

# NODUS 8.x : Note méthodologique

---

Bart Jourquin

Février 2021



Center for Operations Research and Econometrics (CORE)  
Louvain-la-Neuve and Mons, Belgium  
e-mail: [bart.jourquin@uclouvain.be](mailto:bart.jourquin@uclouvain.be)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Qu'est-ce que Nodus ? . . . . .	2
1.2	Contenu de ce document . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Principes de modélisation</b>	<b>3</b>
2.1	Introduction . . . . .	3
2.1.1	Considérations générales sur les fonctions de coût . . . . .	3
2.1.2	Le comportement des acteurs sur un système de transport	5
2.2	Techniques de génération et de distribution . . . . .	7
2.2.1	Génération . . . . .	8
2.2.2	Distribution . . . . .	8
2.3	Techniques de choix modal . . . . .	11
2.3.1	Modèles agrégés . . . . .	12
2.3.2	Modèles désagrégés . . . . .	14
2.3.3	Conclusions sur les techniques de choix modal . . . . .	16
2.4	Techniques d'affectation . . . . .	17
2.4.1	Le "tout ou rien" . . . . .	18
2.4.2	Méthodes d'équilibre . . . . .	19
2.4.3	Conclusion sur les techniques d'affectation . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Concept de réseau virtuel</b>	<b>22</b>

3.1	Notions de base . . . . .	22
3.1.1	Graphe . . . . .	22
3.1.2	Successeurs et prédécesseurs . . . . .	23
3.1.3	Graphe complet . . . . .	23
3.1.4	Orientation d'un graphe . . . . .	23
3.1.5	Densité d'un graphe . . . . .	23
3.2	Approche intuitive . . . . .	24
3.3	Développement systématique . . . . .	27
3.3.1	Méthode générale . . . . .	27
3.3.2	Les noeuds d'entrée . . . . .	30
3.3.3	Les noeuds de simple passage . . . . .	34
3.3.4	Orientation du réseau virtuel . . . . .	37
3.3.5	Contrôle de la génération du réseau virtuel . . . . .	37
3.4	Affectation des coûts sur les arcs . . . . .	40
3.5	Conclusion . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Considérations générales sur les coûts</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>Quelques exemples de fonctions de coût concrètes</b>	<b>47</b>
5.1	Les coûts de déplacement . . . . .	47
5.1.1	Le transport . . . . .	47
5.1.2	Valeur d'inventaire . . . . .	49
5.1.3	Coûts indirects . . . . .	50
5.2	Les coûts de transbordements . . . . .	50
5.2.1	Manutention . . . . .	50
5.2.2	Valeur d'inventaire . . . . .	51
5.2.3	Coûts indirects . . . . .	51
5.3	Les coûts de chargement et déchargement . . . . .	52

5.3.1	Manutention . . . . .	52
5.3.2	Magasinage . . . . .	53
5.3.3	Valeur d'inventaire . . . . .	53
5.3.4	Coûts indirects . . . . .	53
5.4	Simple passage . . . . .	53

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Qu'est-ce que Nodus ?

Nodus est un logiciel de type SIG destiné à la modélisation des réseaux multimodaux de transports de marchandises.

### 1.2 Contenu de ce document

Nodus 8.x n'est pas fourni avec un guide de référence et un guide utilisateur. Il est toutefois important que l'utilisateur puisse avoir une idée du cadre méthodologique dans lequel il doit travailler en utilisant le logiciel, et en particulier la méthodologie des "réseaux virtuels" et des différentes fonctions de coût qu'il faut leur appliquer.

Ce document est largement inspiré du guide de référence de Nodus 4.0 (1999). Même si les versions ultérieures de Nodus sont très différentes de la version 4.0, la base méthodologique reste d'application pour l'essentiel.

<p>Il est toutefois à noter que Nodus 7.x permettait également de définir des lignes et des services dans les réseaux virtuels. Cette évolution n'est pas discutée dans le présent document. Cette fonctionnalité est (temporairement) désactivée dans Nodus 8.0.</p>
---

## Chapitre 2

# Principes de modélisation

### 2.1 Introduction

L'objectif poursuivi lors du développement de NODUS est de proposer une nouvelle solution aux problèmes posés par les flux de marchandises sur un réseau de transport multi-modal. Dans cette optique, ce chapitre, qui se présente comme un court rappel théorique des différents concepts de base de la modélisation des réseaux de transport, se limitera essentiellement aux modèles de choix modal et d'affectation les plus connus, afin de les comparer à ce qui est mis en oeuvre dans NODUS.. Toutefois, étant donné qu'il est nécessaire d'avoir des matrices origines-destinations (O-D) avant de pouvoir mettre en oeuvre le choix modal et l'affectation, quelques méthodes de génération et de distribution sont également présentées ici, car elles peuvent être utiles dans les applications pratiques<sup>1</sup> qui seront réalisées avec NODUS.

Mais avant de passer aux différents points cités plus hauts, quelques considérations générales sur les fonctions de coûts et les comportements des différents acteurs dans un système de transport vis-à-vis de la demande de transport trouvent certainement leur place ici, dans la mesure où la (bonne) définition de ces fonctions et la compréhension du rôle des différents acteurs sont la clé du succès d'un modèle.

#### 2.1.1 Considérations générales sur les fonctions de coût

La notion de "fonction de coût" sera souvent reprise dans les différents chapitres qui composent cette note méthodologique. Or, ces fonctions sont utilisées dans des contextes parfois fort différents et ne couvrent d'ailleurs pas toujours les mêmes réalités. De plus, leur linéarité ou leur non-linéarité seront souvent discutées. Afin de bien clarifier ces concepts, voici une brève discussion sur les

---

1. Bien que ces matrices sont souvent considérées comme des données exogènes

différents types de coûts utilisés.

Il y a tout d'abord les "fonctions de coûts liées aux arcs d'un réseau". Il s'agit là des coûts<sup>2</sup> supportés par un usager qui emprunte ce segment du réseau durant un voyage. Il sera souvent considéré que le coût total de transport est linéaire avec la distance parcourue et/ou la quantité transportée. Evidemment, et pour peu qu'il y ait des coûts fixes, le coût moyen de transport sera alors non-linéaire (Voir figure 2.1).

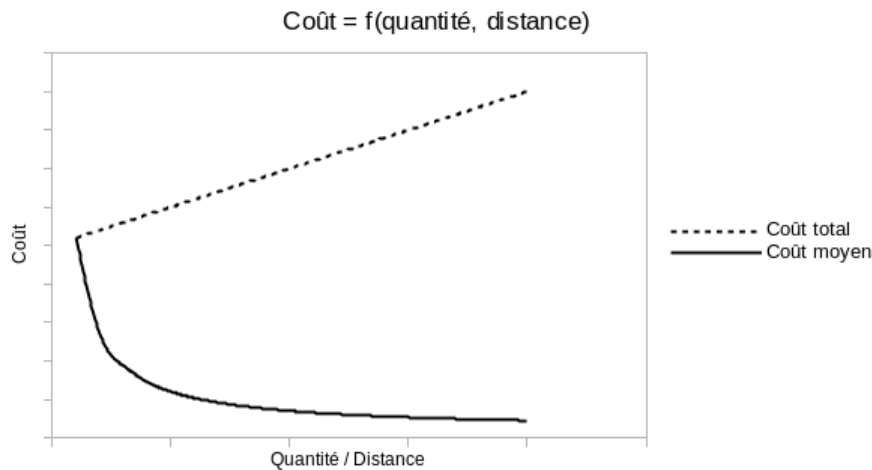


FIGURE 2.1 – Relation entre la quantité/distance et le coût

Toutefois, les coûts totaux sur les arcs ne sont pas toujours linéaires par rapport à la quantité transportée. C'est ainsi que les coûts de manutention ne sont pas linéaires par rapport à la quantité de marchandises à charger ou décharger.

Dès le moment où il faut tenir compte des phénomènes de congestion, il faut introduire le flux (quantité totale transportée sur un arc déterminé) comme variable explicative du coût. Le coût total de transport évolue alors de manière exponentielle par rapport à ce flux, comme illustré dans la figure 2.2

Reste maintenant à considérer le coût total sur le système de transport. Bien qu'il existe différentes méthodes d'affectation du flux sur un réseau, elles ont toutes en commun le fait de minimiser une fonction objectif. Ces fonctions objectif peuvent également prendre différentes formes. C'est ainsi qu'en se plaçant du point de vue de la collectivité, il s'agit de minimiser le coût total de transport sur le système. Par contre, il faudra minimiser le coût moyen des voyages s'il s'agit du point de vue de l'utilisateur.

D'une manière générale, lorsque les fonctions de coût de transport sont linéaires par rapport aux quantités, et que la congestion ne doit pas être modélisée,

2. Pour ne pas compliquer les choses à ce stade, le terme "coût" sera utilisé pour toute charge monétaire supportée. Il peut donc s'agir par exemple d'un coût tel que celui qui est supporté par un chauffeur lorsqu'il utilise son camion

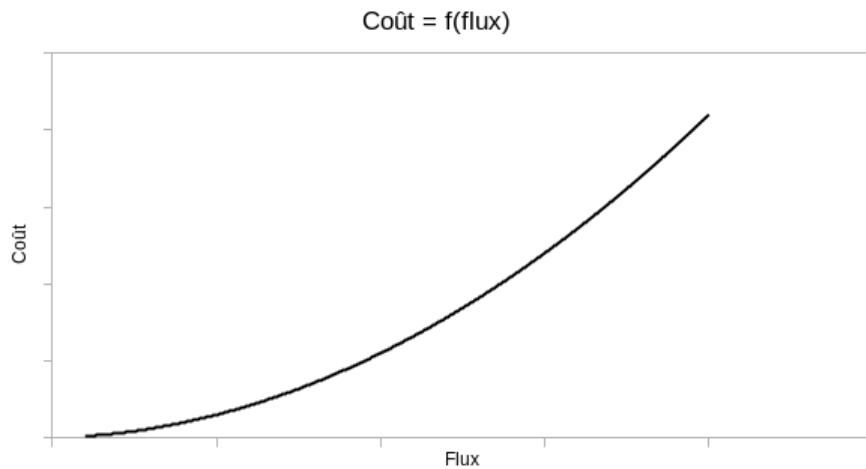


FIGURE 2.2 – Relation Coût-Flux

en sorte qu'il est toujours possible d'affecter les transports en choisissant la solution (choix d'un mode, d'un moyen ou d'une route) de coût minimum par la mise en oeuvre d'un bon algorithme de recherche de chemin sur un graphe, il n'y a pas à proprement parler de fonction objectif dans la mesure où il y a discontinuité entre les différentes solutions possibles. Cependant, si les coûts des différentes combinaisons convexes des solutions de répartition des quantités sont distingués, la fonction de coût obtenue serait une fonction linéaire (non strictement convexe), car toutes les fonctions de coûts sur les différents segments sont linéaires par rapport aux quantités transportées sur ce segment.

Par contre, lorsque des fonctions de coût non linéaires (convexes) sont utilisées sur les arcs, ce qui doit être le cas pour les modèles qui tiennent compte du niveau de congestion sur le réseau, les solutions ne seront en général pas du type "tout ou rien", mais il y aura une répartition des quantités entre les différents modes, moyens et routes disponibles. L'ensemble de ces solutions potentielles forme alors une fonction de coût total continue convexe résultant de la sommation des différentes fonctions convexes.

Il y a plusieurs concepts de coûts à prendre en considération et c'est la raison pour laquelle, tout au long de ce texte, il sera bien précisé ce à quoi les coûts utilisés font référence.

### 2.1.2 Le comportement des acteurs sur un système de transport

Les étapes de génération et de distribution du modèle classique à quatre étages sont des approches plutôt agrégées de la décision de transport. Ce n'est qu'au moment où il faut réellement se pencher sur le choix d'un mode de transport et sur le choix d'une route à emprunter sur un réseau que les comportements des



acteurs dans le système de transport sont analysés plus en profondeur, sous un angle plus pointu.

Classiquement, les acteurs considérés sont les producteurs de biens (qui jouent le rôle d'expéditeur), les consommateurs et les transporteurs. Les producteurs et les consommateurs ne sont pas localisés au même endroit. L'analyse des mécanismes qui régissent les liens entre ces différents acteurs est la raison même de l'existence de l'économie des transports et de tous les outils informatiques, tels que NODUS, qui ont été développés ces dernières années.

Les expéditeurs sont l'ensemble des agents économiques qui prennent la décision d'affecter et de distribuer un certain flux de marchandises entre une origine et un certain nombre de destinations. Les transporteurs représentent en réalité un ensemble de différentes entités impliquées dans la décision de transport. On y trouve par exemple les départements "expéditions", "distribution" ou "réception" des firmes. La décision de transport peut être quelque chose de complexe, mais comme le dit si bien Roberts<sup>3</sup>, "la seule motivation qui pousse au déplacement de la marchandise est la raison économique". Dès lors, la décision du transporteur dépend du comportement de l'offre et de la demande et des prix (de la marchandise) sur le marché.

Lorsque l'expéditeur prend sa décision de transport, il choisit un transporteur pour effectuer le transport. En économie des transports, le transporteur est toujours perçu comme un agent économique qui produit du transport en essayant de maximiser son profit.

La relation entre les expéditeurs et les transporteurs est assimilée à celle qui peut exister entre un consommateur et un producteur de services. Par sa décision d'attribuer un chargement à un transporteur, l'expéditeur crée une demande pour l'output produit par ce transporteur. De son côté, le transporteur va demander un certain prix pour effectuer le transport et crée de ce fait un certain niveau de service.

Si on ajoute à cela le rôle joué par l'état, on peut représenter les relations existantes entre les différents acteurs de la manière présentée dans la figure 2.3 :

Il reste néanmoins évident que toutes ces interactions ne peuvent exister que dans la mesure où il existe une demande pour le transport. Cette dernière est fonction de différents facteurs explicatifs parmi lesquels :

- Le prix du service de transport : comme la demande de n'importe quel bien, la demande de transport est en principe une relation décroissante du prix du transport.
- Le prix des autres modes de transport : alors que certaines catégories de marchandises sont transportées (presque) uniquement par un seul mode de transport, certaines catégories peuvent voyager par des modes différents. Une variation du prix sur un mode de transport peut de ce fait influencer la demande pour un autre mode.

---

3. Roberts, P.O., 1976, "Forecasting Freight Flows Using a Disaggregated Freight Demand Model", CTS Report 76-1, Center for Transportation Studies, MIT.

