

TO'LA EHTIMOL VA BAYES FORMULALARI

Bobomurodova Lola Valijonovna¹

Saparova Guljanat Yerbayevna²

Bobomurodova Nafisa Valijonovna³

¹⁻²Navoiy davlat pedagogika instituti akademik litseyi

³Navoiy shahar 13-maktab o'qituvchisi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.6786389>

Annotatsiya: Maqolada to'la ehtimol formulasi haqida fikrlar va Bayes formulasining bayoni berilgan.

Kalit so'zlar: Bayes formulasi, kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli, elektr zanjir, tok, to'la ehtimol formulasi

Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli. Faraz qilaylik, A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar bog'liqsiz bo'lib, ularning ehtimollari

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n$$

bo'lsin. O'zaro bog'liqsiz bo'lgan A_1, A_2, \dots, A_n hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat A hodisaning ehtimoli 1 dan $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ hodisalar ehtimollari ko'paytmasining ayrilganiga teng:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n. \quad (1)$$

Xususiyl holda, barcha n ta hodisa bir xil p ehtimolga ega bo'lsa, u holda bu hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P(A) = 1 - q^n.$$

1-misol. Elektr zanjirida bog'liqsiz ishlaydigan 3 ta element ketma-ket ulangan. Birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda quyidagiga teng: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,2$. Zanjirda tok bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechilishi. Elementlar ketma-ket ulanganligi sababli elementlardan kamida bittasi buzilsa, zanjirda tok bo'lmaydi (A hodisa). (1) formulaga asosan:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - (1 - 0,1)(1 - 0,15)(1 - 0,2) = 0,388.$$

2-misol. Ikkita sportchidan har birining mashqni muvaffaqiyatli bajarish ehtimoli 0,5 ga teng. Sportchilar mashqni navbat bilan bajaradilar, bunda har bir sportchi o'z kuchini ikki marta sinab ko'radi. Mashqni birinchi bo'lib bajargan sportchi mukofot oladi. Sportchilarning mukofotni olish ehtimolini toping.

Yechilishi. Mukofot topshirilishi uchun to'rtta sinovdan kamida bittasi muvaffaqiyatli bo'lishi kifoya. Sinovning muvaffaqiyatli bo'lish ehtimoli $p = 0,5$, muvaffaqiyatsiz bo'lish ehtimoli esa $q = 1 - 0,5 = 0,5$. Izlanayotgan ehtimol:

$$P = 1 - q^4 = 1 - 0,5^4 = 0,9375.$$

3-misol. Merganning uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechilishi. Uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish (A hodisa) ehtimoli:

$$P(A) = 1 - q^3$$

ga teng, bu yerda q – o'qning xato ketish ehtimoli. Shartga ko'ra $P(A) = 0,875$.

Demak, $0,875 = 1 - q^3$ yoki $q^3 = 1 - 0,875 = 0,125$. Bu yerdan

$$q = \sqrt[3]{0,125} = 0,5.$$

Izlanayotgan ehtimol: $p = 1 - q = 1 - 0,5 = 0,5$.

To'la ehtimol formulasi. Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmaganva hodisalarning to'la guruhini tashkil etuvchi B_1, B_2, \dots, B_n hodisalardan (gipotezalardan) birortasi ro'y bergandan keyingi A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A). \quad (2)$$

(2) formulaga "to'la ehtimol formulasi" deyiladi.

4-misol. Do'konda Iphone, Nokia va Samsung kompaniyalari tomonidan ishlab chiqarilgan telefonlar sotiladi. Iphone, Nokia va Samsung telefonlari do'kondagi telefonlarning mos ravishda 40%, 35% va 25% ini tashkil qiladi. Bunda Iphone telefoni 90%, Nokia telefoni 80% va Samsung telefoni 70% nuqsonsiz ishlaydi. Xaridor tavakkaliga xarid qilgan telefonning nuqsonsiz ishlash ehtimolini toping?

Yechilishi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: xaridor B_1 – Iphone, B_2 – Nokia, B_3 – Samsung rusumli telefon sotib oldi; A – xaridor xarid qilgan telefon nuqsonsiz bo'lish hodisasi. Masala shartidan: $P(B_1) = 0,4$, $P(B_2) = 0,35$, $P(B_3) = 0,25$, $P_{B_1}(A) = 0,9$, $P_{B_2}(A) = 0,8$ va $P_{B_3}(A) = 0,7$ Ravshanki,

$$A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + B_3 \cdot A, \text{ u holda}$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,815.$$

5-misol. Matematika fakultetida ikkita maxsus guruh bo'lib, ularning har birida 20 nafardan talaba o'qiydi. 1-guruhdagi talabalarning 80 % i va 2-guruhdagi talabalarning 90 % i a'lo bahoga o'qiydi. Bu ikki guruhdan tasodifan tanlangan talabaning a'lo bahoga o'qish ehtimolini toping.

