ref. [41] se puede obtener un desarrollo detallado del método MFS y de los algoritmos existentes para resolver el problema de la deconvolución al aplicar este método.

- *vis* para indicar el directorio de extensión '.ms' (*Measurement Set*) en el que se recogen los datos de las visibilidades.
- *spw* para especificar la ventana espectral en la que nos interesa realizar la deconvolución.
- *stokes* para indicar el parámetro de Stokes cuya imagen queremos obtener.
- El tamaño en píxeles de la imagen proporcionada se establece con *imagesize='1024'*, mientras que el tamaño de cada píxel se fija con *cell='0.05arcsec'*.
- *specmode = 'mfs'* establece que la deconvolución de las imágenes que proporciona *tclean* se realiza siguiendo el algoritmo MFS.
- *reffreq* fija la frecuencia de referencia de la imagen ν_0 (ver ec. (C.1)), y se usará el valor por defecto, calculado como la frecuencia media en el rango de frecuencias de los datos proporcionados.
- *nterms=2* fija el número de términos de la expansión en serie de Taylor en el espacio de frecuencias, con lo que *nterms=2* se corresponde con una aproximación lineal.
- Como CLEAN es un algoritmo de deconvolución de tipo iterativo, se emplea el argumento *niter* para indicar el total de iteraciones que realiza el algoritmo.

Por otro lado, es necesario establecer las regiones de la imagen en torno a las que se quiere aplicar el algoritmo de deconvolución. Por este motivo, necesitamos construir una máscara, que consiste en una imagen que asigna un valor de 0 o 1 a cada píxel de la imagen, de forma que únicamente las localizaciones con valor 1 serán consideradas para aplicar el algoritmo de CLEAN. Puesto que el uso de máscaras en CLEAN ha demostrado producir resultados de mayor fidelidad (p. ej., ref. [23]), podemos optar por generar una máscara de forma manual alrededor de la estructura de la fuente, ejecutando CLEAN de forma interactiva (esto se consigue fijando *interactive=True*). De este modo, puede refinarse la máscara CLEAN viendo cómo evoluciona la deconvolución cada cierto número de iteraciones. Una vez generada la máscara para la estructura de la fuente, puede fijarse para ejecutar CLEAN en modo automático sobre todos los datos y parámetros de Stokes. La ganancia (fracción del flujo de la fuente que se sustrae de la imagen residual al aplicar el algoritmo CLEAN en cada iteración) se fija con el parámetro *gain=0.01*.

En esencia, utilizaremos el algoritmo CLEAN para realizar la operación de deconvolución de las imágenes de los parámetros de Stokes, obtenidas a partir de las visibilidades recogidas en los *Measurement Set* obtenidos en las observaciones radiointerferométricas. En este contexto, el argumento *deconvolver* permite seleccionar distintos subtipos del algoritmo CLEAN, que se diferencian en la forma en que se realizan los distintos tipos de iteraciones. Para obtener el mapeado del EVPA y la intensidad de polarización de las fuentes estudiadas en esta tesis, se emplea el algoritmo *hogbom*, que está basado en la versión de CLEAN propuesta por Hogbom⁸, y que proporciona imágenes de los parámetros de Stokes para cada una de las ventanas espectrales en las que se realizan las observaciones.

Finalmente, a diferencia de lo que ocurre con los telescopios ópticos (para los que la PSF está fijada por la óptica del instrumento) la interferometría nos permite *sintonizar* la PSF, pues no observamos la imagen, sino que muestreamos el frente de onda. Por este motivo, podemos realizar distintos ponderados estadísticos a las visibilidades que produzcan diferentes efectos sobre la PSF sintetizada. El programa *tclean* permite sintonizar el ponderado estadístico a partir de la opción *weighting='briggs'*, con la que podemos obtener PSFs que cumplan la condición de alta resolución espacial (o sea, picos centrales estrechos) y alto rango dinámico/sensibilidad (o sea, lóbulos laterales de baja intensidad). Normalmente, optimizar la resolución (lo que se conoce como *pesado uniforme de las visibilidades*) resulta en empeorar la sensibilidad (que se optimiza con el llamado *pesado natural de las visibilidades*). En cambio, el *pesado briggs* nos permite sintetizar una PSF de compromiso en la que ni la resolución ni la sensibilidad queden altamente penalizadas. La sintonización entre el pesado uniforme y el natural se realiza mediante el llamado *parámetro de robustez*, que se especifica con el argumento *robust*; para el pesado uniforme, se asigna *robust=-2.0*, mientras que *robust=+2.0* se asigna para el pesado natural.

