

# El Lagrangiano del Modelo Estándar

Diego Restrepo<sup>1</sup>  
Instituto de Física  
Universidad de Antioquia  
doi: [10.5281/zenodo.596727](https://doi.org/10.5281/zenodo.596727) [[Google Scholar](#)]  
2020<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup><mailto:restrepo@udea.edu.co>

<sup>2</sup>Last version PDF: <https://github.com/restrepo/TCC/releases/latest>



# License



All materials are licensed under the [Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License](#).



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría Clásica de Campos</b>	<b>7</b>
1.1. Preliminares	7
1.2. Teoría de Grupos	7
1.2.1. Definición de grupo	7
1.2.2. $SO(2)$ y $U(1)$	7
1.2.3. $SO(3)$	10
1.2.4. $SU(2)$	13
1.2.5. Producto escalar en $SU(2)$	15
1.2.6. $SU(N)$	16
1.3. Grupo de Lorentz: $SO(1, 3)$	18
1.4. Representaciones $2 \times 2$ del Grupo de Lorentz: $SL(2, C)$	23
1.5. Unidades Naturales	26
1.5.1. Dimensiones de Planck	29
1.6. Notación relativista	31
1.6.1. Ejemplos de cuadvectores	36
1.7. Espinores de Lorentz	42
1.8. Leyes de Kirchhoff generalizadas	44
1.8.1. Resumen de productos escalares	44
1.9. Principio de Mínima Acción	48
1.10. Infinitesimal a lo integral	50
1.11. La cuerda clásica unidimensional	51
1.12. Problema variacional de Noether	55
1.13. Tipos de conservación	55
1.14. Principio de mínima acción	55
1.15. Ecuaciones de Euler-Lagrange	57
1.16. Ecuación de continuidad	60
1.17. Transformaciones externas	61
1.18. Transformaciones internas	62
1.19. Primer teorema de Noether	63
1.19.1. Simetrías externas	64
1.19.2. Simetrías internas	65
1.20. Segundo teorema de Noether	66
1.20.1. Generalización del Teorema 1 para simetrías internas	68
1.21. Campo escalar complejo	69

1.22. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	70
<b>Appendices</b>	<b>73</b>
1.A. Aplicación a Mecánica Cuántica . . . . .	73
1.A.1. Conservación del momento . . . . .	75
1.A.2. Conservación de la energía . . . . .	75
1.B. Invarianza de fase local del Lagrangiano de Schrödinger's . . . . .	77
1.B.1. Motivación . . . . .	78
1.B.2. Derivadas covariantes . . . . .	79
1.C. Ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético . . . . .	83
1.C.1. Euler-Lagrange equation for $\psi^*$ . . . . .	83
1.C.2. Corrientes conservadas . . . . .	86
1.C.3. Interpretación física . . . . .	87
1.4. Problemas . . . . .	87
<b>2. Escalares</b>	<b>89</b>
2.1. Construcción de Lagrangianos covariantes . . . . .	89
2.2. Transformación de Lorentz para campos escalares . . . . .	90
2.3. Principio de mínima acción para campos . . . . .	91
2.3.1. Ecuaciones covariantes . . . . .	92
2.4. Campos escalares complejos . . . . .	93
<b>3. Fermiones</b>	<b>95</b>
3.1. Preliminares . . . . .	95
3.2. Transformaciones de Lorentz para campos fermiónicos . . . . .	95
3.3. Lagrangiano fermiónico . . . . .	97
3.3.1. Corriente conservada y Lagrangiano de Weyl . . . . .	99
3.3.2. Tensor momento-energía . . . . .	100
3.3.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	101
3.3.4. Lorentz invariance of the Weyl Action . . . . .	103
3.3.5. Righthanded fermion . . . . .	106
3.4. Espinores de Dirac . . . . .	106
<b>Appendices</b>	<b>111</b>
3.1. Representación de operadores . . . . .	111
3.A. Grupo de Lorentz . . . . .	112
3.2. Problemas . . . . .	113
3.2.1. Escalares . . . . .	113
3.2.2. Fermiones . . . . .	113
<b>4. Campos vectoriales</b>	<b>115</b>
4.1. Lagrangiano electromagnético . . . . .	115
4.1.1. Tensor Electromagnético . . . . .	120
4.2. Invarianza $U(1)$ . . . . .	124
4.2.1. Energía del campo electromagnético . . . . .	125
4.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante . . . . .	127
4.4. Fijación del gauge . . . . .	131

4.5. Ecuaciones de Proca . . . . .	132
<b>Appendices</b>	<b>135</b>
4.A. Lagrangiano para el campo vectorial . . . . .	135
4.2. Problemas . . . . .	136
<b>5. Principio gauge local</b>	<b>137</b>
5.1. Electrodinámica Cuántica . . . . .	137
5.2. Momento magnético del electrón . . . . .	146
5.2.1. Paridad . . . . .	147
5.3. Cromodinámica Cuántica . . . . .	147
5.3.1. Tensores cromodinámicos . . . . .	154
5.3.2. Lagrangiano QCD . . . . .	158
5.3.3. Ecuaciones de Euler–Lagrange . . . . .	161
5.3.4. Corrientes conservadas . . . . .	163
5.4. Anotaciones finales . . . . .	164
<b>Appendices</b>	<b>165</b>
5.A. Derivación alternativa . . . . .	165
5.B. Invarianza de fase local para campo escalar complejo . . . . .	166
5.C. Soluciones a la ecuación de Dirac . . . . .	168
5.C.1. Lagrangiano de Weyl . . . . .	168
5.C.2. Ecuaciones de Weyl . . . . .	168
5.D. Espín . . . . .	169
5.E. Solución de partícula libre . . . . .	172
5.6. Ejercicios . . . . .	176
<b>6. Campos de radiación masivos</b>	<b>177</b>
6.1. Potencial de Yukawa . . . . .	177
6.2. Mecanismo de Stueckelberg . . . . .	183
6.3. El resurgimiento del éter. . . . .	184
6.4. Campo escalar real . . . . .	189
6.4.1. Ausencia de taquiones . . . . .	192
6.4.2. Caso complejo . . . . .	192
6.5. Electrodinámica cuántica escalar . . . . .	194
6.5.1. Gauge unitario . . . . .	195
6.5.2. Superconductividad . . . . .	196
6.6. SU(2) escalar con RES . . . . .	197
6.7. Masas para fermiones de Weyl . . . . .	202
6.7.1. Ejercicio . . . . .	204
<b>7. Modelo Estándar</b>	<b>205</b>
7.1. Contenido de partículas . . . . .	205
7.2. Interacciones débiles . . . . .	206
7.3. Simetría gauge local $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . . . . .	207
7.4. Ruptura espontánea de simetría . . . . .	209
7.5. Una teoría para leptones de la primera generación . . . . .	211

7.5.1.	Interacciones débiles fermión-gauge para leptones . . . . .	211
7.5.2.	El gauge unitario . . . . .	216
7.5.3.	Auto interacciones . . . . .	220
7.5.4.	Lagrangiano de Yukawa para leptones . . . . .	220
7.5.5.	Lagrangiano completo para leptones . . . . .	221
7.5.6.	Notación de Dirac . . . . .	222
7.5.7.	Lagrangiano completo para leptones en notación de Dirac . . . . .	225
7.6.	Una teoría para la primera generación . . . . .	225
7.6.1.	Interacciones débiles Fermión-gauge . . . . .	225
7.6.2.	Interacciones fermiónicas para la primera generación . . . . .	226
7.6.3.	Lagrangiano de Yukawa . . . . .	226
7.6.4.	Lagrangiano completo para al primera generación en el gauge unitario . . . . .	227
7.7.	Notación de Dirac para la primera generación . . . . .	228
7.8.	Dinámica de sabor . . . . .	230
7.8.1.	Dos generaciones leptónicas . . . . .	230
7.8.2.	Dos generaciones de quarks . . . . .	231
7.8.3.	Tres generaciones . . . . .	232
7.9.	Fenomenología Electrodébil . . . . .	236
7.9.1.	Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas . . . . .	241
7.10.	Resumen . . . . .	244
7.11.	Lecturas recomendadas . . . . .	248
<b>8.</b>	<b>Construcción de modelos</b>	<b>249</b>
8.1.	Representación diagramática de interacciones . . . . .	249
8.2.	Masas de neutrinos . . . . .	250
8.3.	Masas de neutrinos a 1-loop . . . . .	250
<b>A.</b>	<b>Potencial de Yukawa</b>	<b>253</b>
A.1.	Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	253
<b>B.</b>	<b>Dirac Action</b>	<b>255</b>
B.1.	Dirac's Action . . . . .	255
B.1.1.	Lorentz transformation . . . . .	255
B.1.2.	Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac . . . . .	257
B.1.3.	Tensor momento-energía . . . . .	258
B.1.4.	Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	259
B.1.5.	Propiedades de las matrices de Dirac . . . . .	262
B.1.6.	Lorentz invariance of the Dirac Action . . . . .	263
B.1.7.	Dirac's Lagrangian . . . . .	265
<b>C.</b>	<b>Soluciones a la ecuación de Dirac</b>	<b>267</b>
C.1.	Fermiones quirales de cuatro componentes . . . . .	267
C.1.1.	Fermiones de Weyl . . . . .	269
C.2.	Soluciones a la ecuación de Dirac . . . . .	269
C.2.1.	Lagrangiano de Weyl . . . . .	269
C.3.	Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético . . . . .	270
C.4.	Problemas . . . . .	273



C.5. Apéndices . . . . .	273
C.6. Fermiones quirales de cuatro componentes . . . . .	273
C.6.1. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac . . . . .	275
C.6.2. Tensor momento-energía . . . . .	277
C.6.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	277
C.6.4. Propiedades de las matrices de Dirac . . . . .	280
<b>D. Soluciones a los problemas</b>	<b>283</b>
<b>E. Trabajos de fin de curso</b>	<b>289</b>
E.1. 2017-1 . . . . .	289
E.2. 2018-1 . . . . .	289

# Introducción

Nuestro entendimiento de cómo funciona el mundo físico ha llegado a una culminación exitosa en años recientes con el desarrollo y comprobación experimental del Modelo Estándar (ME) de las interacciones fundamentales. A medida que el ME ha llegado a ser mejor entendido y comprobado experimentalmente, mucha más gente con algunos conocimientos en física desea entender cuantitativamente éste nuevo éxito de la ciencia moderna. Debido a esto, parece esencial tener una presentación del ME que pueda ser usada a nivel de pregrado. En el presente trabajo pretendemos desarrollar un núcleo básico de temas que permitan construir el Lagrangiano del Modelo Estándar y mostrar que dentro de este marco se pueden ilustrar los aspectos más importantes del ME. Este material de apoyo está dirigido a personas que con conocimientos de mecánica y electromagnetismo a nivel de pregrado quieran obtener un conocimiento básico de los principios subyacentes y las principales predicciones del Modelo Estándar de las partículas elementales que permita apreciar una de las fronteras más importantes de la ciencia moderna.

El Modelo Estándar da una descripción amplia de las partículas básicas y las fuerzas de la naturaleza y de como pueden ser descritos todos los fenómenos físicos que vemos. Este contiene los principios subyacentes de todo el comportamiento de protones, núcleos, átomos, moléculas, materia condensada, estrellas, y más. El Modelo Estándar ha explicado mucho de lo que no fue entendido antes; ha hecho cientos de predicciones exitosas, incluyendo muchas que han sido dramáticas; y a excepción de los resultados sobre oscilaciones de neutrinos, no hay ningún fenómeno en su dominio que no haya sido explicado.

La madurez de la formulación del Modelo Estándar hace que cada vez sea más necesario que cualquier persona formada en física deba tener un conocimiento básico de sus principios subyacentes y sus principales predicciones. Sin embargo, una apreciación completa del éxito y el significado del Modelo Estándar requiere de un conocimiento profundo de la Teoría Cuántica de Campos que va más allá de lo que es enseñado usualmente en los cursos de pregrado en física. La Teoría Cuántica de Campos combina de forma coherente la mecánica cuántica y la relatividad especial. No fue sino hasta que la Teoría Cuántica de Campos quedó completamente formulada a principio de los años setenta (con la prueba de que las Teorías Gauge no abelianas con ruptura espontánea de simetría eran renormalizables), que el Modelo Estándar consiguió emerger como la teoría que explica el comportamiento conocido de las partículas elementales y sus interacciones.

A medida que el Modelo Estándar ha llegado a ser mejor entendido y comprobado experimentalmente, mucha más gente con algunos conocimientos en física pero que no esta interesada en trabajar en física de partículas, desea entender cuantitativamente éste nuevo éxito de la ciencia moderna. Debido a esto, parece esencial tener una presentación del Modelo Estándar que pueda ser usada a nivel pregrado. Además, parece aún más importante tener libros que cualquier estudiante o físico que tenga los conocimientos necesarios pueda leer para aprender sobre los desarrollos en física de partículas. Aquellos desarrollos deberían ser parte de la educación de cualquiera interesado en lo que la humanidad ha aprendido acerca de los constituyentes básicos de la materia y las fuerzas de la

naturaleza.

Pero hasta hace poco tiempo no había un sitio donde las personas con los conocimientos suficientes pudieran ir a aprender esos desarrollos. Para llenar este vacío aparecieron libros como el de Kane [1] (1993), Cottingham [2] (1998) o Siegel [47] (1999) donde los prerequisites mínimos son un curso introductorio en mecánica cuántica (Física Moderna) y los cursos normales de pregrado en mecánica y electromagnetismo. Con éstas herramientas es posible obtener un buen entendimiento a nivel cuantitativo de la física de partículas moderna. En estos libros se ha hecho un esfuerzo por extraer los conceptos y técnicas básicas usadas en el Modelo Estándar de modo que un mayor número de físicos no especializados en el área puedan tener una visión del logro intelectual representado por el Modelo, y compartir el excitamiento por su éxito. En estos libros el Modelo Estándar es enseñado escribiendo la forma básica de la teoría y extrayendo sus consecuencias.

Todos los tratamientos anteriores eran a nivel de posgrado para físicos que querían especializarse en el área, o descripciones populares demasiado superficiales para realmente entender los desarrollos, o descripciones históricas carentes de la lógica profunda del Modelo Estándar.

Con nuestra experiencia dictando los cursos de introducción a la física de partículas en la carrera de Física basados en estos textos, ha quedado claro que con una presentación del Modelo Estándar de una forma deductiva en lugar de la aproximación histórica usual de los libros más avanzados, los estudiantes pueden llegar a entender la estructura básica de la física de partículas moderna. Además resulta ser una pequeña extensión adicionar el marco apropiado para entender porque algunas direcciones de la investigación de frontera se enfatizan más, y en que direcciones se espera que aparezcan nuevos progresos.

Con el presente trabajo queremos ir más allá del objetivo de los anteriores libros y mostrar que con una reorganización e inclusión de tópicos adicionales no enfatizado en esos libros, con sólo los conocimientos de los cursos normales de pregrado en mecánica y electromagnetismo, se puede llegar más rápidamente a un entendimiento cuantitativo de los aspectos más importantes del Modelo Estándar.

En el presente trabajo pretendemos desarrollar un núcleo básico de temas que permitan construir el Lagrangiano del Modelo Estándar y mostrar que dentro de este marco se pueden ilustrar los aspectos más importantes del Modelo Estándar.

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) es el marco teórico utilizado en la descripción cuántica de campos relativistas. En esta teoría se estudian sistemas en los cuales las partículas pueden ser creadas y destruidas. Esta teoría resulta de combinar la mecánica cuántica con la relatividad especial en un marco consistente. Las teorías cuánticas de campos se describen más convenientemente en el formalismo Lagrangiano. De hecho, los Lagrangianos que describen las partículas elementales y sus interacciones puede ser construidos a partir de principios de simetría. Aspectos básicos de la construcción de la TCC son:

- Lagrangianos para campos de una sola partícula
- Tratamiento relativístico de un campo
- Segunda cuantización de campos de una sola partícula, bien sea mediante la cuantización canónica o a través de integrales de camino
- Tratamiento de una sola partícula de forma covariante que permita describir la creación y aniquilación de partículas.
- Invarianza gauge local

Ejemplos concretos de teorías cuánticas de campos son:

- **Electrodinámica Cuántica.** Resulta de imponer el principio gauge local basado en una simetría abeliana a la ecuación de Dirac para el electrón. Como resultado se obtienen las ecuaciones de Maxwell con un término de corriente asociada a la interacción electromagnética entre el electrón y el fotón.
- **Cromodinámica Cuántica.** Resulta de imponer el principio gauge local basado en una simetría no abeliana a la ecuación de Dirac para los quarks. Entre los resultados se explica la libertad asintótica observada en las interacciones fuertes y la autointeracción de los bosones gauge.
- **Teoría Electrodébil.** Resulta de imponer el principio gauge local simultáneamente para una simetría abeliana y para una simetría no abeliana a la ecuación de Dirac para los fermiones conocidos. La simetría no abeliana en este caso prohíbe términos de masa para los fermiones, mientras que la invarianza gauge local, como en los casos anteriores, prohíbe los términos de masa para los bosones gauge. De este modo, cuando las simetrías de la teoría electrodébil son exactas, todas las partículas aparecen sin masa. Para ser consistente con el espectro de fermiones y bosones conocidos, se introducen 4 campos escalares sin masa organizado en lo que se conoce como un doblete de Higgs. Uno de ellos desarrolla un valor esperado de vacío y rompe espontáneamente la simetría, generando masa para todos los fermiones. Mediante el mismo mecanismo los otros 3 campos escalares ayudan a explicar las masas para tres de los bosones gauge del modelo. El fotón, junto con los neutrinos permanecen sin masa.

El Modelo Estándar es la TCC que combina de forma consistente la Cromodinámica Cuántica y la Teoría Electrodébil. Después del rompimiento espontáneo de la simetría la parte Electrodébil se reduce a la Electrodinámica Cuántica. El estudio de los fundamentos y las consecuencias fenomenológicas del Modelo Estándar requiere del desarrollo completo de la TCC basado en conceptos y técnicas avanzadas de mecánica cuántica y relatividad especial a un nivel normalmente de posgrado.

En las TCC los campos electromagnéticos se convierten en operadores que dependen del espacio y el tiempo. Los valores esperados de estos operadores en el ambiente descrito por los estados cuánticos dan lugar a los campos clásicos. Los otros campos bosónicos, y los campos de Dirac para los fermiones del Modelo Estándar también se convierten en operadores.

Sin embargo se puede escribir la forma básica del Modelo Estándar y extraer muchas de sus consecuencias tratando los campos bosónicos y de Dirac como simples funciones.

En éste caso las excitaciones del campo se pueden pensar como funciones de ondas de una partícula. En este contexto el Lagrangiano del Modelo Estándar puede construirse usando solo conocimientos a nivel de pregrado de mecánica y electromagnetismo y algunas referencias a aspectos básicos de la mecánica cuántica.

Con estas herramientas se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante y mostrar como éstas se pueden obtener, usando el principio de mínima acción, a partir del Lagrangiano para el vector de campo electromagnético. Se puede introducir a este nivel la importante idea de las transformaciones gauge y relacionarla con la conservación de la carga eléctrica. Se puede generalizar el Lagrangiano para describir campos vectoriales masivos, lo que da lugar a la ecuación de Proca. A este punto, se puede obtener el Lagrangiano para una partícula escalar real, a partir de la componente escalar del campo vectorial y mostrar que dicho Lagrangiano da lugar a la ecuación de Klein-Gordon. Tomando la componente escalar como un campo independiente se puede usar el principio gauge local para estudiar sus interacciones con los campos gauge. Usando conceptos de mecánica cuántica

se puede generalizar el potencial del Lagrangiano para el campo escalar de modo que se pueda interpretar su masa como las oscilaciones del campo alrededor de estado de energía fundamental, el vacío. Se puede estudiar a partir de allí, la ruptura espontánea de simetría. Con estos ingredientes se puede construir finalmente el Lagrangiano bosónico del Modelo Estándar.

De forma más general se puede definir los campos fermiónicos y bosónicos a partir de sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz y usarlo para construir Lagrangianos suficientemente simples imponiendo simetrías internas adicionales.

Siguiendo esta línea, primero se introducen los conceptos necesarios de teoría de Grupos y de relatividad especial haciendo énfasis en los productos escalares bajo diferentes grupos de transformación como los bloques fundamentales para describir la Acción asociada a los campos. Para enfatizar estos puntos se establecen las leyes de Kirchhoff generalizadas para corrientes más allá de la corriente eléctrica. Los campos fundamentales: escalares, vectoriales y espinoriales que pueden formar multipletes bajo simetría internas, aparecen simplemente como objetos de esos espacios externos e internos que sufren las transformaciones de esos grupos internos y externos.

Para conectar con los aspectos más físicos relacionados con los campos, se muestra que el principio de mínima Acción que usa como coordenadas generalizadas las oscilaciones de los campos y sus correspondientes derivadas, es un método conveniente para analizar cualquier teoría clásica de campos. Todas ellas están conectadas a través de los dos teoremas de Noether asociados con las transformaciones globales y locales respectivamente. Mostramos entonces que para los campos fermiónicos las transformaciones globales dan lugar a los diferentes postulados de la mecánica cuántica cuando se interpretan como sistemas de una sola partícula descritos por funciones de onda. De otro lado, las simetrías locales internas permiten clasificar a los campos en dos tipos: los campos de radiación y los campos de materia. Mostramos entonces como la transformación gauge de un campo de radiación Abelian da lugar a las ecuaciones de Maxwell. De la misma forma, una transformación gauge de un campo de materia con carga eléctrica da lugar a la Acción de la electrodinámica cuántica. Después de generalizar los campos de materia y radiación a simetrías no Abelianas, pasamos a estudiar el problema de la generación de las masas para los campos fundamentales.

A continuación se describe el contenido de algunos capítulos en un orden que no necesariamente coincide con el de la versión actual del texto.

En el capítulo 1 se ha abordado la formulación Lagrangiana de la Teoría de Campos Clásica. Al comienzo del capítulo se intrucen algunas nociones preliminares de Teoría de Grupos y de relatividad especial. En particular se hace énfasis en que cuando la velocidad de propagación de los fenómenos ondulatorios no es independiente bajo transformaciones de Lorentz, la notación asociada a la relatividad especial sigue siendo útil. De esta manera, nuestra formulación de la teoría clásica de campos es aplicable a cualquier sistema ondulatorio. En el primer capítulo se hace énfasis en usar solo la notación relativista sin necesidad de imponer la invarianza de Lorentz en ninguno de los resultados importantes, de modo que se puedan aplicar por ejemplo a la ecuación de Schrödinger.

En la sección 1.9 (ver Anexo 2), se formula el Principio de Mínima Acción para sistemas de partículas y se establece que la cantidad a minimizar corresponde al Lagrangiano del sistema. Este Lagrangiano depende de coordenadas generalizadas de desplazamiento y su derivada temporal.

En la sección 1.11 se construye el sistema continuo más simple correspondiente a las oscilaciones de una cuerda unidimensional. Esta se construye suponiendo un sistema discreto de partículas unidas por resortes que oscilan alrededor de su punto de equilibrio. Usando las técnicas de la sección 1.9 se construye el Lagrangiano interpretando como desplazamiento el campo que describe las oscilaciones de cada partícula. Tomando el límite de infinitas partículas y separación cero, se reescribe la Acción en términos de la densidad Lagrangiana y se establece que para sistemas continuos es dicha densi-

dad Lagrangiana la que hay que minimizar para establecer el principio de mínima acción. Tenemos entonces de un lado la Lagrangiana como punto de partida para describir las coordenadas de sistemas discretos, y la densidad Lagrangiana para describir los campos de desplazamiento de sistemas continuos.

En la sección 1.14 se usan métodos variacionales para calcular la variación de la acción debida a transformaciones de los campos (transformaciones internas) y de las coordenadas (transformaciones externas). Con este resultado se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de la densidad Lagrangiana y se demuestra el Teorema de Noether. Para simetrías internas se encuentra la expresión para la corriente conservada  $J^\mu$  en términos de la densidad Lagrangiana. Para simetrías externas se encuentra la expresión para el tensor  $T^{\mu\nu}$ , que en sistemas relativistas se interpreta como el tensor de momento-energía  $T^{\mu\nu}$ .

De este modo dada una densidad Lagrangiana, las cantidades a calcular corresponden a la ecuación de movimiento resultante de la ecuaciones de Euler Lagrange, la corriente conservada  $J^\mu$  si la densidad de Lagrangiana posee alguna simetría continua, y el tensor  $T^{\mu\nu}$ .

Para la densidad Lagrangiana que da lugar a la ecuación de Schrödinger en la sección 1.A, la simetría interna de invarianza de fase da lugar a la conservación de la probabilidad,  $\int_V T_0^0 d^3x$  da lugar a la energía del sistema, y la integral de  $T_0^i$  da lugar al correspondiente número de onda de la solución de onda plana para la ecuación de Schrödinger.

La densidad Lagrangiana para la cuerda unidimensional no posee simetrías internas continuas. Con respecto a las simetrías externas, en la sección ?? se muestra que para interpretar correctamente el tensor  $T_\nu^\mu$  en este caso, es preciso cuantizar el campo que describe las oscilaciones de la cuerda. Al cuantizarlo se encuentra que éste describe una partícula que transporta energía, y en el límite en el cual la velocidad de la onda es la velocidad de la luz, la partícula correspondiente también transporta momentum. De hecho, para que una onda sea solución a las ecuaciones que describen las oscilaciones de una cuerda unidimensional relativista se requiere que su frecuencia y número de onda satisfagan la ecuación de energía-momento relativista con masa cero.

En el capítulo 4 enfatiza la importancia de las transformaciones de Lorentz para la construcción de las densidades Lagrangianas compatibles con la relatividad especial, las cuales describen tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Se estudia la versión covariante de las ecuaciones de Maxwell. Después de introducir las unidades naturales en la sección 1.5 y la notación relativista en la sección 1.6, la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell se desarrolla en la sección 4.3. Allí se explota la invarianza gauge para encontrar el Lagrangiano electromagnético, el cual se reduce a las ecuaciones de Klein-Gordon con masa igual a cero cuando se escoge el Gauge de Lorentz. En la sección 4.5, se modifican las ecuaciones de Maxwell para permitir un término de masa. Cómo dicho término rompe la invarianza gauge de la teoría, el gauge de Lorentz pasa a ser una condición ineludible que da lugar a la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial.

En el cuarto capítulo 6 se reemplaza el potencial escalar de  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  a  $\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ . De modo que  $\mu$  no puede interpretarse como un parámetro de masa. Este potencial contiene un conjunto degenerado de vacíos que no respetan la invarianza del Lagrangiano. El análisis del espectro partículas alrededor de uno de estos mínimos da lugar a bosones de Higgs masivos, sección ??, bosones de Goldstone, sección ??, y campos gauge masivos, sección ?? a través del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría. La sección ?? es un aplicación de todos los conceptos y técnicas desarrollados al caso del sector bosónico del Modelo Estándar de las partículas elementales.

