



REGIONAL FUND QUALITY INFRASTRUCTURE FOR BIODIVERSITY & CLIMATE PROTECTION
IN LATIN AMERICA AND THE CARIBBEAN

Workshop on Statistic, data analysis and measurement uncertainty for Meteorology

Fundamentos estadísticos para la evaluación de la incertidumbre en las calibraciones

CENAM – Querétaro, México – 02 ~ 06.12.2019

Márcio A. A. Santana – INPE/BR
marcio.santana@inpe.br

Ricardo de A. Kalid – UFSB/BR
kalid@ufsb.edu.br





UFSB
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO SUL DA BAHIA

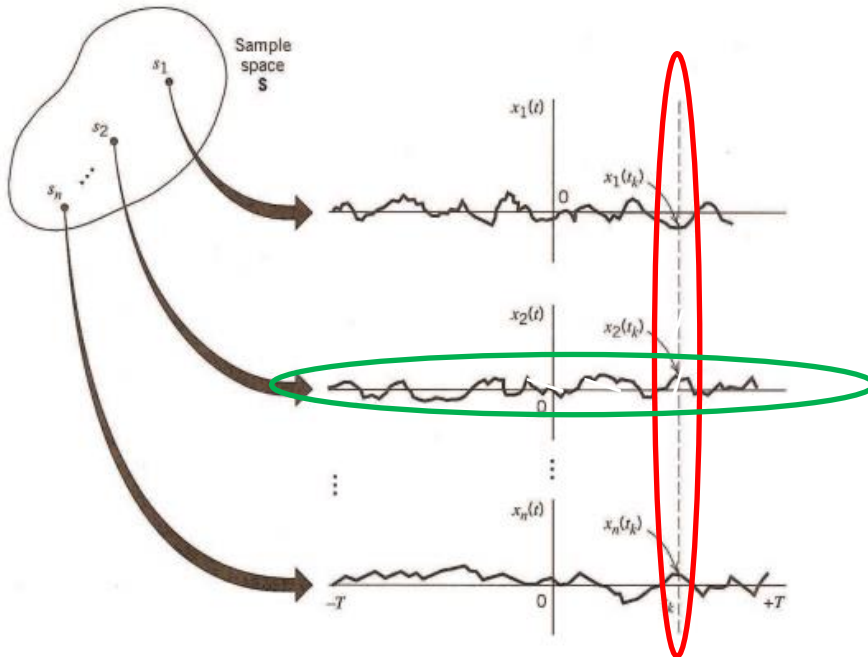


Fundamentos estadísticos para la evaluación de la incertidumbre en las calibraciones

Fundamentos estadísticos de la propagación de la incertidumbre

Variable aleatoria $x(t)$

- Proceso o variable aleatoria $X(t) = X_j(t) = X(t; s_j)$



$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ \vdots \\ x_n(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_k; s_1) \\ x(t_k; s_2) \\ \vdots \\ x(t_k; s_q) \end{bmatrix}$$

Proceso estacionario de 1ª orden:
 $f_X(x, t)$ es independiente de $t \Rightarrow$

$$f_X(x, t) = f_X(x) \Rightarrow E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x \cdot p(x)\} dx$$

Proceso ergótico:

media aritmética de x sobre e las repeticiones espaciales
es igual a

la media de x en el tiempo: $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^q \{x_j(t_k)\}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^q \{x_s(t_k)\}}{q}$

Media, Varianza y Desviación estándar

- μ_x es la **media** aritmética (“mean”) o valor **esperado** de x es, para um processo estacionário de 1ª ordem, por definición:

$$\mu_x \stackrel{\text{def}}{=} \langle x \rangle = E\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \{x \cdot p(x)\} dx, \text{ donde } p(x) \text{ es la FDP de la variable aleatoria } x \quad \{1\}$$

- Si $g(x)$ es una función, $y = g(x)$ es una nueva variable aleatoria cuyo el **valor esperado** de $g(x)$, o **función esperanza** de $g(x)$, es por definición:

$$\mu_y \stackrel{\text{def}}{=} \mu_g = \langle g(x) \rangle = E\{g(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \{g(x) \cdot p(x)\} dx \quad \{2\}$$

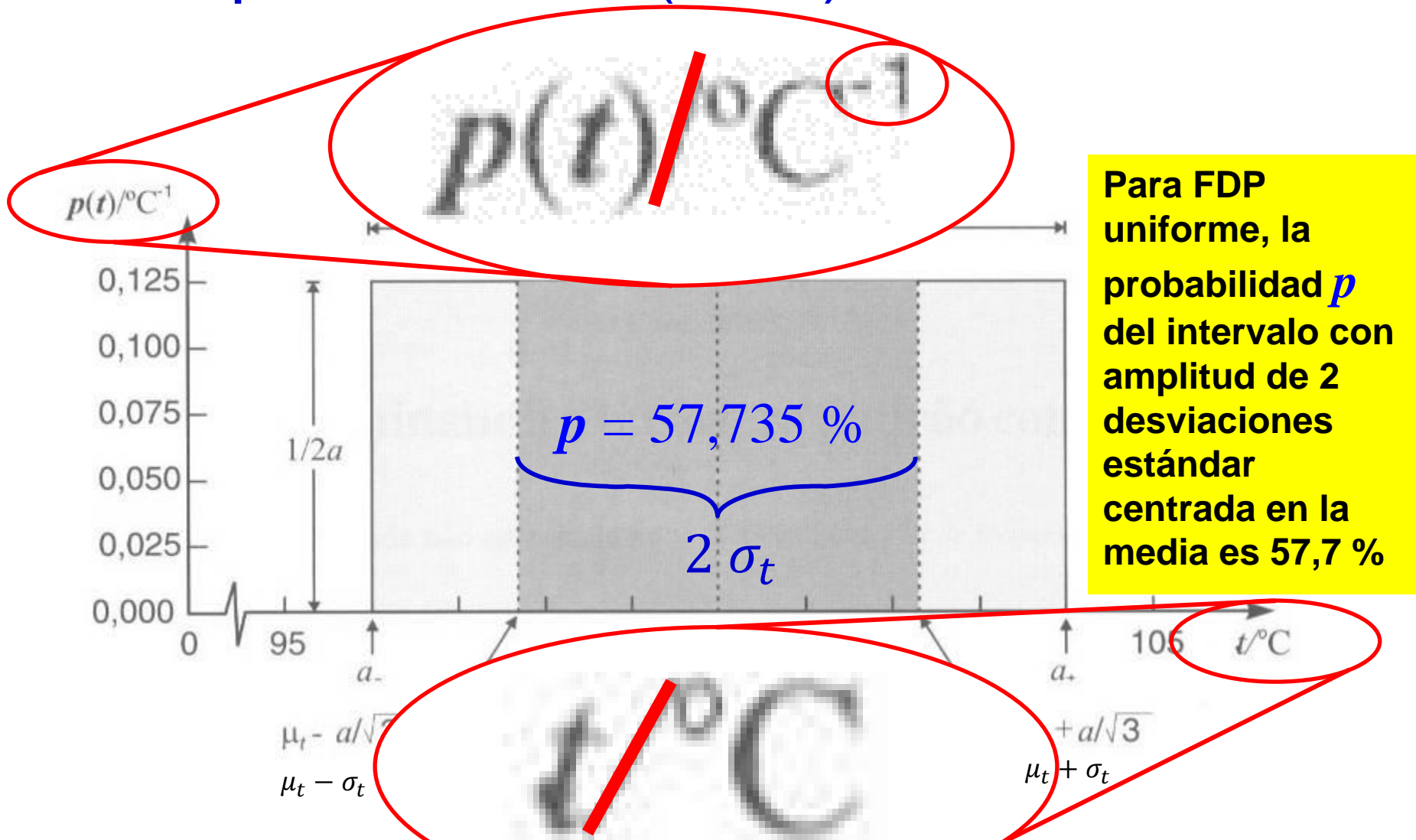
- σ_x^2 , **varianza** (“variance”) de x es función esperanza de $(x - \mu_x)^2$:

$$\sigma_x^2 = V\{x\} = \langle (x - \mu_x)^2 \rangle = E\{(x - \mu_x)^2\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \{(x - \mu_x)^2 \cdot p(x)\} dx \quad \{3\}$$

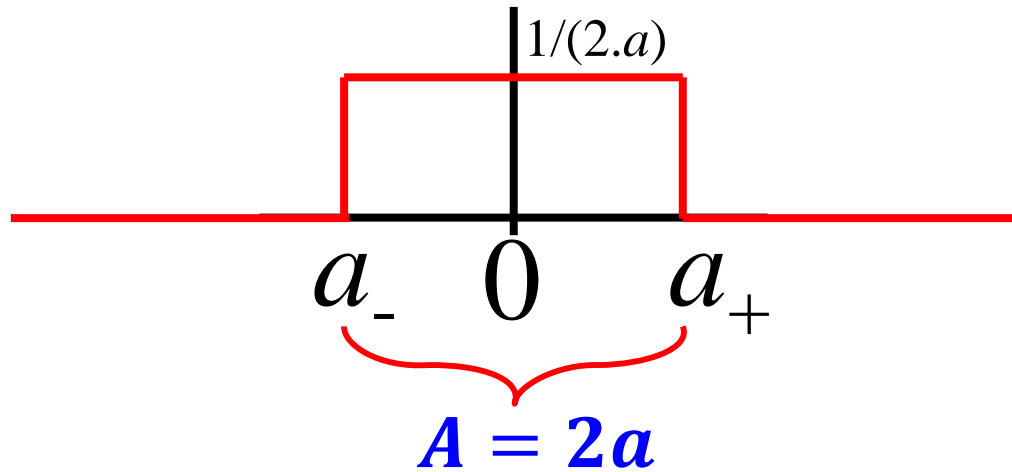
- σ , **desviación estándar o típica** (“standard deviation”) de x es, por definición, la **raíz cuadrada positiva** de la varianza :

$$\sigma_x \stackrel{\text{def}}{=} +\sqrt{\sigma_x^2} = +\sqrt{V\{x\}} \quad \{4\}$$