Para concluir con esta sección, conviene mencionar otro subtipo del algoritmo de deconvolución CLEAN, el algoritmo *mtmfs* (*Multi-term Multi-Frequency Synthesis*), que proporciona las imágenes de los parámetros de Stokes y sus derivadas, en torno a la frecuencia de referencia fijada por *reffreq*, procesando simultáneamente todas las ventanas espectrales. De esta forma, con *deconvolver='mtmfs'* se obtienen imágenes TT0 y TT1 de los parámetros de Stokes (ver ecs. C.2 y C.3).

⁸Para más detalle en relación al algoritmo de deconvolución *hogbom*, ver el artículo [42]

D. Rotación de Faraday por desarrollo en serie de los parámetros de Stokes.

Texto extraído del TFG [19].

La rotación de Faraday es un fenómeno magnetoóptico que consiste en la rotación del ángulo de polarización de una onda que se propaga en un medio, consecuencia de la interacción de la luz que atraviesa el medio con un campo magnético aplicado sobre el material en la dirección de propagación de la luz.⁹ Fue descubierta por Faraday en 1845 mediante experimentos con materiales dieléctricos, y constituyó una de las principales evidencias de que la luz es un fenómeno de origen electromagnético. Experimentalmente, esto implica que, modelando la dependencia del ángulo de polarización ψ del medio (EVPA) como función de la longitud de onda λ de las ondas electromagnéticas observadas, es decir,

$$\psi = \psi_0 + RM \lambda^2 \quad (\text{D.1})$$

se puede extraer información de la intensidad del campo magnético (ref. [43]). RM es la llamada *medida de rotación*, y $\beta = RM\lambda^2$ es la Rotación de Faraday. Por tanto, la medida de rotación permite cuantificar la rotación de Faraday, y se puede expresar como la variación del EVPA con la longitud de onda al cuadrado, es decir

$$RM = \frac{d\psi(\lambda^2)}{d\lambda^2}. \quad (\text{D.2})$$

En el análisis de la emisión de luz por un núcleo galáctico activo o AGN (*Active Galactic Nucleus*), la rotación de Faraday ocurre cuando la radiación atraviesa un plasma magnetizado e ionizado. El medio interestelar es un plasma tenue (tal y como se demuestra en ref. [22], cap. 2.5), compuesto por electrones e iones libres, de los cuales sólo interesará estudiar la rotación de Faraday producida por los electrones, ya que el efecto de estos sobre la rotación de Faraday es tres órdenes de magnitud superior al de los iones, debido a la diferencia de masas entre ambos. Las ondas electromagnéticas provenientes de una fuente emisora y detectadas por los radiotelescopios, se caracterizan por tener frecuencias lo suficientemente altas como para encontrarse por encima de las frecuencias de resonancia del plasma, pero lo suficientemente bajas como para que se pueda apreciar la interacción de los electrones que componen el plasma con el campo magnético. En particular, al plantear los modelos teóricos, se consideran sólo los efectos de la propagación de ondas electromagnéticas en la dirección del campo magnético (ya que para la propagación perpendicular son mucho menores). Con todo esto, tal y como se plantea en ref. [44], la medida de rotación nos permite relacionar la intensidad del campo magnético inducido \mathbf{B} (en μG), proyectado en dirección a la Tierra, con la densidad de electrones del plasma ionizado, n_e , en unidades de cm^{-3} , mediante la siguiente expresión

$$RM[\text{rad m}^{-2}] = 0.81 \int n_e[\text{cm}^{-3}] \mathbf{B}[\mu\text{G}] \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{D.3})$$

donde $d\mathbf{l}$ es la longitud de camino infinitesimal recorrida por la radiación en su camino hacia la Tierra, en parsec.

En definitiva, la aplicación de este fenómeno a la radioastronomía supone una herramienta fundamental en el estudio del campo magnético y de la densidad de electrones tanto en el medio interestelar como en las regiones donde se produce la emisión. Este es el origen del interés de la medida de la rotación de Faraday y su análisis en el AGN de M87, permitiendo así estudiar la intensidad del campo magnético que origina este fenómeno, relacionado probablemente con el chorro relativista en el que se produce la emisión radio y/o con el flujo magnetizado de acrecimiento hacia el agujero negro, y contrastar los resultados con los modelos teóricos de la acreción de materia en los AGN.