En el capítulo 7, se construye el Lagrangiano leptónico gauge local para el Grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  que describe correctamente las interacciones débiles y electromagnéticas. Como 3 de los 4 bosones gauge son masivos debe introducirse un potencial escalar que rompa espontáneamente la simetría.

En la sección 5.3 se introduce el grupo gauge local no Abelian responsable de las interacciones fuertes entre quarks y que completa la estructura de grupo del Modelo Estándar de las partículas elementales.

La página web del curso está en:

<http://fisica.udea.edu.co/cursos>

# Capítulo 1

## Teoría Clásica de Campos

Mostraremos la conexión entre teoría clásica de campos y relatividad especial.

### 1.1. Preliminares

Antes de entrar en materia, se sentarán las bases teóricas necesarias sobre el sistema de unidades más utilizado en física subatómica en la Sección 1.5 y temas de relatividad especial que serán utilizados posteriormente en la Sección 1.6. Los ejemplos de cuadvectores en la Subsección se dejan como referencia para posible uso posterior

### 1.2. Teoría de Grupos

#### 1.2.1. Definición de grupo

Ver <https://indico.cern.ch/event/243629>

#### 1.2.2. SO(2) y U(1)

SO(2)

SO(2) es el grupo de rotaciones de dos ejes reales . Una representación matricial corresponde al Grupo de matrices  $2 \times 2$  ortogonales de determinante 1

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

donde

$$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det[R(\theta)] = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Éste es un grupo continuo. Por lo tanto se puede generar a partir de transformaciones infinitesimales. Para ello, considere el generador del Grupo de Rotaciones en dos dimensiones

$$(\tau)_{ab} = -i\epsilon_{ab}, \quad (1.1)$$



tal que

$$\epsilon_{ac}\epsilon_{cb} = -\delta_{ab}.$$

Entonces

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

con álgebra

$$\tau^2 = \mathbf{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Por consiguiente

$$\tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \tau.$$

Definimos una representación matricial del Grupo de las rotaciones como

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \exp(i\tau\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\tau)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Con esta definición  $R(\theta)$  es ortogonal ya que

$$\begin{aligned} R^T(\theta) &= \exp(i\tau^T\theta) \\ &= \exp(-i\tau\theta) \\ &= R^{-1}(\theta), \end{aligned} \quad (1.5)$$

y además

$$\det[R(\theta)] = \det[\exp(i\tau\theta)] = \exp[i \operatorname{Tr}(\tau)] = e^0 = 1. \quad (1.6)$$

Para realizar la expansión de Taylor en la ec. (1.4), podemos usar la matriz de traza nula y hermítica en ec. (1.2) y generalizar sus potencias para  $n$  entero

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \exp(i\theta\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\tau)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(\theta\tau)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{(\theta\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Este grupo es Abelian, ya que

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) \tag{1.8}$$

El producto escalar entre dos vectores con respecto a un sistema inicial  $(x, y)$  y un sistema final rotado  $(x', y')$  se puede obtener a partir de la rotación del sistema inercial al sistema final

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

En componentes, tenemos

$$x^i \rightarrow x'^i = \sum_j R^i_j x^j. \tag{1.11}$$

Definiendo el producto escalar como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{ij} \delta_{ij} x^i y^j, \tag{1.12}$$

podemos demostrar que es invariante bajo rotaciones. Para demostrarlo aplicamos la rotación (1.11) sobre el producto escalar rotado:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &\rightarrow \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = \sum_{ij} \delta_{ij} x'^i y'^j \\
&= \sum_{ijkl} \delta_{ij} R^i_k x^k R^j_l y^l \\
&= \sum_{ijkl} R^i_k \delta_{ij} R^j_l x^k y^l \\
&= \sum_{ikl} R^i_k R^i_l x^k y^l \\
&= \sum_{kl} (R^T)_k^i R^i_l x^k y^l \\
&= \sum_{kl} x^k (R^T R)_{kl} y^l
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{kl} \delta_{kl} x^k y^l \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} ,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

En forma compacta, usando (1.13), tenemos que si  $\mathbf{x}$  es un vector en  $SO(2)$

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x} , \quad \mathbf{x}^T \rightarrow \mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T R^T , \tag{1.15}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} . \tag{1.16}$$

En mecánica clásica el Lagrangiano es una función de escalares y por lo tanto un vector debe aparecer en forma de producto escalar, como en el caso de la energía cinética que es proporcional a  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

La formulación Lagrangiana de la teoría clásica de campos que desarrollaremos a continuación hace uso también de productos escalares. Por lo tanto es conveniente definir el producto escalar en todos los espacios posibles para su uso posterior. Comencemos con el grupo  $U(1)$

$U(1)$

El Grupo  $U(1)$  corresponde a las rotaciones de un eje complejo. Tiene como elementos a los números complejos de módulo 1, los cuales en coordenadas polares se puede representar como

$$U(\theta) = e^{i\theta Y} , \tag{1.17}$$

donde  $Y$  es el generador de los elementos del Grupo y su representación es un número real (arbitrario)<sup>1</sup>. En este grupo,  $U^*(\theta) = U(-\theta)$  es el inverso y  $U(0)$  es la identidad.

Estos dos grupos son isomorfos: para un elemento complejo  $U(\theta)$  el correspondiente elemento en  $SO(2)$  es la rotación por el ángulo de cambio de fase de  $U(\theta)$ .

Sea  $\psi$  un *vector* en el espacio  $U(1)$ , en el sentido que puede sufrir transformaciones de cambio de fase del tipo

$$\begin{aligned}
\psi &\rightarrow \psi' = U(\theta)\psi = e^{i\theta Y} \psi \\
\psi^* &\rightarrow \psi'^* = \psi^* U^*(\theta) = \psi^* e^{-i\theta Y} .
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Podemos definir el producto escalar como

$$\psi \cdot \psi \equiv \psi^* \psi \rightarrow \psi'^* \psi' = \psi^* U^*(\theta) U(\theta) \psi = \psi^* \psi = \psi \cdot \psi . \tag{1.19}$$

### 1.2.3. $SO(3)$

Una representación matricial de esta álgebra se puede obtener con la llamada representación adjunta del Grupo de rotaciones en 3 dimensiones,  $SO(3)$ , definida a partir de las constantes de estructura [32]

$$(L^i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} . \tag{1.20}$$

---

<sup>1</sup>Se suele asumir que es racional

Explícitamente

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estos generadores satisfacen el álgebra (suma sobre índices repetidos)

$$[L^i, L^j] = i\epsilon_{ijk}L^k. \quad (1.21)$$

Estos generan los elementos de  $SO(3)$

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(i\theta_j L^j), \quad \text{sum in } j \\ &= \exp(i\theta_1 L_1 + i\theta_2 L_2 + i\theta_3 L_3). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para aislar los subgrupos de un parámetro definimos:

$$R_i \equiv R(\theta_i) \quad (1.23)$$

donde, haciendo los mismos pasos que para  $SO(2)$  en (1.7),

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad R(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

que corresponden respectivamente a rotaciones sobre el eje  $x$  por un ángulo  $\theta_1$ , sobre el eje  $y$  por un ángulo  $\theta_2$ , sobre el eje  $z$  por un ángulo  $\theta_3$ .

Sin pérdida de generalidad, un elemento del grupo  $SO(3)$ , es decir, una matriz  $3 \times 3$  ortogonal de determinante 1,  $R(\boldsymbol{\theta})$ , se puede definir como el producto de las anteriores matrices de rotación de un parámetro

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\theta}) &= R(\theta_1)R(\theta_2)R(\theta_3) \\ &= \begin{pmatrix} c_1c_2 - c_3s_1s_2 & c_1c_2 + c_3c_1s_2 & s_3s_2 \\ -c_1s_2 - c_3s_1s_2 & -s_1s_2 + c_3c_1c_2 & s_3c_2 \\ s_3s_1 & -s_3c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde  $c_i = \cos \theta_i$ ,  $s_i = \sin \theta_i$ .

Claramente, el Grupo  $SO(3)$  es no Abelian, es decir

$$R(\boldsymbol{\theta}_1)R(\boldsymbol{\theta}_2) \neq R(\boldsymbol{\theta}_2)R(\boldsymbol{\theta}_1)$$

El producto escalar bajo  $SO(3)$  es invariante:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.26)$$

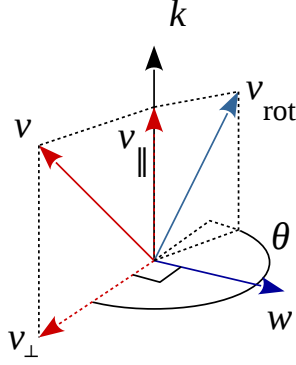


Figura 1.1: Rotación vector velocidad. Tomado de [?]

Note que la combinación lineal se puede expresar como

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L} &= i\theta_1 L_1 + i\theta_2 L_2 + i\theta_3 L_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Un ejemplo de vector es el vector de velocidad,  $\mathbf{v}$ . Sea  $\mathbf{k}$  un vector unitario describiendo un eje de rotación sobre el cual  $\mathbf{v}$  rota por un ángulo  $\theta$  de acuerdo a la regla de la mano derecha como se ilustra en la figura 1.1.

Representado el resultado del producto vectorial  $\mathbf{k} \times \mathbf{v}$  como una matrix columna,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\mathbf{k} \times \mathbf{v})_x \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{v})_y \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{v})_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_y v_z - k_z v_y \\ k_z v_x - k_x v_z \\ k_x v_y - k_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{K} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Si definimos la matriz de rotación,  $R$  perteneciente a  $SO(3)$ , a través de un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $\mathbf{k}$

$$R(\theta) = \exp(-i\theta i\mathbf{K}), \quad (1.30)$$

entonces

$$R(\theta) = I + \mathbf{K} \sin \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{K}^2. \quad (1.31)$$

done  $I$  es la matriz identidad. En [?] se encuentra la demostración.

En general, Los objetos que sufren transformaciones en  $SO(N)$  son vectores en ese espacio,  $\mathbf{x}$ , que dejan el producto escalar bajo la métrica  $\delta_{ij}$  del tipo (1.26) invariante.

### 1.2.4. $SU(2)$

La representación matricial isomorfa a  $SO(3)$  pero con matrices  $2 \times 2$  corresponde al Grupo  $SU(2)$  de rotaciones de dos ejes complejos. Las matrices de Pauli son un conjunto de matrices que satisfacen la misma álgebra de  $SU(2)$

$$\left[ \frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau^k}{2} \quad (1.32)$$

donde  $\tau^i$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

dividas por dos, corresponden a los generadores del Grupo. Las constantes de estructura del Grupo corresponden a  $\epsilon_{ijk}$ . Como los generadores no conmutan,  $SU(2)$  es un Grupo de Lie no Abelian. Definiendo los generadores de  $SU(2)$  como

$$T^i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (1.34)$$

Las matrices de Pauli y por consiguiente  $T_i$  satisfacen

$$\begin{aligned} \tau_i^\dagger &= \tau_i \\ \text{Tr}(\tau_i) &= 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Además

$$\begin{aligned} \det(\tau_i) &= -1 \\ \{\tau_i, \tau_j\} &= 2\delta_{ij} \cdot I \Rightarrow \tau_i^2 = I \\ \text{Tr}(\tau^i \tau^j) &= 2\delta^{ij} \\ \tau_i \tau_j &= i\epsilon_{ijk} \tau_k + \delta_{ij} \cdot \end{aligned} \quad (1.36)$$

Un elemento del Grupo puede escribirse como

$$U(\boldsymbol{\theta}) = e^{iT^i \theta_i} \approx 1 + iT^i \theta_i = 1 + i \frac{\tau^i}{2} \theta_i. \quad (1.37)$$

Como antes,  $\theta_i$  son los parámetros de la transformación. Usando las propiedades  $T_i$ , podemos mostrar que la representación matricial  $2 \times 2$ ,  $U(\boldsymbol{\theta})$ , satisface

1. Unitariedad:  $U^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = U^\dagger(\boldsymbol{\theta})$ . En efecto

$$\begin{aligned} U^\dagger(\boldsymbol{\theta}) U(\boldsymbol{\theta}) &= e^{-iT^{i\dagger} \theta_i} e^{iT^i \theta_i} \\ &= e^{-iT^i \theta_i} e^{iT^i \theta_i} \\ &= e^{\mathbf{0}} \\ &= \mathbf{1}, \end{aligned}$$

la identidad  $2 \times 2$ .

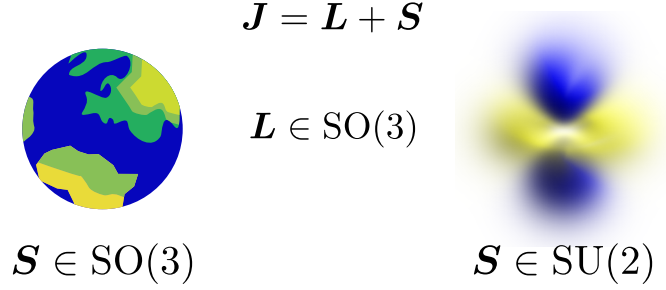


Figura 1.2: momento angular total para la tierra y un electrón no relativista. Créditos <https://www.flaticon.com/authors/smashicons> y Wikipedia

2. Especial (Special): Usando la formula de Jacobi para la exponencial de una matriz,  $A$ ,  $e^A = e^{\text{Tr } A}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \det[U(\boldsymbol{\theta})] &= \det \left\{ \exp \left[ i \text{Tr} (T^i) \theta_i \right] \right\} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De esta manera  $T_i$  genera el grupo de matrices  $2 \times 2$  unitarias y de determinante 1:  $SU(2)$ .

El grupo  $SU(2)$  de rotaciones de dos ejes complejos, es isomorfo al Grupo  $SO(3)$  de rotaciones sobre tres ejes reales.

Estas relaciones se pueden generalizar a rotaciones en mayores dimensiones.

En la fig. 1.2 se ilustra el momento angular total para la tierra y un electrón no relativista. El momento angular total de la tierra es la suma vectorial del momento angular orbital (alrededor del sol) y el momento angular intrínseco (la rotación de la tierra sobre eje). Ambos vectores transforman bajo rotaciones de  $SO(3)$ .

El momento angular total del electrón (no relativista) en el átomo de Hidrógeno es a su vez la suma vectorial del momento angular orbital (alrededor del protón) y el momento angular intrínseco del electrón. Éste último sin embargo, transforma bajo rotaciones de  $SU(2)$ , de manera que el campo asociado con el electrón debe ser un campo complejo: con magnitud y fase.

Los objetos más simples que pueden sufrir transformaciones  $SU(2)$ , corresponden a vectores columnas de dos objetos complejos, como dos funciones de ondas, donde cada función de onda puede tener una de dos posibilidades de carga (una carga más que en  $U(1)$ )

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = (\Psi_1^* \quad \Psi_2^*). \quad (1.38)$$

La transformación de este *doblete* bajo  $SU(2)$  es

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(\boldsymbol{\theta})\Psi \\ \Psi^\dagger &\rightarrow \Psi'^\dagger = \Psi^\dagger U^\dagger(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (1.39)$$

La definición del producto escalar es

$$\Psi \cdot \Psi \equiv \Psi^\dagger \Psi. \quad (1.40)$$

**Ejercicio:** Mostrar la invarianza del producto escalar.

### 1.2.5. Producto escalar en $SU(2)$

El producto escalar de  $SU(2)$  también se puede definir en términos de una métrica.

Sean  $\Psi$  y  $\Upsilon$ , dobletes  $SU(2)$ . Hemos definido el producto escalar  $SU(2)$  de la forma  $\Psi^\dagger \Upsilon$ , por ejemplo. Pero hay otra forma de construir el producto escalar para  $SU(2)$ . Más específicamente, tenemos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Podemos definir un producto que es invariante bajo  $SU(2)$  como el producto escalar bajo la “métrica” de  $SU(2)$  (suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \Upsilon &= \epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b \rightarrow \epsilon_{ab} \Psi'_a \Upsilon'_b = \epsilon_{ab} U_{ac} U_{bd} \Psi_c \Upsilon_d \\ &= (U_{11} U_{22} - U_{12} U_{21}) (\Psi_1 \Upsilon_2 - \Psi_2 \Upsilon_1) \\ &= \epsilon^{ab} (\det \mathbf{U}) \Psi_a \Upsilon_b \\ &= \epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Es claro además que

$$\Psi \cdot \Upsilon = \epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b = \Psi_1 \Upsilon_2 - \Psi_2 \Upsilon_1. \quad (1.43)$$

Con el contenido de campos de  $\Psi$ , siempre es posible definir el doblete adjunto de  $SU(2)$  como

$$\tilde{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_2^* \\ -\Psi_1^* \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

En tal caso es posible escribir el producto escalar  $SU(2)$  es una forma matricial, la cual muestra una invarianza más evidente

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} \cdot \Upsilon &\equiv \epsilon^{ab} \tilde{\Psi}_a \Upsilon_b = \tilde{\Psi}_1 \Upsilon_2 - \tilde{\Psi}_2 \Upsilon_1 \\ &= \Psi_2^* \Upsilon_2 - (-\Psi_1^*) \Upsilon_1 \\ &= \Psi_2^* \Upsilon_2 + \Psi_1^* \Upsilon_1 \\ &= \Psi_2^* \Upsilon_2 + \Psi_1^* \Upsilon_1 \\ &= \delta^{ac} \Psi_a^* \Upsilon_c \\ &= \Psi^\dagger \Upsilon. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Por lo tanto, el producto escalar entre dos dobletes de  $SU(2)$  se puede escribir en cualquiera de las dos formas

$$\tilde{\Psi} \cdot \Upsilon, \quad \text{or} \quad \Psi^\dagger \Upsilon. \quad (1.46)$$

En adelante, usaremos la primera forma.

**Ejemplo:** Escribir  $\Psi \cdot \Upsilon$  en forma matricial

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \Upsilon &\equiv \epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b = \Psi_1 \Upsilon_2 - \Psi_2 \Upsilon_1 \\ &= -(\Psi_2 \Upsilon_1 - (-\Psi_1) \Upsilon_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= - \begin{pmatrix} \Psi_2 & -\Psi_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} \Psi_2^* & -\Psi_1^* \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix} \\
&= - \tilde{\Psi}^\dagger \Upsilon .
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Usando la correspondiente identidad para los delta de Kronecker

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ab} \tilde{\Psi}_a \Upsilon_b &= \delta^{ac} \Psi_a^* \Upsilon_c \\
&= \epsilon^{ad} \epsilon^{cd} \Psi_a^* \Upsilon_c ,
\end{aligned} \tag{1.48}$$

y con el intercambio  $a \leftrightarrow d$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_a (\epsilon^{ab} \Upsilon_b) &= \epsilon^{da} \epsilon^{ca} \Psi_d^* \Upsilon_c \\
&= \epsilon^{ad} \epsilon^{ac} \Psi_d^* \Upsilon_c \\
&= \epsilon^{ad} \Psi_d^* (\epsilon^{ac} \Upsilon_c) .
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Por consiguiente

$$\tilde{\Psi}_a = \epsilon^{ad} \Psi_d^* . \tag{1.50}$$

En forma matricial, tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{pmatrix} \\
&= i \tau_2 \Psi^* .
\end{aligned} \tag{1.51}$$

**Ejemplo:** Demostrar (1.47)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} \cdot \Upsilon^* &= \Psi^\dagger \Upsilon^* \\
i \tau_2 \Psi^* \cdot \Upsilon^* &= \Psi^{T*} Y^* \\
-i \tau_2^* \Psi \cdot \Upsilon &= \Psi^T Y \\
i \tau_2 \Psi \cdot \Upsilon &= \Psi^T Y \\
i \tau_2 (i \tau_2) \Psi \cdot \Upsilon &= i \tau_2 \Psi^{*\dagger} Y \\
\Psi \cdot \Upsilon &= - \tilde{\Psi}^\dagger Y .
\end{aligned} \tag{1.52}$$

### 1.2.6. $SU(N)$

En general, si  $N^2 - 1$  generadores  $\Lambda_a$ , satisfacen el álgebra

$$[\Lambda_a, \Lambda_b] = f_{abc} \Lambda_c , \tag{1.53}$$

con

$$\Lambda^\dagger = \Lambda , \quad \text{Tr}(\Lambda) = 0 , \tag{1.54}$$

entonces las matrices  $N \times N$

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \exp(i\Lambda_a \theta_a) \quad (1.55)$$

son unitarias y de determinante 1, y constituyen la representación fundamental de  $SU(N)$ .

En el caso de  $U(1)$ , el único generador conmutativo satisface trivialmente el álgebra y da lugar al elemento de grupo

$$U(\theta) = e^{i\Lambda\theta} \quad (1.56)$$

que automáticamente tienen norma 1

$$|U(\theta)|^2 = U^*(\theta)U(\theta) = 1.$$

Los objetos más simples que pueden sufrir transformaciones  $SU(N)$ , corresponden a vectores columnas de  $N$  objetos complejos, como  $N$  funciones de ondas por ejemplo, donde cada función de onda puede tener una de  $N$  posibilidades de carga ( $N - 1$  cargas más que en  $U(1)$ )

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = (\Psi_1^* \quad \Psi_2^* \quad \cdots \quad \Psi_N^*). \quad (1.57)$$

La transformación de este *multiplete* bajo  $SU(N)$  es

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(\boldsymbol{\theta})\Psi \\ \Psi^\dagger &\rightarrow \Psi'^\dagger = \Psi^\dagger U^\dagger(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (1.58)$$

donde

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N^2-1}). \quad (1.59)$$

La definición del producto escalar es

$$\Psi \cdot \Psi \equiv \Psi^\dagger \Psi. \quad (1.60)$$

**Ejercicio:** Mostrar la invarianza del producto escalar.

La representación adjunta para  $SU(N)$  esta definida por

$$\left[ \tilde{\Lambda}_a \right]_{bc} = -if_{abc}. \quad (1.61)$$

Definiendo  $\Sigma_i$  como las matrices  $3 \times 3$  generadores de  $SU(2)$  en la representación adjunta

$$(\Sigma_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}, \quad (1.62)$$

hemos comprobado en la ec. (1.66) que

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_k$$

$$[\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} = i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm}. \quad (1.63)$$

Debemos comprobar que

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j] &= i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \\ [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ya que

$$\begin{aligned} (\Sigma_i \Sigma_j)_{lm} &= (\Sigma_i)_{lk}(\Sigma_j)_{km} = -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jkm} = \epsilon_{ilk}\epsilon_{jmk} = \delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj} \\ -(\Sigma_j \Sigma_i)_{lm} &= -(\Sigma_j)_{lk}(\Sigma_i)_{km} = \epsilon_{jlk}\epsilon_{ikm} = -\epsilon_{jlk}\epsilon_{imk} = -\delta_{ji}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{li}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

entonces

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= (\Sigma_i \Sigma_j - \Sigma_j \Sigma_i)_{lm} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \\ &= i\epsilon_{ijk}(-i\epsilon_{klm}) \\ &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

### 1.3. Grupo de Lorentz: $SO(1, 3)$

Los seis generadores independientes del Grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$  se pueden definir a partir del tensor antisimétrico

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}, \quad (1.67)$$

donde se usa la convención de suma sobre índices repetidos que estén contraídos (uno como superíndice y el otro como subíndice):  $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ , aún en el caso de que sean índices latinos:  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Los seis generadores independientes satisfacen el álgebra del grupo  $SO(1, 3)$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}), \quad (1.68)$$

donde

$$\{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

denota la forma matricial del tensor  $g^{\mu\nu}$ .

Cualquier representación matricial de esta álgebra debe obedecer las mismas reglas de conmutación.

De las las matrices  $4 \times 4$

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}, \quad (1.70)$$

nos interesan realmente las componentes definidas como

$$(J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv g^{\gamma\alpha} (J^{\mu\nu})_{\gamma\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma\gamma\beta} g^{\gamma\alpha}, \quad (1.71)$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = \delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta \delta^\nu{}_\alpha, \quad (1.72)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} (J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i(\delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta \delta^\nu{}_\alpha) \\ (J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta &= i g^{\gamma\alpha} (\delta^\mu{}_\gamma \delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta \delta^\nu{}_\gamma) \\ &= i(g^{\mu\alpha} \delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta g^{\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (1.73)$$

donde  $\mu$  y  $\nu$  rotulan cual de las dieciséis matrices se desea, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  rotulan las componentes de las matrices. Estas matrices satisfacen la relaciones de conmutación (3.93).

Usando la ec. (1.73)

$$(J^{0i})^\alpha{}_\beta = i(g^{0\alpha} \delta^i{}_\beta - \delta^0{}_\beta g^{i\alpha}). \quad (1.74)$$

Las únicas componentes diferente de cero son

$$(J^{0i})^0{}_i = i g^{00} \delta^i{}_i = i, \quad (J^{0i})^i{}_0 = -i \delta^0{}_0 g^{ii} = i. \quad (1.75)$$

Entonces

$$\{J^{01}\} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{J^{02}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{J^{03}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_{10} = -\omega_{01} = \xi_1, \quad \omega_{20} = -\omega_{02} = \xi_2, \quad \omega_{30} = -\omega_{03} = \xi_3. \quad (1.76)$$

Definimos

$$K^i \equiv J^{i0} = -J^{0i}. \quad (1.77)$$

Además

$$(J^{ij})^\alpha{}_\beta = i(g^{i\alpha} \delta^j{}_\beta - \delta^i{}_\beta g^{j\alpha}). \quad (1.78)$$

Las únicas componentes diferente cero son

$$(J^{ij})^l{}_m = i(g^{il} \delta^j{}_m - \delta^i{}_m g^{jl}). \quad (1.79)$$

Definiendo

$$L_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J^{jk}, \quad (1.80)$$

tenemos en términos de componentes que

$$\begin{aligned}
(L_i)_m^l &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (J^{jk})_m^l \\
&= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{jl} \delta_m^k - \delta_m^j g^{kl}) \\
&= \frac{i}{2} (\epsilon_{ijk} g^{jl} \delta_m^k - \epsilon_{ijk} \delta_m^j g^{kl}) \\
&= \frac{i}{2} (\epsilon_i^l{}_m - \epsilon_{im}^l) \\
&= i \epsilon_i^l{}_m \\
(L_i)_m^l &= -i \epsilon_{ilm}, \tag{1.81}
\end{aligned}$$

donde,  $L_i$  son los generadores de  $\text{SO}(3)$  en ec. (1.20), escritos como matrices  $4 \times 4$  con la primera fila y la primera columna nulas.