Función de densidad de probabilidad (FDP) uniforme



Media y Desviación estándar de una FDP uniforme



$$\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{A}{\sqrt{12}}$$

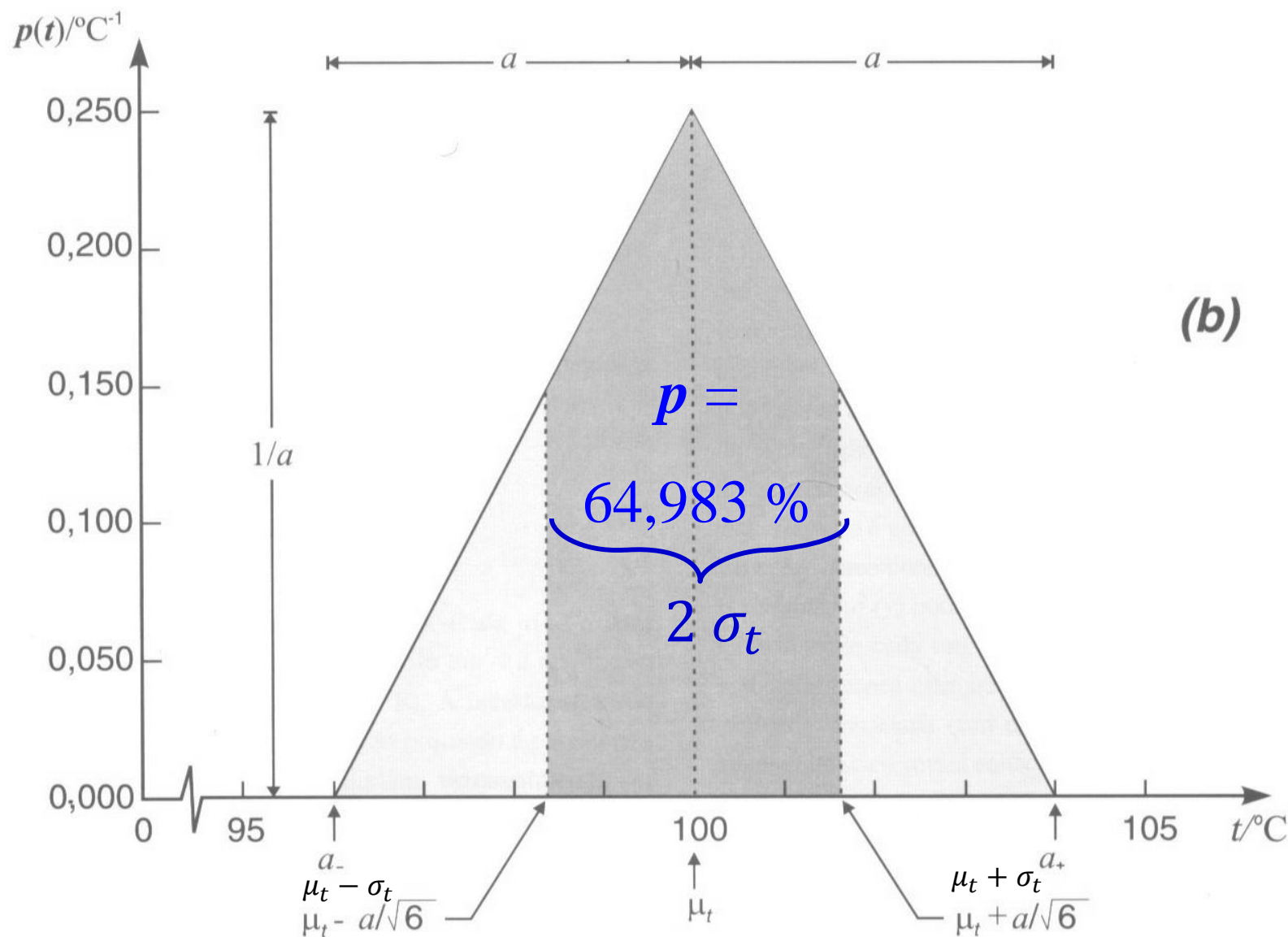
$$de\{1\}: \mu_x = \langle x \rangle = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-a}^{+a} x \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{a^2 - a^2}{4a} = 0$$

$$de\{3\}: \sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_{-a}^{+a} (x - 0)^2 \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^{+a}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{a^3 - (-a)^3}{6a} = \frac{2 \cdot a^3}{6a} = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{A}{2\sqrt{3}} = \frac{A}{\sqrt{12}}$$

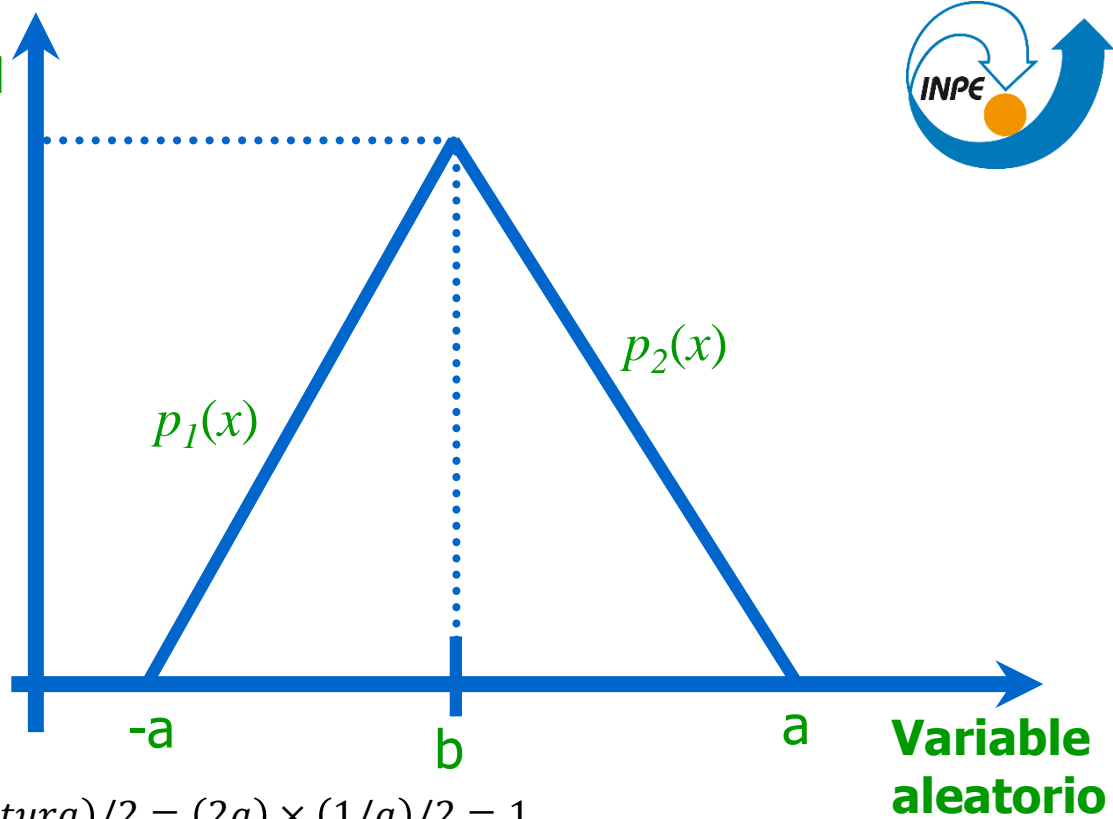
FDP triangular



Función triangular simétrica

Densidad de
probabilidad

$1/a$

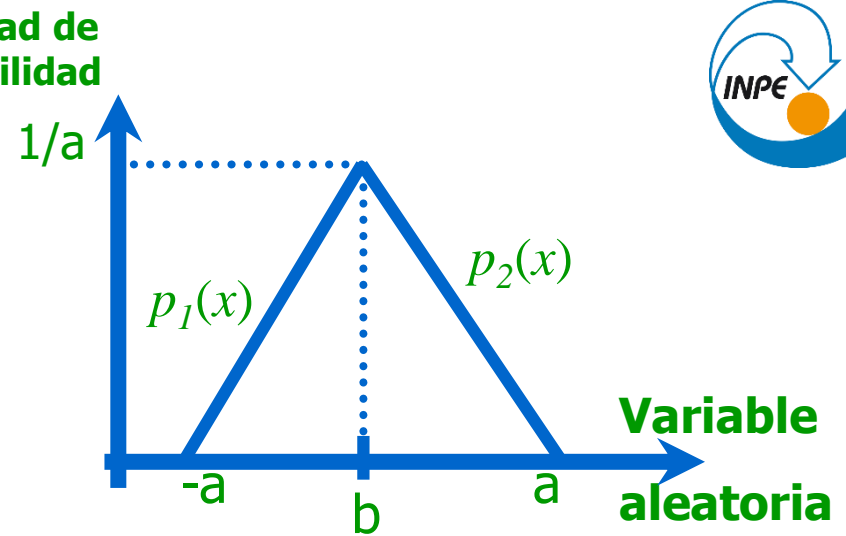


Área da FDP: $A_T = (base) \times (altura)/2 = (2a) \times (1/a)/2 = 1$

$$p_1(x) = c_1 + c_2x \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ ponto: } (-a, 0) \\ 2^\circ \text{ ponto: } (b, 1/a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2(-a) \\ 1/a = c_1 + c_2(b) \end{cases} = \begin{cases} c_1 = \frac{1}{a+b} \\ c_2 = \frac{1/a}{a+b} \end{cases}$$

$$p_2(x) = c_3 + c_4x \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ ponto: } (b, 1/a) \\ 2^\circ \text{ ponto: } (a, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/a = c_3 + c_4(b) \\ 0 = c_3 + c_4(a) \end{cases} = \begin{cases} c_3 = \frac{1}{a-b} \\ c_4 = \frac{-1/a}{a-b} \end{cases}$$