El método MFS (introducido en el ap. C.1) permite obtener imágenes de los parámetros de Stokes mediante una expansión a primer orden en serie de Taylor en el espacio de frecuencias, alrededor de una frecuencia de referencia en torno a la que se aplica el algoritmo de deconvolución de la imagen, ν_0 (ver ec. (C.1)). Así, al realizar la expansión de los parámetros de Stokes en la ec. (C.4) obtenemos, obviando la dependencia con las coordenadas (α, δ) (para una nomenclatura más compacta), la siguiente ecuación para obtener píxel a píxel una imagen del ángulo de polarización:

$$\psi(\nu) = \frac{1}{2} \text{atan} \left(\frac{U_0 + U_1(\nu - \nu_0)}{Q_0 + Q_1(\nu - \nu_0)} \right). \quad (\text{D.4})$$

⁹Una discusión detallada de este fenómeno, junto con la obtención de un modelo teórico para cuantificarlo, se plantea en ref. [22], cap. 3

La derivada de esta función se relaciona directamente con la medida de rotación centrada en ν_0 , que se puede calcular como el producto de dos derivadas empleando la regla de la cadena en la expresión (D.2), de forma que

$$RM(\nu_0) = \left[\frac{d\psi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda^2} \right]_{\nu_0} = \left[\left(\frac{d\nu}{d\lambda} \left[\frac{d\lambda^2}{d\lambda} \right]^{-1} \right) \frac{d\psi}{d\nu} \right]_{\nu_0}. \quad (\text{D.5})$$

Empleando la definición de la EVPA, su derivada con respecto a la frecuencia será una función de las derivadas de Q y de U , obtenidas a partir del algoritmo MFS, de tal forma que (obviando la dependencia con α y δ), obtenemos la expresión

$$\left. \frac{d\psi}{d\nu} \right|_{\nu_0} = \frac{1/2}{1 + (U(\nu_0)/Q(\nu_0))^2} \left(\frac{1}{Q(\nu_0)} U_1 - \frac{U(\nu_0)}{Q(\nu_0)^2} Q_1 \right). \quad (\text{D.6})$$

Las imágenes de los parámetros de Stokes U_0 y Q_0 (con extensión .tt0), y sus primeras derivadas U_1 y Q_1 (con extensión .tt1), se obtienen con el uso de la herramienta **tclean**, con el parámetro *deconvolver*='mtmfs' (ver ap. C.2). Con estas imágenes, podemos construir una imagen de la rotación de Faraday calculando píxel a píxel la medida de rotación, a partir de la expansión a primer orden de los parámetros de Stokes, empleando la ecuación

$$RM(\nu_0) = -\frac{\nu^3}{4c^2} \frac{1}{1 + (U(\nu_0)/Q(\nu_0))^2} \left(\frac{1}{Q(\nu_0)} U_1 - \frac{U(\nu_0)}{Q(\nu_0)^2} Q_1 \right), \quad (\text{D.7})$$

obtenida incorporando la expresión (D.6) y la derivada $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$ en (D.5).

Bibliografía

- [1] O. M. Smirnov. Revisiting the radio interferometer measurement equation. I. A full-sky Jones formalism. *A&A*, 527:A106, March 2011.
- [2] J. P. Hamaker, J. D. Bregman, and R. J. Sault. Understanding radio polarimetry. I. Mathematical foundations. *Astrom. Astrophys. Suppl.*, 117:137–147, May 1996.
- [3] R. J. Sault, J. P. Hamaker, and J. D. Bregman. Understanding radio polarimetry. II. Instrumental calibration of an interferometer array. *Astrom. Astrophys. Suppl.*, 117:149–159, May 1996.
- [4] J. P. Hamaker and J. D. Bregman. Understanding radio polarimetry. III. Interpreting the IAU/IEEE definitions of the Stokes parameters. *Astrom. Astrophys. Suppl.*, 117:161–165, May 1996.
- [5] J. P. Hamaker. Understanding radio polarimetry. IV. The full-coherency analogue of scalar self-calibration: Self-alignment, dynamic range and polarimetric fidelity. *Astrom. Astrophys. Suppl.*, 143:515–534, May 2000.
- [6] R. C. Jennison. A phase sensitive interferometer technique for the measurement of the Fourier transforms of spatial brightness distributions of small angular extent. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 118:276, January 1958.
- [7] R. Q. Twiss, A. W. L. Carter, and A. G. Little. Brightness distribution over some strong radio sources at 1427 Mc/s. *The Observatory*, 80:153–159, August 1960.
- [8] Avery E. Broderick and Dominic W. Pesce. Closure Traces: Novel Calibration-insensitive Quantities for Radio Astronomy. *ApJ*, 904(2):126, December 2020.
- [9] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *ApJL*, 875(1):L1, April 2019.
- [10] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation. *ApJL*, 875(1):L2, April 2019.
- [11] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration. *ApJL*, 875(1):L3, April 2019.
- [12] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. *ApJL*, 875(1):L4, April 2019.
- [13] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring. *ApJL*, 875(1):L5, April 2019.
- [14] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole. *ApJL*, 875(1):L6, April 2019.
- [15] EHT Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring. *ApJL*, 910(L12):48, 2021.
- [16] I. Martí-Vidal, A. Mus, M. Janssen, P. de Vicente, and J. González. Polarization calibration techniques for the new-generation VLBI. *A&A*, 646:A52, February 2021.
- [17] CASA Documentation Homepage. casa.nrao.edu/casadocs/casa-5.4.0/reference-material.
- [18] A. J. Kemball and M. H. Wieringa. MeasurementSet definition version 2.0. <https://casa.nrao.edu/casadocs/casa-5.4.1/reference-material/229.pdf>, January 2000.
- [19] Ezequiel Albentosa Ruiz. Trabajo de Fin de Grado. Rotación de Faraday en el núcleo activo de la galaxia M87. *Universidad de Valencia*, july 2020.
- [20] IAU. XVth General Assembly - Transactions of the IAU Vol. XV B. Proceedings of the 15th General Assembly and Extraordinary General Assembly. *Association of Univ. for Research in Astronomy*, Eds. G. Contopoulos and A. Jappel, January 1974.
- [21] A.R. Thompson, J.M. Moran, and G.W. Swenson. *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*. John Wiley and Sons, New York, 1986.