Yechilishi. B_1 – talaba 1 – guruh talabasi bo'lish hodisasi, B_2 – talaba 2-guruh talabasi bo'lish hodisasi bo'lsin. A – tanlangan talaba a'lo bahoga o'qish hodisasi bo'lsin. B_1 va B_2 hodisalar birga ro'y bermas va to'la hodisalar

guruhini tashkil etadi. Shuning uchun bu masalani yechishda to'la ehtimol formulasidan foydalanamiz.

Talaba 1 –guruh talabasi bo'lish hodisasining ehtimoli: $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

Talaba 2-guruh talabasi bo'lish hodisasining ehtimoli: $P(B_2) = \frac{1}{2}$.

1 –guruhdan tanlangan talabaning a'lo bahoga o'qish ehtimoli: $P_{B_1}(A) = 0,8$.

2-guruhdan tanlangan talabaning a'lo bahoga o'qish ehtimoli: $P_{B_2}(A) = 0,9$.

Demak, tasodifan tanlangan talabaning a'lo bahoga o'qish ehtimoli, to'la ehtimol formulasiga asosan:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

6-misol. Ikkita avtomat bir xil detallar ishlab chiqaradi, bu detallar keyin umumiy konveyerga o'tadi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ortiq. Birinchi avtomat o'rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o'rtacha hisobda detallarning 84% ini a'lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Konveyerdan tavakkaliga olingan detal a'lo sifatli bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Aorqali – olingan detal a'lo sifatli bo'lishi hodisasini belgilaymiz. Bu yerda ikkita taxmin (gipoteza) qilish mumkin: B_1 – detalni birinchi avtomat ishlab chiqarganligi hodisasini bildirsa uning ehtimoli

$$P(B_1) = \frac{2}{3}$$

(chunki birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko'p detal ishlab chiqaradi); B_2 –detailni ikkinchi avtomat ishlab chiqarganligini bildirsa, uning ehtimoli

$$P(B_2) = \frac{1}{3}.$$

Agar detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lsa, detal a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_1}(A) = 0,6.$$

Agar detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lsa, detal a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_2}(A) = 0,84.$$

Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimoli to'la ehtimol formulasi (2) ga ko'ra

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68.$$

7-misol. Birinchi qutida 20 ta radiolampa bo'lib, ulardan 18 tasi standart; ikkinchi qutida esa 10 ta radiolampa bo'lib, ulardan 9 tasi standart. Ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta lampa olinib, birinchi qutiga solingan. Birinchi qutidan tavakkaliga olingan lampaning standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. A orqali, birinchi qutidan standart lampa olinganlik hodisasini belgilaymiz. Ikkinchi qutidan standart lampa olingan (B_1 hodisa), yoki nostandart lampa olingan (B_2 hodisa) bo'lishi mumkin.

Ikkinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli: $P(B_1) = \frac{9}{10}$.

Ikkinchi qutidan nostandart lampa olinish ehtimoli: $P(B_2) = \frac{1}{10}$.

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga standart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga nostandart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

Izlanayotgan ehtimol, ya'ni birinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli to'la ehtimol formulasi (5.2) ga asosan quyidagiga teng:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9.$$

8-misol. Ichida 2 ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solinib, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Sharlarning dastlabki tarkibi (rangi bo'yicha) haqida mumkin bo'lgan barcha taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda olingan sharining oq rangli bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. A orqali oq shar olinganlik hodisasini belgilaymiz. Sharlarning dastlabki tarkibi haqida quyidagi taxminlar (gipotezalar) bo'lishi mumkin: B_1 – oq sharlar yo'q, B_2 – bitta oq shar bor, B_3 – ikkita oq shar bor.