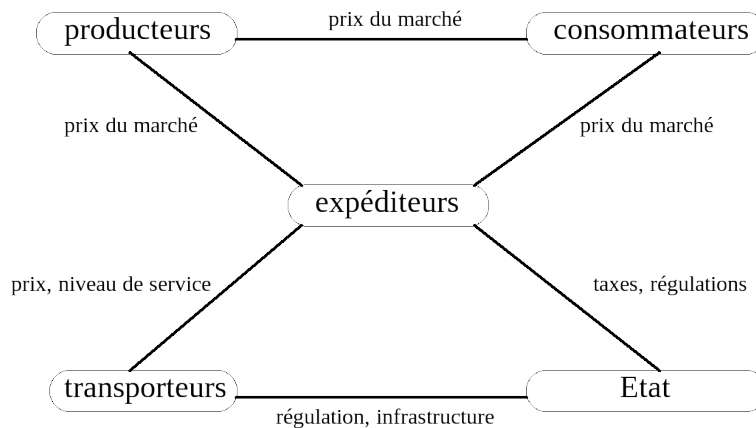


FIGURE 2.3 – Les acteurs d'un système de transport

- Le prix des biens complémentaires : on peut considérer le transport comme faisant partie d'un processus de production. Un exemple classique est celui de la production d'énergie électrique par des centrales thermiques qui doivent faire venir le combustible (charbon, fuel) par péniche ou par camion. Il est évident que la demande de transport pour le combustible est directement fonction du niveau de production d'énergie.
- La durée : le transport est un bien extrêmement particulier dans la mesure où son utilisateur est "impliqué" dans la production du service de transport par le temps que la marchandise passe à se déplacer. La durée du transport joue un rôle capital pour expliquer la demande de transport et le choix modal. La demande de transport est en relation inverse avec la durée nécessaire au transport. L'élasticité-temps est donc négative. La demande de transport est également sensible à la vitesse, mais cette dernière apparaît davantage comme un élément déterminant la durée du transport que comme un facteur explicatif supplémentaire.
- La liberté de disposition : les expéditeurs sont très sensibles à ce facteur, qui explique en partie le succès du transport routier.
- La capacité : l'adéquation entre les caractéristiques des marchandises à transporter (volume, poids) et celles du mode de transport détermine souvent le choix du mode.
- La sécurité et le respect des délais. les transports de marchandises sont sensibles aux risques encourus (bien que la perception de ce risque est souvent subjective) et au respect des délais d'exécution.

## 2.2 Techniques de génération et de distribution

Cette section présente quelques techniques de base qui concernent la génération et la distribution <sup>4</sup>. Pour rappel, NODUS ne contient pas de modules de génération

<sup>4</sup>. Le lecteur intéressé par une présentation plus approfondie de ces techniques lira avec intérêt le livre de J. de D. Ortuzar et L. G. Willumsen, "Modelling Transport", Wiley, 2011.

et de distribution : les matrices O-D doivent donc toujours être fournies, et les quelques paragraphes qui suivent doivent être considérés comme une petite présentation théorique, utile lorsque des matrices O-D ne sont pas disponibles ou lorsqu'elles sont partielles ou anciennes. La génération permet en effet d'estimer les flux totaux en provenance et à destination des différentes zones du réseau tandis que la distribution permet de créer une matrice O-D à partir de ces flux totaux.

Encore une fois, les pages qui suivent n'ont aucunement la prétention de présenter un état complet de l'art en la matière, l'objectif étant simplement ici d'aider le lecteur non familiarisé avec les techniques de base de la modélisation classique.

### 2.2.1 Génération

L'étape de génération essaye de déterminer l'attraction et l'émission globale de chaque zone de l'aire géographique étudiée. A ce stade, les liens qui peuvent exister entre une origine et une destination particulière ne sont pas encore pris en considération. Les mouvements qui vont et viennent d'un noeud déterminé sont estimés en classant les flux par catégorie (objectif, période, type de marchandise, ...) et en déterminant les facteurs qui influencent ces flux. Dans le cas du transport de marchandises, les critères suivants sont généralement pris en considération :

- la nature des marchandises,
- la population,
- le niveau de revenus,
- nombre d'employés dans les entreprises,
- le nombre de transactions réalisées,
- la zone d'influence des firmes,
- etc.

Ces données sont ensuite essentiellement exploitées par :

- des analyses de régression,
- des techniques de classification croisées,
- des techniques de prévision sur les variables utilisées,
- des techniques de test de stabilité des résultats obtenus.

### 2.2.2 Distribution

L'étape suivante consiste logiquement à distribuer les flux totaux entre les différents pôles mis en évidence dans l'étape de génération. En d'autres termes, il s'agit maintenant d'estimer une matrice O-D.

La littérature présente plusieurs méthodes dont les plus classiques sont les méthodes du taux de croissance et les méthodes synthétiques.

### Les méthodes du taux de croissance.

Ces méthodes se basent sur l'existence préalable d'une première matrice O-D (t). L'utilisation d'un taux de croissance attendu permet alors d'estimer une nouvelle matrice.

La méthode de base est utilisée seulement d'un taux de croissance général est disponible  $\tau$ . On applique alors  $T_{ij} = \tau t_{ij}$  pour chaque paire  $ij$ .

Si un taux de croissance spécifique est disponible pour chaque origine ou chaque destination  $\tau_i$  ou  $\tau_j$ , on parle de la méthode du taux de croissance à une seule contrainte.

Dans ce cas,  $T_{ij} = \tau_i t_{ij}$  pour un taux de croissance "origine" et  $T_{ij} = \tau_j t_{ij}$  pour un taux de croissance "destination".

Par exemple (voir tableau 2.1), avec une information prévisionnelle de flux sur les origines (cibles).

i \ j	1	2	3	4	$\sum_i$	Cibles $O_i$
1	5	50	100	200	355	400
2	50	5	100	300	455	460
3	50	100	5	100	255	400
4	100	200	250	20	570	702
$\sum_i$	205	355	455	620	1635	1962

TABLE 2.1 – Prévision aux origines et destinations

Le problème peut facilement être résolu en multipliant chaque ligne par le ratio  $O_i / \sum_j t_{ij}$ , qui représente un taux de croissance (voir tableau 2.2).

i \ j	1	2	3	4	$\sum_i$	Cibles $O_i$
1	5.6	56.3	112.7	225.4	400	400
2	50.5	5.1	101.1	303.3	460	460
3	78.4	156.9	7.8	156.9	400	400
4	123.2	246.3	307.9	24.6	702	702
$\sum_i$	257.7	464.3	529.5	701.2	1962	1962

TABLE 2.2 – Application du ratio de croissance

La méthode du taux de croissance à double contrainte est appliquée lorsque des estimations sur le nombre futur de mouvements aux origines et aux destinations sont disponibles. On dispose dans ce cas, pour chaque noeud, d'un facteur de croissance d'attraction  $\tau_i$  et de génération  $\Gamma_j$ . L'utilisation d'un facteur moyen  $F_{ij} = 0.5(\tau_i + \Gamma_j)$  n'est qu'un compromis très approximatif. Pour résoudre ce problème, on a recours à des processus itératifs, dont le plus connu est celui de

Furness<sup>5</sup> qui introduit la notion de “facteurs de balancement”  $A_i$  et  $B_j$ .

$$T_{ij} = t_{ij}\tau_i\Gamma_j A_i B_j$$

ou encore

$$T_{ij} = t_{ij}a_i b_j \text{ avec } a_i = \tau_i A_i \text{ et } b_j = \Gamma_j B_j$$

Le processus itératif est le suivant :

- Initialiser tous les  $b_j$  à 0 et résoudre pour  $a_i$  (satisfaire la contrainte de génération).
- Calculer les  $b_j$  en utilisant les  $a_i$  obtenus précédemment (satisfaire la contrainte d'attraction).
- Recalculer les  $a_i$  avec les  $b_j$  obtenus. Répéter les étapes précédentes jusqu'à obtention de paramètres stables.

Les méthodes basées sur le taux de croissance sont simples car elles se basent sur la pré-existence de matrices O-D observées et de taux de croissance estimés. L'utilisation de matrices O-D pré-existantes constitue évidemment leur point faible. En effet, il n'est dès lors possible que de réaliser des prévisions à court terme sur des réseaux qui restent fort stables.

**Les méthodes synthétiques.** Différentes méthodes ont été mises au point pour réaliser des prévisions sur des réseaux qui sont amenés à connaître, par exemple, de grandes variations de flux. La plus connue de ces méthodes est le modèle de gravité, dont la formulation générale est :

$$T_{ij} = \alpha O_i D_j f(c_{ij})$$

où  $O_i$  et  $D_j$  représentent les émissions et attractions totales,  $\alpha$  est un facteur de proportionnalité et  $f(c_{ij})$  est une fonction de coût de transport généralisé connue sous le nom de “fonction de dissuasion”<sup>6</sup>. “ (deterence function).

Le modèle de gravité repose sur le principe que la probabilité de réaliser un voyage entre deux noeuds “proches” est plus grande que celle d'effectuer un voyage entre deux noeuds “éloignés”. Le concept de distance doit ici être considéré dans son sens le plus large. En effet, si la distance physique peut être utilisée comme facteur de proportionnalité, deux noeuds peuvent également être

5. Furness K. P., 1965, “Time Function Iteration”, Traffic Engineering and Control, 7(7), 458-60

6. Par exemple :

- exponentielle  $f(c_{ij}) = \exp(-\beta c_{ij})$
- puissance  $f(c_{ij}) = c_{ij}^n$
- combinée  $f(c_{ij}) = c_{ij}^n \exp(-\beta c_{ij})$

considérés comme “proches” s’ils ont le même type d’activité économique ou des activités économiques complémentaires. C’est ainsi qu’il y a plus de trafic entre deux régions industrielles qu’entre deux régions agricoles.

Lorsqu’une contrainte (simple ou double) est introduite, on utilise le processus de Furness en utilisant les facteurs de balancement  $A_i$  et  $B_j$  en lieu et place du facteur  $\alpha$  :

$$T_{ij} = A_i O_i B_j D_j f(c_{ij})$$

Dans le cas du modèle à simple contrainte,  $A_i$  ou  $B_j$  est égal à l’unité. En effet, dans le cas contraire, l’interdépendance des facteurs de balancement exige un processus itératif, comme celui expliqué plus haut.

Exemple avec fonction de détérence exponentielle<sup>7</sup> ( $\beta = .10$ ) (voir tableaux 2.3 à 2.5).

i \ j	Cibles (flux)				$O_i$
	1	2	3	4	
1	3	11	18	22	400
2	12	3	13	19	460
3	15.5	13	5	7	400
4	15.5	13	5	7	400
$D_j$	260	400	500	802	1962

TABLE 2.3 – Matrice des coûts (en minutes)

i \ j	Cibles (flux)				$O_i$
	1	2	3	4	
1	0.74	0.33	0.17	0.11	400
2	0.30	0.74	0.27	0.15	460
3	0.14	0.27	0.61	0.50	400
4	0.09	0.17	0.45	0.61	702
$D_j$	260	400	500	802	1962

TABLE 2.4 – Résultats de la fonction de détérence  $\exp(-\beta cost)$ 

## 2.3 Techniques de choix modal

La notion de réseau virtuel, telle qu’elle est mise en oeuvre dans le logiciel NODUS, combine les étapes de choix modal et de génération du modèle classique à quatre étages. Néanmoins, il est utile ici de présenter les techniques alternatives

7. Divers chercheurs ont essayé de proposer des estimations pour le paramètre  $\beta$ . Voir par exemple Blauwens G., 1975, “Interpreting Coefficients in Gravity Model”, werknota 32, UFSIA-SESO, Anvers

i\j	1	2	3	4	$O_i$	$a_i$
1	162	98.5	65.5	74	400	405.2
2	162	98.5	65.5	74	400	405.2
3	18.2	47.2	140.6	194	400	237.1
4	23.4	55.4	192.2	431	702	439.4
$D_j$	265.1	405.6	499.1	792.2		1962/1959.9
$b_j$	1.5	1.7	2.0	2.6		

TABLE 2.5 – Matrice de gravité

Niveau d'agrégation	Modèles
Agrégé	Modèles de demande dérivée Modèles probabilistes
Désagrégé	Modèles probabilistes Théorie des inventaires

TABLE 2.6 – Types de modèles en fonction du niveau d'agrégation

afin de mieux comprendre l'apport du réseau virtuel en terme de facilité de modélisation.

L'analyse des facteurs qui déterminent le choix modal a toujours retenu l'attention pour l'étude de la concurrence entre les modes de transport. Pour ce faire, une large palette de modèles a été mise au point. D'après Wilson<sup>8</sup>, les modèles de demande peuvent être classés en deux catégories : les modèles agrégés et les modèles désagrégés. Ceux-ci se distinguent surtout par le niveau d'agrégation des données qui sont utilisées.

Selon le niveau d'agrégation des données, le tableau 2.6 peut être établi.

### 2.3.1 Modèles agrégés

Les modèles agrégés considèrent que les producteurs maximisent leur profit et que le transport doit être inclus dans leur processus de production. La fonction de demande de transport est donc basée sur la fonction de coût estimée de la firme.

L'approche agrégée implique l'utilisation de séries temporelles et/ou croisées pour estimer des relations structurelles qui décrivent le comportement d'un ou de plusieurs acteurs du système de transport. L'objectif de ce type d'approche est habituellement l'estimation de fonctions de coût ou de production générales applicables à une firme particulière ou à une industrie toute entière. D'une manière générale, cette approche ignore le détail d'un réseau de transport : elle ne convient donc pas pour analyser les flux sur un réseau complexe. Leur présentation ne répond dès lors qu'au seul souci d'exhaustivité.

8. Wilson A. G., 1981, "A Disaggregate Model of the Demand for Intercity Freight Transportation", *Econometrica*, 49, 981-1006.

### Modèles de demande dérivée

Les travaux de Sloss<sup>9</sup>, de Oum,<sup>10</sup> et de Friedlander et Spady<sup>11</sup> relèvent de ce type d'approche. Les fonctions de coût y sont spécifiées comme dans la théorie néo-classique de la production, où l'expéditeur est censé minimiser son coût de transport sous différentes contraintes technologiques.

L'approche adoptée est la fonction translogarithmique, qui n'impose pas de restrictions aux élasticités prix et de substitution. Ces fonctions appartiennent à la famille des fonctions dites flexibles et pouvant être utilisées afin d'obtenir une approximation du second ordre de la série de Taylor.

Oum utilise des données agrégées en série chronologique portant sur les flux de marchandises entre certaines villes canadiennes, tandis que des données en coupe instantanée, plus désagrégées, sont utilisées par Friedlander et Spady.

Les modèles de demande dérivée considèrent le transport comme un input nécessaire d'un processus de production. De ce fait, la demande de transport est dérivée de l'output produit. De façon analytique, les fonctions de demande d'inputs de transport utilisées par Oum et par Friedlander et Spady sont obtenues dans un contexte de concurrence parfaite à l'aide du lemme de Sheppard<sup>12</sup>. L'utilisation des fonctions de coût, et non des fonctions de production, se justifie par la relation de dualité liant ces deux expressions.

La base même de ce type d'approche est donc une seule et unique fonction, de type translogarithmique, qui s'adapte bien à des données agrégées. Il semble évident qu'il n'est pas possible de l'utiliser directement sur un réseau, composé d'un grand nombre d'arcs et de noeuds qui sont autant d'éléments auxquels il faut affecter un coût (ou une estimation de coût). On ne peut néanmoins pas rejeter l'idée que l'expéditeur essaye de minimiser ses coûts.

### Modèles probabilistes

Cette approche a été utilisée par plusieurs auteurs, sous la forme de modèles logit.