- [22] T.L. Wilson, K. Rohlfs, and S. Hüttemeister. *Tools of Radio Astronomy*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [23] A.R. Thompson, J.M. Moran, and G.W. Swenson. *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer International Publishing, 2017.
- [24] Ciriaco Goddi et al. Polarimetric Properties of Event Horizon Telescope Targets from ALMA. *ApJL*, 910(1):L14, March 2021.
- [25] B. D. Turland. Observations of M87 at 5 GHz with the 5-km telescope. *MNRAS*, 170:281–294, February 1975.
- [26] M. Schloetelburg, K. Meisenheimer, and H. J. Roeser. Imaging polarimetry of the jet in M87. *A&A*, 202:L23–L26, August 1988.
- [27] V. Despringre, D. Fraix-Burnet, and E. Davoust. First millimeter mapping of the jet and nucleus of M87. *A&A*, 309:375–380, May 1996.
- [28] Eric S. Perlman and Andrew S. Wilson. The X-Ray Emissions from the M87 Jet: Diagnostics and Physical Interpretation. *ApJ*, 627(1):140–155, July 2005.
- [29] J. C. Algaba, K. Asada, and M. Nakamura. Resolving the Rotation Measure of the M87 Jet on Kiloparsec Scales. *ApJ*, 823(2):86, June 2016.
- [30] EHT Proposals. eventhorizontelescope.org/for-astronomers/proposals.
- [31] About ALMA, at first glance. almaobservatory.org/en/about-alma-at-first-glance/.
- [32] ALMA (ESO / NAOJ / NRAO) Cynthia Collao (ALMA). How Will ALMA Make Images? *ALMA Newsletter N°5*, April 2010.
- [33] The Atacama Pathfinder Experiment (APEX). apex-telescope.org/ns/es/pagina-web-apex/.
- [34] Arizona Radio Observatory (ARO). aro.as.arizona.edu/.
- [35] Institut de Radioastronomie Millimétrique (IRAM). The 30 meter telescope. iram-institute.org.
- [36] The James Clerk Maxwell Telescope (JCMT). eaobservatory.org/jcmt/.
- [37] The Submillimeter Array (SMA). lweb.cfa.harvard.edu/sma/.
- [38] The Large Millimeter Telescope (LMT). <http://lmtgtm.org/>.
- [39] The South Pole Telescope (SPT). pole.uchicago.edu/public/Home.html.
- [40] E.O. Brigham. *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice-Hall, 1974.
- [41] *Very Long Baseline Interferometry and the VLBA*, volume 82 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, January 1995.
- [42] J. A. Högbom. Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometer Baselines. *Astrom. Astrophys. Suppl.*, 15:417, June 1974.
- [43] Ivan Martí-Vidal, Sébastien Muller, Wouter Vlemmings, Cathy Horellou, and Susanne Aalto. A strong magnetic field in the jet base of a supermassive black hole. *Science*, 348(6232):311–314, April 2015.
- [44] M. A. Brentjens and A. G. de Bruyn. Faraday rotation measure synthesis. *A&A*, 441(3):1217–1228, October 2005.