Hammasi bo'lib uchta gipoteza mavjud bo'lib, shu bilan birga ular shartga ko'ra teng imkoniyatli va gipotezalar ehtimollari yig'indisi birga teng (chunki ular hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi) bo'lgani uchun gipotezalarning har

birining ehtimoli $\frac{1}{3}$ gateng, ya'ni

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Idishda dastlab oq sharlar bo'lmaganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}.$$

Idishda dastlab bitta oq shar bo'lganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli

$$P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}.$$

Idishda dastlab ikkita oq shar bo'lganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli

$$P_{B_3}(A) = \frac{3}{3} = 1.$$

Idishdan oq shar olinishining izlanayotgan ehtimolini to'la ehtimol formulasi (2) dan foydalanib topamiz:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Bayes formulasi. Biz birga ro'y bermaydigan va to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi B_1, B_2, \dots, B_n hodisalardan birorotasi ro'y bergandan keyin A hodisaning ro'y bershini ehtimolini to'la ehtimol formulasi bilan hisobladik. Endi masalani davom ettirib A hodisa ro'y bergandan keyingi B_i (gipotezalar) hodisalarini ro'y berish ehtimolini quyidagi Bayes formulasi bilan hisoblaymiz:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

bu yerda

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

(3) formulaga Bayes formulasi deyiladi.

9-misol. Birinchi qutida 8 ta oq va 6 ta qora shar, ikkinchi qutida esa 10 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga quti va shar tanlanadi. Olingan shar qora ekanligi ma'lum. Birinchi quti tanlanganligi ehtimolini toping.

Yechilishi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: B_1 – birinchi quti tanlangan; B_2 – ikkinchi quti tanlangan; A – ikkinchi ketma-ket sinov (quti tanlanishi va shar olinishi) natijasida qora shar olingan. U holda $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/2$. Birinchi quti

tanlangandan so'ng qora shar chiqish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 6/14 = 3/7$ ga teng bo'ladi. Ikkinchi quti tanlangandan so'ng qora shar chiqish ehtimolligi $P_{B_2}(A) = 4/14 = 2/7$ ga teng.

To'la ehtimol formulasi (2) ga ko'ra, olingan shar qora bo'lishi ehtimolini topamiz:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14}$$

Qora shar birinchi qutidan olinganligi ehtimolini Bayes formulasi (3) formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{(1/2) \cdot (3/7)}{5/14} = \frac{3}{5}.$$

10-misol. Do'konda sotilayotgan notebooklarning 35 % i Acer, 40 % i Samsung hamda 25 % i Apple rusumli notebooklar tashkil etadi. Acer, Samsung, Apple rusumli notebooklarning a'lo sifatli bo'lish ehtimollari mos ravishda 0,8 , 0,85 va 0,9 ga teng. Tasodifiy sotib olingan notebook ishlatilganda sifatsiz chiqdi. Bu notebookning Acer rusumli bo'lish ehtimoli toping.

Yechilishi. Tasodifiy sotib olingan notebook Acer rusumli ekanligini B_1 , Samsung va Apple rusumli ekanligini mos holda B_2 va B_3 bilan belgilaymiz. A - notebookning sifatli bo'lishini bildirsin.

$$\text{Demak, } P(B_1) = \frac{35\%}{100\%} = 0,35, \quad P(B_2) = \frac{40\%}{100\%} = 0,4, \quad P(B_3) = \frac{25\%}{100\%} = 0,25.$$

Masalaning shartiga asosan, agar notebook Acer rusumli bo'lsa, uni sifatli bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 0,8$ ga teng, sifatsiz bo'lish ehtimoli

$$P_{B_1}(\bar{A}) = 1 - P_{B_1}(A) = 0,2.$$

Xuddi shunday xarid qilingan notebookning Samsung va Apple rusumli bo'lsa, uning sifatli bo'lish ehtimollari mos ravishda $P_{B_2}(A) = 0,85$, $P_{B_3}(A) = 0,9$. Demak, sifatsiz bo'lish ehtimollari mos ravishda

$$P_{B_2}(\bar{A}) = 1 - P_{B_2}(A) = 0,15, \quad P_{B_3}(\bar{A}) = 1 - P_{B_3}(A) = 0,1.$$

To'la ehtimol formulasi (2) ga asosan, tasodifan xarid qilingan notebookning sifatsiz bo'lish ehtimoli

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A}) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(\bar{A}) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(\bar{A}) = \\ &= 0,35 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,1 = 0,07 + 0,06 + 0,025 = 0,155. \end{aligned}$$

Demak, sifatsiz chiqqan notebookning Acer rusumli bo'lish ehtimoli (3) Bayes formulasiga ko'ra quyidagicha bo'ladi:

$$P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,35 \cdot 0,2}{0,155} = \frac{0,07}{0,155} = \frac{70}{155} = \frac{14}{31}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Alixonov S. « Matematika o'qitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «O'qituvchi» 1997 yil.
2. Sirojiddinov S.X., Mirzaaxmedov M.A. Matematika kasbi haqida suhbatlar. T., «O'qituvchi», 1993.
3. www.ziyouz.com