FDP triangular simétrica



$$de\{1\}: \mu_x = \langle x \rangle = E\{x\} := \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{-a} xp(x)dx + \int_{-a}^{+a} xp(x)dx + \int_{+a}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$\mu_x = E\{x\} = 0 + \int_{-a}^{+a} xp(x)dx + 0 = \int_{-a}^b xp_1(x)dx + \int_b^{+a} xp_2(x)dx$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, x < -a \\ p_1(x) = \frac{1}{a+b} + \left(\frac{1/a}{a+b}\right)x, -a \leq x \leq b \\ p_2(x) = \frac{1}{a-b} + \left(\frac{-1/a}{a-b}\right)x, b \leq x \leq +a \\ 0, x > +a \end{cases}$$

Media de una funcion $p(x)$

$$\int_a^b x \cdot p(x) dx = \int_a^b x(c_1 + c_2 x) dx$$

$$\left\{ \int_a^b x(c_1 + c_2 x) dx = c_1 \int_a^b x dx + c_2 \int_a^b x^2 dx = c_1 \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + c_2 \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = c_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + c_2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) \right\}$$

$$\mu_x = c_1 \left(\frac{b^2 - (-a)^2}{2} \right) + c_2 \left(\frac{b^3 - (-a)^3}{3} \right) + c_3 \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right) + c_4 \left(\frac{a^3 - b^3}{3} \right)$$

$$\mu_x = \left(\frac{1}{a+b} \right) \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + \left(\frac{1/a}{a+b} \right) \left(\frac{b^3 + a^3}{3} \right) + \left(\frac{1}{a-b} \right) \left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right) + \left(\frac{-1/a}{a-b} \right) \left(\frac{a^3 - b^3}{3} \right)$$

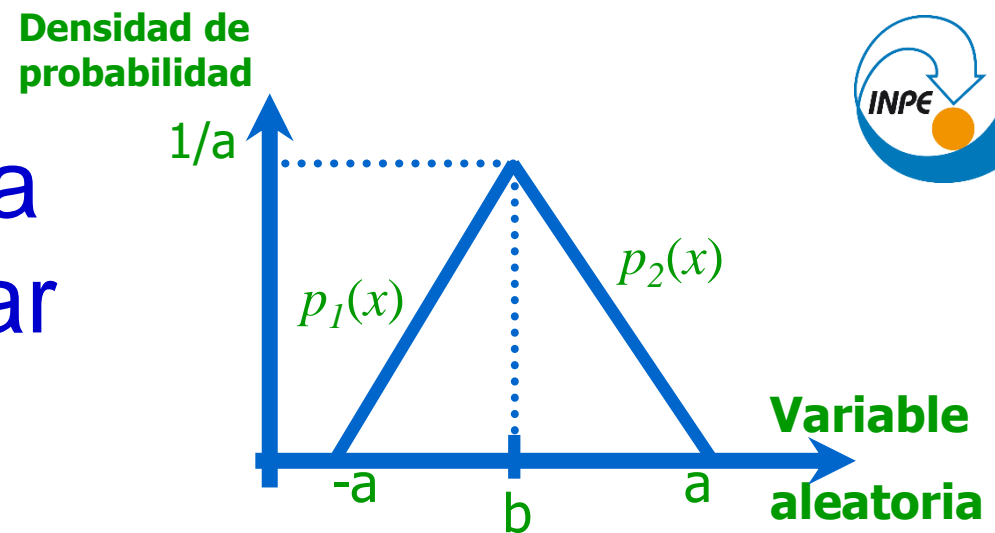
$$\mu_x = \left[\left(\frac{1}{a+b} \right) - \left(\frac{1}{a-b} \right) \right] \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + \left(\frac{1/a}{a+b} \right) \left(\frac{b^3 + a^3}{3} \right) + \left(\frac{-1/a}{a-b} \right) \left(\frac{a^3 - b^3}{3} \right)$$

$$\mu_x = \left[\frac{(a-b) - (a+b)}{(a+b)(a-b)} \right] \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + \left[\frac{(a-b)(1/a)(b^3 + a^3) + (a+b)(-1/a)(a^3 - b^3)}{3(a+b)(a-b)} \right]$$

$$\mu_x = \left[\frac{(-2b)}{(a^2 - b^2)} \right] \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + \left[\frac{b^3 + a^3 - (b/a)b^3 - (b/a)a^3 - a^3 + b^3 - (b/a)a^3 + (b/a)b^3}{3(a^2 - b^2)} \right]$$

$$\mu_x = b + \left[\frac{2b^3 - 2(b/a)a^3}{3(a^2 - b^2)} \right] = b + \left[\frac{2b^3 - 2ba^2}{3(a^2 - b^2)} \right] = b + \frac{2b}{3} \left[\frac{(b^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)} \right] = b - \frac{2b}{3} = \frac{b}{3}$$

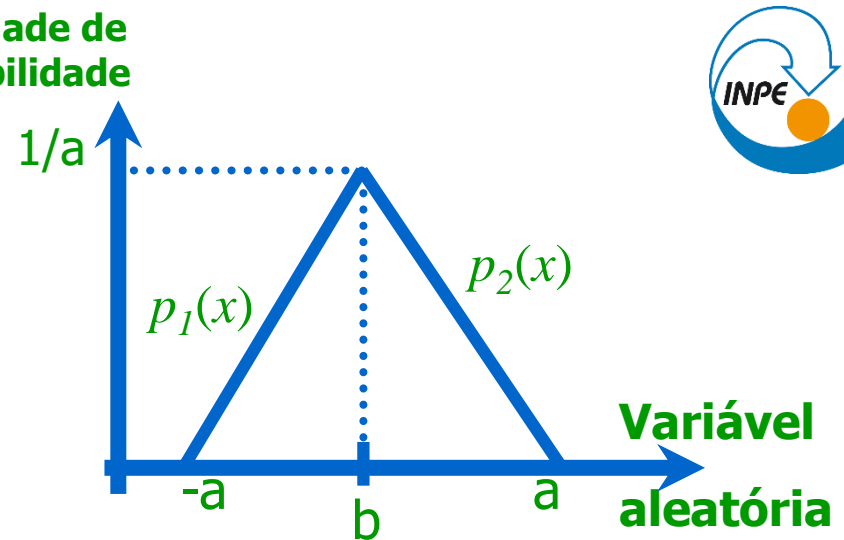
Media de una FDP triangular



Área da FDP: $A_T = (base) \times (altura)/2 = (2a) \times (1/a)/2 = 1$

- En este caso si observamos que b es el punto central y que las intersecciones son $-a$ y $+a$ implica que el valor de b es 0 (cero)
- FDP simétrico: el medio está en el centro del rango de variación posible para la variable aleatoria independiente

Varianza de una FDP triangular



$$de\{3\}: \sigma_x^2 = V\{x\} = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_{-a}^{+a} (x - \mu_x)^2 p(x) dx$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-a}^b (x - \mu_x)^2 p_1(x) dx + \int_b^{+a} (x - \mu_x)^2 p_2(x) dx$$

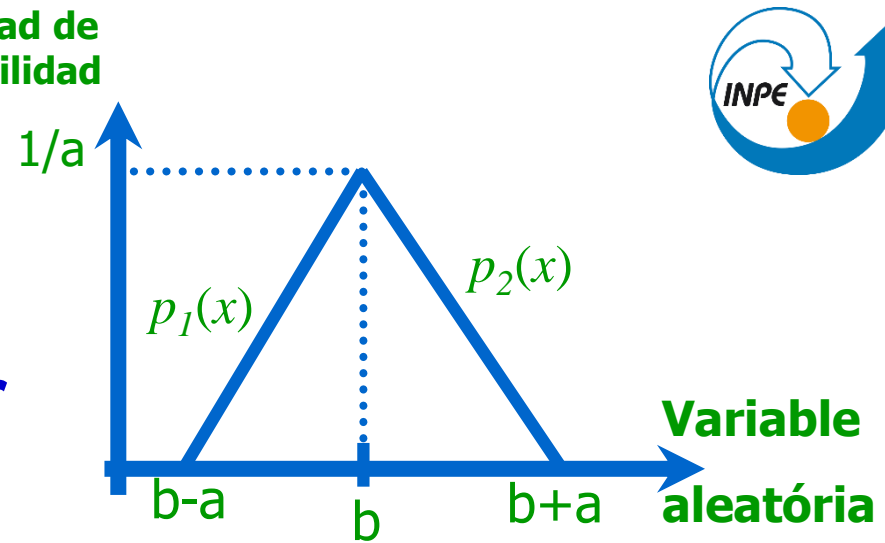
$$\sigma_x^2 = \int_{-a}^b \left(x - \frac{b}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{a+b} + \left(\frac{1/a}{a+b}\right)x\right) dx + \int_b^{+a} \left(x - \frac{b}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{a-b} + \left(\frac{-1/a}{a-b}\right)x\right) dx$$