Tomando en cuenta además que, incluyendo la definición en la ec. (1.76):

$$\omega_{i0} \equiv \xi_i, \quad \theta^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \tag{1.82}$$

podemos invertir las expresiones anteriores, ecs (1.80) y (1.82), para obtener

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ilm} L_i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} \epsilon_{ijk} J^{jk}, & \epsilon_{ilm} \theta^i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \\
&= \frac{1}{2} (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_k^l \delta_j^m) J^{jk}, & &= \frac{1}{2} (\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j) \omega_{jk} \\
&= \frac{1}{2} (J^{lm} - J^{ml}), & &= \frac{1}{2} (\omega_{lm} - \omega_{ml}) \\
&= \frac{1}{2} (J^{lm} + J^{lm}), & &= \frac{1}{2} (\omega_{lm} + \omega_{lm}) \\
\epsilon^{ilm} L_i &= J^{lm}, & \epsilon_{ilm} \theta^i &= \omega_{lm}. \tag{1.83}
\end{aligned}$$

De este modo, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\omega_{ij} J^{ij} &= \epsilon_{ijk} \theta^k \epsilon^{ijl} L_l \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijl} \theta^k L_l \\
&= 2 \delta_k^l \theta^k L_l \\
&= 2 \theta^k L_k \\
\omega_{ij} J^{ij} &= 2 \theta_k L^k. \tag{1.84}
\end{aligned}$$

Mientras que para la suma completa tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} &= \omega_{0\nu} J^{0\nu} + \omega_{i\nu} J^{i\nu}, & \mu &= 0, i \\
&= \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{i0} J^{i0} + \omega_{ij} J^{ij}, & \nu &= 0, j \\
&= \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{ij} J^{ij} \\
&= 2 \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{ij} J^{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\omega_{0k} J^{0k} + \omega_{ij} J^{ij} & 0i \rightarrow 0k \\
\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} &= 2\xi_k K^k + 2\theta_k L^k, & \text{sum upon } k.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

**Teorema:** La representación  $4 \times 4$  del Grupo de Lorentz se puede obtener de la exponenciación de los generadores matriciales  $4 \times 4$   $J^{\mu\nu}$  y los parámetros  $\omega_{\mu\nu}$

$$\Lambda = \exp \left( -i\omega_{\mu\nu} \frac{J^{\mu\nu}}{2} \right), \tag{1.86}$$

Las componentes están definidas como  $\Lambda^\alpha{}_\beta$ , y  $(J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ . A continuación vamos a usar la notación de subir el índice con la métrica

$$\xi^i \equiv g^{ij} \xi_j = g^{ii} \xi_i = -\xi_i.$$

Además, de la ec. (1.85)

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \exp \left( -i\omega_{\mu\nu} \frac{J^{\mu\nu}}{2} \right) \\
&= \exp \left( -i\xi_i K^i - i\theta_i L^i \right) \\
&= \exp \left[ i \sum_i (\xi^i K^i - i\theta^i L^i) \right] \\
&= \exp (i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}).
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Ya hemos desarrollado la parte de  $SO(3)$  correspondiente a los generadores  $L_i$ . Cada  $L_i$  genera una matriz de rotación ortogonal como en las ecs. (1.24). A continuación mostraremos el tipo de matriz que genera un boost  $\xi_i$  asociado a un generador  $K^i$ .

Recordemos que

$$\begin{aligned}
\cosh \xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{2n!} \approx 1 + \mathcal{O}(\xi^2) \\
\sinh \xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} \approx \xi + \mathcal{O}(\xi^2),
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Un boost infinitesimal a lo largo de  $x$  es

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}_{x\text{-boost}} = \exp(i\xi K^1) \approx \begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.89}$$

donde el generador de boost es

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.90}$$

Para realizar la expansión de Taylor, definimos la submatriz

$$K^0 = \mathbf{1}_{2 \times 2}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$K^n = (-1)^n \mathbf{1}_{2 \times 2}, \quad K^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para la subestructura  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} \Lambda_{2 \times 2} &= \exp(i\xi K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi K)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(\xi K)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{(\xi K)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{2n!} (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{2n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 \\ 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh \xi \\ \sinh \xi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi \\ \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.91}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \{\Lambda(\xi_1)^\mu{}_\nu\} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi_1 & \sinh \xi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \xi_1 & \cosh \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \{\Lambda(\xi_2)^\mu{}_\nu\} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi_2 & 0 & \sinh \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \xi_2 & 0 & \cosh \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \{\Lambda(\xi_3)^\mu{}_\nu\} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi_3 & 0 & 0 & \sinh \xi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi_3 & 0 & 0 & \cosh \xi_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Similarmente, una rotación por un ángulo infinitesimal  $\theta = \theta_3$  alrededor del plano  $xy$  (o sobre el eje  $z$ )

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}_{xy\text{-rotation}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.93}$$

Que como hemos visto, puede obtenerse a partir de los generadores del Grupo de rotaciones  $SO(3)$ , generalizados a matrices  $4 \times 4$

$$\{L_i\} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & L_{3 \times 3}^i & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{1.94}$$

$$L_{3 \times 3}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L_{3 \times 3}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{3 \times 3}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y generan los tres boosts y las tres rotaciones de los cuadvectores ordinarios de Lorentz:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta \approx \delta^\alpha{}_\beta + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta. \quad (1.95)$$

La generalización de  $SO(3)$  a  $SO(1, 3)$  implica la generalización del grupo de matrices ortogonales al grupo de matrices que satisface la condición de ortogonalidad generalizada:

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (1.96)$$

Como

$$\{\Lambda(\theta_i)^\mu{}_\nu\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R_{3 \times 3}(\theta_i) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & -\mathbf{1}_{3 \times 3} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

esta condición automáticamente incluye

$$R_{3 \times 3}^T R_{3 \times 3} = \mathbf{1}_{3 \times 3}. \quad (1.98)$$

**Ejercicio:** Demostrar que  $\Lambda(\xi_1)$  dada en la primera ec. (1.92), cumple la condición de ortogonalidad generalizada (1.96).

## 1.4. Representaciones $2 \times 2$ del Grupo de Lorentz: $SL(2, C)$

Aquí nos enfocaremos en la representaciones más simples no triviales del Grupo de Lorentz. Estas corresponde a las representaciones no equivalentes  $2 \times 2$ :  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$  del grupo  $SL(2, C)$  con elementos

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp \left( -i \omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right)$$

donde los seis generadores independientes están dados por

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu). \quad (1.99)$$

satisfacen el álgebra de Lorentz, eq (3.93), tal que

$$\sigma^\mu = (\sigma^0 \quad \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0 \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (1.100)$$

con

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \mathbf{1}_{2 \times 2}, & \boldsymbol{\sigma} &\rightarrow \sigma^i = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^0 &= \mathbf{1}_{2 \times 2}, & \bar{\boldsymbol{\sigma}} &\rightarrow \bar{\sigma}^i = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (1.101)$$



que incluyen las tres matrices de Pauli (1.33), con álgebra (1.32)

$$\left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = \frac{1}{4} (\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i) = i \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{0\nu} &= \frac{1}{4} (\sigma^0 \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^0), & \sigma^{ij} &= \frac{i}{4} (\sigma^i \bar{\sigma}^j - \bar{\sigma}^j \sigma^i) \\ &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu) = \begin{cases} 0 & \nu = 0 \\ \frac{i}{4} (-\sigma^i - \sigma^i) & \nu = i \end{cases}, & &= -\frac{i}{4} (\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i) \\ \sigma^{0i} &= -\frac{i}{2} \sigma^i. & &= -\frac{i}{2} i \epsilon^{ijk} \sigma^k \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (1.103)$$

usando además la ec. (1.82), tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} &= \omega_{0\nu} \sigma^{0\nu} + \omega_{ij} \sigma^{ij} \\ &= \omega_{0i} \sigma^{0i} + \omega_{i0} \sigma^{i0} + \omega_{ij} \sigma^{ij} \\ &= 2\omega_{0i} \sigma^{0i} + \omega_{ij} \sigma^i \\ &= 2\xi_i \left( \frac{i}{2} \sigma^i \right) + \omega_{ij} \left( \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \sigma^k \right) \\ &= i\xi_i \sigma^i + \left( \frac{1}{2} \omega_{ij} \epsilon^{ijk} \right) \sigma^k, \quad \text{sum also on } k \\ &= i\xi_i \sigma^i + \sum_k \theta^k \sigma^k \\ &= \sum_i (-i\xi^i \sigma^i + \theta^i \sigma^i), \end{aligned}$$

de modo que

$$\omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -i\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Aquí hemos usado la notación de subir el índice con la métrica

$$\xi^i \equiv g^{ij} \xi_j = g^{ii} \xi_i = -\xi_i.$$

Por consiguiente

$$i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} = \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

Comparando con la expresión general (1.87)

$$-i\omega_{\mu\nu} \frac{J^{\mu\nu}}{2} = i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L},$$

tenemos que los generadores para la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$  del subgrupo  $SL(2, C)$  son

$$\mathbf{K}_{2 \times 2} = -i \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \mathbf{L}_{2 \times 2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

La ecuación (1.99) se puede escribir en términos de los seis generadores independientes correspondientes a los boosts y las rotaciones

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left( \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right), \quad (1.104)$$

La otra representación independiente es

$$\begin{aligned} [S(\Lambda)]^* &= S(\Lambda)_{(0, \frac{1}{2})} \equiv S^*(\Lambda) = \exp \left( \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^* \\ &= \exp \left( \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Las componentes de  $S(\Lambda)$  serán denotadas como  $[S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta}$ . En tal caso,  $S^*(\Lambda)$  es otra representación diferente  $2 \times 2$  de  $SL(2, C)$ . Ésta se denota con  $(0, \frac{1}{2})$ , y con el fin de enfatizar la diferencia, sus componentes se denotan con índices acentuados con puntos  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$ . De modo que sus componentes serán denotadas como  $[S^*(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$ .

Cada uno de los dos  $SL(2, C)$  cubre doblemente al grupo  $SO(1, 3)$  de la misma manera que el grupo  $SU(2)$  es una cobertura doble del grupo  $SO(3)$ .

La componentes de las matrices de Pauli se definen como  $\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu}$  y  $\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}$ , tal que

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} &\equiv \frac{i}{4} (\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta}) \\ &= \frac{i}{4} [\sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu}]_{\alpha}^{\beta}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, de la ec. (1.102)

$$(\sigma^{01})_{\alpha}^{\beta} = \left[ -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}^{\beta},$$

de modo que

$$(\sigma^{01})_1^1 = (\sigma^{01})_2^2 = 0, \quad (\sigma^{01})_1^2 = (\sigma^{01})_2^1 = -\frac{i}{2}.$$

En resumen, las tres posibles representaciones del algebra de Lorentz

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \\ \{g^{\mu\nu}\} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

son el conjunto de 16 matrices  $4 \times 4$ ,  $J^{\mu\nu}$ , el conjuntos de 16 matrices  $2 \times 2$ ,  $\sigma^{\mu\nu}$  y el conjunto con los 16 conjugados:

$$\begin{aligned} (J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta &= i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta g^{\nu\alpha}) , & \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) , & \sigma^{*\mu\nu} &= -\frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)^* , \\ & & \sigma^\mu &= (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}) , & \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\boldsymbol{\sigma}) , \\ \Lambda^\alpha{}_\beta &= \left[ \exp\left(-i\omega_{\mu\nu}\frac{J^{\mu\nu}}{2}\right) \right]^\alpha{}_\beta , & S_\alpha{}^\beta &= \left[ \exp\left(-i\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right) \right]^\beta{}_\alpha , & S^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} &= \left[ \exp\left(i\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{*\mu\nu}}{2}\right) \right]^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} . \end{aligned}$$

con  $\boldsymbol{\sigma}$  el vector de matrices de Pauli.

Para poder establecer el producto escalar asociados al Grupo de Lorentz, debemos establecer primero el sistema de unidades más conveniente y la notación a utilizar.

## 1.5. Unidades Naturales

Para ir más allá de las rotaciones de sistemas de referencias en reposo, debemos considerar también transformaciones entre sistemas de referencias inerciales. Para ello es conveniente usar unidades naturales y establecer una notación relativista.

Las *unidades naturales* son unidades físicas de medida definidas en términos de constantes físicas universales [21]. El primer conjunto consiste de unidades naturales, las *unidades de Planck* [22], fue formulado por el propio Planck después de establecer la última constante universal, que lleva su nombre. En palabras de Planck

...ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten und welche daher als »natürliche Maßeinheiten bezeichnet werden können...

...Estas necesariamente retienen su significado en todos los tiempos y para todas las civilizaciones, aún las extraterrestre y no humanas, y por consiguiente se pueden designar como “Unidades naturales”...

De este modo, estas unidades son naturales debido a que el origen de su definición proviene solo de propiedades de la naturaleza y no de alguna construcción humana. A diferencia de otros conjuntos de unidades naturales, las unidades de Planck donde

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1, \quad c = 1, \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1, \quad k = 1, \quad (1.107)$$

están basadas sólo en las propiedades del espacio libre, y no en las propiedades (tales como carga, masa, tamaño o radio) de algún objeto o partícula elemental. En 2018 se presentó el borrador de la resolución, efectiva a partir del 20 de mayo de 2019, en la cual la humanidad adopta como base el sistema natural de unidades. Ver<sup>2</sup>. De este modo, el sistema internacional de unidades, el SI, es el sistema de unidades basado en la medida de la frecuencia de la transición hiperfina no perturbada del átomo de cesio 133 (9 192 631 770 Hz), la velocidad de la luz  $c$ , la constante de Planck  $\hbar$ , la carga elemental  $e$ , la consante de Boltzman  $k$ , el número de Avogadro  $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ , mol<sup>-1</sup> y la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia  $540 \times 10^{12}$ , Hz,  $K_{cd}$ . Ver<sup>3</sup>.

<sup>2</sup><http://blog.wolfram.com/2018/11/16/as-of-today-the-fundamental-constants-of-physics-c-h-e-k-na-are-final>

<sup>3</sup><https://www.bipm.org/utls/en/pdf/CGPM/Draft-Resolution-A-EN.pdf>: “Basing our units on some of the most important fundamental constants of physics bases them on the deepest quantifying properties of our universe, and at the same time defines them for all times and for all people.”

Lo que esto significa es que de ahora en adelante los valores de estas constantes tendrán un valor exacto para siempre:

$$\begin{aligned}\Delta\nu_{\text{Cs}} &= 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}, \\ c &= 299\,792\,458 \text{ m/s}, \\ h &= 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ Js}, \\ e &= 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\ k &= 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J/K}, \\ N_{\text{A}} &= 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.\end{aligned}$$

El error se pasa a la medida de la correspondiente cantidad SI.

Las constantes físicas que suelen normalizarse se escogen del conjunto dado por la ec. (1.107) y

$$e, \quad m_e, \quad m_p. \quad (1.108)$$

Teniendo en cuenta que  $1 \text{ eV} = 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19} \text{ J}$ ,

$$\begin{aligned}10^{-9} \text{ GeV} &= 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ GeV} &= 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-10} \text{ J}\end{aligned} \quad (1.109)$$

De la masa en reposo del protón, por ejemplo,

$$\begin{aligned}m_p c^2 &= 1.672\,621\,777(74) \times 10^{-27} \text{ kg} \times (299\,792\,458 \text{ ms}^{-1})^2 \\ &= 1.503\,277\,5 \times 10^{-10} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602\,176\,565(35) \times 10^{-10} \text{ J}} \\ &= 938.272\,046(21000000) \text{ MeV}/c^2,\end{aligned}$$

podemos obtener la equivalencia entre masa y energía en unidades naturales:  $c = 1$

$$\begin{aligned}m_p &= 938.272\,046(21) \text{ MeV} \\ &\approx 1 \text{ GeV}.\end{aligned} \quad (1.110)$$

de modo que

$$1 \text{ kg} = 5.609\,589\,12(42) \times 10^{26} \text{ GeV}. \quad (1.111)$$

### Example 1.5.0.1

Calcule la energía cinética de un mosquito de 2 mg, moviéndose a 1.45 Km/h

$$v = 1.45 \text{ km/h} \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 0.4 \text{ m/s} \quad (1.112)$$

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} m v^2 = 0.5 \times 2 \times 10^{-6} \text{ kg} (0.4 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.6 \times 10^{-7} \text{ J} \\ &= 1 \text{ TeV}.\end{aligned} \quad (1.113)$$

$6.582\,118\,99(16) \times 10^{-25} \text{ s}$	$\hbar \text{ GeV}^{-1}$
$1.973\,269\,631(49) \times 10^{-16} \text{ m}$	$\hbar c \text{ GeV}^{-1}$
1 kg	$5.609\,589\,12(42) \times 10^{26} \text{ GeV}/c^2$
1 K	$8.617\,343(15) \times 10^{-14}/k \text{ GeV}$
$299\,792\,450 \text{ m s}^{-1}$	$c$
m kg	$2.842\,278\,859 \times 10^{-16} \hbar c^{-1}$

Tabla 1.1: SI  $\leftrightarrow$  MPU

Teniendo en cuenta que [25]

$$c = 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{exact}), \quad (1.114)$$

podemos obtener la relación entre longitud y energía a partir de

$$\begin{aligned} \hbar c &= 1.054\,571\,68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} \times 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1} \\ &\approx 3.161\,526\,28 \times 10^{-26} \text{ J m} \\ &\approx 3.161\,526\,28 \times 10^{-26} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602\,176\,487 \times 10^{-10} \text{ J}} \text{ m} \\ &= 1.973\,269\,631(49) \times 10^{-16} \text{ GeV m}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Entonces  $\hbar c = 0.1973\,269\,631(49) \text{ GeV fm}$ .

podemos obtener la relación entre el tiempo y la energía de

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} = 6.582\,118\,99(16) \times 10^{-25} \text{ GeV s}, \quad (1.116)$$

Similarmente para la relación entre temperatura y energía, tenemos de la constante de Boltzman

$$k = 1.380\,6504(24) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.617\,343(15) \times 10^{-14} \text{ GeV K}^{-1}. \quad (1.117)$$

Los factores de conversión del sistema MKS a MPU están dados en la Tabla 1.1 después de hacer  $\hbar = c = k = 1$

En la Tabla 1.1 las unidades sin factores se han puesto en el lado donde resultan más cómodos para describir el mundo subatómico. De esta manera las distancias y los tiempos del mundo subatómicos son más simples en MPU, mientras que la masa y la temperatura son más simples en el sistema SI.

Usando *wolfram alpha* es posible cambiar entre estos dos sistemas de unidades. Por ejemplo

- <http://www.wolframalpha.com/input/?i=6.58211899E-25+GeV/hbar+to+s>
- [https://www.wolframalpha.com/input/?i=1E-15+m+to+hbar\\*c/GeV](https://www.wolframalpha.com/input/?i=1E-15+m+to+hbar*c/GeV)

De la constante de Fuerza electrostática  $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , podemos obtener el valor de la constante de estructura fina electromagnética  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{ C}^{-2} \text{ Nm}^2 = \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{ C}^{-2} \text{ Kg m}^3 \text{ s}^{-2} \\ &\approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{ C}^{-2} \times 5.6096 \times 10^{26} \text{ GeV} \times (5.068 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (1.519 \times 10^{-24} \text{GeV}^{-1})^{-2} \times \frac{(\hbar c)^3 \hbar^{-2}}{e^2} \\
& \approx 2.84 \times 10^{35} \text{C}^{-2} \hbar c \\
& \approx 2.84 \times 10^{35} \text{C}^{-2} \times \left( \frac{1.602 \times 10^{-19} \text{C}}{e^2} \right)^2 \hbar c \\
& = \frac{7.296 \times 10^{-3}}{e^2} \hbar c
\end{aligned}$$

Definimos la cantidad adimensional  $\alpha$ , como

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx 7.296 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

conocida como la constante de estructura fina, que no puede tomar un valor numérico diferente sin importar el sistema de unidades que se use. De modo que no se puede tener un sistema de unidades que normalice todas las constantes físicas presentes en  $\alpha$ . Sólo 3 de las cuatro constantes  $e$ ,  $\hbar$ ,  $\epsilon_0$  y  $c$  pueden ser normalizadas, y la otra queda dependiendo del valor de  $\alpha$ .

El propósito de las unidades naturales es simplificar las expresiones algebraicas que aparecen en las leyes físicas.

El sistema de unidades naturales que usaremos es el de las Unidades de Planck Modificadas (MPU)

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1 \quad c = 1, \quad \epsilon_0 = 1, \quad k = 1, \quad (1.118)$$

de modo que

$$e = \sqrt{4\pi\alpha}, \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (1.119)$$

### Example 1.5.0.2

Calcule la energía potencial de Coulomb para una par de protones (o electrones) separados una distancia  $l = \hbar c / \text{GeV} = 0.1973 \text{ 269 631 fm}$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{K e^2}{l} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (\hbar c) \text{GeV}^{-1}} \\
&= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \text{GeV}. \quad (1.120)
\end{aligned}$$

Como  $V$  tiene unidades de energía, de la ec. (1.120) resulta de nuevo  $\alpha$ .

## 1.5.1. Dimensiones de Planck

La relación ente masa y energía se puede obtener también a partir de

$$G_N = 6.674 \text{ 28(67)} \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} = 6.70881(65) \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2} \quad (1.121)$$

entonces<sup>4</sup>

$$M_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 1.2209 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2 = 2.1765 \times 10^{-8} \text{kg} \quad (1.122)$$

---

<sup>4</sup>o de una masa bien medida, por ejemplo  $m_p = 0.938 \text{ 272 013(23)} \text{GeV}/c^2 = 1.672 \text{ 621 637(83)}^{-27} \text{kg}$ .

y

$$G_N = \frac{\hbar c}{M_p^2}. \quad (1.123)$$

La energía de Planck es entonces  $M_p c^2$ , e igual a la masa en unidad naturales.

De los factores de conversión de la tabla vemos que masa×longitud tiene las mismas unidades que  $\hbar/c$ , de modo que podemos definir la longitud de Planck tal que

$$\begin{aligned} L_p M_p &\equiv \frac{\hbar}{c} \\ L_p &= \frac{\hbar}{c M_p} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{G_N}{\hbar c}} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \\ &\approx 8.1907 \times 10^{-20} \frac{\hbar}{c \text{ GeV}} \approx 1.6163 \times 10^{-35} \text{ m} \end{aligned} \quad (1.124)$$

Este análisis dimensional muestra que la longitud de Planck corresponde a una escala a la cual los efectos gravitacionales llegan a ser importantes, es decir, que la intensidad del potencial gravitacional es del orden de la masa de la partícula que lo genera<sup>5</sup>

$$V_{\text{gravity}} = G_N \frac{M_p^2}{L_p} = M_p c^2 \quad (1.125)$$

Finalmente, el tiempo de Planck es

$$t_P \equiv \frac{L_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 8.1907 \times 10^{-20} \frac{\hbar}{c^2 \text{ GeV}} \approx 5.3912 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad (1.126)$$

y la temperatura de Planck es

$$T_p \equiv \frac{M_p c^2}{k} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N k^2}} = 1.4168 \times 10^{32} \text{ K}. \quad (1.127)$$

Teniendo en cuenta la condición en (1.125), podemos también definir la carga de Planck tal que la intensidad de Potencial de Coulomb para dos masas de Planck separadas por la longitud de Planck sea igual a la energía de Planck

$$\begin{aligned} V_{\text{Coulomb}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_p^2}{L_p} = M_p c^2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_p^2}{\hbar/(c M_p)} &= M_p c^2 \\ \frac{Q_p^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} &= 1 \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>This is shown using dimensional analysis, much in the same way as the Bohr radius, beyond which the full quantum mechanical description of the Hydrogen atom cannot be neglected. Note that the Bohr radius was derived before a modern quantum mechanical treatment of Hydrogen became available. A similar statement can be made about the Planck length [24].

$M_p$	$\sqrt{\hbar c / G_N}$	$2.1765 \times 10^{-8} \text{ kg}$
$L_p$	$\sqrt{\hbar G_N / c^3}$	$1.6163 \times 10^{-35} \text{ m}$
$t_p$	$\sqrt{\hbar G_N / c^5}$	$5.3912 \times 10^{-44} \text{ s}$
$T_p$	$\sqrt{\hbar c^5 / (G_N k^2)}$	$1.4168 \times 10^{32} \text{ K}$
$Q_p$	$e / \sqrt{\alpha}$	$1.8756 \times 10^{-18} \text{ C}$

Tabla 1.2: Unidades de Planck  $G_N = \hbar = c = \epsilon_0 = k = 1$ 

$$Q_p = \frac{e}{\sqrt{\alpha}} \approx 1.8756 \times 10^{-18} \text{ C}. \quad (1.128)$$

Entonces la constante de estructura fina puede pensarse como el cuadrado del cociente de la carga elemental a la carga de Planck

$$\alpha = \left( \frac{e}{Q_p} \right)^2. \quad (1.129)$$

Estos resultados están resumidos en la Tabla 1.2

#### Example 1.5.1.1

Cálculé el potencial gravitacional para un par de protones separados una distancia  $L_{\text{proton}} = \hbar / (c m_{\text{proton}}) \approx 2.1 \times 10^{-16} \text{ m}$

$$V_{\text{gravity}} = G_N \frac{m_p^2}{L_{\text{proton}}} = G_N m_p^3 \frac{c}{\hbar} = \frac{G_N}{\hbar c} m_p^3 c^2 = \frac{m_p^2}{M_p^2} m_p c^2 \approx 10^{-38} m_p c^2 \quad (1.130)$$

En este caso la energía potencial gravitacional es mucho menor que la escala de energía correspondiente

#### Example 1.5.1.2

Compare la intensidad gravitacional con la Coulomb para un protón, y para una partícula de Planck.

Usando la ec. (1.123)

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{gravity}}}{V_{\text{Coulomb}}} &= \frac{G_N m_X^2}{(1/4\pi\epsilon_0)e^2} \\ &= (4\pi\epsilon_0 \hbar c / e^2) \frac{m_X^2}{M_p^2} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{m_X}{M_p} \right)^2 \\ &\sim \begin{cases} 10^{-36} & m_X = m_{\text{proton}} \\ 10^2 & m_X = M_p \end{cases} \end{aligned} \quad (1.131)$$

[http://www.wolframalpha.com/input/?i=hbar\\*c/\(13+eV\)+to+m](http://www.wolframalpha.com/input/?i=hbar*c/(13+eV)+to+m)

## 1.6. Notación relativista

Las transformaciones de Lorentz se definen como la transformaciones que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$x \cdot x = x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^{02} - x^i x^i = x^{02} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (1.132)$$



donde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, 3$  y se asume suma sobre índices repetidos. Finalmente la métrica usada se define como

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.133)$$

donde  $\{g_{\mu\nu}\}$  denota la forma matricial del tensor  $g_{\mu\nu}$ .