Le modèle logit (multinomial) se présente de la manière suivante :

$$P_n(i) = \frac{e^{V_{in}}}{\sum_{j \in C_n} e^{V_{jn}}}$$

9. Sloss J., 1971, "The Demand for Intercity Motor Freight Transport : a Macroeconomic Analysis", The Journal of Business, janvier.

10. Oum T. H., 1977, "Derived Demand for Freight Transportation and Inter-Modal Substitutibilities in Canada", Transportation Research Forum Conference Proceedings XVIII(1), 56-57.

11. Friedlander A. F. et Spady R. H., 1981, "Freight Transport Regulation : Equity, Efficiency and Competition in the Rail and Trucking Industries", MIT Press, Cambridge, MA.

12. Sheppard E. et Curry L., 1982, "Spatial Price Equilibria", Geographical Analysis 14, 279-304.



avec :

$$0 \leq P_n(i) \leq 1$$

$$\sum_{i \in C_n} P_n(i) = 1$$

où :

- $P_n(i)$  : probabilité que l'alternative  $i$  soit choisie parmi les  $n$  possibilités
- $V_{in}$  et  $V_{jn}$  : composantes systématiques (représentatives) de la fonction d'utilité de  $i$  et de  $j$
- $C_n$  : choix possibles

Le modèle multinomial se caractérise par le fait que le décideur a le choix entre plus de deux alternatives parmi un ensemble  $C_n$  d'alternatives :

$$U_{in} = V_{in} + \epsilon_{in}$$

où  $\epsilon_{in}$  représente le bruit aléatoire.

Etant donné que les modèles probabilistes sont également repris dans la section "modèles désagrégés", nous ne pousserons pas plus loin notre exploration, d'autant plus que l'approche agrégée se prête assez mal à des études basées sur des réseaux de transport nécessitant un niveau de détail important. Par ailleurs, la topologie du réseau joue également un grand rôle dans le choix modal et cette dynamique est souvent, si pas toujours, ignorée à un niveau élevé d'agrégation.

### 2.3.2 Modèles désagrégés

#### Modèles probabilistes

L'approche probabiliste a également été utilisée à un niveau désagrégé. Daughety et Inaba<sup>13</sup>, par l'introduction d'une composante aléatoire au niveau du profit, ont formulé les modèles logit, souvent utilisés<sup>14</sup>. Ce type de modèle suppose

13. Daughety A. F. et Inaba F.S., 1978, "Estimation of Service-Differentiated Transport Demand Functions", *Transportation Research Record*, 668, 23-30.

14. Par exemple :

- Daughety A. F., 1979, "Freight Demand Transport Revisited : A Microeconomic View of Multi-Modal Multi-Characteristic Service Uncertainty and Demand for Freight Transport", *Transportation Research*, 13, 281-288.
- Daughety A. F. et Inaba F.S., 1981, "An Analysis of Regulatory Change in the Transportation Industry", *Rev. of Econ. and Stat.*, 53, 246-255.
- Levin R. C., 1981, "Railroad Rates, Profitability and Welfare under Deregulation", *Bell J. of Econ.*, 12, 1-26.

que l'expéditeur peut être représenté par un certain vecteur caractéristique  $S$  qui reflète indirectement ses goûts. Cet expéditeur a le choix entre plusieurs modes de transport qui peuvent être représentés par des vecteurs d'attributs  $X$ . La fonction d'utilité associée à un mode peut être représentée de la façon suivante :

$$U = V(S, X) + \epsilon(S, X)$$

où  $V$  est une fonction non stochastique reflétant les goûts représentatifs de la population alors que le caractère particulier d'un expéditeur donné se caractérise par la fonction aléatoire .

Dans le cas où seulement deux modes sont utilisés, si  $X^1$  et  $X^2$  sont respectivement les caractéristiques des modes 1 et 2, le mode 1 sera choisi si :

$$V(X^1, S) + \epsilon(X^1, S) > V(X^2, S) + \epsilon(X^2, S)$$

Le comportement d'aversion au risque a été analysé plus en profondeur par Wilson<sup>15</sup>. Pour cet auteur, cette aversion n'est pas la même pour tous les modes de transport. L'hypothèse d'indépendance de l'erreur stochastique, nécessaire pour dériver un modèle logit, peut ne pas être réaliste. Une hypothèse plus plausible de distribution des erreurs voudrait que celles-ci soient indépendamment distribuées et suivent une distribution normale. Le modèle qui en résulte est le modèle probit.

### Modèles dérivés de la théorie des inventaires

L'approche de la valeur d'inventaire cherche à optimiser le comportement de recherche de profit de l'expéditeur. Baumol et Vinod<sup>16</sup> ont été les précurseurs dans cette voie. Ils ont été suivis par Das<sup>17</sup>, et Constable et Whybark<sup>18</sup>. Bien que relativement ancienne, cette approche n'est utilisée dans des modèles empiriques que depuis une bonne quinzaine d'années, entre autres par Allen<sup>19</sup>, Chiang et Roberts<sup>20</sup>, et McFadden et Winston<sup>21</sup>.

15. Wilson A. G., 1981, "A Disaggregate Model of the Demand for Intercity Freight Transportation", *Econometrica*, 49, 981-1006.

16. Baumol W.J. et Vinod H.D., 1970, "An Inventory Theoretic Model of Freight Transportation Choice", *Management Science*, 16, 413-21

17. Das C. (1972), "Choice of Transport Service : An Inventory Theoretic Approach", *The Logistics and Transportation Review*, 10, 181-87

18. Constable G.K. et Whybark D.C., 1978, "The Interaction of Transportation and Inventory Decisions", *Decision Science*, 3, 688-99

19. Allen W. B., 1977, "The Demand for Freight Transportation : A Micro Approach", *Transportation Research* 11, 9-14.

20. Chiang Y.S. et Roberts P.O., 1980, "A Note on Transit Time and Reliability for Regular-Route Trucking", *Transportation Research*, 14B, 59-65.

21. McFadden D. et Winston C., 1981, "Joint Estimation of Discrete and Continuous Choices in Freight Transportation", *Meeting of the Econometric Society*.

Le modèle se base sur une fonction de profit qui tient compte de la valeur d'inventaire de la marchandise au début et à la fin de l'envoi. Il s'agit donc ici de déterminer la quantité et la fréquence optimale des envois, afin de maximiser le profit des entreprises. L'expression de base de cette approche est :

$$CT = C_s + C_t + C_i$$

où :

- $C_s$  : coûts directs annuels de transport
- $C_t$  : couts financiers annuels dus à la détention de la marchandise durant le transport
- $C_i$  : coûts annuels d'ordre administratif + coûts liés aux stocks de sécurité

La mise en place d'un tel modèle nécessite évidemment une grande quantité de données, dans la mesure où il faut exprimer les coûts de transport en fonction de la taille du chargement, des coûts de détention de la marchandise, de la demande du bien, etc...

L'approche est cependant fort intéressante car elle tient compte explicitement de la marchandise dans le processus de décision. De plus, la nature désagrégée de cette technique s'adapte bien aux méthodes de réseau, car les différents éléments de coût qui composent ce modèle peuvent être affectés à des arcs ou à des noeuds d'un réseau. La recherche d'un chemin, qui correspond finalement à la décision de transport, peut alors être réalisée au travers de la mise en oeuvre d'un algorithme de la théorie des graphes, sans faire appel à des notions de probabilités de choix.

Bien que, à l'origine, ce type de modèle n'ait pas été développé dans une optique de réseau, il s'agit de la technique qui est la plus facilement transposable. C'est donc sur cette base théorique que s'appuiera le choix modal effectué lors de la mise en oeuvre du réseau virtuel.

### 2.3.3 Conclusions sur les techniques de choix modal

Qu'elles soient agrégées ou non, les techniques de choix modal ne répondent qu'incomplètement à la dynamique des réseaux.

Les techniques agrégées ne conviennent pas bien à une utilisation sur un réseau. Il en va de même de l'approche désagrégée probabiliste. Dans les deux cas en effet, il est difficile de prendre en considération le détail des réseaux.

L'approche dérivée de la théorie des inventaires servira donc de source d'inspiration lors du développement des fonctions de coût spécifiques qui seront utilisées lors de la mise en oeuvre du réseau virtuel. De plus, alors que l'approche originelle s'attache uniquement à maximiser le profit des expéditeurs, les modèles gérés par NODUS prendront en considération les coûts supportés par les transporteurs par le biais de la recherche des itinéraires les moins chers.

Il reste néanmoins évident que les critères qui mènent à la décision du choix de mode de transport ne sont pas uniquement d'ordre purement monétaire. C'est ainsi qu'il faut prendre en considération des éléments aussi divers que la durée du voyage, la facilité de chargement ou la catégorie de marchandises qui est transportée. Tous ces critères tendent à donner un certain niveau de qualité (au sens large) d'un mode de transport.

## 2.4 Techniques d'affectation

Les méthodes d'affectation, qui visent à affecter les matrices O-D sur le réseau en minimisant les coûts (généralisés), peuvent se classer en quatre grandes catégories, selon qu'elles tiennent compte ou non des contraintes de capacité liées au réseau et de l'aspect linéaire ou non de la fonction objectif (voir tableau 2.7). Cette fonction objectif peut par ailleurs prendre différentes formes selon le point de vue adopté dans un modèle. Lorsque l'on s'attache à optimiser l'ensemble d'un système de transport, on choisira de minimiser les coûts totaux, alors que pour un modèle d'équilibre "usagers", on minimisera les coûts moyens.

		Comp. non stochastique	Comp. stochastique
Cont. de capacité	Non	Tout ou rien	Multi-flots
	Oui	Equilibre classique	Equilibre mutli-flots

TABLE 2.7 – Techniques d'affectation

Dans les modèles d'équilibre et multi-flots, il peut y avoir plusieurs chemins utilisés entre les mêmes origine et destination, alors que le modèle "tout ou rien" recherche un seul chemin par paire O-D. Seul le modèle d'équilibre multi-flots n'est pas implémenté dans Nodus.

Par rapport au modèle "tout ou rien", le modèle d'équilibre classique tient compte du trafic existant pour rechercher un chemin dans le réseau au travers de fonctions de coût du type "volume-délai", ce qui revient à prendre en compte la capacité de manière implicite.

Indépendamment de ce qui est publié dans le tableau précédent, les techniques d'affectation peuvent tenir compte ou non de l'aspect stochastique du comportement des usagers.

Les méthodes stochastiques ont surtout été développées pour le transport de personnes<sup>22</sup>. En effet, la perception que différents voyageurs ont de leur environ-

22. Les modèles les plus connus sont ceux de :

- Dial R.B., 1969, "A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model wich Obviates Path Enumeration", *Transportation Research*, 5, 83-112.
- Gunarsson S.O., 1972, "An Algorithm for Multipath Traffic Assignment", *PTRC Seminar Proceedings, Urban Traffic Model Research*, 8-12 May.
- Randle J., 1979, "A Convergent Probabilistic Road Assignment Model", *Traffic Eng. and Control*, 20, 519-521. Ce modèle est plus connu sous le nom de G.M.T.U. (Greater Manchester Transportation Unit).

nement n'est pas la même. Un conducteur peut par exemple préférer l'autoroute pour se rendre d'un point à un autre, alors que son voisin préférera une route nationale. Cette préférence se traduit par la notion d'utilité. Pour pouvoir mettre en oeuvre de tels modèles, les utilisateurs sont supposés avoir une perception de l'utilité de chaque itinéraire possible. On fait alors souvent l'hypothèse qu'ils tendent à choisir le chemin qui maximise leur utilité. La représentation de tels comportements fait appel à des modèles probabilistes plus ou moins complexes selon que l'utilisateur a le choix entre deux (logit, probit,...) ou plusieurs (logit multinomial, Dial, ...) itinéraires.

Bien sûr, le transport de marchandises peut aussi être affecté par ce genre de considérations, surtout s'il s'agit de transports en milieu urbain lors desquels des problèmes de congestion peuvent être rencontrés, mais l'attention se portera ici plutôt sur les méthodes non stochastiques car les problèmes de transport multi-modaux ne se conçoivent que sur des distances relativement longues et sur des réseaux nationaux ou internationaux.

Lorsque l'on s'attache à des problèmes liés aux réseaux, l'affectation passe également par la mise en oeuvre d'algorithmes de recherche de chemins les plus courts (ou les moins coûteux) tel que l'algorithme de Dijkstra mis en oeuvre dans NODUS. Le choix d'un algorithme de recherche de chemin n'influence pas la solution du problème économique posé par l'affectation : seuls les temps de calcul sur un ordinateur s'en trouvent affectés.

### 2.4.1 Le “tout ou rien”

Les modèles qui mettent en oeuvre une méthode d'affectation de type “tout ou rien” font l'hypothèse que le réseau n'est pas limité par des contraintes de capacité. On affecte donc l'ensemble des quantités à transporter reprises dans la matrice O-D sans aucune contrainte. Malgré cette limitation, les méthodes du type “tout ou rien” sont encore largement utilisées à certaines étapes d'une étude. Elles se justifient sur de grands réseaux faiblement chargés ou pour visualiser les flux dans des situations non contraignantes.

Dans des applications de type macroscopique, il importe souvent peu de savoir si un carrefour est encombré. Par contre, il est important de savoir qu'il faut tenir compte d'un certain temps pour traverser telle ou telle ville. Ce genre de considération se matérialise d'ailleurs au travers de la topologie du réseau qui est utilisé : le détail des zones urbaines (rues, carrefours,...) n'est pas digitalisé lorsque l'on travaille sur de gros réseaux, tels que le réseau européen. La congestion peut alors être prise en compte par un coût supplémentaire (congestion, passage aux frontières, ...) à imputer aux noeuds du réseau, et une méthode “tout ou rien” peut alors se justifier. NODUS permet évidemment de réaliser des affectations de ce type.

### 2.4.2 Méthodes d'équilibre

Il paraît évident qu'à un moment ou un autre, des phénomènes de congestion apparaissent. Il s'agit donc d'introduire, lors de la phase d'affectation, une méthode qui puisse résoudre les contraintes liées à la capacité du réseau. L'une des solutions les plus utilisées pour résoudre les problèmes de congestion est la mise en oeuvre d'un algorithme de type Frank-Wolfe<sup>23</sup>, qui permet de réaffecter une partie du flux sur des chemins alternatifs en exploitant l'idée que les coûts de déplacement sur un arc du réseau augmentent au fur et à mesure que le flux sur cet arc augmente (coût marginal croissant).

Cet algorithme, ou des variantes de cet algorithme, a été utilisé dans un grand nombre de modèles d'affectation. C'est la raison pour laquelle deux de ces variantes sont présentées ici.