FDP triangular simétrica: neste problema $b = 0$:

$$\sigma_x^2 = \int_{-a}^0 (x)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}x\right) dx + \int_0^{+a} (x)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x\right) dx = \int_{-a}^0 \left(\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right) dx + \int_0^{+a} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}\right) dx$$

$$\sigma_x^2 = \frac{x^3}{3a} \Big|_{-a}^0 + \frac{x^4}{4a^2} \Big|_{-a}^0 + \frac{x^3}{3a} \Big|_0^{+a} - \frac{x^4}{4a^2} \Big|_0^{+a} = \frac{-(-a)^3}{3a} + \frac{-(-a)^4}{4a^2} + \frac{(+a)^3}{3a} - \frac{(+a)^4}{4a^2} = \frac{2a^3}{3a} - \frac{2a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{6}$$

Media, Varianza y desviación estándar de una FDP triangular simétrica



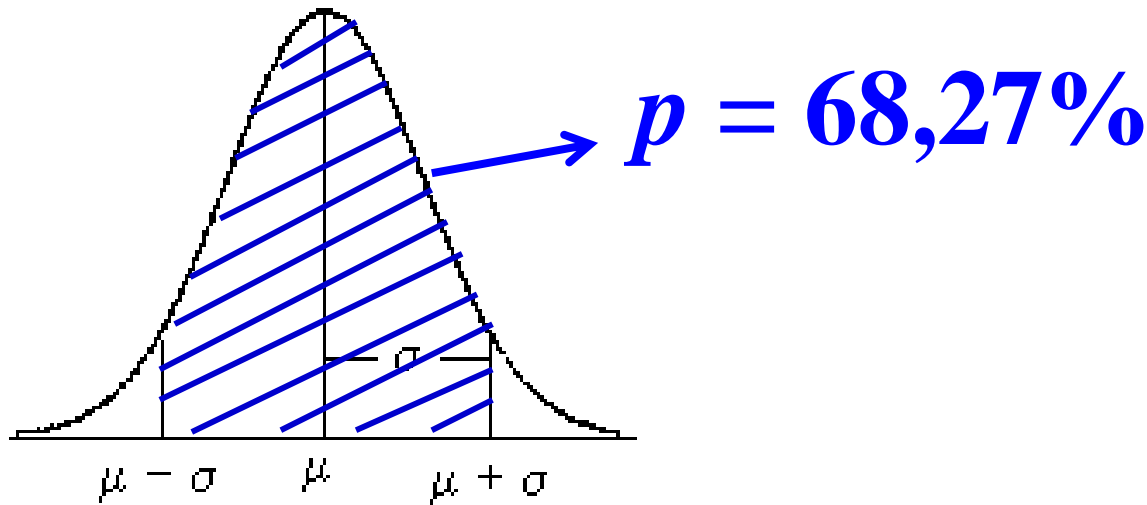
Media de una FDP triangular simétrica: $\mu_x = b$

Varianza de una FDP triangular: $\sigma_x^2 = \frac{a^2}{6}$

desviación estándar de una FDP triangular:

$$\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{2a}{2\sqrt{6}} = \frac{A}{2\sqrt{6}} = \frac{A}{\sqrt{24}}$$

FDP Gaussiana (Normal)



$$N_X(\mu_x, \sigma_x^2): p_X(x; \mu_x, \sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]$$

$$P_X(\mu_x - \sigma_x < X < \mu_x + \sigma_x) = \int_{\mu_x - \sigma_x}^{\mu_x + \sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu_x)(\sigma_x^2)^{-1}(x - \mu_x) \right] dx = 68,27\%$$

Interpretación de la desviación estándar

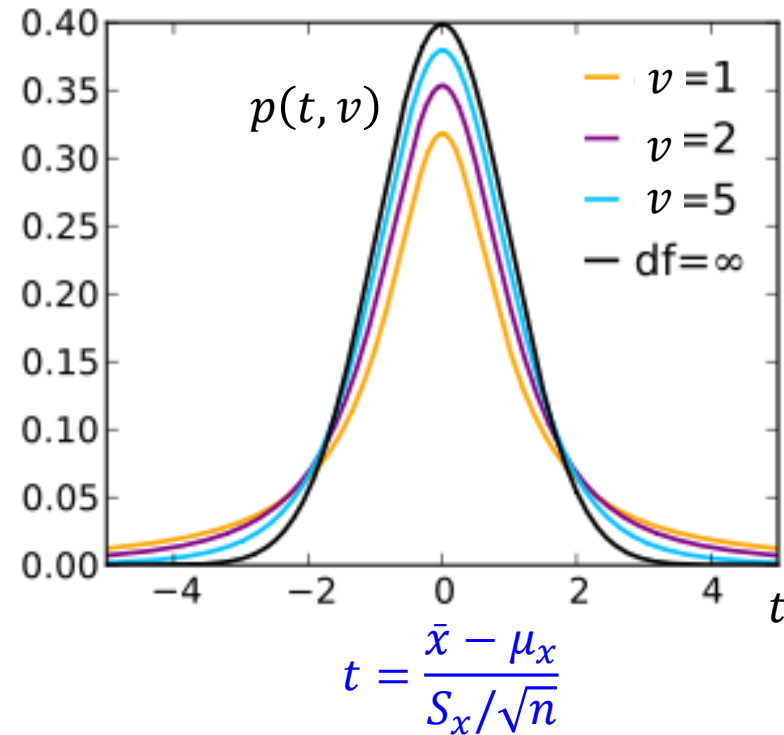
FDP	Área correspondiente o probabilidad a $\mu_x \pm 1\sigma_x$
Uniforme ou rectangular	57,74 %
Triangular	64,98 %
Normal ou gaussiana	68,27 %

FDP t o FDP de Student

“La función de distribución de probabilidad de la variable $\frac{\bar{x} - \mu_x}{s_x/\sqrt{n}}$ es la función de distribución t , si la variable aleatoria x está normalmente distribuida con esperanza μ_x , donde \bar{x} es la media aritmética de n observaciones independientes x_i de x , $s(x_i)$ es la desviación estándar experimental de n observaciones, y $s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar experimental de la media \bar{x} , con $v = n - 1$ grados de libertad.”

GUM, C.3.8

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$



R®: $k = t = -qt((1-PC/100)/2, GL)$ MATLAB®: $k = t = -tinv((1-PC/100)/2, GL)$

Excel®: $k = t = INV.T.2C\left(1 - \frac{PC}{100}; GL\right)$

Excel®: $k = t = INV.T.BC\left(1 - \frac{PC}{100}; GL\right) = INV.T\left(1 - \left(1 - \frac{PC}{100}\right)/2; GL\right)$

Quantis para el FDP de Student, para diferentes probabilidades $p = PC$

Tabla k: Fator de cobertura para diferentes grados de libertad (GL) y probabilidades de cobertura (p), suponiendo uma FDP de Student.

		Probabilidades de cobertura (p) / %							
Una cola		75	84,13	95,0	97,5	97,73	99,5	99,87	99,95
Dos colas		50	68,26	90,0	95,0	95,45	99,0	99,73	99,90
Grados de Libertad (GL)	1	1,000	1,837	6,314	12,706	13,968	63,657	235,784	636,619
	2	0,816	1,321	2,920	4,303	4,527	9,925	19,206	31,599
	3	0,765	1,197	2,353	3,182	3,307	5,841	9,219	12,924
	4	0,741	1,141	2,132	2,776	2,869	4,604	6,620	8,610
	5	0,727	1,110	2,015	2,571	2,649	4,032	5,507	6,869
	6	0,718	1,090	1,943	2,447	2,517	3,707	4,904	5,959
	7	0,711	1,077	1,895	2,365	2,429	3,499	4,530	5,408
	8	0,706	1,066	1,860	2,306	2,366	3,355	4,277	5,041
	9	0,703	1,059	1,833	2,262	2,320	3,250	4,094	4,781
	10	0,700	1,052	1,812	2,228	2,284	3,169	3,957	4,587
	15	0,691	1,034	1,753	2,131	2,181	2,947	3,586	4,073
	20	0,687	1,026	1,725	2,086	2,133	2,845	3,422	3,850
	25	0,684	1,020	1,708	2,060	2,105	2,787	3,330	3,725
	30	0,683	1,017	1,697	2,042	2,087	2,750	3,270	3,646
	50	0,679	1,010	1,676	2,009	2,051	2,678	3,157	3,496
	60	0,679	1,008	1,671	2,000	2,043	2,660	3,130	3,460
	80	0,678	1,006	1,664	1,990	2,032	2,639	3,096	3,416
100	0,677	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077	3,390	
∞	0,674	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000	3,291	

Algumas demonstrações

$$\mu_g = \langle g(x) \rangle = E[g(x)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \{g(x) \cdot p(x)\} dx \quad \{2\}$$

$$\sigma_x^2 = V[x] = \langle (x - \mu_x)^2 \rangle = E[(x - \mu_x)^2] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \quad \{3\}$$

Considera $g(x) = a \cdot x$ com a uma constante: $V\{a \cdot x\} = a^2 \cdot V\{x\}$

$$\mu_g = E[g(x)] = E[a \cdot x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{a \cdot x \cdot p(x)\} dx$$

$$\mu_g = a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = a \cdot E[x] = a \cdot \mu_x \quad \{4.1\}$$

$$\sigma_g^2 = E[(g(x) - \mu_{g(x)})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - \mu_{g(x)})^2 \cdot p(x) dx$$

$$\sigma_g^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (a \cdot x - a \cdot \mu_x)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cdot (x - \mu_x)^2 \cdot p(x) dx$$

$$\sigma_g^2 = a^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot p(x) dx = a^2 \cdot E[(x - \mu_x)^2] = a^2 \cdot V[x] \quad \{4.2\}.$$

Más demostraciones

$$\mu_g = \langle g(x) \rangle = E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot p(x) dx \quad \{2\}$$

$$\sigma_x^2 = V[x] = \langle (x - \mu_x)^2 \rangle = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot p(x) dx \quad \{3\}$$