El producto de dos cuadvectores se define en forma similar como

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (1.134)$$

El inverso de la métrica es

$$\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\} \quad (1.135)$$

tal que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (1.136)$$

Bajo una transformación de Lorentz.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (1.137)$$

La invarianza del producto escalar en ec. (1.134)

$$x' \cdot y' = x \cdot y. \quad (1.138)$$

implica que

$$\begin{aligned} x \cdot y \rightarrow x' \cdot y' &= g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta y^\beta \\ &= \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha y^\beta. \end{aligned} \quad (1.139)$$

Por consiguiente, la condición para que el producto escalar en el espacio de Minkowski definido por la métrica  $g_{\mu\nu}$ , sea invariante bajo transformaciones de Lorentz es

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (1.140)$$

y por consiguiente

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta, \quad (1.141)$$

o, reorganizando los índices mudos

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda^T)_\mu{}^\alpha g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \quad \text{or} \quad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_\mu{}^\alpha\}^T \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^\beta{}_\nu\}. \quad (1.142)$$

En notación matricial

$$g = \Lambda^T g \Lambda, \quad (1.143)$$

que define el conjunto de matrices  $\Lambda$  que forma el Grupo de Lorentz  $\text{SO}(1, 3)$  estudiado en la sec. 1.3.

Introducimos ahora un cuadrivector que lleva intrínsecamente el índice abajo

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0, \nabla). \quad (1.144)$$

Las propiedades de transformación para  $\partial_\mu$  se pueden obtener a partir de la ec. (1.137)

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha x'^\alpha &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= x^\mu, \end{aligned} \quad (1.145)$$

$$\frac{1}{x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \frac{1}{x^\mu}, \quad (1.146)$$

o

$$\frac{1}{x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{1}{x^\nu}, \quad (1.147)$$

de modo que la transformación de Lorentz para  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ , es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \partial'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Imponiendo la invarianza sobre el producto escalar

$$\partial^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad (1.149)$$

y repitiendo los pasos que dieron lugar a la ec. (1.139) pero para la métrica contravariante

$$g^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta, \quad (1.150)$$

Como una forma de acortar las operaciones, podemos definir que la métrica permita bajar los índices

$$x_\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu, \quad (1.151)$$

y de igual manera imponemos que la métrica inversa suba los índices

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.152)$$

de la ec. (1.142) tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} &= g^{\rho\mu} \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \\ \delta^\rho{}_\nu &= \Lambda^\rho{}_\beta \Lambda^\beta{}_\nu, \end{aligned} \quad (1.153)$$

o

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.154)$$

Ya que

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta^\mu_\nu \quad (1.155)$$

el inverso de  $\Lambda$  es

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\mu, \quad (1.156)$$

o

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \quad (1.157)$$

Usando ec. (1.157), tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta \\ &= \Lambda_\alpha{}^\mu g^{\alpha\beta} \Lambda_\beta{}^\nu. \end{aligned} \quad (1.158)$$

### Example 1.6.0.1

Invarianza de Lorentz

$$\begin{aligned} x \cdot y &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu y^\mu \rightarrow x'_\mu y'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \Lambda^\mu{}_\rho y^\rho \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \Lambda^\mu{}_\rho y^\rho \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho x_\nu y^\rho \\ &= \delta^\nu_\rho x_\nu y^\rho \\ &= x_\nu y^\nu. \end{aligned}$$

Entonces, el producto escalar se puede escribir como

$$x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \sum_i x^i y^i = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (1.159)$$

En el libro de A. Zee sobre teoría de grupos [41] se resumen este tipo de cálculos de la siguiente manera

It follows that the shorthand  $\partial_\mu$  for  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  has to carry a lower index, because

$$\partial_\mu x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu. \quad (1.160)$$

In other words, for the indices to match,  $\partial_\mu$  must be written with a lower index. This makes sense, since the coordinates  $x^\mu$  carry an upper index but in  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  it appears in the denominator, so to speak. We will use this important fact later. It follows that

$$\partial_\mu x_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (1.161)$$

Como un ejemplo de Transformación de Lorentz consideremos el cambio de un sistema en reposo a un sistema inercial con velocidad a lo largo del eje  $x$ ,  $v$

$$\begin{aligned}
 \{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \{\Lambda^\mu{}_\nu\} \{x^\nu\}, \tag{1.162}
 \end{aligned}$$

donde

$$\cosh \xi = \gamma \quad \sinh \xi = v\gamma, \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{1.163}$$

y, por ejemplo:

$$t \cosh \xi + x \sinh \xi = \gamma(t + vx) = \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{1.164}$$

Podemos ver que las transformaciones de Lorentz para un boost en  $x$ , dan lugar a una de las matrices de boost que definen el grupo de Lorentz,  $\text{SO}(1, 3)$ , dadas en la ec. (1.92). En efecto, el  $\Lambda^\mu{}_\nu$  definido en la ec. (1.162) satisface la condición en ec. (1.142),

$$\begin{aligned}
 \Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & -\cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi & \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & 0 & 0 \\ \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= g \tag{1.165}
 \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Muestre que bajo los cambios  $\xi \rightarrow i\theta$  y  $t \rightarrow it$ , la transformación de Lorentz se puede escribir como una matriz de rotación convencional.

Note que el orden de los índices es importante porque, recuperando la dependencias en el parámetro de transformación

$$\Lambda(\xi)^\mu{}_\nu \neq \Lambda(\xi)_\nu{}^\mu = \Lambda(-\xi)^\mu{}_\nu, \quad (1.166)$$

En efecto, a modo de ejercicio se puede comprobar que

$$\Lambda^{-1}(\xi)^\mu{}_\nu = \Lambda(\xi)_\nu{}^\mu = \Lambda(-\xi)^\mu{}_\nu. \quad (1.167)$$

Denotaremos los cuadvectores con índices arriba como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \quad (1.168)$$

Entonces el correspondiente cuadvector con índices abajo, usando la ec. (1.151), es

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x}). \quad (1.169)$$

Con esta notación, el producto escalar de cuadvectores puede expresarse como el producto escalar de los dos vectores de cuatro componente  $x^\mu$  y  $x_\mu$ .

### 1.6.1. Ejemplos de cuadvectores

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \quad (1.170)$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}) \quad (1.171)$$

De la relatividad especial tenemos que

$$\begin{aligned} E &= \gamma m \\ \mathbf{p} &= \gamma m \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Por lo tanto, ya que  $v^2 = \mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = \gamma^2 m^2 (1 - v^2) = m^2. \quad (1.173)$$

El invariante de Lorentz asociado a  $p^\mu$  corresponde a la ecuación de momento energía una vez se identifica la masa de una partícula con su cuadrимomentum

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \quad (1.174)$$

De [31]

The intuitive understanding of this equation is that the energy of a particle is partially due to its motion and partially due to the intrinsic energy of its mass. The application to particle detectors is that if you know the mass of a particular particle, or if it's going so fast that its energy and momentum are both huge so that the mass can be roughly ignored, then knowing the energy tells you the momentum and vice versa

Para esta ecuación se suele definir dos casos límites.

- *Límite no relativista:* Para  $\mathbf{p} = 0$ , es decir cuando la partícula está en reposo se reduce a la famosa ecuación, (con  $c^2 = 1$ )

$$E = m. \quad (1.175)$$

- *Límite relativista:* Para  $\mathbf{p}^2 \gg m^2$ , la ecuación  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$  se reduce a

$$E = |\mathbf{p}|. \quad (1.176)$$

Por lo tanto para una partícula de masa cero, su energía total da cuenta de su cantidad de movimiento.

Del cálculo vectorial

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0, \nabla) \quad (1.177)$$

Este cuadvivector tiene intrínsecamente el índice abajo. La correspondiente derivada con índice superior es

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (\partial_0, -\nabla) = (\partial^0, -\nabla). \end{aligned} \quad (1.178)$$

Por consiguiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.179)$$

Entonces, para un cuadvivector  $J^\mu$

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (1.180)$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de continuidad  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , y al provenir de un producto escalar entre dos cuadvivectores resulta ser un invariante de Lorentz. El operador cuadrático es, usando la ec. (1.132)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^0 \partial^0 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.181)$$

Por consiguiente la ecuación de onda para un campo  $\phi(t, x, y, z)$  con velocidad de propagación  $c^2 = 1$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = 0, \quad (1.182)$$

es también invariante de Lorentz

Los operadores de energía y momentum de la mecánica cuántica también forma un cuadvivector

$$\hat{p}^\mu = (\hat{p}^0, \hat{\mathbf{p}}) = (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (1.183)$$

con  $\hat{H}$ , y  $\hat{\mathbf{p}}$  dados en la ec. (1.398). Entonces

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i(\partial^0, \partial^i) = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad (1.184)$$

Por lo tanto, una posible ecuación mecánico cuántico relativista se puede obtener a partir de interpretar la ecuación de conservación de energía-momentum en términos de operadores

$$\begin{aligned} (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2) \phi &= 0 \\ (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.185)$$

Que es conocida como la ecuación de Klein-Gordon para un campo  $\phi$  de masa  $m$ . A diferencia de la ecuación de Schrödinger, esta ecuación no puede interpretarse directamente en términos de mecánica cuántica porque no tiene asociada una probabilidad positivo-definida debido a la segunda derivada con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} (\partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i + m^2) \phi &= 0 \\ \left( \partial_0 \partial^0 - \sum_i \partial_i \partial_i + m^2 \right) \phi &= 0 \\ \left( \partial_0 \partial^0 - \sum_i \partial_i \partial_i + m^2 \right) \phi &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi &. \end{aligned} \quad (1.186)$$

La interpretación correcta se debe hacer en el marco de la Teoría Cuántica de Campos donde se cuantiza  $\phi$  y su variable canónica conjugada (a definir posteriormente) en lugar de cuantizar  $x$  y  $p_x$ .

### Ecuaciones de Maxwell en términos de cuarivectores

Ecuaciones homogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.187)$$

Ecuaciones inhomogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (1.188)$$

La primera ecuación establece la ausencia de cargas magnéticas, la segunda corresponde a la Ley de Faraday y la tercera a la Ley de Gauss. La cuarta sin el término de desplazamiento eléctrico introducido por Maxwell corresponde a la Ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (1.189)$$

Tomando la divergencia en esta expresión tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.190)$$

que corresponde a la ecuación de continuidad (??) para  $\rho$  constante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.191)$$

De este modo la Ley de Ampère da lugar a la conservación de carga eléctrica pero solo a nivel global: una pérdida de carga eléctrica en un punto del universo puede ser compensada por la aparición instantánea de carga eléctrica en otro lugar del universo. La conservación global podría necesitar la propagación instantánea de señales, y esto está en conflicto con la relatividad especial.

Tomando la divergencia de la Ley de Ampère modificada por Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.192)$$

obtenemos la ecuación de continuidad (4.80). Dicha ecuación establece que la razón de decrecimiento de la carga en un volumen arbitrario  $V$  es debido precisa y únicamente al flujo de la corriente fuera de su superficie; de modo que la carga no puede ser creada ni destruida dentro de  $V$ . Ya que  $V$  puede ser arbitrariamente pequeño esto significa que la carga eléctrica debe conservarse localmente. El término extra introducido por Maxwell está motivado por un requerimiento de conservación local.

Vamos a reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de cuadvectores usando el potencial escalar eléctrico  $\phi$  y el potencia vectorial magnético  $\mathbf{A}$ .

De hecho ecuaciones

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.193)$$

Son equivalentes a las ecuaciones homogéneas de Maxwell Ya que, como vimos entonces y repetimos aca

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Del electromagnetismo tenemos entonces que

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) = (\rho, \mathbf{J}) \quad (1.194)$$

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}) \quad (1.195)$$

La ec. (4.82) es invariante bajo las siguientes transformaciones

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.196)$$

Ya que

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = -\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla\chi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla\chi = \mathbf{E} \quad (1.197)$$



$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \chi}_{=0} = \mathbf{B} \quad (1.198)$$

Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes calibraciones para sus medidas, obtienen los mismos campos. Las ecs. (4.83), corresponden a *transformaciones gauge locales*

En notación de cuadvectores

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= \left( \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla \chi \right) \\ &= \left( \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, A^i + \partial_i \chi \right) \\ &= (\phi - \partial^0 \chi, A^i - \partial^i \chi) \\ &= (\phi, A^i) - (\partial^0 \chi, \partial^i \chi) \\ A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu \chi \end{aligned} \quad (1.199)$$

Más adelante se definirán las derivadas covariantes

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \partial_0 + iqA_0 \\ \mathcal{D} &= \nabla - iq\mathbf{A} . \end{aligned} \quad (1.200)$$

A partir de ellas podemos definir el cuadvector

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}) \\ &= (\partial_0, \nabla) + iq(A_0, -\mathbf{A}) \\ &= (\partial_0, \partial_i) + iq(A_0, -A^i) \\ &= (\partial_0, \partial_i) + iq(A_0, A_i) \\ &= (\partial_0 + iqA_0, \partial_i + iA_i) \\ &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i) \\ &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i) , \end{aligned} \quad (1.201)$$

donde hemos usado que las componentes de  $\mathcal{D}$  son (con índices abajo)

$$\mathcal{D}_i = \partial_i - iqA^i, \mathcal{D}_i = \partial_i + iqA_i . \quad (1.202)$$

Note que la ec. (??) se puede escribir como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x) \quad (1.203)$$

qué es justamente la ecuación de transformación obtenida en la ec. (1.414).

#### Example 1.6.1.1

Calcule la fracción de la velocidad a la que puede ser acelerado un protón en el LHC. Recuperando los factores de  $c$

$$E = \gamma mc^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} E^2(1 - \beta^2) &= m^2 c^4 \\ 1 - \beta^2 &= \frac{m^2 c^4}{E^2} . \end{aligned} \quad (1.204)$$

Despejando  $\beta$ , obtenemos

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

$m_p = 938.272013(23)\text{MeV}/c^2$ , and  $E = 7\text{ TeV}$

$$v = 0.999999991\,c$$

La longitud de un objeto esta definida para que  $t' = 0$ . Usando la ec. (1.162)

$$\begin{aligned} t' = 0 &= \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}} \\ 0 &= t + vx . \end{aligned} \quad (1.205)$$

Recuperando el factor de  $c$ ,  $t = vx/c^2$ . Entonces

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - v^2 x/c^2) = \sqrt{1 - v^2/c^2} x. \quad (1.206)$$

Por lo tanto observamos al protón contraído en un factor de  $1 \times 10^{-8}$ . Similarmente la dilatación temporal se obtiene haciendo  $x = 0$  y

$$t' = \gamma t. \quad (1.207)$$

### Example 1.6.1.2

La amplitud de decaimiento del muón es

$$\Gamma_\mu = \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{m_\mu^5}{96\pi^3} I(x) , \quad (1.208)$$

con  $x = m_e/m_\mu$ , e  $I(x) = 1 - 8x^2 - 24x^4 \ln(x) + 8x^6 - x^8$ . Entonces

$$\Gamma_\mu = 3.00867837568648 \times 10^{-19} \text{ GeV} \quad (1.209)$$

El tiempo de vida media del muón se define como

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \frac{1}{\Gamma_\mu} = 3.32371850737231 \times 10^{18} \text{ GeV}^{-1} \\ &= 3.32371850737231 \times 10^{18} \times 6.582\,118\,99 \times 10^{-25} \text{ s} \\ &= 2.197\,03(4) \times 10^{-6} \text{ s} . \end{aligned} \quad (1.210)$$

La longitud de decaimiento se define como

$$L_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = c \tau_\mu \approx 658.65 \text{ m} . \quad (1.211)$$

El tiempo de vida media se refiere al tiempo de decaimiento para una partícula en reposo. Si  $v = 0.86c$ , entonces

$$\tau'_\mu = \gamma \tau_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1-v^2}} \approx 4.31 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (1.212)$$

el doble de cuando está en reposo.

$$L'_\mu = c\tau'_\mu = 1290.74 \text{ m}. \quad (1.213)$$

A medida que el muón se acerca más a la velocidad de la luz,  $L'_\mu$  coincide más con la distancia recorrida por el muón antes de decaer. De hecho se estima que después de ser producidos en la atmósfera de rayos cósmicos, a la superficie de la Tierra llegan unos 10000 muones por metro cuadrado cada minuto [30].

## 1.7. Espinores de Lorentz

Seguiremos la misma filosofía de la referencia [41]

One of the great advances in theoretical physics over the past half-century or so is the understanding that the Weyl spinors are more fundamental than Dirac spinors; the world appears to be constructed out of them.

Hasta ahora hemos definido la representación  $[S(\Lambda)]_\alpha^\beta$  del subgrupo de Lorentz  $(\frac{1}{2}, 0)$  y su correspondiente conjugado en el subgrupo  $(0, \frac{1}{2})$ . Para definir el producto escalar en este subespacio debemos introducir un objeto de dos componentes  $\alpha = 1, 2$  que transforma bajo esta representación el cual recibe el nombre de *espinor de Weyl* [42, 43]. Sea entonces el espinor de Weyl,  $\xi_\alpha$ , tal que

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &\rightarrow \xi'_\alpha = [S(\Lambda)]_\alpha^\beta \xi_\beta \\ \xi_{\dot{\alpha}}^* &\rightarrow \xi_{\dot{\alpha}}'^* = [S^*(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}^*, \end{aligned}$$

donde  $\dot{\alpha} = \bar{1}, \bar{2}$ . Los correspondientes espinores conjugados, o simplemente anti-espinores de Weyl, pertenecen a la representación  $(0, \frac{1}{2})$  y hemos definido

$$\xi_{\dot{\alpha}}^* \equiv (\xi_\alpha)^* . \quad (1.214)$$

En efecto

$$\xi_{\dot{\alpha}}^* \equiv (\xi_\alpha)^* \rightarrow (\xi'_\alpha)^* = \left\{ [S(\Lambda)]_\alpha^\beta \right\}^* (\xi_\beta)^* = [S^*(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}^* . \quad (1.215)$$

Hemos visto que usando las convenciones adecuadas podemos ahorrarnos la escritura de la métrica en la definición de producto escalar. Para ello es necesario definir la transformación inversa asociada a espinores con índices arriba. Como hicimos con el caso de la cuadriderivada, vamos a introducir un espinor que tenga su índice intrínsecamente superior y que transforme con la representación inversa de  $(\frac{1}{2}, 0)$

$$\eta^\alpha \rightarrow \eta'^\alpha = \eta^\beta [S^{-1}(\Lambda)]_\beta^\alpha .$$

Sacando el conjugado

$$(\eta^\alpha)^* \rightarrow (\eta'^\alpha)^* = \left\{ [S^{-1}(\Lambda)]_\beta^\alpha \right\}^* (\eta^\beta)^* . \quad (1.216)$$

y definiendo

$$\eta^{*\dot{\alpha}} \equiv (\xi^\alpha)^* . \quad (1.217)$$

tenemos que

$$\eta^{*\dot{\alpha}} \rightarrow \eta'^{*\dot{\alpha}} = [(S^{-1})^*]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \eta^{*\dot{\beta}} = [(S^{-1})^\dagger]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \eta^{*\dot{\beta}} ,$$

En efecto,  $(S^{-1})^\dagger$  es una representación independiente del subgrupo de Lorentz  $(0, \frac{1}{2})$  que es generada por el siguiente conjunto de 6 generadores independientes que también satisfacen el álgebra de Lorentz

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) ,$$

tal que

$$(S^{-1})_{(0, \frac{1}{2})}^\dagger = \exp \left( -i\omega_{\mu\nu} \frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2} \right)$$

**Ejercicio:** Para esta representación, encuentre los generadores de boosts y rotaciones:  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{K}$ .

Para evitar hacer uso explícito de la métrica en cada una de las dos representaciones de  $\text{SL}(2, C)$ , definimos el producto escalar directamente entre índices contraídos con la condición de que sea entre espinores o anti-espinores de Weyl que pertenezcan a la misma representación de  $\text{SL}(2, C)$  y que tengan un orden *diagonal*,  ${}^\alpha{}_\alpha$ , para los espinores y un orden *anti-diagonal*,  ${}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}}$ , para los anti-espinores, a saber

$$\begin{aligned} \eta \cdot \xi &\equiv \eta^\alpha \cdot \xi_\alpha , & \xi \cdot \xi &\equiv \xi^\alpha \xi_\alpha , & \eta \cdot \eta &\equiv \eta^\alpha \eta_\alpha , \\ \xi^* \cdot \eta^* &\equiv \xi_{\dot{\alpha}}^* \cdot \eta^{*\dot{\alpha}} , & \xi^* \cdot \xi^* &\equiv \xi_{\dot{\alpha}}^* \cdot \xi^{*\dot{\alpha}} , & \eta^* \cdot \eta^* &\equiv \eta_{\dot{\alpha}}^* \cdot \eta^{*\dot{\alpha}} . \end{aligned} \quad (1.218)$$

Con las definiciones y convenciones anteriores la invarianza de cada uno de estos productos escalares queda garantizada, por ejemplo

$$\eta \cdot \xi \equiv \eta^\alpha \cdot \xi_\alpha = \dots$$

Note que un producto escalar entre un espinor conjugado con otro sin conjugar no tiene sentido pues pertenecen a espacios diferentes.

La teoría completa de espinores de Weyl, incluyendo la definición apropiada de la métrica, puede encontrarse en [42].

En un abuso de notación la operación de hermítico conjugado cuando se aplique a un espinor de Weyl se entenderá como conjugado a nivel del grupo  $\text{SL}(2, C)$ , es decir

$$\xi_{\dot{\alpha}}^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}^* . \quad (1.219)$$

Nombre	Símbolo	SU(N)
$N$ -plete escalar	$\Psi$	$U\Psi$
anti- $N$ -plete escalar	$\Psi^\dagger$	$\Psi^\dagger U^\dagger$

Nombre	Símbolo	Lorentz
fotón	$A^\mu$	$\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$
derivada	$\partial_\mu$	$\partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

Tabla 1.3: Productos escalares:  $\Psi^\dagger \Psi$ ,

$$A^\nu A_\nu = g_{\nu\beta} A^\nu A^\beta, \quad \partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha$$

Nombre	Símbolo	Lorentz	$U(1)$
$e_L$ : electrón izquierdo	$\xi_\alpha$	$[S]_\alpha{}^\beta \xi_\beta$	$e^{i\theta} \xi_\alpha$
$(e_R)^\dagger$ : positrón izquierdo	$\eta^\alpha$	$\eta^\beta [S^{-1}]_\beta{}^\alpha$	$\eta^\alpha e^{-i\theta}$
$(e_L)^\dagger$ : positrón derecho	$(\xi_\alpha)^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}$	$\xi_{\dot{\beta}}^\dagger [S^\dagger]^\beta{}_{\dot{\alpha}}$	$\xi_{\dot{\alpha}}^\dagger e^{-i\theta}$
$e_R$ : electrón derecho	$(\eta^\alpha)^\dagger = \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$	$[(S^{-1})^\dagger]_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} \eta^{\dagger\dot{\beta}}$	$e^{i\theta} \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$

Tabla 1.4: Definición de transformaciones de Lorentz

## 1.8. Leyes de Kirchhoff generalizadas

En el caso de un doblete de fermiones  $\Xi$ , el símbolo  $\dagger$  se usa para denotar el conjugado de fermiones de Weyl. El doblete adjunto en ese caso se puede definir como

$$\tilde{\Xi} = i\tau_2 \begin{pmatrix} \Xi_1^\dagger \\ \Xi_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_2^\dagger \\ -\Xi_1^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.220)$$

Para evitar confusión con el conjugado de espinores de Weyl, usaremos el producto escalar con la métrica  $SU(2)$  para escribir los correspondientes invariantes.

### 1.8.1. Resumen de productos escalares

Tenemos los siguientes objetos que transforman bajo las representaciones del Grupo de Lorentz

$\phi \rightarrow \phi' = \phi$	Scalar field,
$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$	Vector field,
$\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$	Cuadridivergencia,
$\xi_\alpha \rightarrow \xi'_\alpha = [S(\Lambda)]_\alpha{}^\beta \xi_\beta$	Left-handed spinor field + *,
$\eta^\alpha \rightarrow \eta'^\alpha = \eta^\beta [S^{-1}(\Lambda)]_\beta{}^\alpha$	Left-handed anti-spinor field + *,.

(1.221)

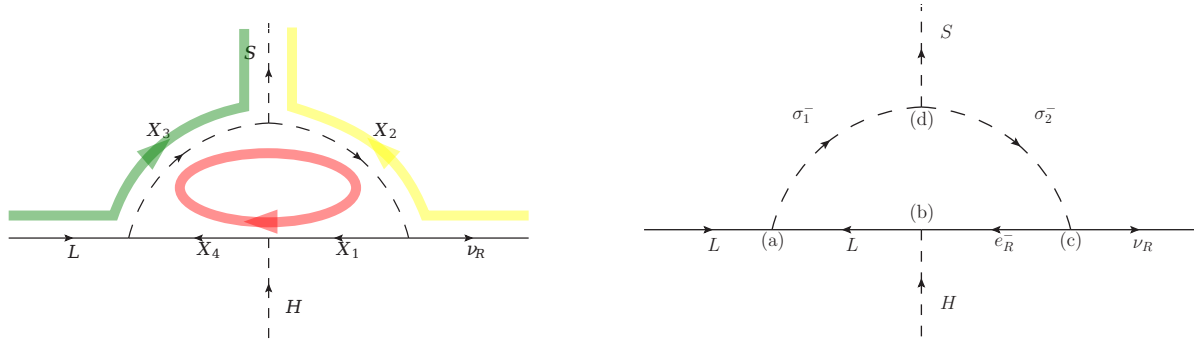
donde,  $g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta$ ,  $g^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta$ .

Productos escalares

- Escalares de Majorana:  $\xi^\alpha \xi_\alpha$ ,  $\eta_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$
- Escalar de Dirac:  $\eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$
- Escalar subgrupo  $SL(2, C)$  pero vector bajo  $SO(1, 3)$ :  $S^\dagger \bar{\sigma}^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu$ : Esta identidad aparece en la combinación de productos escalares  $i \xi_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha$ , como se vera posteriormente en detalle.

Campos	Lorentz	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_{B-L}$
$L_1, L_2$	$\xi_\alpha$	<b>2</b>	$-1/2$	$l$
$(e_R^-)^\dagger$	$\eta_1^\alpha$	<b>1</b>	1	$-e$
$(\nu_R)^\dagger$	$\eta_2^\alpha$	<b>1</b>	0	$-\nu$
$H$	-	<b>2</b>	$1/2$	$h$
$\sigma_1^-$	-	<b>1</b>	$-1$	$\sigma_1$
$\sigma_2^-$	-	<b>1</b>	$-1$	$\sigma_2$
$S$	-	<b>1</b>	0	$s$

Tabla 1.5: Fermiones y escalares. El signo en la primera columna denota la carga eléctrica

Figura 1.3: Verde:  $L$ , amarillo:  $\nu_R$ , rojo:  $X_4$ 

**Ejemplo:** En la siguiente Tabla y figura se asignan los espinores (anti-espinores) de Weyl izquierdos (derechos)  $\xi_{i\alpha}$  ( $\eta_i^\alpha$ ) y las cargas bajo diferentes simetrías especificadas en las columnas.