Mise en oeuvre de l'algorithme de Frank-Wolfe

- $n$  : numéro de l'itération
- $C_a$  : coût sur l'arc  $a$
- $F_a$  : flux sur l'arc  $a$
- $V_a$  : flux sur l'arc  $a$ , pondéré par le paramètre  $\lambda$
- $\lambda$  : pondération.
- Etape 1 : Initialisation
  - compteur  $n = 0$
  - Attribuer à chaque arc un coût  $C_a^{(n)}$ , équivalent au coût lorsqu'il n'y a aucune congestion.
  - Affectation du trafic (méthode tout ou rien). Soit  $F_a^{(n)}$  le flux sur l'arc  $a$
  - $V_a^{(n)} = F_a^{(n)}$
- Etape 2 :  $n = n + 1$
- Etape 3 :  $C_a^{(n)} = C_a(V_a^{(n-1)})$
- Etape 4 : Affectation "tout ou rien" sur base de ces nouveaux coûts et calcul de  $F_a^{(n)}$ .
- Etape 5 :  $V_a^{(n)} = V_a^{(n-1)} + \lambda^{(n)}(F_a^{(n)} - V_a^{(n-1)})$

$\lambda^{(n)}$  peut alors par être choisi afin de minimiser la fonction objectif suivante<sup>24</sup> :

$$Z^{(n)} = Z(\lambda^{(n)}) = \sum_a \int_0^{V_a^{(n)}} C_a(v) dv$$

pour  $0 \leq \lambda^n \leq 1$

- Etape 6 : Si la condition de fin n'est pas encore respectée, aller à l'étape 2.

23. Frank M. et Wolfe P., 1956, "An Algorithm for Quadratic Programming", Naval Research Logistic Quarterly, 3, 95-110.

24. Il existe plusieurs méthodes pour calculer  $\lambda$ . Dans l'exemple présenté ici, le calcul fait intervenir la notion d'intégrale, qui suppose une approche de type "user equilibrium" par les coûts moyens. Ce type d'équilibre est une approche un peu "égoïste" de l'équilibre...

Thomas<sup>25</sup> présente un algorithme complet et une méthode numérique pour trouver  $\lambda^{(n)}$ .

Ces méthodes et les modifications qui y ont été apportées par la suite donnent de bons résultats, mais elles nécessitent beaucoup de temps de par leur nature itérative. D'autres méthodes, plus rapides, ont été mises au point.

La méthode incrémentale ou dite de "Chicago"<sup>26</sup> est une de ces méthodes. Elle consiste à affecter une partie seulement de la matrice O-D avant de modifier les coûts des arcs. On procède ainsi, partie par partie, jusqu'à ce que l'ensemble de la matrice soit affecté (sequential loading). Dans cette méthode, les flux individuels peuvent être incorrects. En effet, les premiers éléments de la matrice O-D seront systématiquement affectés les premiers, et ne souffriront donc pas de congestion. Par contre, les derniers itinéraires qui seront calculés seront toujours les plus défavorisés, dans la mesure où ils seront affectés sur un réseau congestionné. Le résultat obtenu est donc souvent faux. Toutefois, et bien que les techniques d'affectation partielles soient de moins en moins utilisées<sup>27</sup>, la solution globale, c'est-à-dire le flux total sur chaque arc pris séparément, peut être une bonne estimation de celui obtenu grâce aux algorithmes présentés plus haut.

Dans la méthode de Frank-Wolfe, le calcul de  $\lambda^{(n)}$  prend parfois autant de temps que le calcul des chemins à chaque itération. Par ailleurs, nous venons de voir que la méthode incrémentale souffre d'un problème important. Une solution élégante est proposée par la méthode des moyennes successives (MSA - Method of Successive Averages)<sup>28</sup> qui propose de fixer  $\lambda^{(n)}$  à  $1/(1+n)$ . Il faudra en moyenne plus d'itérations que dans la méthode de Frank-Wolfe avant de converger, mais le temps de calcul total sera souvent moins long car l'obtention de  $\lambda^{(n)}$  est immédiate.

Une remarque s'impose ici. Si on essaye de mettre en relation les techniques d'affectation sur un réseau, quelles qu'elles soient, et la théorie économique, il faut garder à l'esprit que l'affectation se base toujours sur la recherche d'un chemin<sup>29</sup> composé d'une suite d'arcs. Chacun de ces arcs se voit affecté d'un certain coût, et le coût total du chemin n'est jamais que la somme des coûts (linéaires ou non) des différents arcs empruntés. Le processus est donc additif par nature, ce qui peut être réducteur par rapport aux enseignements de la théorie économique. En effet, cette manière de calculer le coût total sur un itinéraire passe sous silence les éventuelles économies de densité.

25. Thomas Roy, 1991, "Traffic Assignment Techniques", Avebury Technical

26. Carol J. D., 1959, "A Method of Traffic Assignment to an Urban Network", Highway Res. Bd. Bull. 224, Trip Characteristics and Traffic Assignment, 64-71.

27. Les ordinateurs actuels permettent en effet d'utiliser des méthodes d'équilibre pour résoudre des problèmes de taille importante.

28. Powell W.B, Sheffi Y., 1982, "The Convergence of Equilibrium Algorithms with Pre-determined Step Sizes", Transportation Science 16,1, 45-55

29. Ou plus précisément un ensemble de chemins.

### 2.4.3 Conclusion sur les techniques d'affectation

A ce stade, on ne peut pas faire un choix entre les deux techniques d'affectation proposées. En effet, tout dépend du problème qui est posé. Une analyse de flux sur un réseau régional pourra faire appel à une approche d'équilibre, alors que pour des problèmes liés à des réseaux transnationaux, on appliquera un algorithme de type "tout ou rien", quitte à nuancer les coûts pour tenir compte de la congestion à certains points stratégiques.



## Chapitre 3

# Concept de réseau virtuel

Avant de développer le concept de réseau virtuel, quelques notions de base de la théorie des graphes doivent être précisées. Les paragraphes qui suivent ne constituent nullement un apport nouveau à cette théorie, mais permettent au lecteur qui n'est pas familier avec cette matière de comprendre les concepts fondamentaux sur lesquels est basé le réseau virtuel. Ces quelques pages s'inspirent de l'excellent ouvrage de Minoux et Bartnik<sup>1</sup>.

### 3.1 Notions de base

#### 3.1.1 Graphe

Un graphe  $G = [X, U]$  est déterminé par :

- Un ensemble  $X$  dont les éléments  $x \in X$  sont appelés des sommets ou des noeuds.  $N = \#X$  représente le nombre de noeuds. Le graphe est dit d'ordre  $N$ . Les noeuds sont numérotés  $i = 1..N$ .
- Un ensemble  $U$  dont les éléments  $u \in U$  sont des couples ordonnés de noeuds appelés des arcs. Si  $u = (x_1, x_2)$  est un arc de  $G$ ,  $x_1$  est l'extrémité initiale de  $u$  et  $x_2$  l'extrémité terminale de  $u$ . Le nombre d'arcs est noté  $M = \#U$ .

---

1. Minoux M. et Bartnik G., 1986, "Graphes, Algorithmes, Logiciels", Dunod informatique. Le lecteur intéressé lira également avec intérêt l'ouvrage de Gondrand M., Minoux M., 1979, "Graphes et Algorithmes", Eyrolles. Ces deux ouvrages ont été choisis car ils reprennent et expliquent clairement la plupart des algorithmes classiques de la théorie des graphes, que ce soit d'un point de vue méthodologique que d'un point de vue plus informatique. C'est ainsi que la complexité des algorithmes présentés est à chaque fois calculée, ce qui permet d'effectuer un choix motivé entre les différents algorithmes, en fonction des conditions particulières du modèle à développer.

### 3.1.2 Successeurs et prédécesseurs

On dit que  $x_2$  est un successeur de  $x_1$  s'il existe un arc ayant  $x_1$  comme extrémité initiale et  $x_2$  comme extrémité terminale. L'ensemble des successeurs d'un noeud  $x \in X$  est noté  $\Gamma_x$ .

On dit que  $x_2$  est un prédécesseur de  $x_1$  s'il existe un arc de la forme  $(x_2, x_1)$ . L'ensemble des prédécesseurs de  $x \in X$  peut alors être noté  $\Gamma_x^{-1}$ .

### 3.1.3 Graphe complet

Un graphe  $G = [X, U]$  est dit complet si, pour toute paire de noeuds  $(x_1, x_2)$ , il existe au moins un arc de la forme  $(x_1, x_2)$  ou  $(x_2, x_1)$ .

Un réseau de transport n'est de ce fait que très rarement, pour ne pas dire jamais, un graphe complet.

### 3.1.4 Orientation d'un graphe

A tout arc  $(x_1, x_2)$  - à tout couple ordonné  $(x_1, x_2)$  - est associé le couple non ordonné  $\{x_1, x_2\}$ , appelé l'arête  $\{x_1, x_2\}$ . Une arête est donc un arc non orienté. Un graphe  $G = [X, U]$  est un graphe non orienté si l'ensemble  $U$  est un ensemble d'arêtes.

Un réseau de transport peut être orienté ou non. En effet, dans un réseau de type urbain, il est important de tenir compte, par exemple, des sens uniques. Ce type de réseau est alors orienté. Par contre, lorsque l'on travaille sur de gros réseaux de transport nationaux, on peut utiliser un graphe non orienté car chaque arc peut être parcouru dans les deux sens et au même coût.

Toutefois, bien que le réseau virtuel soit destiné à être utilisé sur des réseaux de ce second type, il doit être orienté, pour des raisons qui seront présentées plus loin.

### 3.1.5 Densité d'un graphe

La densité d'un graphe est le rapport entre le nombre d'arcs (d'arêtes) d'un graphe et le nombre d'arcs (arêtes) que comporte le graphe complet ayant le même nombre de noeuds. Ainsi, dans le cas d'un graphe orienté, la densité est :

$$\frac{M}{N(N-1)}$$

Pour le cas d'un graphe non orienté, la densité s'exprime par :

$$\frac{2M}{N(N-1)}$$

Un réseau de transport (ainsi d'ailleurs que le réseau virtuel qui en découle) est donc un graphe peu dense. En effet, un noeud n'est jamais lié directement à tous les autres noeuds. En règle générale, à un noeud sont rattachés 3 ou 4 autres noeuds au maximum. Cette caractéristique peut influencer le choix de l'algorithme qui sera utilisé pour calculer des chemins.

Ces quelques concepts de base clarifiés, il reste à définir la notion de réseau multi-modal. Sous cet adjectif se cachent deux sous-problèmes :

- Le choix du mode de transport proprement dit (le camion, le train, le bateau)
- Le choix du moyen de transport (le train est-il électrique ou diesel ? Le bateau est-il de 300 tonnes ou de 1000 tonnes ?).

Si l'on s'en tient aux trois modes de transport terrestres classiques (camions, trains et bateaux), le réseau multi-modal est composé de trois réseaux mono-modaux distincts : le réseau routier, le réseau de chemin de fer et le réseau des voies navigables. Chaque réseau accueille un seul mode de transport, mais peut accueillir différents moyens de transport. Les différents réseaux sont inter-connectés par le biais de gares et/ou ports communs.

Le réseau multi-modal est constitué d'un ensemble de noeuds et un ensemble d'arêtes. Chaque arête représente une voie utilisable par un seul mode de transport, mais peut être emprunté par différents moyens de transport.

Dans le réseau multi-modal tel qu'il a été défini, il est possible de changer de mode ou de moyen de transport et de prendre plusieurs fois le même mode ou moyen de transport pour arriver à destination. On peut imaginer charger la marchandise sur un camion pour utiliser ensuite les voies navigables et reprendre un camion pour atteindre la destination finale. Le chemin est donc constitué d'un ensemble de parcours effectués à l'aide d'un seul moyen de transport et de divers transbordements. Pour chacun de ces parcours, il s'agit de trouver la voie qui minimise le coût de transport, tout en minimisant les coûts liés aux transbordements.

## 3.2 Approche intuitive

Posons les modes de transport R, F et E comme étant respectivement la Route, le chemin de Fer et les voies d'Eau.

En première analyse, les coûts liés aux frais de chargements et de transbordements peuvent être considérés comme des poids que l'on rattache aux noeuds d'un réseau tandis que les coûts liés aux distances de transport sont rattachés aux arêtes du réseau.

Cependant, il faudrait pouvoir attacher un poids à un noeud de manière conditionnelle. En effet, le coût de chargement ou de transbordement n'est supporté qu'en cas de chargement ou de transbordement effectif. En d'autres termes, le passage d'une arête à une autre se déroule souvent sans devoir changer de mode ou de moyen de transport.

De plus, le poids des noeuds n'est que très rarement unique. Il suffit pour s'en convaincre d'observer n'importe quel port de chargement le long du Canal Albert (Belgique). Ce canal peut supporter des bateaux jusqu'à 9000 tonnes, mais on y rencontre beaucoup de bateaux plus modestes. Pour un même port, le coût de chargement d'un petit bateau est évidemment différent de celui d'un grand.

L'idée de base de la méthode et de l'algorithme proposés est de créer, à partir d'un réseau réel, un réseau virtuel dans lequel on crée une arête pour tous les éléments auxquels on affecte un poids.

La solution peut tout d'abord être présentée de manière intuitive en prenant l'exemple du réseau de voies navigables repris à la figure 3.1.

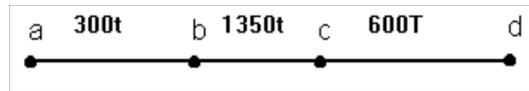


FIGURE 3.1 – Réseau hydraulique simple

Ce réseau est donc constitué de 4 noeuds et 3 arêtes. Ces dernières représentent des voies d'eau au gabarit de 300, 1350 et 600 tonnes respectivement.

Pour passer du noeud a au noeud d, il est possible que le chemin le moins coûteux consiste à réaliser un transbordement au noeud b pour passer sur un bateau de 1000 ou de 1350 T, pour repasser ensuite sur un bateau de 600 tonnes en c.

Une autre possibilité est de passer sur des bateaux de 600 tonnes dès le noeud b et de continuer ainsi jusqu'en d.

Enfin, un voyage complet rien qu'avec des bateaux de 300 tonnes est également possible.

Ce réseau, bien que très simple, résume donc très bien le problème du choix modal.

L'idée de base de la méthode proposée est de créer, à partir d'un réseau réel, un réseau virtuel dans lequel tous les poids, qu'ils soient liés à des arêtes ou à des noeuds, sont affectés à des arêtes. La notation utilisée pour les identificateurs des noeuds dans ce réseau virtuel permettra de connaître directement le type de coût à associer à chaque arête. Dans l'exemple, le réseau virtuel dérivé du réseau réel se présente comme dans la figure 3.2.

La solution passe donc par la création d'un ensemble de noeuds nouveaux b1-b5, c1-c5, d1-d2 et d'un ensemble de nouvelles arêtes reliant ces nouveaux noeuds.