Considera $g(x) = a + x$ con a una constante: $V\{a + x\} = V\{x\}$

$$\mu_g = E\{g(x)\} = E[a + x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + x) \cdot p(x) dx$$

$$\mu_g = a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = a + E[x] = a + \mu_x \quad \{4.3\}$$

$$\sigma_g^2 = E\left[(g(x) - \mu_{g(x)})^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - \mu_{g(x)})^2 \cdot p(x) dx$$

$$\sigma_g^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + x - (a + \mu_x))^2 \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + x - a - \mu_x)^2 \cdot p(x) dx$$

$$\sigma_g^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot p(x) dx = E\{(x - \mu_x)^2\} = V\{x\} \quad \{4.4\}$$

m^n - momento de orden n

$$m_n \equiv \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x^n \cdot p(x)\} dx \quad \{5\}$$

- El media es lo momento de 1ª orden:

$$m_1 = \langle x^1 \rangle = \mu_x \quad \{6\}$$

- El momento de 2ª ordem de x é:

$$m_2 = \langle x^2 \rangle = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad \{7\}$$

- La varianza es lo momento de 2ª orden centrado na media:

$$m_2 = \langle (x - \mu)^2 \rangle = \sigma_x^2 \quad \{8\}$$

Momentos estatísticos

- Momento de orden 1:

$$\text{média (aritmética)} \quad \mu_X = E\{X\}$$

- Momento de orden 2 na distribuição centrada:

$$\text{variância} \quad V\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\}$$

- Momento de orden 3 na distribuição centrada **ou** padronizada:
coeficiente de assimetria

$$A_s = E\{(X - E\{X\})^3\} \quad \text{ou} \quad A_s = E\left\{\left(\frac{X - E\{X\}}{\sigma}\right)^3\right\}$$

- Momento de orden 4 na distribuição centrada ou padronizada:
coeficiente de curtose:

$$C_r = E\{(X - E\{X\})^4\} \quad \text{ou} \quad C_r^* = E\left\{\frac{(X - E\{X\})^4}{\sigma^4}\right\} \quad \text{ou} \quad C_r^\# = C_r - 3$$

o coeficiente de curtose é uma medida da densidade das caudas de uma distribuição: para FDP uniforme $C_r^* = 1,8$; para FDP normal $C_r^* = 3,0$ (**ou** $C_r^\# = 0$); para FDP exponencial $C_r^* = 9,0$

Demonstración

$$m_2 = \langle x^2 \rangle = E\{x^2\} = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad \{9\}$$

$$E\{x^2\} = E[x^2 + \mu^2 - \mu^2] = E[x^2 + \mu^2 - \mu^2 + 2x \cdot \mu - 2x\mu] \quad \{10\}$$

$$E\{x^2\} = E\{x^2 - 2x \cdot \mu + \mu^2 + 2x \cdot \mu - \mu^2\} = [x^2 - 2x \cdot \mu + \mu^2] + E[2x \cdot \mu - \mu^2] \quad \{11\}$$

$$E\{x^2\} = E[(x - \mu)^2] + E[2x \cdot \mu] - E[\mu^2] \quad \{12\}$$

$$V = \sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\mu \cdot x \cdot p(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 \cdot p(x) dx \quad \{13\}$$

$$E\{x^2\} = \sigma^2 + 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx - \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \sigma^2 + 2\mu \cdot \mu - \mu^2 \quad \{14\}$$

Entonces

$$E\{x^2\} = \sigma^2 + \mu^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad \{15\}$$

c. q. d.

$$\{16\}: m_2 = \langle (x - \mu_x)^2 \rangle = \sigma_x^2$$

$$\{17\}: m_2 = \langle (x - \mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x \cdot \mu + \mu^2) p(x) dx$$

$$\{18\}: m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu p(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 p(x) \cdot dx$$

$$\{19\}: m_2 = \langle x^2 \rangle - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \langle x^2 \rangle - 2\mu \cdot \mu + \mu^2$$

$$\{20\}: m_2 = \langle x^2 \rangle - 2\mu^2 + \mu^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$$

De $\{15\}: \langle x^2 \rangle = \sigma_x^2 + \mu^2$

$$\{21\}: m_2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma_x^2$$

Reglas para terminologia

Parámetro	Población (alfabeto griego)	Muestra (alfabeto latino)
Media	μ_x	\bar{x}
Desviación estándar	σ_x	S_x
Varianza	σ_x^2	$S_x^2 = S_{xx}$
Covarianza	σ_{xy}	S_{xy}

La media aritmética es un estimador no sesgado da media da população

Demonstración: $\bar{x} \rightarrow \mu$ {22}

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \{23\}$$

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{E[\sum_{i=1}^n x_i]}{n} \quad \{24\}$$

$$E[\bar{x}] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \{\sum_{i=1}^n [x_i \cdot p(x_i)]\} dx}{n}$$

$$E[\bar{x}] = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \{x_i \cdot p(x_i)\} dx \right]}{n} \quad \{25\}$$

$$E[\bar{x}] = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_x}{n} = \frac{n\mu_x}{n} = \mu_x \quad \{26\}$$

c. q. d.

Então a esperança ou valor esperado de \bar{x} é a média da população

Hipótesis para

$$E\{\bar{x}\} = \mu_x$$

H_1) La muestra es representativa de la población

H_2) Las indicaciones de medidas son independientes entre si.

Valor Más Probable (VMP)

- La moda es el VMP
- Si el FDP for rectangular, o normal entonces:
 - El valor esperado coincide con la moda
 - y, como el valor esperado es la media aritmética, logo la media es igual VMP

¿Usar **media aritmética**, ou **moda**, ou **mediana**?

- Es posible que el valor representativo de las indicaciones (conjunto de muestras) sea un punto específico arbitrario.
 - Ejemplo: El valor representativo del conjunto de indicaciones es la **moda**, o la **mediana**
 - En este caso, la **desviación estándar experimental** se usa para representar la evaluación Tipo A de incertidumbre
- La mayoría de las veces el valor representativo de las indicaciones viene dado por la **media aritmética**
 - En este caso, la **desviación estándar experimental de la media** se utiliza para representar la evaluación de Tipo A de incertidumbre.

Desviación estándar experimental de la media es la desviación estándar experimental de la población dividida por la raíz cuadrada de n

Demostracion: {27}: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ {28}: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sqrt{V[\bar{x}]}$

{29}: $V[\bar{x}] = \langle (\bar{x} - \mu_x)^2 \rangle = \langle \bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu_x + \mu_x^2 \rangle$

{30}: $V[\bar{x}] = \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle 2\bar{x}\mu_x \rangle + \langle \mu_x^2 \rangle = \langle \bar{x}^2 \rangle - 2\mu_x \langle \bar{x} \rangle + \mu_x^2 = \langle \bar{x}^2 \rangle - 2\mu_x \mu_x + \mu_x^2$

{31}: $V[\bar{x}] = \langle \bar{x}^2 \rangle - \mu_x^2$

{32}: $\langle \bar{x}^2 \rangle = \langle \bar{x} \cdot \bar{x} \rangle = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} \right\rangle = \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle$

Desviación estándar experimental de la media
es la desviación estándar experimental de la
población dividida por la raíz cuadrada de n
(continuación)

Demostracion: {27}: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ {28}: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sqrt{V[\bar{x}]}$

$$\{32\}: \langle \bar{x}^2 \rangle = \langle \bar{x} \cdot \bar{x} \rangle = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} \right\rangle = \frac{1}{n^2} \cdot \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle$$

- Para $i = j$, entonces de {32}: {34}: $\langle x_i \cdot x_i \rangle = \langle x_i^2 \rangle = \sigma_x^2 + \mu^2$
- **Hipótesis: Para $i \neq j$ y con variables independientes:** {35}: $\langle x_i \cdot x_j \rangle = \langle x_i \rangle \cdot \langle x_j \rangle = \mu_x \cdot \mu_x = \mu_x^2$
- **Hipótesis: homodedasticidad: la desviación estándar igual para todas las magnitudes**
- Hay n pares con $i = j$ y $n \cdot (n - 1)$ pares independientes con $i \neq j$, entonces:

$$\{36\}: \langle \bar{x}^2 \rangle = \langle \bar{x} \cdot \bar{x} \rangle = \frac{1}{n^2} \cdot [n \cdot (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + n \cdot (n - 1) \cdot \mu^2] = \frac{\sigma_x^2}{n} + \mu_x^2$$

desviación estándar experimental de la media es
la desviación estándar experimental de la
población dividida por la raíz cuadrada de n
(continuación)

Demostracion: {27}: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Reemplazando {36}: $\langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{\sigma_x^2}{n} + \mu_x^2$

en {31}: $V(\bar{x}) = \langle \bar{x}^2 \rangle - \mu_x^2$

uno consigue: {37}: $V(\bar{x}) = \frac{\sigma_x^2}{n} + \mu_x^2 - \mu_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sqrt{V[\bar{x}]} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}$

$$\{27\}: \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

c. q. d.

Hipótesis para desviación experimental de la media

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

- H_1) La muestra es representativa
- H_2) Las indicaciones x_i son independientes
- H_3) La desviación estándar igual para todas las indicaciones (homocedasticidad)

Varianza de variables continuas, discretas y de muestra.

- Varianza de una variable continua:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \{(x - \mu_x)^2 \cdot p(x)\} dx$$

- Varianza de una variable discreta:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

- "La varianza experimental de las observaciones, que estima la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de q , viene dada por:"
(GUM, 4.2.2)

$$S_q^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n - 1}$$

¿Es el estadístico δ^2 es un estimador da varianza de la población (σ^2)?