Evite

$$(\nu_R)^\dagger L \cdot H, \quad \text{y} \quad \nu_R \nu_R. \quad (1.222)$$

Permita

Para  $U(1)_Y$ :

$$\begin{aligned}
 \text{(a) :} & \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \\
 \text{(b) :} & \quad \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\
 \text{(c) :} & \quad -1 = -1 + 0 \\
 \text{(d) :} & \quad -1 = -1 + 0.
 \end{aligned} \quad (1.223)$$

Para  $U(1)_{B-L}$

$$\begin{aligned}
 \text{(a) :} & \quad l + l = \sigma_1 \\
 \text{(b) :} & \quad e + h = l \\
 \text{(c) :} & \quad \sigma_2 = \nu + e \\
 \text{(d) :} & \quad \sigma_1 = \sigma_2 + s.
 \end{aligned} \quad (1.224)$$

Combinado con  $SU(2)_L$  y Lorentz

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} &: L_i \cdot L_j \sigma_1^* \\
 \text{(b)} &: (e_R)^\dagger \tilde{H} \cdot L \\
 \text{(c)} &: \nu_R e_R^- \sigma_2^+ \\
 \text{(d)} &: \sigma_1^+ \sigma_2^- S.
 \end{aligned} \tag{1.225}$$

La condiciones de consistencia para  $U(1)_{B-L}$  son

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2l \\
 e &= l - h \\
 \sigma_2 &= \nu + l - h \\
 s &= \sigma_1 - \sigma_2 = 2l - \nu - l + h = l - \nu.
 \end{aligned} \tag{1.226}$$

Con  $l = -1$  y  $h = 0$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -2 \\
 e &= -1 \\
 \sigma_2 &= \nu - 1 \\
 s &= -1 - \nu.
 \end{aligned} \tag{1.227}$$

Para evitar

$$(\nu_R)^\dagger L \cdot H, \quad \nu_R \nu_R, \tag{1.228}$$

requerimos que

$$-\nu - 1 + 0 \neq 0, \quad 2\nu \neq 0. \tag{1.229}$$

de modo que

$$\nu \neq -1, 0. \tag{1.230}$$

A modo de ejemplo, para  $\nu = -4$ , entonces  $s = 3$  y  $\sigma_2 = -5$  con  $\sigma_1 = -2$ ,  $l = e = -1$  y  $h = 0$ .

- Demuestre que el producto escalar  $SU(2)$  entre  $L_i$  iguales es cero ( $i = 1, 2$ )
- Establezca las condiciones para que  $\sigma_1^- = \sigma_2^-$ .



From: 1504.07892

Symbol	Lorentz	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_L$	Topology
$H$	$-$	2	$+1/2$	$h$	
$L$	$\sum_{1\alpha}$	2	$-1/2$	$l$	
$\Psi_L$	$\sum_{2\alpha}$	2	$-1/2$	$\psi_L$	
$(\widetilde{\Phi}_R)$	$\eta_1^\alpha$	2	$+1/2$	$-\psi_R$	
$(N_R)^{\psi_0}$	$\eta_2^\alpha$	1	0	$-\eta$	
$S$	$-$	1	0	$S$	

$Q \downarrow \quad H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \Phi_L^0 \\ \Psi_L^- \end{pmatrix} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} \Phi_R^0 \\ \Psi_R^- \end{pmatrix} \quad (\widetilde{\Psi}_R) = \begin{pmatrix} \Phi_R^+ \\ -(\Psi_R^0)^* \end{pmatrix}$

$\Phi_L \downarrow \quad U(1)_Y: -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \Rightarrow$

$\Phi_R \downarrow \quad U(1)_L: l + \psi_R + S = 0 \Rightarrow L \cdot \Phi_R S \Rightarrow \sum_{1\alpha} \eta_{1\alpha}^* S \Rightarrow \Phi_L \downarrow \Rightarrow$

$U(1)_L$

$(a) \quad L + S = \psi_R \Rightarrow (\widetilde{\Phi}_R) \cdot L S \quad (\eta_1^\alpha \sum_{1\alpha} S)$   
 $(b) \quad \psi_L = \psi_R \Rightarrow (\widetilde{\Phi}_R) \cdot \Psi_L \quad (\eta_1^\alpha \sum_{2\alpha})$   
 $(c) \quad \psi_L + H = \eta \Rightarrow (N_R)^{\psi_0} \Psi_L \cdot H \quad (\eta_2^\alpha \sum_{2\alpha} H)$   
 $(d) \quad \eta + \eta = 0 \Rightarrow U(1)_L \text{ global (soft)} N_R N_R \quad (\eta_{1\alpha}^* \eta_{1\alpha}^*)$   
 $(e) = (c) \quad \psi_L + h = \eta$   
 $(f) = (b)$   
 $(g) \quad l = \psi_R + S \Rightarrow (\widetilde{\Phi}_R) \cdot L S^* \quad (\eta_1^\alpha \sum_{1\alpha} S)$   
 $l \Rightarrow S \in \mathbb{R}_h \Rightarrow S = 0$   
 with  $L = -1, H = 0, S = 0 \Rightarrow \psi_R = -1, \psi_L = -1, \eta = -1$

$\downarrow$   
 $n = +1 \Rightarrow$   
 $(N_R)^{\psi_0} \Psi_L \cdot H \text{ (hard)}$



Para poder considerar el segundo diagrama (en la parte inferior izquierda) debemos hacer  $n = 0$ , de modo que todos los nuevos campos tienen número leptónico cero:  $n = \psi_R = \psi_L = s = 0$ . En ese caso, el único término que viola número leptónico es  $(\widetilde{\Psi_R}) \cdot LS$  y por lo tanto las masas de neutrinos deben ser proporcionales al acoplamiento que acompañe a ese término.

## 1.9. Principio de Mínima Acción

El Principio de Mínima acción establece, una vez fijado el espacio de coordenadas generalizadas sobre el espacio de configuración, que de todas las trayectorias posibles que transcurren entre  $t_1$  y  $t_2$ , el sistema escogerá aquella que minimice la acción  $S$  [8]. La magnitud de la acción viene dada para cada trayectoria por la integral:

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1.231)$$

Donde:  $q_i(t)$  son las coordenadas paramétricas de una trayectoria posible.  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , es la función lagrangiana del sistema.

Puede probarse mediante principios variacionales, que de todas las trayectorias posibles, la que hace estacionaria la anterior expresión es la que satisface la siguiente condición  $i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.232)$$

conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange. La demostración se hará más adelante para el caso en el que las coordenadas generalizadas corresponden a funciones de campo.

De momento mostraremos como la segunda ley de Newton [11], puede escribirse en la forma de la ec. (1.232).

$$\begin{aligned} F &= ma \\ -\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &= m \frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.233)$$

Podemos introducir el Lagrangiano a cada lado de la igualdad adicionando términos con la respectiva derivada parcial cero:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) \right].$$

Reemplazando  $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = T - V$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Una forma más rigurosa de escribir la ec. (1.233) puede encontrarse en [8].



Figura 1.4: Ejemplo de cálculo de la Acción para una trayectoria arbitraria

El Hamiltoniano del sistema se obtiene definiendo la variable canónica conjugada de  $x$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (1.234)$$

y usando la transformada de Legendre

$$H = p\dot{x} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = T + V \quad (1.235)$$

Para visualizar el principio de mínimo de acción se recomienda seguir las actividades del programa interactivo en Java disponible online en [9]. Una versión implementada como Notebook de IPython puede encontrarse aquí: [https://github.com/restrepo/ComputationalMethods/blob/master/material/least\\_action.ipynb](https://github.com/restrepo/ComputationalMethods/blob/master/material/least_action.ipynb).

Allí se considera el problema de un objeto de 0.2Kg lanzado hacia arriba y retornado al punto de partida 3 segundos después. Si dividimos la trayectoria en tres intervalos como se muestra en la Fig. 1.4, teniendo en cuenta que la velocidad es la pendiente del segmento, para  $\Delta t = 0.75$  s  $x_1 = 11.13$  m,  $t_1 = 0.75$  s,  $x_2 = 0$  m,  $t_2 = 1.5$  s, tenemos que para la trayectoria mostrada

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \approx \sum_i (T - V)_i \Delta t \\ &\approx \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 - mgx_i \right] \Delta t \\ &\approx 16.67 \text{ J s} \end{aligned} \quad (1.236)$$

Iterando el proceso se puede encontrar numéricamente (o a mano) la trayectoria que minimiza la acción mostrada en la Fig. 1.5 Para una dimensión podemos definir la densidad Lagrangiana como

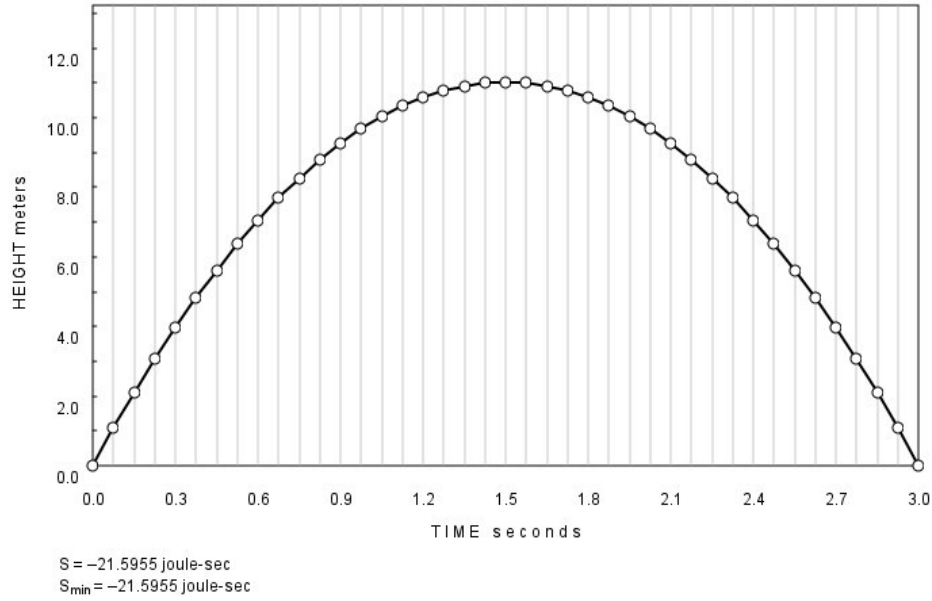


Figura 1.5: Trayectoria que minimiza la Acción

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t) \quad \text{or} \quad L(q, \dot{q}, t) = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dq. \quad (1.237)$$

La ec. (1.231) puede escribirse entonces como

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dq dt. \quad (1.238)$$

Para sistemas continuos es conveniente usar la densidad Lagrangiana. Abordaremos a continuación el sistema continuo correspondiente a la cuerda clásica unidimensional para construir la densidad Lagrangiana correspondiente. A partir de ella demostraremos las ecuaciones de Euler Lagrange para dicho sistema.

## 1.10. Infinitesimal a lo integral

El método de la Acción es conveniente cuando necesitamos observar de forma integral, es decir, de forma completa. En el caso anterior, la trayectoria completa y sus posibles variaciones.

Es claro que para un problema con modos de oscilación, nos interesa caracterizar el modo de oscilación en su manifestación completa. En la siguiente sección mostraremos las dos formas y veremos que podremos estudiar la Acción asociada al modo de oscilación completo.

A nivel física fundamental, sabemos que el objeto físico más importante es el campo, que al igual que un modo de oscilación es un objeto completo que ocupa todo el espacio. Como resulta que al final las partículas son excitaciones de esos campos, entonces sólo nos tenemos que preocupar de describir los campos y la forma más adecuada es a través de la Acción.

Para resaltar la importancia de los campos en el mundo subatómico recomendamos la lectura del siguiente artículo y el siguiente video

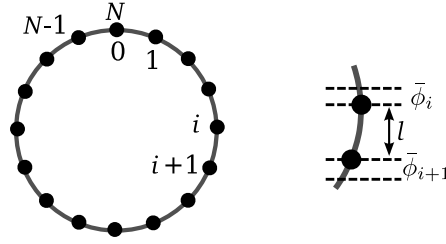
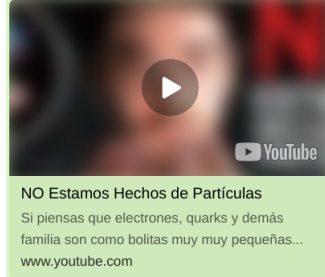


Figura 1.6: Modelo Cuerda



- Video en YouTube:
- Artículo de divulgación <https://www.discovermagazine.com/the-sciences/the-standard-model>

## 1.11. La cuerda clásica unidimensional

Considere una cuerda de longitud  $L$  formando un círculo de radio  $R$ . Es conveniente considerar un conjunto de  $N$  partículas de masa  $m$  a lo largo de la circunferencia, unidas por resortes de longitud  $l$  y constante elástica  $k$ . Los modos vibracionales de la cuerda a lo largo de la circunferencia se obtienen en límite de  $N \rightarrow \infty$  y  $l \rightarrow 0$

De acuerdo a la figura 1.6, si  $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t)$  es el desplazamiento de la  $i$ -ésima masa desde su posición de equilibrio, entonces el Lagrangiano del sistema de  $N$  partículas y resortes es:

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2, \quad (1.239)$$

$$= \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2, \quad (1.240)$$

donde  $\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i$  es el desplazamiento relativo entre un par de resortes. Si  $\mu$  es la densidad de la cuerda,  $T$  la tensión y  $v$  la velocidad, entonces

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{l} \\ T &= kl \\ v^2 &= \frac{T}{\mu}. \end{aligned} \quad (1.241)$$

(1.241) En el límite  $l \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ , tenemos

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t) \rightarrow \bar{\phi}(z, t), \quad (1.242)$$

que representa la función de campo del desplazamiento de una masa infinitesimal de su posición de equilibrio. Entonces

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{l} l \left( \dot{\bar{\phi}}_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (kl) l \left( \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \mu \left( \dot{\bar{\phi}}_i \right)^2 l - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} T \left( \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 l. \end{aligned} \quad (1.243)$$

En el límite continuo  $\sum(\dots) l \rightarrow \int(\dots) dz$ , entonces

$$L = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \int_0^L \mathcal{L} dz, \quad (1.244)$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.245)$$

y

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi R} \mathcal{L} (\partial \bar{\phi} / \partial t, \partial \bar{\phi} / \partial z) dt dz. \quad (1.246)$$

Definiendo

$$\phi = \sqrt{T} \bar{\phi}, \quad (1.247)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial \phi / \partial t, \partial \phi / \partial z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{T} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.248)$$

Note que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial t)} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.249)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial z)} \right] = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.250)$$

Si en la ec. (1.240), tomamos como coordenadas generalizadas las  $N$   $\dot{\bar{\phi}}_i$  y  $\bar{\phi}_i$ , entonces, podemos obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.232):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} = 0, \quad i = 0 \text{ hasta } N-1. \quad (1.251)$$

En el límite  $l \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ , y usando las ecs. (1.249) y (1.250),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( m \dot{\bar{\phi}}_i \right) = m \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= Tl \left( \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2} \right) \\
&\rightarrow l\sqrt{T} \left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.252}$$

$$= l\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right]. \tag{1.253}$$

Para el segundo término de la ec. (1.251) nótese que

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= -(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0)^2 - (\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 - \dots - (\bar{\phi}_{(i-1)+1} - \bar{\phi}_{i-1})^2 - (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 - \dots \\
&= -(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0)^2 - (\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 - \dots - (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1})^2 - (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 - \dots
\end{aligned} \tag{1.254}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= -2(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}) - 2(\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i) \times (-1) \\
&= 2l \left[ \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} - \frac{\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{l} \right].
\end{aligned}$$

Si  $\bar{z}_i$  es el punto medio del intervalo entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , entonces en el límite de  $l \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= 2l^2 \left\{ \frac{[\bar{\phi}(z_{i+1}, t) - \bar{\phi}(z_i, t)]/l}{l} - \frac{[\bar{\phi}(z_i, t) - \bar{\phi}(z_{i-1}, t)]/l}{l} \right\} \\
&= 2l^2 \left[ \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{z}_{i+1}, t)/\partial z}{l} - \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{z}_i, t)/\partial z}{l} \right] \\
&= 2l^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} \\
&\rightarrow \frac{2l^2}{\sqrt{T}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{1.255}$$

Usando las ecs. (1.255) (1.241), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} &= \frac{1}{2}k \left[ -\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 \right] \\
&\rightarrow \frac{1}{2}k \left( \frac{2l^2}{\sqrt{T}} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\
&\rightarrow l\sqrt{T} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.256}$$

$$= -l\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right]. \tag{1.257}$$

De las ecuaciones (1.252) y (1.256), obtenemos la ecuación de movimiento para el campo  $\phi(z, t)$ :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.258)$$

que corresponde a la ecuación de onda en una dimensión. En tres dimensiones obtendríamos:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0. \quad (1.259)$$

De otro lado, de las ecuaciones (1.253) y (1.257), obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para la densidad Lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right] = 0. \quad (1.260)$$

En tres dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right] = 0. \quad (1.261)$$

Definiendo

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.262)$$

en un sistema de unidades donde  $x^0$  tenga las mismas unidades que  $x^i$ , podemos expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisface  $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu)$ , como

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] = 0,$$

donde, en la última ecuación se ha usado la convención de suma sobre índices repetidos.

Si la densidad Lagrangiana depende también directamente de  $\phi$ ,  $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu, \phi)$ , entonces la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas  $\partial\phi/\partial x^\mu$  y  $\phi$ , es

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.263)$$

Esta última ecuación se deducirá usando métodos variacionales en la sección 1.14.

La generalización de la densidad Lagrangiana a tres dimensiones esta dada por

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.264)$$

O en forma más compacta, cambiando a un sistema de unidades en el cual  $v = 1$ :

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (1.265)$$

Note que para una onda mecánica con velocidad de propagación  $v$ , la ecuación anterior se usa sólo a modo de notación. Sólo cuando la velocidad de propagación es la velocidad de la luz la densidad Lagrangiana contiene un producto escalar bien definido, el cual es invariante bajo transformaciones de Lorentz. En este caso el producto escalar corresponde al módulo al cuadrado del cuadvectores  $\partial_\mu \phi$ .

De hecho  $\partial_\mu$  hace las veces de la coordena generalizada  $\dot{q}$  en el Lagrangiano convencional. La coordenada generaliza  $q$  para a ser  $\phi$  de modo que en general se espera que la densidad Lagrangiana también dependa en  $\phi$

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (1.266)$$

En tres dimensiones, la densidad Lagrangiana debe ser ahora integrada en un volumen,  $V$ , para obtener la Lagrangiana

$$L = \int_V \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dx dy dz, \quad (1.267)$$

Como  $L$  tiene unidades de Energía, en el sistema de unidades naturales las coordenadas tienen unidades de inverso de Energía y por consiguiente la densidad Lagrangiana debe tener unidades de Energía a la cuarta. Finalmente, ya que la cuadvdivergencia  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ , tiene unidades de Energía, de la ec. (1.266) podemos concluir entonces que el campo  $\phi$ , tiene unidades de Energía:

$$[\mathcal{L}] = E^4 \text{ and } [\partial_\mu] = E \rightarrow [\phi] = E. \quad (1.268)$$

La Acción para el campo es entonces

$$S[\phi, \partial_\mu] = \int_{t_1}^{t_2} L(\phi, \partial_\mu \phi) dt dx dy dz = \int_R \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4 x, \quad (1.269)$$

donde los corchete en  $S$  significan que la Acción es un *funcional* de las coordenadas generalizadas  $\phi, \partial_\mu$ ,  $d^4 x$  es el cuadvolumen diferencial y  $R$  es el cuadvolumen en el cual se integra la densidad Lagrangiana para obtener la Acción.

## 1.12. Problema variacional de Noether

### 1.13. Tipos de conservación

Un sistema binario de estrellas conserva la energía globalmente, pero un sistema binario de estrellas de neutrones donde los efectos relativistas sean importante violan la energía globalmente, es decir, el sistema se vuelve inestable. ¿Qué pasa con la conservación de la energía en ese último caso?

### 1.14. Principio de mínima acción

Seguiremos la discusión basada en [33, 34, 35].



Estamos interesados en los cambios que sufre la Acción cuando se transforman los campos. Por ejemplo, bajo una transformación de cambio de fase

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi, \quad (1.270)$$

si consideremos una transformación de fase pequeña

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &\approx (1 + i\theta)\psi \\ &= \psi + i\theta\psi. \end{aligned} \quad (1.271)$$

Podemos definir el cambio en el campo como

$$\delta\psi \equiv \psi' - \psi = (i\psi)\theta \quad \rightarrow \quad \delta\psi^* \equiv \psi'^* - \psi^* = (-i\psi^*)\theta, \quad (1.272)$$

de modo que el cambio en el campo es lineal en el parámetro de la transformación  $\theta$ .

De otro lado, cuando se escriben las ecuaciones de Maxwell en términos del cuadvivector de potencial  $A^\mu(x)$ , veremos que éstas resultan invariantes bajo la transformación

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\theta(x) \\ \delta A^\mu(x) &\equiv A'^\mu(x) - A^\mu(x) = \partial^\mu\theta(x). \end{aligned} \quad (1.273)$$

donde  $\theta(x)$  es una función arbitraria que se conoce como parámetro de la transformación. En este caso el cambio del campo va con la cuadriderivada del parámetro de la transformación.

La Acción debe ser también invariante bajo este tipo de transformación, es decir, para el cambio en la Acción

$$\delta S = 0. \quad (1.274)$$

Para  $N$  campos asociados a un parámetro de transformación  $\theta$ , la dependencia explícita e implícita de la densidad Lagrangiana da lugar al funcional de Acción

$$S[\phi_i, \partial_\mu\phi_i; x] = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i; x) \quad (1.275)$$

El problema variacional de Noether, que es diferente al principio de Hamilton, puede ser establecido en los siguientes términos

¿Cuales son las condiciones generales que se deben satisfacer para que una dada variación en la variables explícitas e implícitas permitan que la Acción pueda quedar invariante, y de aquí  $\delta S = 0$ , donde  $\delta S$  puede o no contener un término de frontera?

Definiendo el cambio interno en el campo como en (2.34)

$$\delta\phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x), \quad (1.276)$$

y el cambio en  $x$  bajo una transformación de Lorentz infinitesimal como

$$x \rightarrow x' = x + \delta x \quad (1.277)$$

tenemos que la variación en las variables dependientes e independientes de la Acción son

$$\delta S = \int_R d^4x' \mathcal{L}(\phi'_i, \partial_\mu\phi'_i; x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x); x)$$

$$= \int_R \frac{\partial x'}{\partial x} d^4x \mathcal{L}(\phi_i + \delta\phi_i, \partial_\mu(\phi_i + \delta\phi_i); x + \delta x) - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i; x) \quad (1.278)$$

Derivando (1.277), y reemplazando

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu), \quad (1.279)$$

en la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)] d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i; x) + \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu(\delta\phi_i) \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \right\} \\ &\quad - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i; x) \\ &= \int_R d^4x [\partial_\mu(\delta x^\mu)] \mathcal{L} + \int_R d^4x \left\{ \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu(\delta\phi_i) \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \right\} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &\approx \int_R d^4x \partial_\mu(\mathcal{L} \delta x^\mu) + \int_R d^4x \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i \right\}, \quad (1.280) \end{aligned}$$

y reordenando los términos con derivada total

$$\delta S = \int_R d^4x \partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] + \int_R d^4x \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \right\} \delta\phi_i, \quad (1.281)$$

La condición  $\delta S = 0$  implica que

$$\int_R d^4x \sum_i \mathcal{E}_i \delta\phi_i = \int_R d^4x \partial_\mu B^\mu, \quad (1.282)$$

donde

$$\mathcal{E}_i = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad B^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i. \quad (1.283)$$

## 1.15. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El teorema de Gauss establece que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.284)$$

Generalizado a cuatro dimensiones, tenemos

$$\int_R d^4x \partial_\mu \eta^\mu = \int_\sigma d\sigma_\mu \eta^\mu, \quad (1.285)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el volumen en cuatro dimensiones (4D) y  $\sigma$  la correspondiente hipersuperficie en tres dimensiones.

Aplicando las condiciones de Frontera usando el teorema de Gauss en 4D en el lado derecho de (1.282), es claro que la integral de frontera se anula si imponemos que la variación tanto de la coordenadas,  $\delta x^\mu$ , como de los campos,  $\delta\phi_i$ , en la frontera se hagan cero. Esto es equivalente a la anulación de las trayectorias en los extremos para la Acción en mecánica clásica,

Obtenemos entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo  $\phi_i$

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (1.286)$$

La misma condición de nulidad de los campos en la frontera permite establecer que una densidad Lagrangiana modificada con una deriva total

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu(\eta^\mu(x)) \quad (1.287)$$

donde  $\eta^\mu(x)$  es cualquier función de los campos de la densidad Lagrangiana original que también sea cero sobre la frontera, da lugar a la Acción

$$\begin{aligned} S' &= \int_R d^4x \mathcal{L}' = \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_R d^4x \partial_\mu \eta^\mu \\ &= \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_\sigma \eta^\mu d\sigma_\mu \\ &= S, \end{aligned} \quad (1.288)$$

para una hipersuperficie suficientemente grande. De modo que dos densidades lagrangianas que difieran solo en derivadas totales dan lugar a la misma Acción.

Usando el principio de mínima acción en términos del campo  $\phi$ , tenemos que para la densidad Lagrangiana (1.248)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.289)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.286)

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \right] + \partial_3 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial z)} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.290)$$

que corresponde a la ec. (1.258).