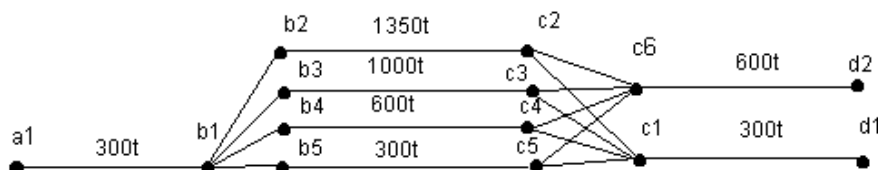


FIGURE 3.2 – Réseau virtuel correspondant

Dans une première étape, toutes les arêtes réelles existantes sont scindées en arêtes virtuelles en fonction des moyens de transport utilisables :

- L'arête (a,b) n'a pas été scindée, car sur un canal de 300 tonnes il n'est possible de faire passer que des bateaux de 300 tonnes.
- L'arête (b,c) a été scindée en quatre parties. En effet, sur un canal de 1350 tonnes, il est possible de faire passer des bateaux de 300, 600, 1000 et 1350 tonnes.
- L'arête (c,d) est dédoublée, car sur un canal de 600 tonnes il est possible de faire passer des bateaux de 300 et de 600 tonnes.

L'ensemble des arêtes réelles ainsi multiplié, il reste à les relier grâce à d'autres arêtes virtuelles. Ces dernières correspondent aux opérations de transbordements.

C'est ainsi que le noeud réel b est représenté dans le réseau virtuel par 4 noeuds virtuels et 4 arêtes virtuelles. On peut alors affecter, sur ces arêtes, les coûts des transbordements d'un bateau de 300 tonnes vers des bateaux de 600, 1000 ou 1350 tonnes. Il existe également une arête virtuelle qui représente le passage d'un segment de 300 tonnes vers un autre segment de 300 tonnes. Le poids de cette arête est nul et correspond au simple passage du bateau par le noeud (réel) b, sans transbordement.

Le même mécanisme est utilisé pour le noeud réel c. Toutes les combinaisons modales sont également reprises sous forme d'arêtes et de noeuds virtuels. Deux arêtes de poids nuls sont créées pour des bateaux de 600 et de 300 tonnes "qui ne font que passer".

De cette manière, le réseau multi-modal est représenté par un réseau mono-modal sur lequel chaque arête a un poids unique représentant soit le coût du déplacement sur une certaine distance, soit le coût d'un éventuel transbordement. Lorsqu'un coût aura été affecté à chaque arête, le chemin de coût minimum peut être calculé en utilisant un algorithme tel que celui de Johnson. La solution ainsi trouvée est une solution exacte tenant compte de tous les choix possibles et non pas une heuristique qui donnerait une solution approchée.

### 3.3 Développement systématique

Il reste maintenant à modéliser ce concept de réseau virtuel et à écrire l'algorithme qui permet de générer un réseau virtuel à partir d'un réseau réel. Afin de rendre la lecture des quelques pages qui suivent plus facile, les différentes étapes de la mise au point de l'algorithme seront illustrées sur la base d'un exemple simple de réseau.

#### 3.3.1 Méthode générale

Soit le réseau réel  $G = [X, U]$  de la figure 3.3. Ce réseau est composé de 4 noeuds ( $\#X = N = 4$ ) a, b, c et d et de 5 arêtes ( $\#U = M = 5$ ) numérotées de 1 à 5.

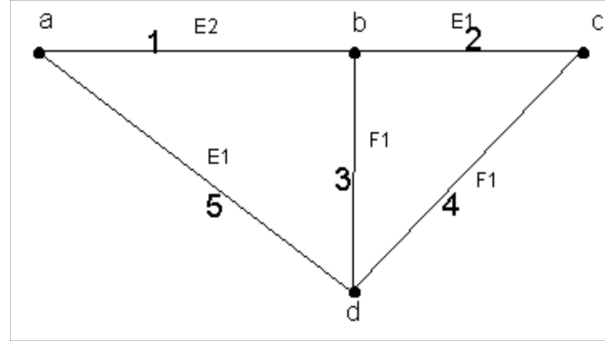


FIGURE 3.3 – Réseau multi-modal

Deux modes de transport sont présents sur le réseau : les voies navigables E(au) et le chemin de fer F(er). En ce qui concerne les voies navigables, il y a des canaux de deux gabarits différents (E1 et E2), représentant respectivement des canaux de 300 et de 600 tonnes. Sur les arêtes de type E2, il est donc possible de faire passer des bateaux de type E1 et E2. Il n'y a qu'un seul type de train possible, F1 (train diesel). Il est important de donner une notation cohérente aux moyens de transport. En effet, si un arc supporte, par exemple, des convois de type E4, il faut qu'il puisse laisser passer des convois de types E1, E2 et E3. C'est pour cette raison que le train diesel est noté F1 et le train électrique F2, dans la mesure où une locomotive diesel peut rouler sur des lignes électrifiées, l'inverse n'étant pas vrai.

Le réseau peut se représenter dans le tableau 3.1.

La première étape de la méthode de création du réseau virtuel consiste à passer en revue l'ensemble des arêtes  $U$  en créant ( $\rightarrow$ ) pour chaque arête réelle  $j \in U$ , autant d'arêtes virtuelles  $\bar{u}_j^{tm}$  qu'il y a de moyens de transport  $m$  possibles associés au mode de transport  $t$  sur cette arête :

$$\forall_{j \in U} \forall_m u_j \rightarrow \bar{u}_j^{tm}$$

Numéro d'arête	Noeud 1	Noeud 2	Type de voie
1	a	b	E2
2	b	c	E1
3	b	d	F1
4	d	c	F1
5	a	d	E1

TABLE 3.1 – Notation du réseau réll

Chaque arête virtuelle  $\bar{u}_j^{tm}$  a pour extrémité deux noeuds virtuels  $\bar{x}_o^{jtm}$  et  $\bar{x}_d^{jtm}$  affectés d'un identifiant codé en quatre parties de la manière suivante :

- L'identificateur du noeud réel  $i$  dont il est issu,
- L'identificateur de l'arête réelle  $j$  qui vient d'être multipliée (dans le cas où plusieurs moyens de transport sont possibles sur cette arête),
- L'identificateur du mode de transport  $t$  sur l'arête réelle  $j$ ,
- L'identificateur du moyen de transport  $m$  possible sur la nouvelle arête virtuelle issue de l'arête réelle  $j$ .

Un noeud virtuel peut donc bien se noter  $\bar{x}_i^{jtm}$ .

Comme chaque arête réelle a une origine  $o$  et une destination  $d$ , cette arête réelle générera les arêtes virtuelles  $\bar{u}_j^{tm} = (\bar{x}_o^{jtm}, \bar{x}_d^{jtm})$  (voir tableau 3.2).

Arêtes réelles	Arêtes virt. Origine	Arête virt. Destination
1	a1E2	b1E2
	a1E1	b1E1
2	b2E1	c2E1
3	b3F1	d3F1
4	d4F1	c4F1
5	a5E1	d5E1

TABLE 3.2 – Arêtes de déplacement

A partir de ce premier résultat (figure 3.4), il faut générer l'ensemble des arêtes qui représentent les transbordements possibles. Cette opération se fait pour tous les noeuds réels. Or, dans la première phase, tous les noeuds réels viennent d'être remplacés par un ensemble de noeuds virtuels.

$$\forall_{i \in X}, X_j \rightarrow \bigcup \bar{x}_i^{jtm}$$

Tous les noeuds virtuels qui font référence au même noeud réel doivent être reliés entre eux pour représenter l'ensemble des transbordements possibles<sup>2</sup>.

$$\forall_k \forall_{k'} \rightarrow (\bar{x}_i^{ktm}, \bar{x}_i^{k't'm'})$$

2. Il est évident que ce n'est pas parce que deux arêtes se touchent qu'un transbordement est possible au noeud qui relie ces deux arêtes. Ce cas sera considéré plus loin.

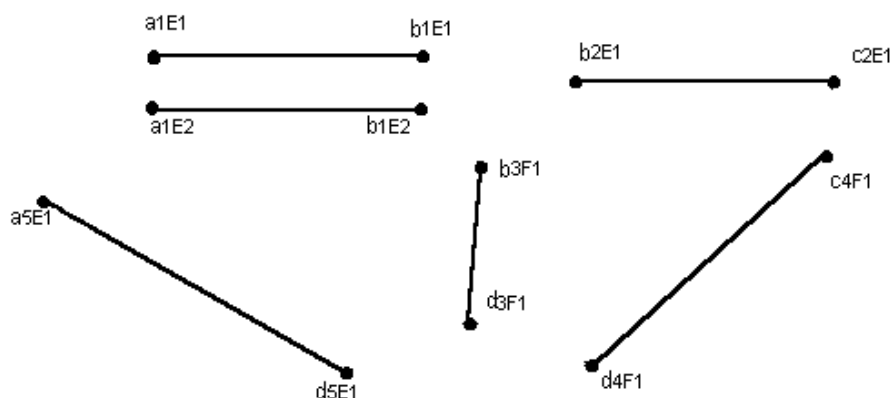


FIGURE 3.4 – Séparation des moyens de transport

Ce qui donne le tableau 3.3 pour le noeud réel b (figure 3.5) :

Arêtes réelles	Arêtes virt. Origine	Arête virt. Destination
b	b1E1	b1E2
	b1E1	b2E1
	b1E2	b2E1
	b1E1	b3F1
	b1E2	b3F1
	b2E1	b3F1

TABLE 3.3 – Arêtes de transbordement

A ce stade, deux types d’arêtes virtuelles sont à considérer :

- Celles qui représentent une distance à parcourir. Ces arêtes représentent les arêtes du réseau réel, éventuellement multipliées si plusieurs moyens de transport sont possibles. Une telle arête a comme extrémité deux noeuds virtuels provenant de deux noeuds réels différents.
- Les autres arêtes virtuelles représentent tous les transbordements possibles. Chaque noeud virtuel est ainsi relié à tous les autres noeuds virtuels dont l’identificateur fait référence au même noeud réel, en excluant toutefois ceux qui sont issus de la même arête réelle.

Dans le tableau 3.4, les deux dernières colonnes reprennent les coûts encourus sur chaque arête virtuelle. Lorsqu’il s’agit d’une arête issue directement du réseau réel, il s’agit d’un déplacement entre deux noeuds et le poids est fonction de la distance parcourue. Un coût nul dans la colonne “transbordement” représente un bateau “qui ne fait que passer”<sup>3</sup>. Les coûts de type “E2→E1” représentent les coûts liés aux transbordements, ici le passage de bateaux de 600 tonnes à

3. Dans certains cas, ce coût n’est pas réellement nul car ce type d’arcs virtuels peut très bien servir à représenter un coût lié, par exemple, au passage d’une frontière ou au péage sur une autoroute.



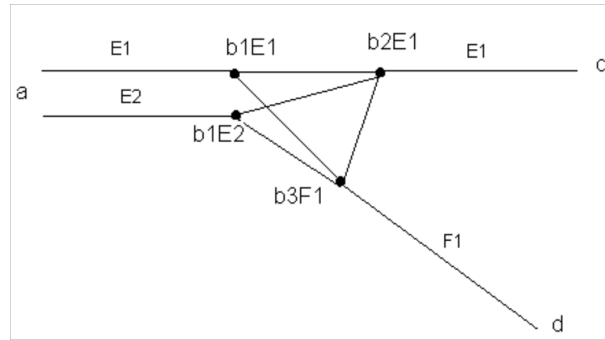


FIGURE 3.5 – Transbordements

des bateaux de 300 tonnes. On ne peut avoir un coût à la fois dans la colonne “transbordement” et “déplacement”.

Origine	Destination	Coût transbordement	Coût déplacement
a1E1	b1E1	-	Coût = $f(distance)$
a1E2	b1E2	-	Coût = $f(distance)$
b1E2	b1E1	E2 → E1	-
b1E1	b2E1	0	-
b1E2	b2E1	E2 → E1	-
b1E1	b3F1	E1 → F1	-
b1E2	b3F1	E2 → F1	-
b2E1	b3F1	E1 → F1	-
b2E1	c2E1	-	Coût = $f(distance)$
b3F1	d3F1	-	Coût = $f(distance)$

TABLE 3.4 – Opérations possibles autour du noeud réel b

Si la même opération est répétée pour tous les noeuds réels, le réseau virtuel ressemblera à la figure 3.6.

Dans ce réseau, les arêtes en gras représentent les arêtes du réseau réel, éventuellement scindées. Les arêtes en pointillés représentent les arêtes virtuelles de coût nul. Enfin, les transbordements sont représentés par des traits pleins non gras.

Cette méthode peut se traduire par l'algorithme présenté à la figure 3.7 (Le symbole # est utilisé pour la concaténation d'identificateurs).

### 3.3.2 Les noeuds d'entrée

Il reste cependant un problème : s'il est possible de voyager dans le réseau virtuel, il n'est pas possible d'y entrer ou d'en sortir ! En effet, l'utilisateur final demande de rechercher un chemin entre les noeuds réels a et b et non pas entre

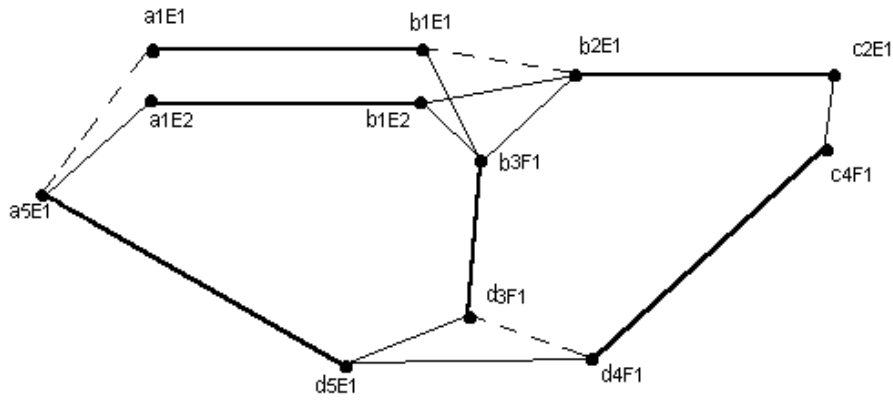


FIGURE 3.6 – Réseau virtuel partiel

**DEFINIR**

tab1, tab2 : vecteurs de noeuds virtuels

t1, t2 : index dans ces vecteurs

**ENTREE**

t1  $\leftarrow$  1

**POUR** j = 1  $\rightarrow$  mode  $\leftarrow$  mode de transport sur arête j

k  $\leftarrow$  nombre de moyens de transport sur arête j

**POUR** l = 1  $\rightarrow$  k

n1  $\leftarrow$  noeud d'origine de l'arête j

n2  $\leftarrow$  noeud de destination de l'arête j

noeud1  $\leftarrow$  n1#j#mode#k

noeud2  $\leftarrow$  n2#j#mode#k

Sauver arête(noeud1, noeud2)

tab[t1]  $\leftarrow$  noeud1

tab[t+1]  $\leftarrow$  noeud2

t1  $\leftarrow$  t1 + 2

**FIN POUR** i

**FIN POUR** j

**POUR** k = 1  $\rightarrow$  N

tab2[ ]  $\leftarrow$  partie de tab1[ ] issue du noeud k

t2  $\leftarrow$  taille de tab2[ ]

**POUR** i = 1  $\rightarrow$  t2

**POUR** j = i+1  $\rightarrow$  t2

Sauver arête(tab2[i], tab2[j])

**FIN POUR** j

**FIN POUR** i

**FIN POUR** k

**SORTIE**

FIGURE 3.7 – Algorithme de base

les noeuds virtuels axxx et bxxx. De plus, entrer et sortir du réseau a un coût puisqu'il faut charger et décharger la marchandise.