Demostracion: {38}: $\delta^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \rightarrow \sigma_x^2$?

$$\{39\}: \delta^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n}$$

$$\{40\}: \delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \frac{n \cdot \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\{41\}: \langle \delta^2 \rangle = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \right\rangle - \langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{\langle \sum_{i=1}^n x_i^2 \rangle}{n} - \langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{n} - \left(\frac{\sigma_x^2}{n} + \mu_x^2 \right)$$

Para variables independientes {36}

$$\{42\}: \langle \delta^2 \rangle = \frac{n \cdot (\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{n} - \left(\frac{\sigma_x^2}{n} + \mu_x^2 \right) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{n} - \mu_x^2 = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$\{43\}: \langle \delta^2 \rangle = \frac{n \cdot \sigma_x^2 - \sigma_x^2}{n} = \left(\frac{n-1}{n} \right) \cdot \sigma_x^2 \Rightarrow E\{\delta^2\} \neq \sigma_x^2, \text{ mas } \left(\frac{n}{n-1} \right) \cdot E\{\delta^2\} = \sigma_x^2$$

¿Es el estadístico δ^2 es un estimador da varianza de la población (σ^2)? continuación

Demostracion: {38}: $\delta^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \rightarrow \sigma_x^2$?

$$\{44\}: E \left\{ \left(\frac{n}{n-1} \right) \cdot \delta^2 \right\} = \sigma_x^2$$

$$\{45\}: s^2(\bar{X}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{n}{n-1} \right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\{46\}: E\{s^2(\bar{X}_i)\} = \sigma_x^2$$

- Aún a partir de {46} se concluye que el estadístico (S_x^2) es un estimador no sesgado de la varianza de la población (σ_x^2)
- GUM 4.2.2

desviación estándar experimental de la media (4.2.3 do GUM)

- Se ha demostrado que

$$\{33\}: \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\{46\}: s^2(\bar{X}_i) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \rightarrow \sigma_x^2$$

- Al sustituir {46} por {33} y extraer la raíz cuadrada se obtiene la desviación estándar experimental de una media muestral:

$$\{46\}: u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma_{\bar{x}}$$

“Por comodidad, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ y $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ son a veces llamadas *varianza Tipo A* e *incertidumbre típica Tipo A*, respectivamente.” GUM, 4.2.3

c. q. d.

Hipótesis para

$$u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma_{\bar{x}}$$

H₁) La muestra es representativa

H₂) Las indicaciones x_i son independientes, por ejemplo:

- la muestra es en estado estacionário,
- las variables no están correlacionados e
- las variables no están autocorrelacionados

La evaluacion do Tipo A da incertidumbre es cuantificada adecuadamente por la desviación estándar experimental de la media.

PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN

Propagación de la incertidumbre de medición (Propagación de la varianza)

Considerar:

- X , Y y Z son variables aleatorias e se miden n veces
- $W = f(X, Y, Z)$, W tambien es una variable aleatoria
- Se conocen las medias y varianzas de X , Y y Z
- Com los n valores de las magnitudes de entrada (x_i, y_i, z_i) , se calculan los n valores de la magnitude de salida w_i

$$w_i = f(x_i, y_i, z_i)$$

- Entonces la media de la magnitud de salida es:

$$\{47\}: \quad \bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)}{n}$$

Propagación de la incertidumbre de medición (continuación)

- Expansión $w_i = f(x_i, y_i, z_i)$ em secuencia de Taylor, alrededor de la media:

{48}:

$$\begin{aligned}
 w_i = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &+ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (x_i - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (y_i - \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (z_i - \bar{z}) + \\
 &+ \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (y_i - \bar{y})^2 + \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (z_i - \bar{z})^2 \\
 &+ \frac{2}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) + \\
 &+ \frac{2}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (x_i - \bar{x}) \cdot (z_i - \bar{z}) + \\
 &+ \frac{2}{2!} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial Z} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot (z_i - \bar{z}) + \dots
 \end{aligned}$$



Propagación de la incertidumbre de medición (continuación)



- Si la **primera derivada es aproximadamente constante**, la segunda derivada y las posteriores son aproximadamente cero. Entonces de {48}:

$$\{49\}: w_i \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (x_i - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (y_i - \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial Z} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot (z_i - \bar{z})$$

- Sustituciones:

$$\{50.a\}: \text{coeficiente de sensibilidad de } W \text{ con respecto a } X: c_x = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{50.b\}: \text{coeficiente de sensibilidad de } W \text{ con respecto a } Y: c_y = \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{50.c\}: \text{coeficiente de sensibilidad de } W \text{ con respecto a } Z: c_z = \left. \frac{\partial f}{\partial Z} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{51\}: w_i \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + c_x \cdot (x_i - \bar{x}) + c_y \cdot (y_i - \bar{y}) + c_z \cdot (z_i - \bar{z})$$

Propagación de la incertidumbre de medición (continuación)

- Si el modelo de medición es aproximadamente lineal, {51} es válida:

$$\{51\}: w_i \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + c_x \cdot (x_i - \bar{x}) + c_y \cdot (y_i - \bar{y}) + c_z \cdot (z_i - \bar{z})$$

- Media de w_i :

$$\{52\}: \bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n} \cong \frac{\sum_{i=1}^n [f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + c_x \cdot (x_i - \bar{x}) + c_y \cdot (y_i - \bar{y}) + c_z \cdot (z_i - \bar{z})]}{n}$$

$$\{53\}: \bar{w} \cong \frac{n \cdot f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + c_x \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + c_y \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) + c_z \cdot \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})}{n} \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

↗ 0
↗ 0
↗ 0

$$\{54\}: \bar{w} \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Propagación de la incertidumbre de medición (continuación)

$$\{51\}: w_i \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + c_x \cdot (x_i - \bar{x}) + c_y \cdot (y_i - \bar{y}) + c_z \cdot (z_i - \bar{z})$$

- De {51} al cuadrado:

$$\begin{aligned} \{55\}: [w_i - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})]^2 &= (c_x)^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 + (c_y)^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2 + (c_z)^2 \cdot (z_i - \bar{z})^2 + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) + \\ &+ 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) \end{aligned}$$

- Si el modelo de medición es lineal: $\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
- o aproximadamente lineal, de {54} : $\bar{w} \cong f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{aligned} \{56\}: [w_i - \bar{w}]^2 &= (c_x)^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 + (c_y)^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2 + (c_z)^2 \cdot (z_i - \bar{z})^2 + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) + \\ &+ 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) \end{aligned}$$

Propagación de la incertidumbre de medición (Propagación de la varianza)

- Aplicando la suma en n en la ecuación {56} y dividiendo por $(n - 1)$:

$$\{57\}: \frac{\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2}{(n - 1)} = \frac{1}{(n - 1)} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\begin{aligned} &(c_x)^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 + (c_y)^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2 + (c_z)^2 \cdot (z_i - \bar{z})^2 + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) + \\ &+ 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) \end{aligned} \right]$$

- Pero la **varianza** de W es $V\{W\} = \frac{\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2}{(n-1)}$ entonces

$$\{58\}: V\{W\} = \frac{1}{(n - 1)} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\begin{aligned} &(c_x)^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 + (c_y)^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2 + (c_z)^2 \cdot (z_i - \bar{z})^2 + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) + \\ &+ 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) \end{aligned} \right]$$

- Y el **desviación estándar** de W es $u_W \stackrel{\text{def}}{=} +\sqrt{V(W)}$ entonces

Propagación de la incertidumbre de medición (continuación)

$$\{58\}: V\{W\} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\begin{aligned} &(c_x)^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 + (c_y)^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2 + (c_z)^2 \cdot (z_i - \bar{z})^2 + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot (x_i - \bar{x}) \cdot (z_i - \bar{z}) + \\ &+ 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot (z_i - \bar{z}) \end{aligned} \right]$$

• De {58} :

$$\{59\}: V\{W\} = \left[\begin{aligned} &(c_x)^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})^2]}{(n-1)} + (c_y)^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y})^2]}{(n-1)} + (c_z)^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(z_i - \bar{z})^2]}{(n-1)} + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{(n-1)} + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (z_i - \bar{z})]}{(n-1)} + \\ &+ 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) \cdot (z_i - \bar{z})]}{(n-1)} \end{aligned} \right]$$

• Pero $V\{X\} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})^2]}{(n-1)}$ y $cov\{X, Y\} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{(n-1)}$

$$\{60\}: V\{W\} = \left[\begin{aligned} &(c_x)^2 \cdot V\{W\} + (c_y)^2 \cdot V\{Y\} + (c_z)^2 \cdot V\{Z\} + \\ &+ 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot cov\{X, Y\} + 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot cov\{X, Z\} + 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot cov\{Y, Z\} \end{aligned} \right] \cdot$$

Propagación de la incertidumbre de medición (Propagación de la varianza)

{61}:

$$u_W \stackrel{\text{def}}{=} +\sqrt{V(W)} = \sqrt{(c_x)^2 \cdot V\{W\} + (c_y)^2 \cdot V\{Y\} + (c_z)^2 \cdot V\{Z\} + 2(c_x) \cdot (c_y) \cdot \text{cov}\{X, Y\} + 2(c_x) \cdot (c_z) \cdot \text{cov}\{X, Z\} + 2(c_y) \cdot (c_z) \cdot \text{cov}\{Y, Z\}}$$

- Pero $u_X^2 = V(X)$, $u_Y^2 = V(Y)$ y $u_Z^2 = V(Z)$
- Y $u_{XY} = \text{cov}\{X, Y\}$, $u_{XZ} = \text{cov}\{X, Z\}$ y $u_{YZ} = \text{cov}\{Y, Z\}$

$$\{62\}: u_W = \sqrt{(c_x)^2 \cdot u_X^2 + (c_y)^2 \cdot u_Y^2 + (c_z)^2 \cdot u_Z^2 + 2 \cdot (c_x) \cdot (c_y) \cdot u_{XY} + 2 \cdot (c_x) \cdot (c_z) \cdot u_{XZ} + 2 \cdot (c_y) \cdot (c_z) \cdot u_{YZ}}$$