Generalizando a tres dimensiones vemos que la ecuación de Euler-Lagrange para la densidad Lagrangiana de una onda propagandose a una velocidad  $v$ , eq. (1.259),

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (1.291)$$

se puede calcular a partir de

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \right] \partial_\nu \phi + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \left[ \frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \delta_\mu^\sigma \partial_\nu \phi + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \delta_\nu^\sigma) \\
 &= \frac{1}{2} (g^{\sigma\nu} \partial_\nu \phi + g^{\mu\sigma} \partial_\mu \phi) \\
 &= \frac{1}{2} (\partial^\sigma \phi + \partial^\sigma \phi) \\
 &= \partial^\sigma \phi.
 \end{aligned} \tag{1.292}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
 \partial_\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\
 \partial_\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \right] &= 0 \\
 \partial_\sigma \partial^\sigma \phi &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.293}$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma$  es un índice modo, podemos escribir la ecuación de onda en la forma conocida:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \partial^\mu \phi &= 0 \\
 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.294}$$

**Ejercicio:** Demuestre que la ecuación de Klein-Gordon en (1.185) proviene de una densidad Lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \tag{1.295}$$

donde

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \tag{1.296}$$

En el ejercicio anterior el gráfico del *potencial* escalar  $V(\phi)$  corresponde a la parábola mostrada en la figura 1.7

La interpretación tomada de la teoría cuántica de campos completa, nos permite visualizar la excitación del campo como una partícula rodando a través de las paredes del potencial como se muestra en la figura. La masa del campo corresponde a las oscilaciones alrededor del mínimo que suben las paredes y que por consiguiente *cuestan energía*. Esta interpretación la usaremos en el Capítulo 6 para entender el mecanismo de Higgs.

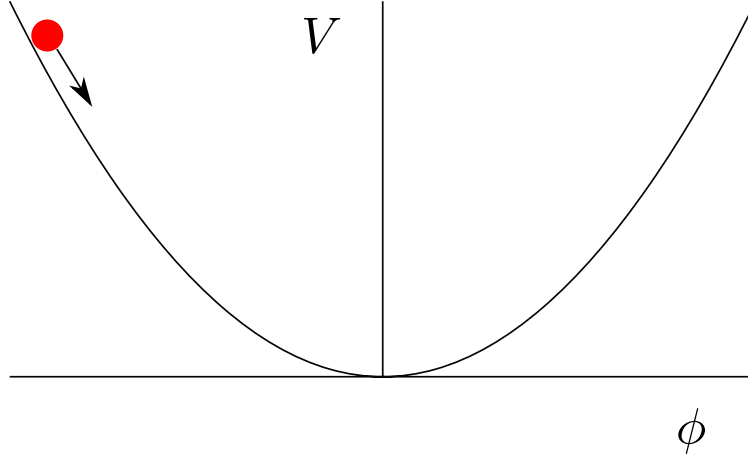


Figura 1.7:  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  con  $m^2 > 0$

El potencial escalar se puede modelar para que el campo escalar  $\phi$  pueda interpretarse por ejemplo como el inflatón en el Universo primitivo. Mientras la partícula rueda hacia el mínimo el Universo sufre una expansión exponencial y cuando termina oscilando alrededor del mismo el universo sufre una fase de *recalentamiento* mediante la cual la energía del inflatón genera todas las partículas y antipartículas del modelo estándar en cantidades de  $10^{90}$ . La radiación cósmica de fondo está compuesta de esos  $10^{90}$  fotones de primigéneos y las anisotropías observadas en ella provienen de las fluctuaciones cuánticas del inflatón magnificadas por la expansión exponencial.

### Ejercicio:

1. Demuestre que los términos con derivada de la densidad Lagrangiana para un campo escalar complejo

$$\phi \equiv \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (1.297)$$

que sea invariante bajo el Grupo  $U(1)$  de sus cambios de fase (1.270), se puede escribir de forma única como

$$\mathcal{L}(\partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*) = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2, \quad (1.298)$$

es decir, como la suma de la densidad Lagrangiana para dos campos reales independientes.

2. Cambiando a las variables generalizadas  $\phi_1 \rightarrow \phi$ ,  $\phi_2 \rightarrow \phi^*$ , encuentre las ecuaciones de Euler Lagrange para  $\phi$  y  $\phi^*$

## 1.16. Ecuación de continuidad

Las transformaciones que bajo algunas condiciones dejan invariante a la acción, van a estar relacionadas con cargas conservadas. A continuación definiremos con un ejemplo conocido que es una carga conservada.

Para entender el significado físico de la ecuación de continuidad consideremos una cuadri-corriente asociada por ejemplo a la densidad de carga y corriente eléctricas. Expandiendo la ecuación de continuidad en sus componentes espaciales y temporales tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \partial_0 j^0 + \partial_i j^i &= 0, & \text{suma sobre } i \\ \frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0.\end{aligned}\tag{1.299}$$

Integrando sobre el volumen y aplicando el teorema de Gauss

$$\int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} + \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.\tag{1.300}$$

Si interpretamos  $j^0$  como la densidad,  $\rho$ , de una cierta carga  $Q$ , tal que

$$Q = \int_V d^3x j^0 = \int_V d^3x \rho,\tag{1.301}$$

entonces, si escogemos  $S$  como una superficie suficientemente grande para contener toda la distribución de carga  $Q$  en su interior, tendremos que la integral sobre la superficie se anula

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0,\tag{1.302}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho \\ &= \frac{dQ}{dt} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.303}$$

Es decir, que la carga es independiente del tiempo, y por lo tanto se conserva.

## 1.17. Transformaciones externas

Un desplazamiento infinitesimal, que equivale a repetir un experimento en laboratorio desplazado en el tiempo o en el espacio, puede parametrizarse sin pérdida de generalidad como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu.\tag{1.304}$$

Para visualizar más fácilmente la situación para un campo escalar, supongamos de momento que  $\delta x^\mu$  corresponde traslación espacio-temporal.

Tenemos

$$\phi'(x') = \phi'(x + \delta x)\tag{1.305}$$

$$\approx \phi'(x) + \frac{\partial \phi'(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu\tag{1.306}$$

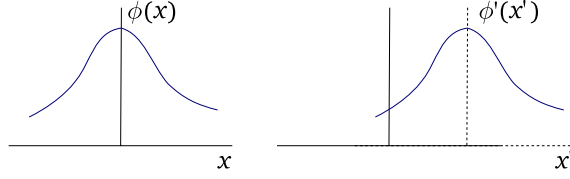


Figura 1.8: Traslación de función y coordenadas en una dimensión:  $\phi(x) = \phi'(x')$

$$= [\phi(x) + \delta\phi(x)] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\phi(x) + \delta\phi(x)] \delta x^\mu \quad (1.307)$$

$$\approx \phi(x) + \delta\phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu, \quad (1.308)$$

donde, por simplicidad,  $\phi$  es un campo real. Entonces,

$$\Delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (1.309)$$

Para una traslación,  $\Delta\phi(x) = 0$ , ver figura 1.8. De modo que

$$\delta\phi = -(\partial_\mu\phi)\delta x^\mu, \quad (1.310)$$

y la transformación del campo  $\phi$  como consecuencia de la traslación es

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - \delta\phi(x) = \phi(x) + (\partial_\mu\phi(x))\delta x^\mu. \quad (1.311)$$

## 1.18. Transformaciones internas

Una consecuencia del primer teorema de Noether es que por cada simetría global de la Acción existe una carga conservada.

La virtud del trabajo de Noether [?] fue separar los resultados en los casos de grupos de simetrías globales en los cuales el parámetro de transformación no depende del punto del espacio tiempo (como es el caso de las transformaciones a velocidad constante la relatividad especial:  $v = \text{cte}$ ) del caso en que los grupos de simetría dependan del punto del espacio-tiempo (como los sistemas acelerados de la relatividad general donde la velocidad depende el punto del espacio-tiempo:  $v(x)$ ).

En el caso de teorías de campos estamos más interesados en simetría de espacios internos como puede ser el cambio de fase de la función de onda en la ecuación de Schrödinger. Un cambio de fase,  $\theta$ , es un caso particular del parámetro de la transformación. En general el parámetro de una transformación interna puede ser constante,  $\theta = \text{cte}$ , que corresponde a una transformación de fase *global*, o depender del punto del espacio tiempo,  $\theta(x)$ , que corresponde a una transformación de fase *local*. Las simetrías internas están caracterizadas por la condición  $\delta x^\mu = 0$

Nos enfocaremos en esta sección en la formulación de los dos teoremas de Noether para el caso de simetrías internas globales y locales.

Si la transformación depende de algún parámetro  $\theta$  continuo, entonces podemos garantizar la existencia de un parámetro infinitesimal tal que

$$\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\partial_\nu\theta(x), \quad (1.312)$$

Para concretar, consideremos como transformación interna el cambio de fase de una función compleja

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi, \quad (1.313)$$

Para un  $\theta$  suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \phi' &= e^{i\theta} \phi \\ &\approx (1 + i\theta) \phi \\ &\approx \phi + i\theta \phi. \end{aligned} \quad (1.314)$$

Definimos el cambio interno en la función como

$$\delta\phi \equiv \phi' - \phi, \quad (1.315)$$

y para el cambio infinitesimal del campo y su complejo conjugado, tenemos que haciendo  $\phi_1 = \phi$  y  $\phi_2 = \phi^*$

$$\delta\phi = a_1\theta, \quad \delta\phi^* = a_2\theta, \quad (1.316)$$

donde

$$a_1 = i\phi, \quad a_2 = -i\phi^*. \quad (1.317)$$

Ademas, para este caso

$$b_1^\nu = b_2^\nu = 0. \quad (1.318)$$

## 1.19. Primer teorema de Noether

El primer teorema de Noether surge al asumir que

- Los parámetros de transformación son globales, es decir, que los parámetros de la transformación no dependen del punto del espacio tiempo.
- El conjunto de campos satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Por consiguiente, la ecuación (1.282) se reduce a

$$\int_R d^4x \partial_\mu B^\mu = 0. \quad (1.319)$$

Por lo tanto:

### Teorema 1

Por cada parámetro asociado a una transformación global existe una ecuación de continuidad del tipo

$$\partial_\mu B^\mu = 0, \quad (1.320)$$

con  $B^\mu$  dado por la ecuación (1.283).



### 1.19.1. Simetrías externas

Consideremos el caso en el cual el campo es sólo afectado en su dependencia espacio-temporal. Como ocurre para una la transformación externa de traslación global discutida en la Sección 1.17. Allí, un desplazamiento constante

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.321)$$

ocasiona un cambio en un campo escalar de Lorentz dado por la ec. (1.310)

$$\delta\phi_i = -(\partial_\nu\phi_i)\delta x^\nu. \quad (1.322)$$

De acuerdo al Teorema 1 de Noether, los cuatro posibles parámetros de desplazamiento deben dar lugar a cuatro ecuaciones de continuidad para (suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} B^\mu &= \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \\ &= \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\delta x^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}(\partial_\nu\phi_i)\delta x^\nu \\ &= -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}(\partial_\nu\phi_i) - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]\delta x^\nu \\ &= -T^\mu_\nu\delta x^\nu, \end{aligned} \quad (1.323)$$

donde, hemos definido

$$T^\mu_\nu \equiv \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i - \delta^\mu_\nu\mathcal{L} \quad (1.324)$$

si los campos  $\phi_i$  satisfacen la ecuaciones de Euler-Lagrange,  $\mathcal{E}_i = 0$ , tenemos que

$$\partial_\mu(T^\mu_\nu\delta x^\nu) = 0. \quad (1.325)$$

Si  $\delta x^\nu$  es constante, como se espera en el caso de sistemas inerciales, se satisfacen las cuatro ecuaciones de continuidad (una para cada  $\nu$ )

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (1.326)$$

El tensor  $T^\mu_\nu$  proviene de asumir la homogeneidad del espacio y el tiempo y es llamado el tensor de momentum-energía. La densidad Hamiltonina se obtiene de  $T^0_0$

$$\mathcal{H} = T^0_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.327)$$

$$= \pi(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (1.328)$$

Comparando con la expresión correspondiente en la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica, tenemos que si  $\phi(x)$  es la variable canónica, la variable canónica conjugada es  $\pi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi(x)/\partial t)}. \quad (1.329)$$

El teorema de Noether en este caso establece que la invarianza de la Acción bajo traslaciones temporales da lugar a la ecuación de continuidad (1.180) para  $\nu = 0$

$$\partial_\mu T_0^\mu = 0 \quad (1.330)$$

cuya carga conservada corresponde a la energía

$$H = \int_V d^3x T_0^0 = \int_V d^3x \mathcal{H}. \quad (1.331)$$

De igual forma la invarianza bajo traslaciones espaciales da lugar a ecuaciones de continuidad para cada componente  $\nu = i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\partial_\mu T_i^\mu = 0, \quad (1.332)$$

cuyas densidad de cargas conservadas,  $T_i^0$ , que en forma vectorial escribiremos como  $\mathbf{T}^0$ , dan lugar a la conservación del momentum

$$\mathbf{P} = \int_V d^3x \mathbf{T}^0. \quad (1.333)$$

Generalizando a un campo complejo

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.334)$$

### 1.19.2. Simetrías internas

Consideremos primero el caso en el que el parámetro de la transformación  $\theta = \text{cte}$ . Como  $\partial_\nu \theta = 0$  (y también  $\delta x^\mu = 0$ ) en ese caso

$$\delta \phi_i = a_i (\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \theta, \quad \theta = \text{cte}. \quad (1.335)$$

Reemplazando en (1.283)

$$\begin{aligned} B^\mu &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \\ &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \theta \\ &= j^\mu \theta, \end{aligned} \quad (1.336)$$

donde

$$j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i. \quad (1.337)$$

Tenemos entonces que la corriente del Teorema 1 dada en la ec. (1.320), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \partial_\mu B^\mu &= 0 \\ \partial_\mu j^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (1.338)$$

de modo que  $j^\mu$  es la cuadricorriente conservada asociada a la transformación con parámetro  $\theta$ .

Generalizando al caso de una transformación con varios parámetros, tendremos la formulación del primer teorema de Noether para simetrías internas:

**Teorema 1:** Si la acción  $S$  es invariante bajo un grupo continuo de simetrías globales que dependen suavemente de  $\rho$  parámetros independientes  $\theta_\alpha = \text{cte}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, \rho$ ), tal que  $\delta\phi_i = a_{\alpha i}\theta^\alpha$ , y los campos satisfacen las ecuaciones de Euler Lagrange, entonces existen las  $\rho$  relaciones

$$\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0, \quad (1.339)$$

donde

$$j_\alpha^\mu \equiv B^\mu / \theta_\alpha = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i} \quad (1.340)$$

Y genera exactamente el mismo término de corriente conservada que en el caso de las simetrías continuas locales internas.

Si imponemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan, es decir

$$\mathcal{E}_i = 0, \quad (1.341)$$

obtenemos  $\alpha$ -ecuaciones de continuidad

$$\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0. \quad (1.342)$$

## 1.20. Segundo teorema de Noether

Estudiaremos una versión del segundo teorema de Noether aplicable sólo a simetrías internas<sup>6</sup>. Como veremos más adelante, la invarianza de la Acción de Schrödinger bajo una transformación de fase global, da lugar a una conservación global de la probabilidad: la probabilidad se conserva en todos los puntos del espacio simultáneamente. Esto no es incompatible con relatividad especial por que no involucra intercambio de información, pero si permite, en particular, que por ejemplo la teletransportación cuántica sea instantánea.

Si imponemos que el cambio de fase sea local, es decir, dependiente de cada punto del espacio tiempo, tendremos que para un campo  $\phi_i = \phi, \phi^*$ ,

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = e^{i\theta(x)} \phi_i \approx (1 + i\theta(x))\phi_i, \quad (1.343)$$

de modo que

$$\delta\phi_i = i\phi_i \theta(x). \quad (1.344)$$

En el caso en el que el parámetro de la transformación,  $\theta(x)$  sea constante, recuperamos el caso de la invarianza global, que en mecánica cuántica dará lugar a la conservación global de la probabilidad. Note que la carga conservada con una transformación local de fase aún no se ha analizado.

---

<sup>6</sup>El análisis de simetrías externas que generalizan las transformaciones de Lorentz con velocidad constante,  $v$ , a sistemas acelerados con el parámetro local  $v(t)$ , corresponde al caso de la relatividad general

Una transformación local interesante es la que ocurre en el caso electromagnético. Las siguientes transformaciones locales del potencial eléctrico y el vector de potencial electromagnético, dejan invariante las ecuaciones de Maxwell<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\theta(x), \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\theta(x),\end{aligned}\tag{1.345}$$

la parte del vector de potencial magnético en términos de componentes es

$$\begin{aligned}A^i &\rightarrow A'^i = A^i + \partial_i\theta(x) \\ &= A^i - \partial^i\theta(x),\end{aligned}\tag{1.346}$$

o, si definimos el cuadrivector de potencial electromagnético

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}),\tag{1.347}$$

entonces

$$\delta A^\mu = A'^\mu - A^\mu = -\partial^\mu\theta(x).\tag{1.348}$$

Tanto la transformación del campo  $\phi$  como la del  $A^\mu$  se pueden escribir en términos de una transformación en términos del parámetro infinitesimal local  $\theta(x)$  y su derivada como

$$\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\partial_\nu\theta(x), \quad \text{para } \phi_i = \phi, \phi^*, A^\mu.\tag{1.349}$$

**Ejercicio:** Encontrar los  $a_i$ ,  $b_i$  y  $\theta(x)$  para cada  $\phi_i$  bajo el Grupo U(1).

Diremos que un campo es de *materia* si su transformación interna es proporcional al parámetro de transformación ( $b^\nu = 0$ ), o de *radiación* si su transformación interna es proporcional a la derivada del parámetro de transformación ( $a = 0$ ). Bajo estas definiciones  $\phi$  es un campo de materia bajo el Grupo U(1), mientras que  $A^\mu$  es un campo de radiación bajo algún grupo a especificar más adelante.

**Resultado general** Expandiendo la ecuación resultante para el principio de mínima Acción en términos de  $\theta$  y  $\partial_\mu\theta$ , tenemos que: La haremos en el caso de un sólo parámetro. La generación a  $\rho$  parámetros es directa. Partiendo de la ecuación (??) recordando que proviene de una integral y sustituyendo la expresión para  $\delta\phi_i$  en (1.349), tenemos

$$\begin{aligned}\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i \delta\phi_i &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] \\ \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i (a_i\theta + b_i^\mu\partial_\mu\theta) &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu\partial_\nu\theta) \right\} \\ \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i\theta + \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i b_i^\mu\partial_\mu\theta &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu\partial_\nu\theta) \right\}.\end{aligned}\tag{1.350}$$

Extrayendo la derivada total del término de lado izquierdo

$$\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i\theta + \sum_i \int d^4x [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu\theta) - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \theta] = \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu\partial_\nu\theta) \right\}$$

<sup>7</sup>La demostración se hará en el siguiente capítulo.

$$\begin{aligned}
& \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i \theta - \sum_i \int d^4x [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \theta = \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) - \mathcal{E}_i b_i^\mu \theta \right\} \\
& \sum_i \int d^4x [\mathcal{E}_i a_i - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \theta = \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) - \mathcal{E}_i b_i^\mu \theta \right\}. \quad (1.351)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si escogemos (sin pérdida de generalidad) un parámetro de transformación gauge  $\theta(x)$  que se desvanezca en la frontera

$$\sum_i \int d^4x [\mathcal{E}_i a_i - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \theta = 0. \quad (1.352)$$

**Teorema 2** Si la acción  $S$  es invariante bajo un Grupo gauge continuo, entonces existen  $\rho$  relaciones

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_{\alpha i}^\mu) \quad (1.353)$$

*Demostración:*

Usando el Teorema de Gauss y escogiendo los  $\theta(x)$  y  $\partial_\mu \theta(x)$  de modo que se desvanezcan en la frontera, obtenemos de la ec. (1.352) que

$$\int d^4x \left[ \sum_i \mathcal{E}_i a_i - \sum_i [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \right] \theta = 0,$$

y ya que  $\theta(x)$  es una función arbitraria:

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu). \quad (1.354)$$

Entonces, dada una densidad Lagrangiana para un conjunto de campos y el conjunto de transformaciones internas de los campos que dejan invariante la Acción, el resultado anterior nos dice como las ecuaciones de continuidad en el lado izquierdo de la ecuación se ven afectadas por el carácter local de las transformaciones.

En particular mostraremos luego que la cuatricorrente asociada al cambio de fase de un campo complejo no depende de que la transformación sea global o local.

### 1.20.1. Generalización del Teorema 1 para simetrías internas

Si no imponemos que los campos satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange, podemos formular:

**Teorema 1 generalizado:** Para un conjunto de  $\alpha$  parametros constantes  $\theta_\alpha$ , existen  $\alpha$  relaciones

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = - \partial_\mu j^\mu. \quad (1.355)$$

*Demostración:* Ya que  $\theta = \text{cte}$ , de modo que  $b_i^\mu = 0$ , la ec. (1.351) se reduce a

$$\sum_i \int d^4x [\mathcal{E}_i a_i] \theta = \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i \theta \right\}$$

$$= \int d^4x \partial_\mu \left\{ \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i \right\} \theta,$$

de modo que, usando (1.337)

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \partial_\mu j^\mu. \quad (1.356)$$

Como era de esperarse, cuando los campos satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange la cuadri-corriente se conserva.

Note que las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen del Problema variacional de Noether cuando se impone la parte inversa del primer teorema de Noether, es decir, aparecen cuando se imponen que las cargas se conserven como consecuencia de la condición

$$\sum_i \partial_\mu j_{\alpha i}^\mu = 0. \quad (1.357)$$

## 1.21. Campo escalar complejo

En el caso de un campo de materia complejo, invariante bajo una simetría local  $U(1)$  con parámetro  $\theta(x)$ , tenemos que  $\phi_1 \rightarrow \phi$ ,  $\phi_2 \rightarrow \phi^*$ , de modo que  $a_2 = a_1^*$  y  $b_1 = b_2 = 0$ . Entonces, el Teorema 2 de Noether aplicado a los campos  $\phi$  y  $\phi^*$  queda

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) = 0. \quad (1.358)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{E}_i a_i &= \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right\} a_i \\ &= \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\}. \end{aligned} \quad (1.359)$$

Teniendo en cuenta que como veremos más adelante en el capítulo ??, sec. ??, para un campo complejo

$$\sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right] = 0 \quad (1.360)$$

Entonces,

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \partial_\mu j^\mu, \quad (1.361)$$

donde

$$j^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i. \quad (1.362)$$

Además, debido a la ec. (1.358),

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (1.363)$$

Este resultado particular para campos complejos se mantiene en general para el conjunto de campos que dependan sólo del parámetro y no de la derivada del parámetro, es decir, el conjunto de campos de materia con  $b_i^\mu = 0$ : ver Teorema 3 de [33]. Note que la corriente conservada para el campo de materia asociada a una transformación local coincide con la corriente conservada para una transformación global dada en la ec. (1.356).

Sin embargo, la conservación de la carga en este caso no requiere imponer que  $\mathcal{E}_i = 0$ . Por lo tanto el caso de la conservación de carga *impropia* se puede considerar más fundamental e inviolable. Esto nos permite formular el *principio gauge* como la necesidad de establecer Lagrangianos que respetan las simetría internas a nivel local.

Cuando la conservación de la carga requiera de que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan, diremos que la conservación de la carga es *propia*.

## 1.22. Ecuación de Klein-Gordon

Si modificamos el Lagrangiano en ec. (1.248), para incluir un término adicional ( $v = c = 1$ )

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right]. \quad (1.364)$$

entonces, la ec. (??) es solución a la ecuación resultante de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + m^2 \phi &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.365)$$

Generalizando a 3 dimensiones tenemos el Lagrangiano de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \end{aligned} \quad (1.366)$$

que dan lugar a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0. \quad (1.367)$$

Una forma de derivar la ecuación de Schrödinger es usar escribir la ecuación de conservación de la energía mecánica en términos de operadores aplicados a la función de onda

$$\hat{H}\psi = \left( \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 + v \right) \psi, \quad (1.368)$$

De esta manera, la versión mecánico cuántica de la conservación de momentum-energía de la relatividad especial se podría obtener de

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \psi &= \left( \hat{H}^2 - \sum_i \hat{p}^i \hat{p}^i \right) \psi \\ &= (-\partial_0^2 + \nabla^2) \psi \\ &= m^2 \psi, \end{aligned} \quad (1.369)$$

de donde obtenemos precisamente la ecuación (1.367)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi = 0. \quad (1.370)$$

Aunque la interpretación en mecánica cuántica de la ecuación de momentum-energía requiere promover también el campo a un operador, una vez se establece la teoría cuántica de campos correspondiente, el coeficiente  $m$  se puede interpretar como la masa del campo  $\psi$ .





# Appendix

## 1.A. Aplicación a Mecánica Cuántica

Haciendo  $\hbar = 1$ , el Lagrangiano que da lugar a la ecuación de Schrödinger es [10]<sup>8</sup>

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) = -\frac{1}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi - \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi \quad (1.371)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi \\ &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi) + \psi^* V \psi. \end{aligned} \quad (1.372)$$

donde la segunda forma es real:  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ . Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (??) para la función de onda  $\psi^*$  obtenemos la ecuación de Schrödinger con  $\hbar = 1$ :

$$0 = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} \right] + \partial_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}. \quad (1.373)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} &= -\frac{i}{2} \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} &= \frac{i}{2} \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi)} &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi^* + \psi^* V & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= -\frac{i}{2} \partial_0 \psi + V \psi. \end{aligned} \quad (1.374)$$

Entonces, reemplazando la ec. (1.374) en la ec. (1.373), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left( \frac{i}{2} \psi \right) + \partial_i \left( \frac{1}{2m} \partial_i \psi \right) - \left( -\frac{i}{2} \partial_0 \psi + V \psi \right) \\ &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_i \partial_i \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi - V \psi. \end{aligned} \quad (1.375)$$

Que puede escribirse como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi. \quad (1.376)$$

---

<sup>8</sup>A simple version is discussed in <http://physics.stackexchange.com/questions/55622/how-would-a-lagrangian-be-used-to-recover-the-schrodinger-equation>

El Lagrangiano en ec (??), y por consiguiente la Acción, es invariante bajo una transformación de fase

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi. \quad (1.377)$$

Por consiguiente, de acuerdo al Teorema de Noether, debe existir una cantidad conservada. La corriente conservada se obtiene de la ec. (??). Para los campos  $\psi$  y  $\psi^*$ , tenemos

$$\delta\psi = \psi' - \psi = (e^{i\theta} - 1)\psi \approx i\theta\psi \quad (1.378)$$

$$\delta\psi^* \approx -i\theta\psi. \quad (1.379)$$

Usando además la ec. (1.374) en la definición de  $J^0$  dada por la ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \right] \delta\psi + \delta\psi^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \psi^* (i\theta\psi) + (-i\theta\psi^*) \frac{i}{2} \psi \\ &= \theta \psi^* \psi, \end{aligned} \quad (1.380)$$

y

$$\begin{aligned} J^i &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} \right] \delta\psi + \delta\psi^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* (i\theta\psi) + (-i\theta\psi^*) \frac{1}{2m} \partial_i \psi \\ &= \frac{i\theta}{2m} (\partial_i \psi^* \psi - \psi^* \partial_i \psi). \end{aligned} \quad (1.381)$$

Entonces, normalizando apropiadamente la corriente escogiendo  $\theta = 1$ , tenemos

$$J^0 = \psi^* \psi \quad (1.382)$$

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \quad (1.383)$$

De acuerdo a la ec. (1.382), la cantidad conservada corresponde a la probabilidad de la función de onda y normalizando apropiadamente la ec. (??)

$$Q_\rho = \int_V \psi^* \psi d^3x = 1. \quad (1.384)$$

En cuanto a las simetrías externas, tenemos de la ec. (??) que da lugar a las ecuaciones de continuidad (1.330)(1.332)

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_0^\mu &= 0, \\ \partial_\mu T_i^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (1.385)$$

Las cargas conservadas se pueden obtener de las densidades de carga  $T_0^0$  y  $T_i^0$ .