La solution vient encore des arêtes et des noeuds virtuels. En effet, si on reprend l'exemple du noeud b, il suffit de créer un nouveau noeud virtuel b000 et de le relier à tous les autres noeuds virtuels générés pour ce noeud réel. Toutes ces nouvelles arêtes représentent les coûts de chargement ou de déchargement de la marchandise.

$$x_i \rightarrow \bar{x}_i^{000}$$

$$\forall_i \forall_{ktm} \rightarrow (\bar{x}_i^{ktm}, \bar{x}_i^{000})$$

Ce qui donne le tableau 3.5 et la figure 3.8 pour le noeud b :

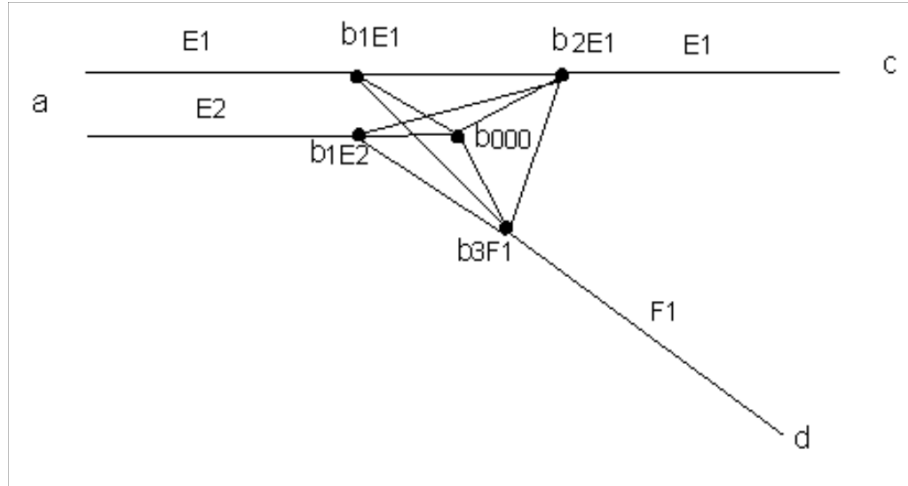


FIGURE 3.8 – Chargements/Déchargements

Origine	Destination	Coût
b000	b1E1	0 → E1
b000	b1E2	0 → E2
b000	b2E1	0 → E1
b000	b3F1	0 → F1

TABLE 3.5 – Arêtes virtuelles de (dé)chargement

Dans le tableau 3.5, le coût représente le chargement initial de la marchandise ou son déchargement final.

L'algorithme présenté plus haut doit être modifié pour tenir compte de ces nouveaux noeuds virtuels et arêtes virtuelles (voir figure 3.9).

```

DEFINIR
tab1, tab2 : vecteurs de noeuds virtuels
t1, t2 : index dans ces vecteurs

ENTREE
t1 ← 1
POUR j = 1 → mode ← mode de transport sur arête j
    k ← nombre de moyens de transport sur arête j
    POUR l = 1 → k
        n1 ← noeud d'origine de l'arête j
        n2 ← noeud de destination de l'arête j
        noeud1 ← n1#j#mode#k
        noeud2 ← n2#j#mode#k
        Sauver arête(noeud1, noeud2)
        tab[t1] ← noeud1
        tab[t+1] ← noeud2
        t1 ← t1 + 2
    FIN POUR i
FIN POUR j

POUR k = 1 → N
    tab2[ ] ← partie de tab1[ ] issue du noeud k
    t2 ← taille de tab2[ ]
    POUR i = 1 → t2
        POUR j = i+1 → t2
            Sauver arête(tab2[i], tab2[j])
        FIN POUR j
    FIN POUR i

    POUR i = 1 → t2
        noeud ← partie "noeud" de tab2[i]#000
        Sauver arête(noeud, tab2[i])
    FIN POUR i
FIN POUR k
SORTIE

```

FIGURE 3.9 – Introduction des (dé)chargements

Noeud réel	Arête réelle	Mode	Moyen	Noeud
b	1	E	1	b1E1
b	1	E	2	b1E2
b	2	E	1	b2E1
b	2	E	2	b2E2
b	3	E	1	b3E1

TABLE 3.6 – Arêtes de simple transit

### 3.3.3 Les noeuds de simple passage

A ce stade, la méthode est difficilement applicable à un réseau réel dans la mesure où un tel réseau comprend toute une série de noeuds qui ne sont pas des points de chargement/déchargement. Le réseau routier comprend une multitude de carrefours qui sont autant de noeuds mais qui ne sont pas des points de chargement. De la même manière, le réseau de chemin de fer comprend un ensemble de gares qui sont exclusivement réservées aux passagers et dans lesquelles tout transbordement de marchandise est impossible.

Pour ces noeuds, il ne faut pas générer d'arêtes virtuelles qui correspondent à des transbordements.

Dans l'exemple de la figure 3.10, le noeud b représente un point d'intersection entre une voie d'eau de 600 tonnes (E2) et une autre de 300 tonnes (E1).

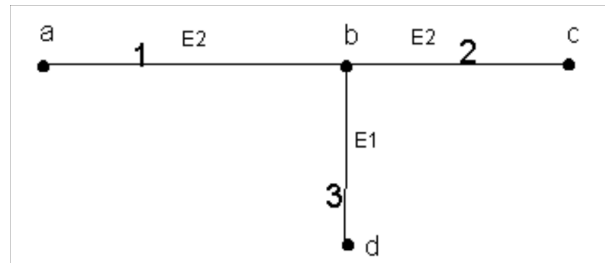


FIGURE 3.10 – Intersection de deux voies d'eau

Les voies de type E2 supportent également des convois de type E1. Un bateau de 600 tonnes provenant du segment 1 peut donc continuer vers le segment 2, mais pas vers le segment 3.

La méthode expliquée précédemment conduit donc à la création des noeuds représentés dans le tableau 3.6 :

Il reste maintenant à générer les arêtes virtuelles. De nouveau, il s'agit de relier les noeuds reliés par une arête qui représente une distance à parcourir, ainsi que chaque noeud virtuel à tous les autres générés à partir du même noeud réel en excluant les liens entre les noeuds virtuels dont l'identificateur fait référence à la même arête réelle. Mais cette fois, seuls les noeuds faisant référence à la même combinaison mode-moyen de transport ( $t = t'$  et  $m = m'$ ) peuvent être reliés

entre eux. C'est ainsi que l'on va relier b1E2 et b2E2, mais pas b1E2 et b3E1 (cette dernière liaison signifierait un transbordement d'un bateau de 600 tonnes vers un bateau de 300 tonnes ou inversement). En d'autres mots, il s'agit de créer uniquement toutes les arêtes virtuelles de coût "nul". De plus, ces noeuds de "passage" n'étant pas des points d'entrée ou de sortie du réseau, il ne faut pas créer le noeud b000 et les arêtes virtuelles qui en découlent.

$$\begin{aligned} \text{Si } (i = \text{transbordement}) \text{ ou } (t = t' \text{ et } m = m') &\rightarrow \forall_k \forall_l \rightarrow (\bar{x}_i^{ktm}, \bar{x}_i^{lt'm'}) \\ \text{Si } i \text{ est un noeud de transbordement} &\rightarrow \forall_i \forall_{ktm} \rightarrow (\bar{x}_i^{ktm}, \bar{x}_i^{000}) \end{aligned}$$

Ce qui mène à la création de l'ensemble des arêtes reprises dans le tableau 3.7 (voir également la figure 3.11) :

Origine	Destination	Coût transbordement	Coût déplacement
a1E1	b1E1	-	$f(\text{distance})$
a1E2	b1E2	-	$f(\text{distance})$
b2E1	c2E1	-	$f(\text{distance})$
b2E2	c2E2	-	$f(\text{distance})$
b3E1	d3E1	-	$f(\text{distance})$
b1E1	b2E1	0	-
b1E1	b3E1	0	-
b2E1	b3E1	0	-
b1E2	b3E2	0	-

TABLE 3.7 – Réseau virtuel à l'intersection

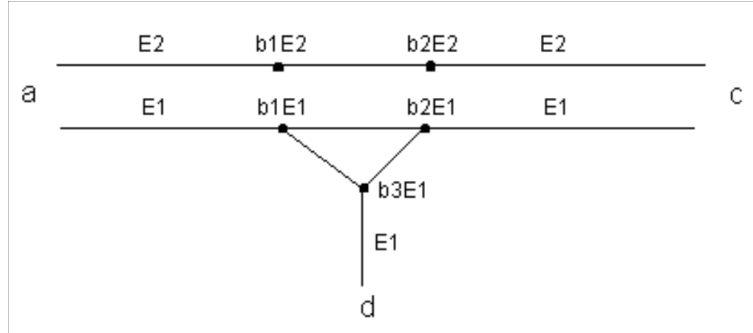


FIGURE 3.11 – Réseau virtuel à l'intersection

La méthode diffère donc selon que le noeud soit un lieu de chargement / déchargement / transbordement ou un simple lieu de passage. Les noeuds du graphe doivent dès lors être marqués comme faisant partie d'une de ces deux catégories.

Ce traitement différencié (voir figure 3.12) a une conséquence très intéressante. En effet, du fait que les noeuds "de passage" génèrent moins d'arêtes virtuelles, le réseau virtuel lui-même sera constitué de nettement moins d'arêtes que celui généré par l'algorithme de base, ce qui accélère le temps de traitement.

```

DEFINIR
tab1, tab2 : vecteurs de noeuds virtuels
t1, t2 : index dans ces vecteurs

ENTREE
t1 ← 1
POUR j = 1 → mode ← mode de transport sur arête j
    k ← nombre de moyens de transport sur arête j
    POUR l = 1 → k
        n1 ← noeud d'origine de l'arête j
        n2 ← noeud de destination de l'arête j
        noeud1 ← n1#j#mode#k
        noeud2 ← n2#j#mode#k
        Sauver arête(noeud1, noeud2)
        tab[t1] ← noeud1
        tab[t+1] ← noeud2
        t1 ← t1 + 2
    FIN POUR l
FIN POUR j

POUR k = 1 → N
    tab2[ ] ← partie de tab1[ ] issue du noeud k
    t2 ← taille de tab2[ ]
    POUR i = 1 → t2
        POUR j = i+1 → t2
            SI pas lieu de transbordement
                ET partie "mode" de tab2[i] = partie "mode" de tab2[j]
                ET partie "moyen" de tab2[i] = partie "moyen" de tab2[j])
            OU lieu de transbordement
                ALORS Sauver arête(tab2[i], tab2[j])
            FIN SI
        FIN POUR j
    FIN POUR i

    POUR i = 1 → t2
        SI lieu de transobrdelement ALORS
            noeud ← partie "noeud" de tab2[i]#000
            Sauver arête(noeud, tab2[i])
        FIN SI
    FIN POUR i
FIN POUR k
SORTIE

```

FIGURE 3.12 – Introduction des "simples passages"

### 3.3.4 Orientation du réseau virtuel

La méthode proposée ici mène à la génération d'un réseau virtuel non orienté. Etant donné que chaque arête doit être pondérée par un poids unique (un coût), l'utilisation d'un graphe non orienté pose le problème de l'égalité des coûts lorsque l'on se déplace de l'origine vers la destination ou de la destination vers l'origine.

Cette hypothèse ne peut pas être justifiée sur un réseau de transport de marchandises. En effet, certains coûts sont fonction du sens sur l'arc. C'est le cas par exemple des chargements et des déchargements : on sait par expérience qu'il est souvent plus long de décharger que de charger.

Dans la pratique, l'algorithme du réseau virtuel générera des arcs orientés, ce qui permet d'affecter des coûts différents selon le sens de l'arête virtuelle. Afin de n'avoir qu'un et un seul arc entre deux noeuds virtuels (et donc d'éviter des "boucles" dans la recherche du chemin le moins coûteux), chacun de ces noeuds sera "dédoublé" en les faisant précéder par un signe positif ou négatif.

En utilisant la notation proposée dans la section 3.3.1, le réseau virtuel généré autour du noeud *b* et illustré par la figure 3.8 peut être représenté comme dans la figure 3.13.

### 3.3.5 Contrôle de la génération du réseau virtuel

Le réseau virtuel, tel qu'il a été défini jusqu'à présent est le résultat d'une procédure automatique. Or, cette façon de travailler présente certaines limites dans la mesure où on peut avoir des possibilités de transbordement qui sont générées automatiquement alors que ces mouvements ne sont pas possibles sur le réseau réel. C'est le cas par exemple pour les ports privés sur les voies d'eau intérieures. En effet, si une entreprise particulière est autorisée à y charger ou décharger de la marchandise, ce port ne peut pas servir de lieu de transbordement à n'importe qui. Il est donc important de pouvoir contrôler la génération du réseau virtuel.

Ce contrôle est possible en maintenant des "listes d'exclusions" pour les différents noeuds du réseau réel. En pratique, il doit être possible de définir, pour chaque noeud du réseau, la liste des opérations de manutention qui seraient générées automatiquement mais qui sont impossibles dans la réalité, vu les caractéristiques physiques du réseau à cet endroit. La procédure de génération du réseau virtuel est alors très légèrement modifiée, car elle consulte ces listes d'exclusion pour savoir si, oui ou non, un arc virtuel peut être créé.

L'algorithme final peut donc s'écrire de la manière décrite dans la figure 3.14.