Donde: coeficiente de sensibilidad de W con respecto a i : $c_i = \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

u_i es la incertidumbre típica de la magnitud u_i

u_{ij} es la covarianza entre las magnitudes i y j

Ley de Propagación de la Incertidumbre (LPI)

Hipótesis:

1. **Modelo de medición óptimo:** $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$, donde Y es la magnitud de salida, X_i es la i -ésima magnitud de entrada, y m la cantidad de magnitudes de entrada
2. **El modelo de medición puede aproximarse mediante una secuencia de Taylor** truncada en la primera derivada (existe la primera derivada de f)
3. **Experimento bien hecho:**
 - 3.1. Las medias ($\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$) de las magnitudes de entrada son representativas de las variables (X_1, X_2, \dots, X_m)
 - 3.2. Las incertidumbre de las magnitudes de entrada son relativamente pequeñas

$$\{63\}: u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \{c_i \cdot c_j \cdot u_{ij}\} \right\}}$$

$$c_i = c_{X_i} = \left. \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right|_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m)}$$

$u_{ii} = u_i^2$ varianza de la magnitud i
 u_{ij} es la covarianza entre i y j

4. **Las magnitudes de entrada no están auto correlacionadas**, en mediciones y calibraciones de estado estacionario (no dinámico), la varianza puede ser:

$$u_{ii} = u_i^2 = u_i^2(\bar{X}_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{X}_i)^2}{(n_i - 1)}$$

Ley de Propagación de la Incertidumbre (LPI)

$Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_m)$, m es la cantidad de magnitudes de entrada

$$\{63\}: u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \{c_i \cdot c_j \cdot u_{ij}\} \right\}}$$

$$c_i = c_{X_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m)}$$

$u_{ii} = u_i^2$ varianza de la magnitud i
 u_{ij} es la covarianza entre i y j

Media de $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \{x_{ij}\}}{n_i}$

desviación estándar experimental de X_i : $s_{X_i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}}$

x_{ik} es el valor del experimento k de la magnitud de entrada X_i
 n_i es la cantidad de experimentos de la magnitud de entrada X_i

desviación estándar experimental de la media de X_i : $s_{\bar{X}_i} = \frac{s_{X_i}}{\sqrt{n_i}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}}}{\sqrt{n_i}} =$

$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{X}_i)^2}{n_i \cdot (n_i - 1)}}$ La incertidumbre de X_i puede ser s_{X_i} , $s_{\bar{X}_i}$, o otro valor

Covarianza entre X_i y X_j : $u(X_i, X_j) = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{X}_i)(x_{jk} - \bar{X}_j)}{(n_i - 1)}$

Covarianza entre las medias \bar{X}_i y \bar{X}_j : $u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \frac{u(X_i, X_j)}{n_i}$

La covarianza u_{ij} puede ser: $u(X_i, X_j)$ o $u(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$

Ley de Propagación de la Incertidumbre (LPI) **sin correlación**

Hipótesis:

1. **Modelo de medición óptimo:** $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$, donde Y es la magnitud de salida, X_i es la i -ésima magnitud de entrada, y m la cantidad de magnitudes de entrada
2. **El modelo de medición puede aproximarse mediante una secuencia de Taylor** truncada en la primera derivada (existe la primera derivada de Y)
3. **Experimento bien hecho:**
 - 3.1. Medias $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m)$ de las magnitudes de entrada son representativas de las variables (X_1, X_2, \dots, X_m)
 - 3.2. Las incertidumbre de las magnitudes de entrada son relativamente pequeñas

$$\{63\}: u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \{c_i \cdot c_j \cdot u_{ij}\} \right\}}$$

$$c_i = c_{X_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m)}$$

$u_{ii} = u_i^2$ varianza de la magnitud i
 u_{ij} es la covarianza entre i y j

4. **Las magnitudes de entrada no están autocorrelacionadas**, en mediciones y calibraciones de estado estacionario (no dinámico), puede ser:

$$u_{ii} = u_i^2 = u^2(\bar{X}_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{X}_i)^2}{(n_i - 1)}$$

5. **Las magnitudes de entrada no están correlacionadas**

$$\{64\}: u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \{c_i^2 \cdot u_i^2\}}$$

Comparaciones entre mediciones e entre fuentes de incertidumbre

¿Cual es el RM o la fuente más impactante?

- Coeficientes de contribución de Kessel[#]

[#] Kessel, R., Kacker, R. and Berglund, M. (2006). ***Coefficient of contribution to the combined standard uncertainty***, Metrologia **43**(4): S189-S195. DOI: 10.1088/0026-1394/43/4/S04

$$CK_{X_i} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u_{X_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u_{X_i}\right)^2}, \text{ donde } n \text{ es la cantidad de magnitudes de entrada}$$

O mayor CK_i es el que más impacta en la magnitud de salida
Es la parcela que se debe colocar más atención

- Incertidumbre típica relativa

$$u_{r_i} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u_{X_i}\right)}{RM}, \text{ donde } i \text{ es la incertidumbre típica combinada, do Tipo A o do Tipo B}$$

O menor u_{r_i} , en general, mejor la medición

Se usa para comparar mediciones con diferentes RM

Medición Directa e Indirecta

Medición Directa

- En general, modelo de medición lineal
- No es función de otras mediciones directas o indirectas
- Ej.: $RM = \bar{I} + \bar{C} + \bar{R}$
- Incertidumbre do Tipo A: \bar{I}
- Incertidumbre do Tipo B: \bar{C} y \bar{R}
- En general, los coeficientes de sensibilidad = 1 y sin dimensiones
- Las magnitudes de entrada, si experimento bien hecho, no estar correlacionadas
- Ej.: $cov(\bar{I}, \bar{C}) = cov(\bar{I}, \bar{R}) = cov(\bar{C}, \bar{R}) = 0$

$$\{64\}: u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \{c_i^2 \cdot u_i^2\}}$$

Medición Indirecta

- En general, modelo de medición no lineal
- Función de otras mediciones directas o indirectas
- Ej.: $RM_3 = RM_1 / RM_2$
- Incertidumbre do Tipo A: *no hay*
- Incertidumbre do Tipo B: *todo*
- En general, los coeficientes de sensibilidad $\neq 1$ y con dimensiones
- Las magnitudes de entrada pueden o no estar correlacionadas

$$\{63\}: u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \{c_i \cdot c_j \cdot u_{ij}\} \right\}}$$

Medición Directa

- Medición utilizando solo un instrumento
- Ejemplo: medición de temperatura usando un termómetro
- 5 datos experimentales:
- 24,0 °C; 24,1 °C; 24,1 °C; 24,0 °C; 24,2 °C
- Incertidumbre de calibración: 0,05 °C
- Sesgo: -0,2 °C
- Resolución: amplitud 0,1 °C



Imagen de
[Projekt Kaffeebart](#)
por [Pixabay](#)

1. **Objetivo:** evaluar la incertidumbre de medida de la magnitud de la temperatura
2. **Magnitud de salida:** temperatura medida (RM)
3. **Magnitudes de entrada:** Indicación (I), Corrección (C), Resolución (R)
4. **Hipótesis:** LPI sin correlaciones entre magnitudes de entrada y $\bar{R} = 0$
5. **Modelo de medición:** $RM = \bar{I} + \bar{C} + \bar{R}$
6. **Modelo de propagación de incertidumbres:** $u_{RM} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \{c_i^2 \cdot u_i^2\}}$

Fórmula de Welch-Satterthwaite

Demonstración de la fórmula de Welch-Satterthwaite

- La varianza de una grandeza (y) con $NE=m$ **magnitudes de entrada (x_i) no correlacionadas** es:

$$\{63\}: u^2(y) = c_1^2 \cdot u^2(x_1) + c_2^2 \cdot u^2(x_2) + \cdots + c_m^2 \cdot u^2(x_m)$$

- La varianza de la varianza de la magnitud (y) es, se supone que las varianzas de las varianzas también son no correlacionadas:

$$\{64\}: u^2[u^2(y)] = u^2[c_1^2 \cdot u^2(x_1) + c_2^2 \cdot u^2(x_2) + \cdots + c_m^2 \cdot u^2(x_m)]$$

$$\{65\}: u^2[u^2(y)] = u^2[c_1^2 \cdot u^2(x_1)] + \cdots + u^2[c_m^2 \cdot u^2(x_m)]$$

$$\{66\}: u^2[u^2(y)] = c_1^4 \cdot u^2[u^2(x_1)] + c_2^4 \cdot u^2[u^2(x_2)] + \cdots + c_m^4 \cdot u^2[u^2(x_m)]$$

Demonstración de la fórmula de Welch-Satterthwaite

- Suponiendo que una **magnitud (w)** tiene um FDP normal:

$$\{67\}: \quad u^2[u^2(w)] = \frac{2 \cdot \sigma_w^4}{\nu_w}$$

- Reemplazando {67} en {66} :

$$\{66\}: \quad u^2[u^2(y)] = c_1^4 \cdot u^2[u^2(x_1)] + c_2^4 \cdot u^2[u^2(x_2)] + \dots + c_m^4 \cdot u^2[u^2(x_m)]$$

$$\{68\}: \quad \frac{2 \cdot \sigma_y^4}{\nu_y} = c_1^4 \cdot \frac{2 u^4(x_1)}{\nu_1} + c_2^4 \cdot \frac{2 u^4(x_2)}{\nu_2} + \dots + c_m^4 \cdot \frac{2 u^4(x_m)}{\nu_m}$$

Demonstración de la fórmula de Welch-Satterthwaite

- De {68} :

$$\{69\}: \frac{u^4(y)}{v_y} = c_1^4 \cdot \frac{u^4(x_1)}{v_1} + c_2^4 \cdot \frac{u^4(x_2)^2}{v_2} + \dots + c_m^4 \cdot \frac{u^4(x_m)}{v_m}$$

- Entonces {70}:
$$v_y = \frac{u^4(y)}{c_1^4 \cdot \frac{u^4(x_1)}{v_1} + c_2^4 \cdot \frac{u^4(x_2)^2}{v_2} + \dots + c_m^4 \cdot \frac{u^4(x_m)}{v_m}}$$

$$\{71\}: v_y = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^4 \cdot u_i^4}{v_i}}$$

c. q. d.