### 1.A.1. Conservación del moméntum

Comencemos con las densidades de carga asociadas a la conservación del moméntum lineal. Usando las ecs. (1.374) en la ec. (1.334)

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} (\partial_i \psi) + (\partial_i \psi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \\ T_i^0 &= -\frac{i}{2} \psi^* (\partial_i \psi) + \frac{i}{2} (\partial_i \psi^*) \psi \end{aligned} \quad (1.386)$$

Entonces, definiendo

$$\mathbf{T}^0 = \frac{i}{2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \quad (1.387)$$

Procedemos ahora a reemplazar  $\psi \nabla \psi^*$  por la derivada total

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^0 &= \frac{i}{2} [(\nabla(\psi^* \psi) - \psi^* \nabla \psi) - \psi^* \nabla \psi] \\ &= -i \psi^* \nabla \psi + \frac{i}{2} \nabla(\psi^* \psi). \end{aligned} \quad (1.388)$$

Integrando en el volumen

$$\int_V \mathbf{T}^0 d^3x = -i \int_V \psi^* \nabla \psi d^3x + \frac{i}{2} \nabla \int_V \psi^* \psi d^3x \quad (1.389)$$

De acuerdo a la ec. (1.384), la última integral es una constante y

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T}^0 d^3x &= -i \int_V \psi^* \nabla \psi d^3x \\ \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle &= \int_V \psi^* \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \end{aligned} \quad (1.390)$$

De modo que  $\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle$  son las cargas conservadas asociadas al valor esperado el operador de momentum

$$\hat{\mathbf{p}} = -i \nabla. \quad (1.391)$$

En general, el valor esperado de un operador  $\hat{\mathcal{O}}$ , se define en mecánica cuántica como

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int_V d^3x \psi^* \hat{\mathcal{O}} \psi.$$

### 1.A.2. Conservación de la energía

De otro lado

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2} \psi^* \partial_0 \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi^* \psi - \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi + \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi) - \psi^* V \psi \\ &= -\frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \psi^* V \psi \end{aligned} \quad (1.392)$$

Como las corrientes solo están determinadas hasta un factor de proporcionalidad, definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv -T_0^0 = \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* V \psi \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) - \frac{1}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \psi^* V \psi.\end{aligned}\quad (1.393)$$

Integrando sobre el volumen y usando la ec. (1.390)

$$\begin{aligned}\int_V \mathcal{H} d^3x &= \frac{1}{2m} \int_V \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) + \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \cdot \int_V (\psi^* \nabla \psi) + \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \frac{i}{2m} \nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle + \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x.\end{aligned}\quad (1.394)$$

Entonces

$$\begin{aligned}H &\equiv \int_V \mathcal{H} d^3x = \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \int_V d^3x \psi^* \hat{H} \psi = \langle \hat{H} \rangle.\end{aligned}\quad (1.395)$$

Que es un resultado bien conocido de la mecánica cuántica.

Como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}, \quad (1.396)$$

podemos escribir la ec. (1.376) como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi. \quad (1.397)$$

Podemos identificar entonces los operadores de energía y momentum.

$$\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla. \quad (1.398)$$

Retornando a la ec. (1.390), tenemos que para la solución de partícula libre de la ecuación de Schrödinger

$$\psi = A e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.399)$$

la condición de normalización en ec. (1.384) implica que  $|A|^2 = 1/L^3$ , y

$$\int_V \mathbf{T}^0 d^3x = \mathbf{k}. \quad (1.400)$$

Los dos operadores se pueden combinar en relatividad especial definiendo el operador de cuadrimomentum

$$\hat{p}^\mu = i \partial^\mu = \begin{cases} i \partial^0 = i \partial_0 = \hat{H} & \mu = 0 \\ i \partial^i = -i \partial_i = \hat{p}^i & \mu = i \end{cases} \quad (1.401)$$

**Ejercicio:** De la ec. (1.395) obtenega la densidad Hamiltoniana, y usando la ec. (1.327) encontrar la densidad Lagrangiana (??).

Una interpretación satisfactoria de los operadores se puede obtener si al identificar una excitación del campo  $\psi$  con una partícula de energía  $E$  y momentum  $\mathbf{p}$ , dichas cantidades se encuentran en la fase de la función de onda:

$$\psi(x) \propto e^{ip \cdot x} = \exp(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.402)$$

De esta manera, asumiendo una normalización adecuada,

$$(\hat{p}^\mu) = \int d^3x \cdot \psi^* \hat{p}^\mu \psi = p^\mu. \quad (1.403)$$

## 1.B. Invarianza de fase local del Lagrangiano de Scrödinger's

Cuando se habla de la función  $\psi(x)$ ,  $x$  representa el punto del espacio tiempo en el cual deseamos conocer el valor de la función de onda. Ya que los números complejos son, pues por eso, complejos, uno no los puede representar con una posición en una línea. En su lugar, hay que representarlos por un punto en un espacio en dos dimensiones.

Además de la longitud de la flecha apuntando al número complejo también necesitamos un ángulo para especificar exactamente como dibujar la flecha apuntando al número complejo. El observable esta codificado dentro de la longitud de la flecha que representa el valor del función de onda complejo en ese punto del espacio-tiempo. Su ángulo es inobservable.

El número complejo  $\psi(x)$  en la ecuación de Scrödinger es justo el número cuyo cuadrado es la probabilidad relativa de encontrar el objeto en ese punto, como hemos visto como consecuencia de la simetría asociada a que el ángulo es inobservable.

Ahora, supongamos que usted decide hacer un cambio de fase de la función de onda de forma arbitraria en cada punto del espacio, osea el ángulo  $\theta$  que el número complejo  $\psi$  hace con respecto al eje real. Aquí hay un punto crucial: si el cambio de fase es *global*, es decir si el cambio de fase asociado al ángulo  $\theta$  es el mismo en todos los puntos del espacio, este cambio no destruirá el delicado balance entre la energía cinética y la energía potencial en la ecuación de Scrödinger.

Sin embargo, desde el punto de vista de la relatividad especial de Einstein, la necesidad de requerir que el sistema mecánico cuántico quede inalterado sólo por cambios globales de fase parece poco natural. Una vez se escoge el fase de la función de onda en un punto del espacio-tiempo, el requerimiento de la invarianza de fase global fija esta en todos los puntos del espacio tiempo:

As usually conceived however, this arbitrariness is subject to the following limitation: once one choose [the phase of the wave function] at one space-time point, one is then not free to make any choices at other space-time points.

It seems that it is not consistent with the localized field concept that underlies the usual physical theories. In the present paper we wish to explore the possibility of requiring all the interactions to be invariant under independent [change of phases] at all space-time points.

Un cambio de fase que dependa del punto del espacio-tiempo,  $\theta(x)$ , de otro lado, sería similar a lo que pasa en la teoría electromagnética cuando es expresada en términos de potenciales escalares y vectoriales. Ellos se pueden cambiar por derivadas de funciones arbitrarias de una forma tal que los campos eléctricos y magnéticos medidos permanecen invariantes. Como veremos, estas características están profundamente conectas con la conservación local de la carga eléctrica.

### 1.B.1. Motivación

Desde un punto de vista más cuantitativo, debido a que la energía y la cantidad de movimiento del electrón aparecen en la fase de su función de onda

$$\psi(x) \propto e^{ip \cdot x} = \exp(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.404)$$

entonces, un cambio de fase local

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi, \quad (1.405)$$

cambia la energía y la cantidad de movimiento del electrón. Esto hace necesario la existencia de un nuevo campo que compense esos cambios para garantizar su conservación entre el sistema completo del electrón y el nuevo campo.

Historicamente primero se implemento la invarianza de Lorentz en Mecánica Cuántica cambiando el correspondiente Lagrangiano de Schödinger. Sin embargo, el Lagrangiano resultante es insuficiente pues tiene una invarianza de fase global que contradice los principios de la relatividad especial. El Lagrangiano definitivo de la electrodinámica cuántica, que construiremos en detalle luego, incorpora además de la invarianza de Lorentz, la invarianza de fase local. Aquí, no seguiremos el camino histórico, sino uno inverso en el que primero modificaremos el Lagrangiano de Schödinger por uno que sea invariante bajo cambios de fase locales. Como las interacciones van a resultar como consecuencia de imponer la invarianza de fase local, es suficiente hacer el análisis partiendo de la Lagrangiana libre de interacciones, es decir, sin considerar el término  $\psi^* V \psi$ .

Comenzamos de nuevo con el Lagrangiano de Schödinger escrito como en la ec. (1.371), pero sin el término de interacción:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) &= \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \cancel{\psi^* V \psi} \\ \mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi). \end{aligned} \quad (1.406)$$

Este Lagrangiano no es invariante bajo cambios de fase locales de la función de onda:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &\rightarrow \partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{i\theta(x)} \psi) \\ &= (\partial_\mu e^{i\theta(x)}) \psi + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi \\ &= e^{i\theta(x)} (i \partial_\mu \theta(x)) \psi + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi \\ &= e^{i\theta(x)} [i \partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu] \psi. \end{aligned} \quad (1.407)$$

Para tener un nuevo Lagrangiano invariante bajo transformaciones de fase locales, llamadas simplemente transformaciones gauge, necesitamos introducir un nuevo término para compensar el término que proviene de la derivada de  $e^{i\theta(x)}$ . Éste término debe tener índice  $\mu$  como el de la deriva normal:

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow \mathcal{D}'_\mu \psi' = (\partial_\mu + X'_\mu) (e^{i\theta(x)} \psi)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\theta(x)} [i\partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu] \psi + X'_\mu (e^{i\theta(x)} \psi) \\
&= e^{i\theta(x)} [i\partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X'_\mu] \psi.
\end{aligned} \tag{1.408}$$

La condición de transformación del nuevo término  $X_\mu$ , para poder compensar el término que proviene de la derivada de la fase local,  $i\partial_\mu \theta(x)$ , es justamente

$$X_\mu \rightarrow X'_\mu = X_\mu - i\partial_\mu \theta(x). \tag{1.409}$$

Reemplazándolo en la ec. (1.408), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' &= \mathcal{D}'_\mu \psi' = (\partial_\mu + X'_\mu) (e^{i\theta(x)} \psi) \\
&= e^{i\theta(x)} [i\partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X_\mu - i\partial_\mu \theta(x)] \psi \\
&= e^{i\theta(x)} [\partial_\mu + X_\mu] \psi \\
&= e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}_\mu \psi).
\end{aligned} \tag{1.410}$$

Note que  $\mathcal{D}_\mu \psi$  transforma igual que el campo  $\psi$ , y debido a este es llamada la *derivada covariante* de  $\psi$ . Similarmente

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\mu \psi)^* \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)^{'*} &= (\partial_\mu + X_\mu^*) (\psi^* e^{-i\theta(x)}) \\
&= [-i\partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X_\mu^* + i\partial_\mu \theta(x)] \psi^* e^{-i\theta(x)} \\
&= [\partial_\mu + X_\mu^*] \psi^* e^{-i\theta(x)} \\
&= (\mathcal{D}_\mu \psi)^* e^{-i\theta(x)}.
\end{aligned} \tag{1.411}$$

Es conveniente redefinir  $X_\mu$  en término de un campo  $A_\mu$  y unas constantes adecuadas

$$A_\mu \equiv \frac{1}{iq} X_\mu, \tag{1.412}$$

tal que la derivada covariante pueda escribirse de forma convenientes como

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \tag{1.413}$$

Las propiedades de transformación de  $A_\mu$  pueden ser obtenidas de las de  $X_\mu$  en la ec. (1.409):

$$\begin{aligned}
iqA_\mu \rightarrow iqA'_\mu &= iqA_\mu - i\partial_\mu \theta(x) \\
A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x).
\end{aligned} \tag{1.414}$$

### 1.B.2. Derivadas covariantes

Para obtener las propiedades de la transformación de la derivada covariante misma, podemos comenzar de la definición

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' &= U(\theta) (\mathcal{D}_\mu \psi) \\
[\mathcal{D}_\mu \psi]^* \rightarrow [(\mathcal{D}_\mu \psi)']^* &= (\mathcal{D}_\mu \psi)^* U^*(\theta)
\end{aligned} \tag{1.415}$$



donde

$$U(\theta) = e^{iq\theta(x)}. \quad (1.416)$$

A  $q$  hace las veces del generador del Grupo  $U(1)$ , mientras que  $\theta(x)$  es el parámetro local de transformación. Es importante enfatizar las propiedades de grupo:

1. El conjunto de transformaciones  $U(\theta_3) = U(\theta_1)U(\theta_2)$  también está en el grupo.
2. Contiene la identidad  $U_{\text{identity}} = e^0$ .
3. Contiene el inverso  $U^{-1}(\theta) = U^*(\theta) = U(-\theta)$ ,
4. Satisface la propiedad de asociatividad bajo la operación del grupo  $(U(\theta_1)U(\theta_2))U(\theta_3) = U(\theta_1)(U(\theta_2)U(\theta_3))$ .

Como  $U(\theta_1)U(\theta_2) = U(\theta_2)U(\theta_1)$ , el grupo es Abeliano. Este grupo Abeliano de números complejos de módulo 1 es llamado el grupo  $U(1)$ , y es isomorfo al grupo de rotaciones en dos dimensiones por un ángulo  $\theta$ .

Para un elemento  $U$  de un grupo general, tenemos como definición de derivada covariante que la correspondiente derivada del campo transforme como el campo. En este caso general el campo transforma como

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad (1.417)$$

de modo que la derivada covariante se puede definir como

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = U(\mathcal{D}_\mu \psi). \quad (1.418)$$

Para encontrar las propiedades de la derivada covariante en este contexto general, necesitamos evaluar cual es la transformación de la derivada covariante como tal, es decir

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \psi)' &= \mathcal{D}'_\mu \psi' = U(\mathcal{D}_\mu \psi) \\ \mathcal{D}'_\mu (U\psi) &= U(\mathcal{D}_\mu \psi). \end{aligned} \quad (1.419)$$

Si mantenemos en mente que  $\mathcal{D}'_\mu U$  es todavía un operador, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu U &= U\mathcal{D}_\mu \\ \mathcal{D}'_\mu U U^{-1} &= U\mathcal{D}_\mu U^{-1} \\ \mathcal{D}'_\mu &= U\mathcal{D}_\mu U^{-1}. \end{aligned} \quad (1.420)$$

Es decir, para comprobar esta identidad, debemos aplicar el nuevo operador sobre algún campo. Para mantener la generalidad del resultado evitaremos usar la propiedad conmutativa del algún grupo particular

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu \psi &= U\mathcal{D}_\mu (U^{-1}\psi) \\ \partial_\mu \psi + iqA'_\mu \psi &= U(\partial_\mu + iqA_\mu)(U^{-1}\psi) \\ \partial_\mu \psi + iqA'_\mu \psi &= U[U^{-1}\partial_\mu \psi + (\partial_\mu U^{-1})\psi + iqA_\mu U^{-1}\psi] \\ \partial_\mu \psi + iqA'_\mu \psi &= \partial_\mu \psi + U(\partial_\mu U^{-1})\psi + iqUA_\mu U^{-1}\psi. \end{aligned}$$

Después de cancelar el término  $\partial_\mu \psi$  en ambos lados, y factorizando el campo  $\psi$ , tenemos que

$$\begin{aligned} iqA'_\mu &= iqUA_\mu U^{-1} + U(\partial_\mu U^{-1}) \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{q} U(\partial_\mu U^{-1}). \end{aligned} \quad (1.421)$$

Esta expresión es completamente general y será usada posteriormente en el contexto de grupos más complicados. En el caso particular de un Grupo Abeliano  $U(1)$ , tenemos simplemente que

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu - \frac{i}{q} e^{iq\theta(x)} (\partial_\mu e^{-iq\theta(x)}) \\ &= A_\mu - \frac{i}{q} [-iq\partial_\mu \theta(x)] e^{iq\theta(x)} e^{-iq\theta(x)} \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (1.422)$$

Definimos la *invarianza gauge local* como una forma arbitraria de escoger el factor de fase complejo de un campo cargado<sup>9</sup> en todos los puntos del espacio tiempo.

De esta forma, podemos cambiar el Lagrangiano libre original por uno nuevo que sea invariante bajo transformaciones de fase locales, asegurándonos de considerar todos los término extra posibles, en particular los asociados al nuevo campo  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*, A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{2m} \sum_i (\mathcal{D}_i \psi)^* \mathcal{D}_i \psi - \frac{i}{2} [\psi^* \mathcal{D}_0 \psi - (\mathcal{D}_0 \psi)^* \psi] + \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu). \quad (1.423)$$

donde

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \quad (1.424)$$

Esta es justamente la transformación que deja el campo electromagnético invariante, y como veremos, el Lagrangiano faltante  $\mathcal{L}_{\text{EM}} = \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu)$  dará lugar precisamente a las ecuaciones de Maxwell!. El nuevo Lagrangiano es ahora invariante bajo transformaciones de fase (y deberemos imponer que  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$  también lo sea). De hecho:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \frac{1}{2m} \sum_i (\mathcal{D}_i \psi)'^* (\mathcal{D}_i \psi)' - \frac{i}{2} [\psi'^* (\mathcal{D}_0 \psi)' - (\mathcal{D}_0 \psi)'^* \psi'] + \mathcal{L}'_{\text{EM}} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_i (\mathcal{D}_i \psi)^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}_i \psi) \\ &\quad - \frac{i}{2} [\psi^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}_0 \psi) + \mathcal{L}_{\text{EM}} - (\mathcal{D}_0 \psi)^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}}. \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.425)$$

Para preservar la invarianza uno nota que es necesario contrarrestar la variación de  $\theta$  con  $x, y, z$ , y  $t$  introduciendo el campo electromagnético  $A_\mu$ . De esta forma, una vez logremos especificar  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$ , la interacción electromagnética será obtenida como resultado de imponer la invarianza de fase local bajo

<sup>9</sup>como el electrón descrito por la ecuación usual de Schrödinger.

el grupo Abelian  $U(1)$ , correspondiente a las transformaciones de fase locales. Para implementar por completo el principio gauge local necesitamos especificar completamente el  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$  de una forma compatible con la transformación gauge del campo  $A_\mu$  y las transformaciones de Lorentz, lo cual será desarrollado en el próximo capítulo.

Por ahora veremos las consecuencias del principio variacional de Noether para simetrías internas, expresado por la ec. (??), sobre los campos  $\psi$  y  $\psi^*$ .

Mostraremos que en efecto, para esta densidad Lagrangiana particular los términos

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i = 0$$

En efecto, usando  $a_1 = i\psi$  y  $a_2 = -i\psi^*$ , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i &= i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \psi - i \partial_\mu \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \\ &= \sum_j \frac{i}{2m} (\partial_j \psi^* - iq A_j \psi^*) \partial_\mu \psi - \sum_j \frac{i}{2m} \partial_i \psi^* (\partial_j \psi + iq A_j \psi) \\ &\quad + i \left( -\frac{i}{2} \psi^* \right) \partial_0 \psi - i \partial_0 \psi^* \left( \frac{i}{2} \psi \right) \\ &= \sum_j \frac{q}{2m} [(\partial_j \psi^*) \psi + \psi^* \partial_j \psi] A_j + \frac{1}{2} [(\partial_0 \psi^*) \psi + \psi^* \partial_0 \psi] \end{aligned} \quad (1.426)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i &= i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \psi - i \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \\ &= \sum_j \frac{i}{2m} (\partial_j \psi^* - iq A_j \psi^*) (iq A_j) \psi - \sum_j \frac{i}{2m} \psi^* (-iq A_j) (\partial_j \psi + iq A_j \psi) \\ &\quad + i \frac{i}{2} (\partial_0 \psi^* - iq A_0 \psi^*) \psi - i \left( \frac{-i}{2} \right) \psi^* (\partial_0 \psi + iq A_0) \\ &= - \sum_j \frac{q}{2m} [(\partial_j \psi^*) \psi + \psi^* \partial_j \psi] A_j - \frac{1}{2} [(\partial_0 \psi^*) \psi + \psi^* \partial_0 \psi] \end{aligned} \quad (1.427)$$

Por lo tanto, la corriente conservada corresponde para los campos  $\psi^{10}$  y  $\psi^*$  es, de la ec. (1.362)

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \\ &= \begin{cases} q\psi^*\psi & \mu = 0 \\ -\frac{i}{2m} [\psi^* \mathcal{D}^i \psi - (\mathcal{D}^i \psi^*) \psi] & \mu = i \end{cases} \end{aligned} \quad (1.428)$$

<sup>10</sup>El término con  $b_3^\mu$  se puede anular usando condiciones de frontera para el campo  $\phi_3 \rightarrow A_\mu$ .

## 1.C. Ecuación de Scrödinger en presencia de un campo electromagnético

La expansión del Lagrangiano en términos de los campos  $\psi$ ,  $\psi^*$ , y  $A_\mu$  es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi + iq A_i \psi)^* (\partial_i \psi + iq A_i \psi) - \frac{i}{2} [\psi^* (\partial_0 \psi + iq A_0 \psi) - (\partial_0 \psi + iq A_0 \psi)^* \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi^* - iq A_i \psi^*) (\partial_i \psi + iq A_i \psi) - \frac{i}{2} [\psi^* (\partial_0 \psi + iq A_0 \psi) - (\partial_0 \psi^* - iq A_0 \psi^*) \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi^* \partial_i \psi - iq \psi^* A_i \partial_i \psi + iq \partial_i \psi^* A_i \psi + q^2 A_i A_i \psi^* \psi) + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&\quad - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi + iq \psi^* A_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi + iq A_0 \psi^* \psi] \\
&= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi^* \partial_i \psi - iq \psi^* A_i \partial_i \psi + iq \partial_i \psi^* A_i \psi + q^2 A_i A_i \psi^* \psi) + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&\quad - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi + 2iq \psi^* A_0 \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}} .
\end{aligned} \tag{1.429}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi] \\
&\quad + \frac{1}{2m} \sum_i [-iq \psi^* A_i \partial_i \psi + iq (\partial_i \psi^*) A_i \psi + q^2 A_i A_i \psi^* \psi] \\
&\quad + q \psi^* A_0 \psi + \mathcal{L}_{\text{EM}} .
\end{aligned} \tag{1.430}$$

De aquí podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo.

In the following developments we will use heavily the covariant and contravariant form of the four-vector  $A_\mu$  defined in eqs:(??), (??), such that the tridimensional vector is defined in term of the spacial covariant components

$$\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) = -(A_1, A_2, A_3) .$$

### 1.C.1. Euler-Lagrange equation for $\psi^*$

In particular for  $\psi^*$  we have

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 \\
&\partial_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} \right] + \partial_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 \\
&\frac{i}{2} \partial_0 \psi - \frac{1}{2m} \partial_i [\partial^i \psi + iq A^i \psi] - \left[ -\frac{1}{2m} (-iq A_i \partial^i \psi + q^2 A_i A^i \psi) - \frac{i}{2} (\partial_0 \psi + 2iq A_0 \psi) \right] = 0 \\
&i \partial_0 \psi - q A_0 \psi - \frac{1}{2m} [\partial_i (\partial^i \psi + iq A^i \psi) + iq A_i (\partial^i \psi + iq A^i \psi)] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(\partial_0 + iqA_0)\psi - \frac{1}{2m}(\partial_i + iqA_i)(\partial^i\psi + iqA^i\psi) &= 0 \\
i\mathcal{D}_0\psi + \frac{1}{2m}\sum_i \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i\psi &= 0, \quad (1.431)
\end{aligned}$$

If we define

$$\mathcal{D} \equiv \nabla - iq\mathbf{A}. \quad (1.432)$$

we have in components:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_i &= \partial_i - iqA^i \\
\mathcal{D}_i &= \partial_i + iqA_i. \quad (1.433)
\end{aligned}$$

Then we have the new wave equation:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{D}_0\psi &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}\psi \\
i\mathcal{D}_0\psi &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}^2\psi, \quad (1.434)
\end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación de Scrödinger con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante.

Expandiendo esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA_0\right)\psi &= -\frac{1}{2m}\sum_i(\partial_i + iqA_i)^2\psi \\
\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qA_0\right)\psi &= -\frac{1}{2m}\sum_i(\partial_i - iqA^i)^2\psi \\
\left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi &= -\frac{1}{2m}(\nabla - iq\mathbf{A})^2\psi \\
\left(\hat{H} - q\phi\right)\psi &= -\frac{-i^2}{2m}(\nabla - iq\mathbf{A})^2\psi \\
&= \frac{1}{2m}(i\nabla + q\mathbf{A})^2\psi \\
&= \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2\psi \\
&= \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2\psi. \quad (1.435)
\end{aligned}$$

In this way, the Scrödinger equation in presence of the electromagnetic field, can be obtained from the original Scrödinger equation but with the *minimum substitution*:

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} - q\phi \quad \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}. \quad (1.436)$$

De la ecuación (1.435) podemos obtener la ecuación de Schödinger en presencia de un campo electromagnético

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qA_0\right]\psi. \quad (1.437)$$

Para que la mecánica cuántica sea consistente con las ecuaciones de Maxwell es necesario que las transformaciones gauge (1.414) de los potenciales de Maxwell estén acompañados por una transformación de la función de onda,  $\psi \rightarrow \psi'$ , donde  $\psi'$  satisface la ecuación

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}'^2\psi' \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi' &= \left[ \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A}')^2 + qA'_0 \right] \psi'. \end{aligned} \quad (1.438)$$

Como la forma de la ecuación (1.438) es exactamente la misma que la forma de (1.437) entonces ambas describen la misma física. Se dice que la ec. (1.437) es covariante gauge, lo que significa que mantiene la misma forma bajo una transformación gauge.