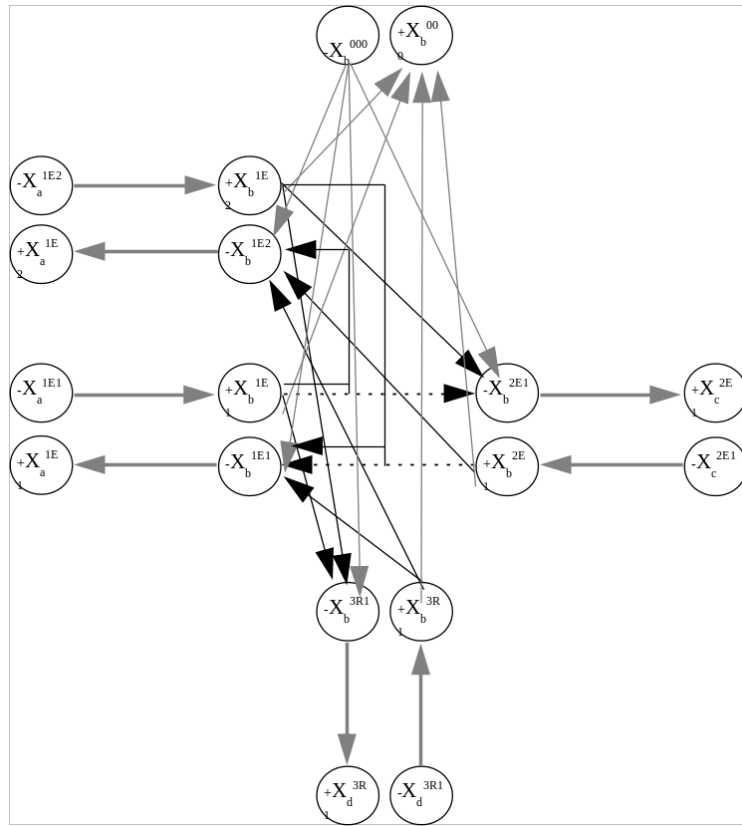


FIGURE 3.13 – Réseau virtuel orienté

**DEFINIR**

tab1, tab2 : vecteurs de noeuds virtuels

t1, t2 : index dans ces vecteurs

**ENTREE**

t1  $\leftarrow$  1

**POUR** j = 1  $\rightarrow$  mode  $\leftarrow$  mode de transport sur arête j

k  $\leftarrow$  nombre de moyens de transport sur arête j

**POUR** l = 1  $\rightarrow$  k

n1  $\leftarrow$  noeud d'origine de l'arête j

n2  $\leftarrow$  noeud de destination de l'arête j

noeud1  $\leftarrow$  + #n1 #j #mode #k et noeud2  $\leftarrow$  - #n2 #j #mode #k

Sauver arête(noeud1, noeud2)

tab[t1]  $\leftarrow$  noeud1 ; tab[t1+1]  $\leftarrow$  noeud2

t1  $\leftarrow$  t1 + 2

noeud1  $\leftarrow$  - #n1 #j #mode #k et noeud2  $\leftarrow$  + #n2 #j #mode #k

Sauver arête(noeud2, noeud1)

tab[t1]  $\leftarrow$  noeud1 ; tab[t1+1]  $\leftarrow$  noeud2

t1  $\leftarrow$  t1 + 2

**FIN POUR** l

**FIN POUR** j

**POUR** k = 1  $\rightarrow$  N

tab2[ ]  $\leftarrow$  partie de tab1[ ] issue du noeud k

t2  $\leftarrow$  taille de tab2[ ]

**POUR** i = 1  $\rightarrow$  t2

**POUR** j = i+1  $\rightarrow$  t2

**SI** pas lieu de transbordement

**ET** partie "mode" de tab2[i] = partie "mode" de tab2[j]

**ET** partie "moyen" de tab2[i] = partie "moyen" de tab2[j]

**OU** lieu de transbordement

**ALORS SI** mouvement non exclu

**SI** partie "noeud" de tab2[i]  $\neq$  0

**ALORS** Sauver arête(tab2[i], tab2[j])

**SINON** Sauver arête(tab2[j], tab2[i])

**FIN SI**

**FIN SI**

**FIN POUR** j

**FIN POUR** i

**POUR** i = 1  $\rightarrow$  t2

**SI** lieu de transbordement **ET** mouvement non exclu **ALORS**

noeud  $\leftarrow$  - #partie "noeud" de tab2[i] #000 ; Sauver arête(noeud, tab2[i])

noeud  $\leftarrow$  + #partie "noeud" de tab2[i] #000 ; Sauver arête(tab2[i], noeud)

**FIN SI**

**FIN POUR** i

**FIN POUR** k

**SORTIE**

FIGURE 3.14 – Algorithme de génération d'un réseau virtuel

### 3.4 Affectation des coûts sur les arcs

Le réseau virtuel permet de considérer quatre types de coûts distincts : chargement/déchargement, transbordement, déplacement et simple passage. Le type de coût à attribuer à chaque arc virtuel peut se déduire automatiquement de la notation utilisée pour les deux noeuds virtuels qui se trouvent aux extrémités de l'arc.

Pour des raisons de lisibilité, une notation du type “b1E1” a été utilisée jusqu'à présent. Il est évident que ce genre de numérotation n'est pas utilisable dans la pratique. NODUS utilisera donc un nombre entier en 10 positions pour le numéro du noeud réel, un autre nombre entier en 10 positions pour le numéro de l'arc réel, deux chiffres pour le mode de transport et deux chiffres pour le moyen de transport.

Pour rappel, il existe quatre types d'arcs virtuels. Ces quatre cas peuvent se distinguer de la manière suivante (voir également le tableau 3.8) :

1. Déplacement (“**mv**”) : les noeuds réels sont différents (cas 1). Toujours d'un signe - vers un signe +.
2. Simple passage (“**tr**”) : les arcs réels sont différents alors que le mode et le moyen de transport sont restés identiques (cas 2). Toujours d'un signe + vers un signe -.
3. Transbordement (“**tp**”) : le mode et/ou moyen de transport varie (cas 3). Toujours d'un signe + vers un signe -.
4. Chargement (“**ld**”) / déchargement (“**ul**”) : un des deux arcs réels est “00000” (cas 4a et 4b). Toujours d'un - vers un - pour les chargements et d'un + vers un + pour les déchargements.

Cas	Noeud1	Arc1	Mode1	Moyen1	Noeud2	Arc2	Mode2	Moyen2
1	-1000	1000	1	1	+1001	1000	1	1
2	+1000	1000	1	1	-1000	1001	1	1
3	+1000	1000	1	1	-1000	1001	1	2
4 <sub>a</sub>	-1000	0	0	0	-1000	1001	1	1
4 <sub>b</sub>	+1000	1001	1	1	+1000	0	0	0

TABLE 3.8 – Codification des arêtes virtuelles dans NODUS

A ces différents cas correspondent des coûts différents. Le prochain chapitre présentera un cadre méthodologique général pour les fonctions de coût qui permet de développer des fonctions de coût spécifiques à chaque application.

### 3.5 Conclusion

Le réseau virtuel (et NODUS, le logiciel qui le met en oeuvre) se présente comme :

- Une représentation exhaustive de tous les mouvements et de toutes les opérations possibles sur un réseau de transport multi-modal.
- Une systématisation de la génération des éléments qui composent le réseau par une procédure automatique.
- Une représentation générale d'un réseau adaptée à la réalisation d'une très large palette d'applications différentes.
- Une notation codifiée et systématique des éléments du réseau, qui permet de connaître la nature des coûts à affecter aux différents arcs. Cette même notation, basée sur des numéros de noeuds virtuels codés en quatre parties, contient toute l'information nécessaire sur les modes et les moyens de transport qui sont utilisés. Cette information peut être exploitée pour retrouver, après la recherche d'un chemin sur le réseau, les modes et les moyens de transport qui ont effectivement été utilisés sur les différents arcs qui composent le chemin. Ceci est une caractéristique et un apport important du concept de réseau virtuel.

## Chapitre 4

# Considérations générales sur les coûts

Après avoir présenté brièvement les concepts théoriques sur lesquels NODUS se base, il reste maintenant à analyser les différents coûts qui peuvent être affectés aux éléments de cette représentation particulière d'un réseau de transport qu'est le réseau virtuel. Malheureusement, et malgré l'existence de plusieurs modèles de réseau, la littérature présente très peu de fonctions de coût concrètes. Tout en présentant et en commentant les éléments de coûts déjà publiés par ailleurs, les pages qui suivent s'attacheront donc à développer un cadre méthodologique général et concret, applicable au réseau virtuel.

Les analyses économiques basées sur un modèle de réseau n'ont de sens que si les poids utilisés pour pondérer les différents arcs du réseau sont crédibles. Ces poids peuvent être de différentes natures. Il peut s'agir de prix, de coûts, de temps,... Afin de pouvoir exprimer ces poids de natures différentes en expression monétaire, on utilise souvent le terme de "coût généralisé", dont une formulation de base est due à Kresge et Roberts<sup>1</sup> :

$$C_{ij} = f_{ij} + b_1 s_{ij} + b_2 \sigma s_{ij} + b_3 w_{ij} + b_4 p_{ij}$$

où :

- $f_{ij}$  : coûts encourus par l'opérateur entre les noeuds i et j
- $s_{ij}$  : temps de voyage entre i et j
- $\sigma s_{ij}$  : variabilité du temps de voyage s
- $w_{ij}$  : temps d'attente avant d'avoir accès au transport
- $p_{ij}$  : probabilité de perte ou de dommage au bien transporté

---

1. Kresge, D.T. et Roberts, P.O., 1971, "Techniques of Transportation Planning : Systems Analysis and Simulation Models", Brooking Institution, Washington DC. Une discussion plus complète sur la définition des composantes d'une fonction de coûts généralisés est présentée par Wilson A.G. et Bennet R.J., 1985, "Mathematical Methods in Human Geography and Planning", John Wiley & Sons, N-Y.

Dans cette formulation, les coefficients  $b_n$  qui pondèrent les différentes composantes de la fonction sont en général proportionnels à la valeur des marchandises transportées. A l'instar de l'approche de Baumol et Vinod présentée dans le premier chapitre, le coût généralisé permet d'affecter un coût à tous les facteurs qui influencent le trafic sur un réseau. Ainsi, un déplacement exprimé en kilomètres ou un temps d'attente exprimé en heures peuvent tous deux s'additionner en termes monétaires. Les termes aléatoires repris dans ces formulations ne peuvent cependant pas être directement affectés au réseau, sauf s'ils sont intégrés sous forme de moyennes.

Le réseau virtuel nécessite le développement de quatre types de fonctions de coût. Pour rappel, le type de fonction est déduit de la notation utilisée pour les noeuds virtuels. Une illustration concrète est présentée dans la table 4.1.

- Déplacement (“**mv**”) : Les identificateurs des noeuds réels sont différents.
- Simple passage (“**tr**”) : Les identificateurs des arcs réels sont différents alors que le mode et le moyen de transport sont restés identiques.
- Transbordement (“**tp**”) : Les identificateurs des arcs réels sont différents, ainsi que le mode et/ou le moyen de transport.
- Chargement (“**ld**”) / déchargement (“**ul**”) : Un des deux identificateurs d'arcs réels est "0".

Cas	Noeud1	Arc1	Mode1	Moyen1	Noeud2	Arc2	Mode2	Moyen2
1	-1000	1000	1	1	+1001	1000	1	1
2	+1000	1000	1	1	-1000	1001	1	1
3	+1000	1000	1	1	-1000	1001	1	2
4 <sub>a</sub>	-1000	0	0	0	-1000	1001	1	1
4 <sub>b</sub>	+1000	1001	1	1	+1000	0	0	0

TABLE 4.1 – Codification des arêtes virtuelles dans NODUS

Il reste maintenant à déterminer les éléments de coût qui peuvent être utilisés dans ces différents cas de figure sachant que dans un premier temps et de manière intuitive on peut décomposer le coût total de transport de la manière (comptable) représentée à la figure 4.1 :

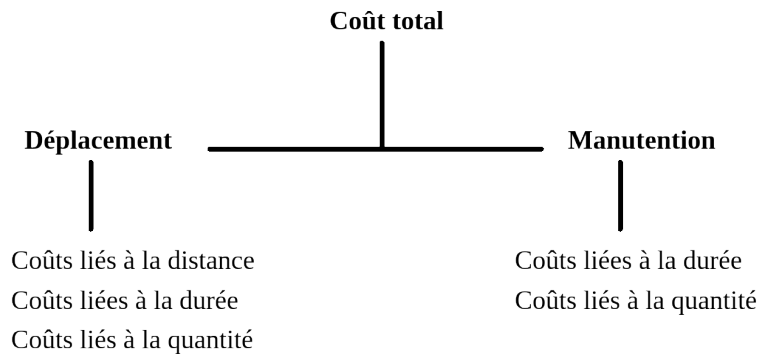


FIGURE 4.1 – Coûts de transport

Remarque importante : Il faut garder à l'esprit que les formes fonctionnelles qui sont proposées ici ne doivent pas être considérées comme étant une formulation unique et immuable, mais plutôt comme une solution bien adaptée à NODUS. Le seul cadre méthodologique qui est imposé par la notion de réseau virtuel est qu'il faut développer des fonctions spécifiques pour les quatre cas énoncés plus haut. La forme fonctionnelle qu'on leur donne est laissée au libre choix du modélisateur. Ceci étant spécifié, il peut dès lors être intéressant de donner quelques pistes à suivre, une sorte de "code de bonne conduite" à respecter dans le développement de fonctions de coût en environnement multi-modal :

- Cohérence du point de vue : un transport peut se faire, soit pour compte propre, soit à l'aide d'un transporteur indépendant. Dans le premier cas, il faut analyser l'ensemble des coûts supportés par l'entreprise lors du processus de transport, dans le second cas, c'est la connaissance des tarifs pratiqués qui est primordiale. Il est donc nécessaire de prendre le même point de vue pour les différents modes de transport qui sont pris en considération sur le réseau.
- Cohérence des unités : lorsqu'une unité de mesure est choisie (unités monétaires par tonne, par kilomètre, par tonne/kilomètre, ...) pour un mode de transport sur un type d'arc virtuel, il est évidemment important d'utiliser cette même unité de mesure pour les autres modes de transport.
- Cohérence des variables : dans la définition des coûts généralisés, les mêmes facteurs de coûts doivent être repris pour les différents modes de transport. Ainsi, si on tient compte de la durée du voyage ou des coûts financiers pour un mode de transport, ces mêmes coûts doivent se retrouver dans les fonctions mises au point pour les autres modes.
- Cohérence dans le temps : les données utilisées dans les calculs doivent être compatibles dans le temps (même année de référence) entre les différents modes de transport .

Suite à ces remarques, il est maintenant possible de définir une approche générale des éléments de coûts applicable à tout problème traité avec un réseau virtuel.

- Récolte des données respectant le principe de cohérence dans le temps.
- Mise au point des fonctions de coût (respectant les trois autres principes de cohérence) :
  - Pour tous les modes et moyens de transport.
  - Pour les quatre types d'arcs virtuels.
- Calcul des coûts sur chaque arc virtuel.

La littérature propose deux grandes catégories de fonctions de coût. La première se propose d'analyser l'ensemble des coûts liés aux activités de transport. Il s'agit d'une démarche de type agrégée qui, par définition, ne s'applique pas à une utilisation sur un réseau. Par opposition à cette première catégorie, le second type de fonctions de coût analyse un mouvement d'une origine à une destination donnée. Malheureusement, ce type de démarche est actuellement beaucoup moins répandu mais il existe suffisamment de références pour pouvoir se faire une idée correcte de l'état de l'art en la matière, surtout en ce qui concerne le transport routier.

Le coût total de transport comprend différents postes qui peuvent être classés dans les catégories suivantes :

- Transport proprement dit : tous les coûts inhérents au déplacement d'un véhicule entre les points d'origine et de destination du voyage.
- Valeur d'inventaire : coûts engendrés par la détention de marchandises durant un certain laps de temps. Ce poste contient des frais réels tels que les primes d'assurance, des intérêts et un coût d'opportunité (la marchandise transportée représente une certaine somme d'argent immobilisée, qui aurait pu être utilisée autrement).
- Manutention, magasinage : frais inhérents aux manipulations de la marchandise en dehors du voyage proprement dit. Il s'agit donc d'emballages, de mise en rayons, de chargements et de déchargements.
- Coûts indirects : coûts qui résultent des activités de support à l'activité de transport (services administratifs,...). Ces coûts ne sont pas aisément identifiables pour un voyage particulier.