Grados efectivos de libertad

- GUM: **G.4 Grados efectivos de libertad**
- GUM: cita 11 veces **Grados efectivos de libertad** {71}:
- GUM: cita 1 vez **Grados de libertad efectivos**

$$v_y = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^4 \cdot u_i^4}{v_i}}$$

- Incertidumbre estándar combinada: u_c
- Incertidumbre estándar de el Tipo A: u_A
- Incertidumbre estándar de el Tipo B de la fuente i : u_{B_i}
- Grados efectivos de libertad de la incertidumbre estándar combinada es el **Grados efectivos de libertad**

$$GL_{ef} = v_{ef} = \frac{u_c^4}{\frac{c_A^4 \cdot u_A^4}{v_A} + \frac{c_{B_1}^4 \cdot u_{B_1}^4}{v_{B_1}} + \dots + \frac{c_{B_m}^4 \cdot u_{B_m}^4}{v_{B_m}}}$$

Grados de libertad do Tipo A

- Grados de libertad, para evaluaciones Tipo A de la incertidumbre estándar es

$$v_A = GL_A = n - 1$$

- La varianza do Tipo A:

$$V\{X\} = s_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{v_A} = \frac{\sum_{i=1}^n d_{Ai}^2}{v_A}$$

Grados de libertad do Tipo B

- Frenkel 2003

demostró que si FDP es normal:

$$V(s) = u^2(s) = \frac{\sigma^2}{2\nu}$$

- Entonces La **incertidumbre de la incertidumbre** tiene una relación con los grados de libertad dada por: :

$$\nu = \frac{\sigma^2}{2 u^2(s)} = \frac{s^2}{2 u^2(s)}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u(s)}{s} \right)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u(u)}{u} \right)^{-2}$$

GUM G.4.2)

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u(u)}{u} \right)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100 - Cr}{100} \right)^{-2}$$

Valor entero

Cr : Credibilidade em %

Tabla GL-i: Relación entre grados de libertad y credibilidad de la fuente de incertidumbre.

Credibilidad de la fuente de incertidumbre / %	Grados de Libertade
100,0	infinito
99,9	5,00E+05
99,5	2,00E+04
99,0	5,00E+03
95,0	200
92,9	99
90,0	50
87,1	30
80,0	12
75,0	8
60,0	3
50,0	2
29,2	0
0,0	0

Grados de libertad do Tipo B

- Con $V_B = \infty$ (infinito)
procedimiento más utilizado pero no es consistente
- Con V_B dada pela tabla (NMI-AU), procedimiento consistente:

Credibilidad de la información	Malo pero aceptable	Razonable	Buena	Excelente
Graus de liberdade	3	10	30	100

Bentley, R. E. (2005). *Uncertainty in measurement: The ISO guide, Technology transfer series monograph n 1*. National Measurement Institute of Australia.

Incertidumbre Expandida

- Útil para comparación entre magnitudes
- Útil para verificación de atendimento a especificaciones o criterios de aceitação

$$U = k \cdot u_c$$

U : Incertidumbre expandida

k : Fator de cobertura

u_c : Incertidumbre estándar combinada

$$k = f(GL; PC)$$

FDP t o FDP de Student

“La función de distribución de probabilidad de la variable $\frac{\bar{x} - \mu_x}{s_x/\sqrt{n}}$ es la función de distribución t , si la variable aleatoria x está normalmente distribuida con esperanza μ_x , donde \bar{x} es la media aritmética de n observaciones independientes x_i de x , $s(x_i)$ es la desviación estándar experimental de n observaciones, y $s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar experimental de la media \bar{x} , con $v = n - 1$ grados de libertad.”

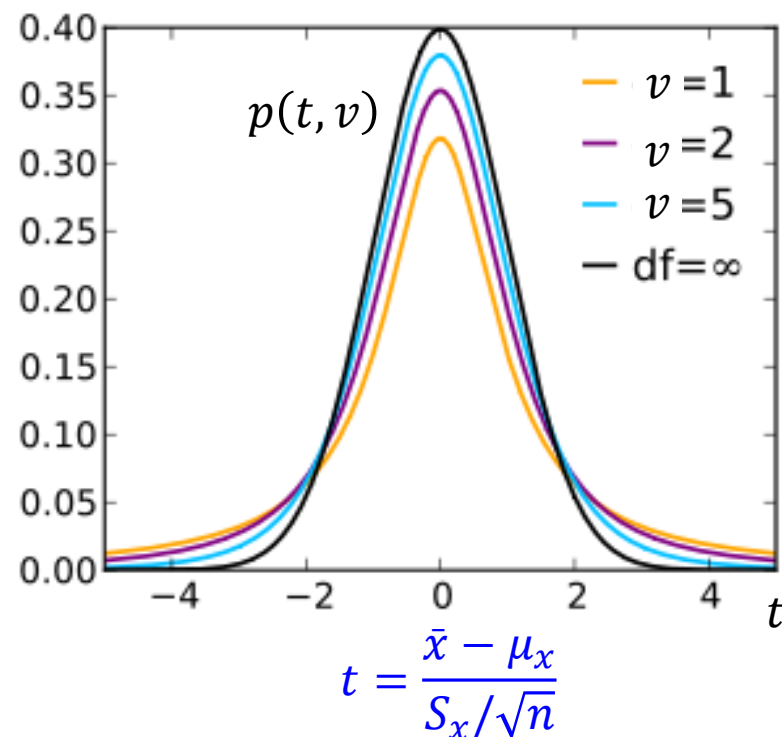
GUM, C.3.8

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

R®: $k = t = -qt((1-PC/100)/2, GL)$ MATLAB®: $k = t = -tinv((1-PC/100)/2, GL)$

$$\text{Excel®: } k = t = \text{INV.T.2C}\left(1 - \frac{PC}{100}; GL\right)$$

$$\text{Excel®: } k = t = \text{INV.T.BC}\left(1 - \frac{PC}{100}; GL\right) = \text{INV.T}\left(1 - \left(1 - \frac{PC}{100}\right)/2; GL\right)$$



Quantis para el FDP de Student, para diferentes probabilidades $p = PC$

Tabla k: Fator de cobertura para diferentes grados de libertad (GL) y probabilidades de cobertura (p), suponiendo una FDP de Student.

		Probabilidades de cobertura (p) / %							
Una cola		75	84,13	95,0	97,5	97,73	99,5	99,87	99,95
Dos colas		50	68,26	90,0	95,0	95,45	99,0	99,73	99,90
Grados de Libertad (GL)	1	1,000	1,837	6,314	12,706	13,968	63,657	235,784	636,619
	2	0,816	1,321	2,920	4,303	4,527	9,925	19,206	31,599
	3	0,765	1,197	2,353	3,182	3,307	5,841	9,219	12,924
	4	0,741	1,141	2,132	2,776	2,869	4,604	6,620	8,610
	5	0,727	1,110	2,015	2,571	2,649	4,032	5,507	6,869
	6	0,718	1,090	1,943	2,447	2,517	3,707	4,904	5,959
	7	0,711	1,077	1,895	2,365	2,429	3,499	4,530	5,408
	8	0,706	1,066	1,860	2,306	2,366	3,355	4,277	5,041
	9	0,703	1,059	1,833	2,262	2,320	3,250	4,094	4,781
	10	0,700	1,052	1,812	2,228	2,284	3,169	3,957	4,587
	15	0,691	1,034	1,753	2,131	2,181	2,947	3,586	4,073
	20	0,687	1,026	1,725	2,086	2,133	2,845	3,422	3,850
	25	0,684	1,020	1,708	2,060	2,105	2,787	3,330	3,725
	30	0,683	1,017	1,697	2,042	2,087	2,750	3,270	3,646
	50	0,679	1,010	1,676	2,009	2,051	2,678	3,157	3,496
	60	0,679	1,008	1,671	2,000	2,043	2,660	3,130	3,460
	80	0,678	1,006	1,664	1,990	2,032	2,639	3,096	3,416
100	0,677	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077	3,390	
∞	0,674	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000	3,291	



UFSB
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO SUL DA BAHIA

Evaluación de la Incertidumbre Expandida



Hipótesis:

1. Magnitude de entrada es FDP normal
2. Magnitude de salida es FDP normal
3. Incertidumbre de las magnitudes de entrada no están correlacionadas
4. Incertidumbre de las incertidumbre de las magnitudes de entrada no están correlacionadas,
5. Incertidumbre de las magnitudes de salida no están correlacionadas;
6. Incertidumbre de las incertidumbre de las magnitudes de salida no están correlacionadas.



REGIONAL FUND QUALITY INFRASTRUCTURE FOR BIODIVERSITY & CLIMATE PROTECTION
IN LATIN AMERICA AND THE CARIBBEAN

Workshop on Statistics, data analysis and measurement uncertainty in Meteorology

Fundamentos estadísticos para la evaluación de la incertidumbre en las calibraciones



Márcio A. A. Santana – INPE/BR
marcio.santana@inpe.br

Ricardo de A. Kalid – UFSB/BR
kalid@ufsb.edu.br



TECLIM-UFSB