En dehors de ces coûts, il faudrait idéalement également prendre en considération les coûts liés à la congestion et l'impact de la qualité du transport.

Parmi les autres effets qui influencent le coût du transport se trouve la congestion. Il paraît évident qu'à un moment où un autre, les usagers d'un réseau peuvent être confrontés avec des phénomènes de congestion, ce qui doit être pris en considération lors de l'affectation. Il s'agit donc d'introduire une méthode qui puisse résoudre les contraintes liées à la capacité du réseau.

Il existe deux manières fondamentalement différentes de procéder pour tenir compte de la congestion :

- A un niveau microscopique, la congestion se traduit par un ralentissement du flux et par un choix de chemins alternatifs pour éviter les bouchons. La solution à ce problème se trouve dans les méthodes d'équilibre de réseau qui recalculent les fonctions de coût au fur et à mesure que le flux augmente. Ces processus dynamiques prennent explicitement en considération des contraintes comme la capacité des voies ou la congestion au niveau des terminaux.
- A un niveau macroscopique, il n'est pas toujours important de savoir que tel ou tel carrefour est saturé à 8 heures du matin, dans la mesure où ce carrefour n'est même pas repris dans le réseau. Par contre, il faut tenir compte de considérations générales telles que la traversée de grandes villes ou l'attente à certaines frontières. Ce point de vue macroscopique affecte les fonctions de coût, mais pas forcément les chemins utilisés. En effet, lorsque l'on digitalise un grand réseau tel que le réseau des axes de communication d'intérêt international européen, on ne s'occupe que très rarement du détail de ce qui se passe dans une ville. Dans un tel cas, un arc digitalisé peut même représenter plusieurs routes plus ou moins parallèles qui se répartiront le trafic. Le coût de la congestion macroscopique peut alors tout naturellement être imputé à des arcs virtuels de type "simple passage", sous forme d'un coût (fixe) par heure perdue .

La qualité du transport est à prendre dans un sens très large et elle représente



essentiellement la dimension multi-produits du processus de transport. En effet, la distinction entre les différents produits n'a pour l'instant pas encore été faite, sauf en ce qui concerne leur valeur d'inventaire. Mais cette valeur n'est pas représentative, dans la mesure où des moyens de transport différents peuvent être utilisés pour transporter des marchandises de catégories différentes. On peut imaginer deux marchandises, dont la valeur à la tonne est comparable, qui pourraient être transportées par les mêmes modes de transport, mais qui, dans la pratique, sont transportées par des modes de transport différents, avec des coûts différents. Le choix du mode de transport est donc également influencé par une certaine qualité de ce transport, qui est difficilement traduisible en termes monétaires.

Prenons l'exemple d'un fabricant belge de vêtements qui exporte vers la France. Il choisit d'effectuer le transport par camion, alors que le train serait moins cher. Mais le camion offre pour lui deux avantages :

- Il peut effectuer un transport de porte à porte
- Il transporte les pièces vestimentaires sur des cintres pendus dans le camion. De cette manière, la marchandise ne se chiffonne pas et garde toute sa valeur.

Quelle est la valeur à attribuer au fait qu'un vêtement ne se chiffonne pas ?

Bien que des facteurs comme le temps, la fréquence ou la fiabilité soient souvent présents, le concept de qualité n'est pas facile à introduire dans une fonction de coût. De plus, il n'est pas facile de savoir à quel moment la qualité joue un rôle. Est-ce lors du chargement ou du déplacement ? Cette discussion dépasse le cadre de cette courte note méthodologique.

En partant de la définition du réseau virtuel qui nécessite quatre types de fonctions de coût, le tableau 4.2 résume assez bien les types de coûts qu'il est bon de prendre en considération :

Type d'arc virtuel	Nature des coûts
Déplacement	Transport Valeur d'inventaire Coûts indirects
Transbordement	Manutention Valeur d'inventaire Coûts indirects
Chargement et Déchargement	Manutention Magasinage Valeur d'inventaire Coûts indirects
Simple passage	Congestion au sens large

TABLE 4.2 – Types de coûts sur les arcs virtuels

## Chapitre 5

# Quelques exemples de fonctions de coût concrètes

Les pages qui suivent vont maintenant proposer un jeu complet de fonctions de coût pour les différents modes de transport terrestre "classiques" que sont la route, le chemin de fer et les voies navigables. Encore une fois, ces fonctions sont *une* approche possible parmi d'autres. Elles ont toutefois l'avantage d'avoir prouvé une certaine robustesse dans une série d'applications pratiques et publiées.

### 5.1 Les coûts de déplacement

Les coûts de déplacement seront exprimés ici en unités monétaires par unité de poins et par unité de distance parcourue (Francs par tonnes/km par exemple. Ce sont d'ailleurs ces unités qui seront utilisées dans la suite du texte).

#### 5.1.1 Le transport

Le coût de transport est composé de différents paramètres de nature plus technique. Ce coût diffère en fonction des modes de transport.

##### Voies d'eau

**Les péniches** Soit :

- $F$  : les frais fixes annuels (annuité constante, assurances, entretiens et salaires),
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,

- $T$  : la charge, en tonnes, de la péniche,
- $b$  : la consommation de carburant en francs/heure,
- $\phi$  : la vitesse de navigation moyenne.

Le coût de déplacement à la tonne et au kilomètre s'exprime par :

$$B = \frac{F + b.u}{u.\phi.T}$$

**Les barges** Soit :

- $F_p$  : les frais fixes liés au pousseur comprennent une annuité constante, les assurances, les entretiens et les salaires,
- $F_b$  : Les frais fixes liés aux barges comprennent uniquement une annuité constante, les assurances et les entretiens,
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes de la barge,
- $b$  : la consommation de carburant en francs/heure,
- $\phi$  : la vitesse de navigation moyenne.

$$B = \frac{F_p + F_b + b.u}{u.T.\phi}$$

### Chemin de fer

Comme pour les barges, les frais fixes se décomposent en  $F_m$  et  $F_w$ , qui représentent respectivement les frais fixes liés à la motrice (annuité constante, assurances et salaires) et ceux liés aux wagons (annuité constante, assurances et entretien). L'entretien étant un coût fixe pour les wagons (coût par an), il sera incorporé dans  $F_w$ . Par contre, les coûts d'entretien sont variables pour la motrice et feront donc l'objet d'une formulation distincte.

Soit :

- $F_m$  : coût fixe lié à la motrice,
- $F_w$  : coût fixe lié aux wagons,
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes, du train,
- $b$  : la consommation de carburant en francs/kilomètre,
- $\phi$  : la vitesse moyenne
- $e$  : coût d'entretien de la motrice en francs/kilomètre

$$B = \frac{F_m + F_w}{T.u.\phi} + \frac{b + e}{T}$$

ce qui revient à :

$$B = \frac{F_m + F_w + (b + e).u.\phi}{T.u.\phi}$$

A l'instar des fonctions de coût spécifiques aux péniches et aux barges, il s'agit ici de formes fonctionnelles très "techniques" qui essaient de prendre en considération les paramètres les plus pertinents liés aux coûts d'exploitation d'un train. Les valeurs utilisées pour les calculs pratiques proviennent des statistiques ou de comptes annuels publiés par la SNCB.

Ce type d'approche "comptable" présente parfois le danger de présenter une sous-estimation des coûts réels, car les coûts liés à une certaine efficacité des systèmes de transport, comme le coût salarial d'un éventuel personnel excédentaire, ne sont pas pris en compte.

### Routes

Contrairement aux bateaux, les frais fixes ne contiennent pas les coûts d'entretien. Pour un camion, l'entretien se fait après un certain nombre de kilomètres.

Soit :

- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes, du camion,
- $c$  : la consommation de carburant en francs/kilomètre,
- $\phi$  : la vitesse moyenne,
- $e$  : coût d'entretien en francs/kilomètre.

De ce fait

$$B = \frac{F}{T \cdot u \cdot \phi} + \frac{c + e}{T}$$

ce qui revient à :

$$B = \frac{F + (c + e) \cdot U \cdot \phi}{T \cdot u \cdot \phi}$$

### 5.1.2 Valeur d'inventaire

La valeur d'inventaire représente le coût d'opportunité engendré par l'immobilisation du bien transporté durant le voyage. Cette valeur est exprimée par la charge d'intérêt sur la valeur du chargement pour une période correspondant à la somme des durées de voyage et de transbordement.

Soit :

- $V$  : valeur de la marchandise (F/tonne)
- $R_i$  : taux d'intérêt à appliquer pour la valeur d'inventaire
- $D$  : durée du voyage

L'expression  $V \cdot R_i \cdot D$  permet de connaître le coût lié à la valeur d'inventaire durant le voyage, sous forme d'un coût d'opportunité. Puisque la vitesse moyenne

du convoi est connue, il est possible de calculer la durée de passage sur un arc virtuel de type "déplacement".

### 5.1.3 Coûts indirects

De par leur structure, les chemins de fer supportent de gros coûts administratifs et autres que l'on doit, lorsque l'on se place dans une perspective stratégique, intégrer dans le coût de transport. On entend par "coûts administratifs et autres", l'ensemble des coûts qui ne sont pas directement à imputer à l'activité de transport de l'entreprise, c'est-à-dire :

- Services généraux,
- Exploitation de l'infrastructure,
- Marketing-vente,
- Charges diverses,
- Dotation pour risques et accidents (les compagnies de chemin de fer pratiquent l'auto-assurance).

Ces coûts peuvent par exemple être ramenés à une certaine somme par tonne/kilomètre.

## 5.2 Les coûts de transbordements

Le second type d'arcs générés dans un réseau virtuel sont les arcs de transbordement. Le coût qui doit être affecté sur ces arcs se compose également de plusieurs aspects.

### 5.2.1 Manutention

Si on fait abstraction des coûts liés à l'investissement et à l'utilisation des infrastructures, les coûts de manutention sont fonction de la durée de cette opération. Un transbordement peut se scinder en un déchargement et un chargement dont les durées peuvent être estimées par la formule de Deming (cfr. supra). Lorsqu'un moyen de transport est constitué de plusieurs unités de chargement (wagons ou barges), le temps de chargement ou de déchargement est calculé par unité de chargement. Le temps total de chargement est obtenu en multipliant le temps unitaire par le nombre d'unités de chargement. Cette manière de procéder se justifie par la non linéarité de la fonction de Deming. En effet, charger 10 wagons de 30 tonnes prend plus de temps que de charger 300 tonnes en une fois.

### 5.2.2 Valeur d'inventaire

La durée de manutention, obtenue grâce à la formule de Deming, peut être exprimée en fraction d'année. Soit  $D1$  cette expression. Si  $V$  est la valeur de la marchandise et  $R_i$  le taux d'intérêt à appliquer  $V.D1.R_i$  exprime la charge d'intérêt supportée pendant le chargement et/ou le déchargement d'une tonne de marchandise de valeur  $V$ .

### 5.2.3 Coûts indirects

Sous cette rubrique, seront considérés les coûts liés à l'immobilisation des véhicules lors des opérations de manutention.

#### Voies d'eau

**Les péniches** Soit :

- $F$  : les frais fixes annuels (annuité constante, assurances, entretiens et salaires),
- $L$  : le temps de chargement ou de déchargement,
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes, de la péniche,
- $n$  : le nombre de personnes qui chargent ou déchargent.

Le coût fixe, à la tonne, peut dès lors s'exprimer par :

$$A = \frac{F \cdot \frac{L}{N}}{u \cdot T}$$

**Les barges** Soit :

- $F_p$  : les frais fixes liés au pousseur,
- $F_b$  : les frais fixes liés aux barges,
- $t$  : le temps nécessaire pour former le convoi,
- $L$  : le temps de chargement ou de déchargement,
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes, de la péniche,
- $n$  : le nombre de personnes qui chargent ou déchargent.

Les frais fixes liés au pousseur comprennent une annuité constante, les assurances, les entretiens et les salaires. Les frais fixes liés aux barges comprennent uniquement une annuité constante, les assurances et les entretiens.

$$A = \frac{F_p \cdot t + \frac{F_b \cdot L}{n}}{u \cdot T}$$

### Chemin de fer

Comme pour les barges, les frais fixes se décomposent en  $F_m$  et  $F_w$ .

- $L$  : le temps de chargement ou de déchargement,
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes, du train,
- $n$  : le nombre de personnes qui chargent ou déchargent,
- $t$  : le temps nécessaire pour former le convoi en gare de triage.

De ce fait,

$$A = \frac{F_m \cdot t + \frac{F_w \cdot L}{n}}{u \cdot T}$$

### Routes

Soit :

- $F$  : frais fixes,
- $L$  : le temps de chargement ou de déchargement,
- $u$  : le nombre d'heures de travail/année,
- $T$  : la charge, en tonnes, de la péniche,
- $n$  : le nombre de personnes qui chargent ou déchargent.

$$A = \frac{F \cdot \frac{L}{n}}{u \cdot T}$$

## 5.3 Les coûts de chargement et déchargement

Ce troisième type d'arc virtuel se voit attribuer une structure de coût très semblable à ce qui a été défini pour les transbordements.

Dans ce cas, il faut parfois tenir compte du transit par un entrepôt.

### 5.3.1 Manutention

Le lecteur peut, pour ce type de coûts, se référer aux fonctions présentées dans la partie "Coûts de transbordements".

### 5.3.2 Magasinage

Il est très difficile de développer une fonction de coût générale pour l'entreposage. En effet, ce dernier varie en fonction de différents paramètres : chaque entrepôt est différent et fonctionne de manière différente. Pour simplifier le problème, on peut considérer un montant fixe à la tonne, bien que cette manière de faire soit critiquable.

### 5.3.3 Valeur d'inventaire

Voir "Coûts de transbordement".

### 5.3.4 Coûts indirects

Voir "Coûts de transbordement".

## 5.4 Simple passage

Il reste le quatrième et dernier type d'arc virtuel, celui qui représente le "simple passage", sur lequel on peut affecter un coût lié à la congestion, si un modèle d'équilibre n'est pas mis en oeuvre.

D'autres coûts peuvent également être affectés aux arcs virtuels de simple passage. C'est ainsi que les coûts induits par le passage des frontières ou ceux engendrés par des contraintes techniques (changement d'écartement de voies,...) peuvent être pris en considération. Ce genre de coûts est introduit dans nos fonctions par l'intermédiaire d'un coût fixe, associé à certains noeuds du réseau.

En effet, ces noeuds (réels) donnent naissance à des arcs (virtuels) sur lesquels il est possible d'affecter une fonction de coût. Une partie des ces arcs virtuels est constituée d'arcs virtuels de simple passage entre deux arcs de même mode/moyen de transport. Le cas d'un passage de frontière ou d'un péage autoroutier illustre bien l'utilisation qui peut être faite des arcs de simple passage. En effet, un passage de frontière n'implique pas un changement de mode/moyen de transport. Par contre, il y a souvent des formalités administratives qui prennent un certain temps et qui coûtent dès lors de l'argent. Ce type de coût peut très bien être affecté à un arc virtuel de simple passage. Ce raisonnement peut également être tenu pour prendre en considération les coûts liés aux péages sur les autoroutes.