■ **Ejemplo:**

Demuestre que la ec. (1.438) es covariante:

Como

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)}\psi \quad (1.439)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'\psi' &= [(\nabla - iq\mathbf{A}) - i\nabla\theta] e^{i\theta(x)}\psi \\ &= i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\nabla\psi - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}\psi - i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}\psi \\ &= e^{i\theta(x)}(\nabla - iq\mathbf{A})\psi \\ &= e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \end{aligned} \quad (1.440)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'^2\psi' &= \mathcal{D}'(\mathcal{D}'\psi') \\ &= [(\nabla - iq\mathbf{A}) - i\nabla\theta] e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \\ &= i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) + e^{i\theta(x)}\nabla(\mathcal{D}\psi) - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) - i\nabla\theta e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \\ &= e^{i\theta(x)}(\nabla - iq\mathbf{A})(\mathcal{D}\psi) \\ &= e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^2\psi) \end{aligned} \quad (1.441)$$

De la misma manera

$$\mathcal{D}'^0\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^0\psi) \quad (1.442)$$

De modo que

$$\mathcal{D}^\mu\psi \rightarrow \mathcal{D}'^\mu\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^\mu\psi) \quad (1.443)$$

y la derivada covariante del campo transforma como el campo. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}'^2\psi' \\ ie^{i\theta(x)}\mathcal{D}^0\psi &= -\frac{1}{2m}e^{i\theta(x)}\mathcal{D}^2\psi \\ i\mathcal{D}^0\psi &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}^2\psi \end{aligned} \quad (1.444)$$

En resumen, para

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu \quad (1.445)$$

y reemplazando  $\theta \rightarrow q\theta$  tenemos

$$A^\mu \rightarrow A^{\mu'} = A^\mu - \partial^\mu \theta(x) \quad (1.446)$$

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)}\psi \\ \mathcal{D}^\mu \psi &\rightarrow \mathcal{D}'^\mu \psi' = e^{iq\theta(x)}(\mathcal{D}^\mu \psi). \end{aligned} \quad (1.447)$$

En esta convención  $q$  corresponde al *generador* de la transformación y  $\theta$  al parámetro de la transformación.

### 1.C.2. Corrientes conservadas

Aplicamos el segundo teorema de Noether con (con el reemplazo  $\theta \rightarrow q\theta$

$$\begin{aligned} \phi_1 : \psi, & \quad a_1 = iq\psi, \quad b_1 = 0 \\ \phi_2 : \psi^*, & \quad a_2 = -iq\psi^*, \quad b_2 = 0 \\ \phi_3 : A^\mu, & \quad a_3 = 0, \quad b_3 = -\delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (1.448)$$

para los campos  $\psi$  y  $\psi^*$ , asumiendo que el campo  $A^\mu$  satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos que

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.449)$$

donde

$$j^\mu = \begin{cases} q\psi^*\psi & \mu = 0 \\ -\frac{i}{2m} [\psi^* \mathcal{D}^i \psi - (\mathcal{D}^i \psi^*) \psi] & \mu = i \end{cases} \quad (1.450)$$

Podemos interpretar la corriente conservada como la asociada a la conservación de la carga eléctrica, tal que

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int_V d^3x \psi^* \hat{Q} \psi = q \int_V d^3x \psi^* \psi = q, \quad (1.451)$$

donde

$$\hat{Q}\psi = q\psi. \quad (1.452)$$

Es importante hacer notar que para  $T_0^0$ , y  $T_i^0$  deberíamos obtener

$$\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla - q\mathbf{A}. \quad (1.453)$$

The approach to change the Action for a new one invariant under local phase transformations, is that the electron cannot be longer considered as an isolated *naked* particle. The electron must be always surrounded by some cloud of virtual particles associated with the electromagnetic field in order to guarantee the conservation of the energy and momentum of the system. In general the wave

function of the electron can be represented as the exponential of  $iEt$  and  $i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ , so that a local phase transformation will change the energy  $E$  and the momentum  $\mathbf{p}$  of the electron. This changes must be compensated with the corresponding changes in  $A_\mu$ .

Moreover, to be consistent, we could start with the free Lagrangian before the change of the normal derivative by the covariant derivative. The interactions are not longer imposed by hand but a consequence of the improved Action.

Combinando todos los resultados, podemos escribir el Lagrangiano final como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi] + j^\nu A_\nu \quad (1.454)$$

como se mostrará en el próximo capítulo.

### 1.C.3. Interpretación física

Al ser una función compleja, la función de onda del electrón puede escribirse en coordenadas polares como

$$\psi = |\psi| e^{i\theta(x)} \quad (1.455)$$

donde  $\theta(x)$  suele ser una expansión en ondas planas en términos de frecuencias angular  $\omega$  y números de onda  $\mathbf{k}$ , que interpretadas en el contexto de la mecánica cuántica corresponden con los factores adecuados a la energía  $E$  y a la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$  del electrón. Por lo tanto una transformación gauge local sobre el electrón

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha(x)} = |\psi| e^{i[\theta(x) + \alpha(x)]}, \quad (1.456)$$

equivale a un cambio en la energía y la cantidad de movimiento del electrón. Por consiguiente el papel de los cuatros campos  $A_\mu(x)$  es muy importante porque están permanente compensando los cambios en la energía y las tres cantidades de movimiento del electrón de manera que la Acción invariante gauge local, con la densidad Lagrangiana modificada con derivadas covariantes, pueda conservar la energía y la cantidad de movimiento en cualquier punto del espacio tiempo. En la práctica esto implica que el electrón desnudo no es un observable físico. Lo que llamamos electrón es realmente al combinación del electrón como tal y su propio campo electromagnético que garantiza la conservación apropiada de la energía y cantidad de movimiento.

## 1.4. Problemas

1.1 Mostrar la invarianza del producto escalar para la definición del producto escalar SU(2)

$$\Psi \cdot \Psi \equiv \Psi^\dagger \Psi. \quad (1.457)$$

1.2 Demostrar que  $\Lambda(\xi_1)$  dada en la primera ec. (1.92), cumple la condición de ortogonalidad generalizada (1.96).

1.3 Muestre que bajo los cambios  $\xi \rightarrow i\theta$  y  $t \rightarrow it$ , la transformación de Lorentz se puede escribir como una matriz de rotación convencional.



- 1.4 Demuestre que la ecuación de Klein-Gordon en (1.185) proviene de una densidad Lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (1.458)$$

donde

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (1.459)$$

- 1.5 Muestre que

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta_\nu^\rho$$

Compruebe esta identidad para la transformación de Lorentz de la ec. (1.162)

- 1.6 Obtenga el Hamiltoniano a partir de Lagrangiano en (1.244) y encuentre la expresión para la densidad Lagrangiana en términos de  $\phi$ .

- 1.7 Para la densidad Lagrangiana de Schrödinger

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) = \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi. \quad (1.460)$$

- a) Calcule las ecuaciones de Euler-Lagrange
- b) Calcule la carga de corriente conservada asociada al cambio de fase
- c) Calcule el tensor de momento energía

- 1.8 Calcule  $T_0^i$  para el Lagrangiano de Schrödinger

$$\begin{aligned} T_0^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \\ &= \frac{1}{2m} (\partial_i \psi^* \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \partial_i \psi) \end{aligned} \quad (1.461)$$

De modo que  $T_i^0 \neq T_0^i$ .

# Capítulo 2

## Escalares

Se mostrará como la invarianza de la Acción bajo transformaciones es el punto de partida en la construcción de densidades Lagrangianas únicas.

### 2.1. Construcción de Lagrangianos covariantes

En esta sección vamos a conectar la discusión sobre el Lagrangiano de las vibraciones de la cuerda con las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial. Dicho Lagrangiano tiene hasta ahora la siguiente dependencia funcional  $\mathcal{L}(\partial_\mu\phi)$ .

En la formulación de la teoría clásica de campos debemos asegurarnos de que todos los términos posibles permitidos por las simetrías asociadas al campo estén presentes en la densidad Lagrangiana. De inmediato surge la pregunta: ¿Qué posibles términos de la forma  $\partial_\mu\phi$  podrían estar presentes en el Lagrangiano?. Antes de responder esta pregunta, abordemos el problema algo más general donde la densidad Lagrangiana también depende del campo como mismo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

En la ecuación (1.264), teníamos un Lagrangiano en función de  $\partial_\mu\phi$ , y haciendo  $v \rightarrow c = 1$ , tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\partial_\mu\phi) &= \frac{1}{2} \left[ \partial_0\phi \partial_0\phi - \sum_i \partial_i\phi \partial_i\phi \right] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_0\phi \partial^0\phi + \partial_i\phi \partial^i\phi] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu\phi \partial^\mu\phi.\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde se ha usado la convención de suma para índices repetidos. Note que para que la velocidad de propagación sea independiente del sistema de coordenadas se requiere su identificación con la velocidad de la luz. De modo que si queremos interpretar los términos de la densidad Lagrangiana como objetos invariantes, necesariamente se tiene que hacer en el contexto de la relatividad especial.

## 2.2. Transformación de Lorentz para campos escalares

El campo escalar esta definido por sus propiedades bajo transformaciones de Lorentz. Vamos a estudiar el comportamiento de un campo escalar bajo una transformación general de Lorentz:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.2)$$

Por definición, el campo escalar no cambia bajo la transformación de Lorentz, es decir, su forma funcional queda inalterada. Por consiguiente el campo escalar debe satisfacer que

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \quad (2.3)$$

como se ilustró en la Fig. 1.8. La prima en  $\phi$  representa el cambio intrínseco en el campo  $\phi$  como consecuencia de la transformación.

Usando la ec. (2.2), tenemos que

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x'). \quad (2.4)$$

Esto es, el campo transformado, evaluado en el punto transformado, da el mismo valor que el campo evaluado en el punto antes de la transformación.

Por consiguiente, para un punto del espacio tiempo arbitrario tenemos que el campo escalar transforma bajo una transformación de Lorentz como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (2.5)$$

Para comprobar la invarianza de Lorentz de la Acción para el campo escalar, necesitamos las propiedades de transformación para  $\partial_\mu$  dada por la ec. (2.9)

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha x'^\alpha &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= x^\mu, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \frac{1}{x^\mu}, \quad (2.7)$$

o

$$\frac{1}{x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{1}{x^\nu}, \quad (2.8)$$

de modo que la transformación de Lorentz para  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ , es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \partial'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podemos ahora demostrar que la Acción obtenida del Lagrangiano en la ec.(2.1) es invariante bajo transformaciones de Lorentz haciendo uso de la ec. (1.158). Para hacer la demostración más general, podemos agregar una función general que solo dependa del campo  $\phi$  pero no de sus derivadas,  $V(\phi)$

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial'_\mu \phi'(x) \partial'^\mu \phi'(x) - V(\phi'),$$

$$\begin{aligned}
&= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu g^{\mu\rho} (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\rho \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi') \\
&= g^{\nu\sigma} \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x)) \\
&= \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \partial^\nu \phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x)) \\
&= \mathcal{L}(\phi(\Lambda^{-1}x), \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x)).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ya que la Acción involucra la integración sobre todos los puntos, esta es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Explícitamente

$$S \rightarrow S' = \int d^4x \mathcal{L} \tag{2.11}$$

Note que en unidades naturales

$$[S] = [\hbar] = 1, \tag{2.12}$$

y ya que  $[d^4x] = E^{-4}$ , entonces

$$[\mathcal{L}] = E^4. \tag{2.13}$$

Como  $[\partial_\mu] = E$ , entonces

$$[\phi] = E. \tag{2.14}$$

## 2.3. Principio de mínima acción para campos

Hemos visto que la acción para una oscilación mecánica en tres dimensiones se puede escribir en una notación similar a la del producto escalar de un cuadvivector de Lorentz  $\partial_\mu \phi$ . Cuando dicho campo se interpreta como un campo fundamental, es decir, que su velocidad de propagación es independiente de los sistemas de referencia inerciales, entonces la Acción queda invariante bajo dicho producto escalar. También hemos visto que adicionar una función del campo  $V(\phi)$ , la invarianza de la acción se mantiene.

Establecemos el *principio de mínima acción para campos* de la siguiente manera: La acción más general posible para un conjunto de campos contiene todos los posibles productos escalares entres los campos y sus derivadas, con las siguientes restricciones

- 1 La dimensión de los campos y derivadas en cada término de la correspondiente densidad lagrangiana debe ser menor o igual a cuatro.
- 2 La densidad Lagrangiana no debe contener derivadas altas (máximo dos derivadas)
- 3 Los campos fundamentales se deben anular a espacio infinito.

Con estas restricciones es suficiente mantener los primeros cuatro términos de la expansión de Taylor de  $V(\phi)$  (el término constante se puede remover redefiniendo el estado de mínima energía)

$$V(\phi) = a\phi + b\phi^2 + c\phi^3 + d\phi^4, \tag{2.15}$$

La invarianza de la Acción bajo términos con derivadas totales excluye términos del tipo

$$\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi. \tag{2.16}$$

De modo que la densidad Lagrangiana más general posible para un campo escalar real es

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - (a\phi + b\phi^2 + c\phi^3 + d\phi^4) . \quad (2.17)$$

La ecuación de movimiento es

$$(\partial_\mu\partial^\mu + 2b)\phi = J(\phi) , \quad (2.18)$$

donde

$$J(\phi) = -(a + 3c\phi^3 + 4d\phi^4) , \quad (2.19)$$

es el término de fuente. En ausencia de fuentes el campo  $\phi$  se propaga libremente a través de la ecuación

$$(\partial_\mu\partial^\mu + 2b)\phi = 0. \quad (2.20)$$

A continuación procedemos a encontrar una interpretación física al coeficiente  $2b$

### 2.3.1. Ecuaciones covariantes

Con el cuadvivector (1.184) podemos construir la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu\hat{p}^\mu\phi &= m^2\phi \\ i\partial_\mu i\partial^\mu\phi &= m^2\phi \\ -\partial_\mu\partial^\mu\phi &= m^2\phi \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon (1.367). Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. El Lagrangiano covariante que da lugar a ésta ecuación es (ver ec. (1.365) (1.366)).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.22)$$

El Lagrangiano más general posible para el campo  $\phi$  es en general bastante arbitrario:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) , \quad (2.23)$$

donde  $f(\phi)$  es una función de campos escalar real  $\phi$ . Si  $V(\phi)$  es una función polinómica del campo  $\phi$ , tenemos por ejemplo.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - a\phi + b\phi^3. \quad (2.24)$$

En ausencia de fuentes  $a = c = d = 0$  en la ec. (2.15), y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.286), se obtiene

$$(\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu - m^2)\phi = 0$$

$$(\hat{E}^2 - \hat{\mathbf{P}}^2 - m^2)\phi = 0 \quad (2.25)$$

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (2.26)$$

donde

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.27)$$

Es el D'Alembartiano [14]. Ec. (2.25) corresponde a la forma de operadores de la ecuación de energía-momentum relativista. La ec. (2.26) se conoce como la ecuación de Klein-Gordon, con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.28)$$

Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. Por lo tanto la ecuación de Klein-Gordon y su correspondiente Lagrangiano están en forma covariante. También tienen la simetría  $\phi \rightarrow -\phi$ . A  $\phi$  se le denomina *campo escalar*.

Hemos identificado que el término  $2a = m^2$  se podría interpretar como la masa al cuadrado del campo escalar. Dicha interpretación surge de analizar la segunda cuantización del campo  $\phi$  que se traduce en una interpretación en términos del oscilador armónico.

Realizaciones propuestas para este campo escalar incluye el de un campo de materia oscura con un potencial tipo oscilador armónico. Pero una realización ya encontrada en la naturaleza corresponde al campo de Higgs con un potencial tipo ruptura espontánea de vacío

Una realización física para la acción del campo escalar real con un potencia escalar tipo “slow-roll” corresponde al campo del inflatón en cosmología.

## 2.4. Campos escalares complejos

Entre más simetrías posea una Acción menos arbitraria es. Podemos ilustrar esta afirmación si consideramos una Acción para un campo escalar complejo que además de ser invariante de Lorentz, es además invariante bajo transformaciones de fase.

El sistema que podríamos describir es el de los pares de Cooper de carga eléctrica  $-2$  y dos veces la masa del electrón en el interior de un superconductor de Tipo-I.

En ese caso la Acción, y la correspondiente densidad Lagrangiana son únicas y están dadas por una función polinómica de  $\phi^* \phi$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (2.29)$$

Términos de orden superior se pueden obtener a partir de esa Lagrangiana única y por eso no se consideran.

Por lo tanto

$$[m] = E \quad [\lambda] = 1. \quad (2.30)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\phi^*$ , usando el Lagrangiano en ec. (2.29) y para  $\lambda = 0$

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (2.31)$$

y de la ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\phi$ ,

$$(\square + m^2)\phi^* = 0. \quad (2.32)$$

De este modo tanto  $\phi$ , como  $\phi^*$ , satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. Cada campo además corresponde a una partícula de masa  $m$  como en el caso de  $\phi_1$  y  $\phi_2$

Además de la invarianza de Lorentz, el Lagrangiano en ec, (??) también es invariante bajo el grupo de transformaciones  $U(1)$  definido en las sección 4.1.1, pero con una fase constante

$$U = e^{i\theta} \approx 1 + i\theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi &\xrightarrow{U} \phi' = e^{i\theta}\phi \approx (1 + i\theta)\phi \\ &= \phi + i\theta\phi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para  $\theta$  infinitesimal

$$\delta\phi = \phi' - \phi = i\theta\phi, \quad \delta\phi^* = \phi'^* - \phi^* = -i\theta\phi^*, \quad (2.34)$$

Comparando con la expresión para la transformación de un conjunto de campos  $\phi_i$ , eq. (1.349), con la identificación  $\phi_1 \rightarrow \phi$  y  $\phi_2 \rightarrow \phi^*$ , tenemos que

$$a_1 = i\phi, \quad a_2 = -i\phi^*. \quad (2.35)$$

Reemplazando en la expresión para el Teorema 1 de Noether relacionado con simetrías internas globales, eq. (1.340) tenemos que:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} i\phi - i\phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \\ J^\mu &= i\partial^\mu \phi^* \phi + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Y por lo tanto la corriente es real. Como  $\rho = J^0$  puede ser negativo, entonces no puede interpretarse como una probabilidad, como se hizo con la función de onda de la ecuación de Schrödinger. Esto presentó un obstáculo en la interpretación inicial de la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo una vez se cuantiza el campo escalar la probabilidad de los estados cuánticos queda bien definida [12].

Al interpretarse como carga eléctrica se predice la existencia de antipartículas!

Podemos calcular también el tensor de momentum-energía para el campo escalar

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^* \partial^\mu \phi - \delta_\nu^\mu (\partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

**Ejercicio:** Calcular el Hamiltoniano para el campo escalar complejo. (Ver Sec. 1.2 de [44]): En particular, para la densidad Hamiltoniana tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T_0^0 &= \partial^0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \partial^0 \phi - \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \partial^0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \partial^0 \phi - \partial_0 \phi^* \partial^0 \phi - \partial_i \phi^* \partial^i \phi + m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \partial^0 \phi^* \partial_0 \phi - \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

# Capítulo 3

## Fermiones

### 3.1. Preliminares

Para detalles adicionales ver por ejemplo <https://indico.cern.ch/event/243629>

### 3.2. Transformaciones de Lorentz para campos fermiónicos

Para un campo escalar, un término en la densidad Lagrangiana con sólo una derivada de primer orden de la forma

$$\phi^*(x) a^\mu \partial_\mu \phi(x), \quad (3.1)$$

no deja a la Acción invariante. Un término de ese tipo con una derivada temporal de primer orden se requiere para tener una probabilidad bien definida en mecánica cuántica. Para tener una formulación de la mecánica cuántica necesitamos garantizar la siguiente ecuación general

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi, \quad (3.2)$$

con algún operador Hamiltoniano relativista  $\hat{H}$  a determinar luego. Si dicha ecuación corresponde a una ecuación de Euler-Lagrange para el campo  $\psi$ , entonces la Acción debe contener una densidad Lagrangiana con derivadas temporales de primer orden. Por consiguiente, la invarianza bajo transformaciones de Lorentz requiere que todas las derivadas en la densidad Lagrangiana sean de orden uno.

Ver <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3P7.pdf>

Considere los campos espinoriales, que se transforma como

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x) = [S(\Lambda)]_\alpha^\beta \psi_\beta(\Lambda^{-1}x), \quad (3.3)$$

donde  $S(\Lambda)$  es la representación espinorial  $(\frac{1}{2}, 0)$  del grupo de Lorentz.

Si interpretamos  $(\psi_\beta)^\dagger$  como las componentes de un nuevo vector fila transformando bajo la representación  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $S^*(\Lambda)$ , con componentes con puntos

$$\psi_\alpha^\dagger \equiv (\psi_\alpha)^\dagger \quad (3.4)$$



entonces tenemos que

$$\psi_{\dot{\alpha}}^{\dagger} \rightarrow \psi'_{\dot{\alpha}}^{\dagger} = \psi_{\dot{\beta}}^{\dagger} [S^{\dagger}]^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.5)$$

In summary we have the following Lorentz's transformation properties for the fields

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) && \text{Scalar field,} \\ A^{\mu}(x) &\rightarrow A'^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}x) && \text{Vector field,} \\ \psi_{\alpha}(x) &\rightarrow \psi'_{\alpha}(x) = [S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta} \psi_{\beta}(\Lambda^{-1}x) && \text{Left-handed spinor field,} \\ \psi_{\dot{\alpha}}^{\dagger}(x) &\rightarrow \psi'^{\dagger}_{\dot{\alpha}}(x) = \psi_{\dot{\beta}}^{\dagger}(\Lambda^{-1}x) [S^{\dagger}(\Lambda)]^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} && \text{Righthanded anti-spinor field,} \end{aligned} \quad (3.6)$$

En lo siguiente usaremos la notación con puntos y sin puntos para los espinores de Lorentz, pero no su forma matricial. Hay otras dos representaciones adicionales del grupo de Lorentz:  $(S^{-1})^T$  and  $(S^{-1})^{\dagger}$ , pero estas son equivalentes a las representaciones  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$  respectivamente. Los espinores que transforman bajo estas representaciones tienen los índices arriba,  $\psi^{\alpha}$  and  $\psi^{\dagger\dot{\alpha}}$ , con las leyes de transformación

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha} &\rightarrow \psi'^{\alpha} = \left[ (S^{-1})^T \right]^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta} \\ \psi^{\dagger\dot{\alpha}} &\rightarrow \psi'^{\dagger\dot{\alpha}} = \psi^{\dagger\dot{\beta}} \left[ (S^{-1})^{\dagger} \right]^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde

$$\psi^{\dagger\dot{\alpha}} \equiv (\psi^{\alpha})^{\dagger} \quad (3.8)$$

Al interpretar  $\psi$  and  $\psi^{\dagger}$  como espinores de dos componentes en este espacio interno, hemos definido el producto escalar usando la convención índices contraídos *descendiendo* e índices con puntos contrídos *ascendiendo*

$$\alpha_{\alpha} \quad \text{and} \quad \dot{\alpha}^{\dot{\alpha}}. \quad (3.9)$$

De esta forma podemos definir el producto escalar entre dos espinores como

$$\begin{aligned} \psi\psi &\equiv \psi^{\alpha}\psi_{\alpha} \rightarrow \psi'^{\alpha}\psi'_{\alpha} = \left[ (S^{-1})^T \right]^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta} S_{\alpha}^{\gamma} \psi_{\gamma} \\ &= (S^{-1})^{\alpha}_{\beta} S_{\alpha}^{\gamma} \psi^{\beta} \psi_{\gamma} \\ &= \delta_{\beta}^{\gamma} \psi^{\beta} \psi_{\gamma} \\ &= \psi^{\beta} \psi_{\beta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

and similarmente el producto escalar de dos anti-espinores como

$$\begin{aligned} \psi^{\dagger}\psi^{\dagger} &\equiv \psi_{\dot{\alpha}}^{\dagger}\psi^{\dagger\dot{\alpha}} \rightarrow \psi'^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\psi'^{\dagger\dot{\alpha}} \\ &= \psi^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\psi^{\dagger\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

To construct Lorentz invariant Lagrangians, one needs to first combine products of spinors to make objects that transforms as Lorentz tensors. When constructing Lorentz tensors from fermion fields the lowered indices must only be contracted with raised indices following the same convention established in eq. (3.9). A contravariant Lorentz tensor of rank  $(n \times n)$  in this space must have an index structure with  $n$  undotted (dotted) indices follow by  $n$  dotted (undotted) indices, as for example,  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_n$ .

### 3.3. Lagrangiano fermiónico

La ecuación de Scrödinger puede escribirse como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_S \psi, \quad (3.12)$$

donde

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}. \quad (3.13)$$

Para tener una probabilidad bien definida en Mecánica cuántica relativista es necesario que la densidad Lagrangiana sea lineal en sus derivadas temporales. Definimos entonces una ecuación general mecánico-cuántica como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi. \quad (3.14)$$

La relatividad especial implica automáticamente que la densidad Lagrangian también tiene que ser lineal en las derivadas espaciales. Como un campo escalar no permite escribir un término en la densidad Lagrangiana con derivadas de primer orden (ver ec. (3.1)) (ver Sec. 1.6 de [44]), debemos usar un campo que se vea afectado por las transformaciones de Lorentz. Por consiguiente el campo debe estar formado por campos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

We could need a new representation acting in and internal space upon a two-component field  $\psi_a$  ( $a = 1, 2$ ). An Action with a Lagrangian term linear in the derivatives, could be Lorentz invariant if, taking into account the convention in eq. (3.9) and the dotted-undotted structure of the tensor in this internal space, we have that if  $a^\mu$  is to be a 2th rank tensor of the internal space, it must have components, e.g.  $(a^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$ . Therefore, a posible Lorentz invariant with a single derivative could be

$$\psi^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi(x) \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial'_\mu \psi'(x) = \psi'^\dagger_\alpha (\Lambda^{-1} x) a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \partial_\rho \psi'_\gamma (\Lambda^{-1} x), \quad (3.16)$$

with the first letters of the Greek alphabet are used to denote the indices of the internal Lorentz space, and the others the external one. Para suavizar la notación, vamos a ignorar en adelante la dependencia en las coordenadas transformadas las cuales serán integradas en el cálculo de la Acción

$$\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi' = S_\alpha^{\dot{\beta}} \psi_\beta^\dagger a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \partial_\rho (S_\gamma^\delta \psi_\delta) . \quad (3.17)$$

Como los parámetros de la transformación,  $\xi_i$  y  $\theta_i$ , en la ec. (3.61) están en el espacio interno de Lorentz, del conjunto de cuatro matrices constantes  $\sigma^\mu$  no cambia bajo una transformación de Lorentz asociada a cambios de las coordenadas externas

$$\begin{aligned} \psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi' &= \psi_\beta^\dagger (\Lambda^{-1})^\rho_\mu S^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} S_\gamma^\delta \partial_\rho \psi_\delta \\ &= \psi^\dagger (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (S^\dagger a^\mu S) \partial_\rho \psi \end{aligned}$$

$$= \psi^\dagger a^\rho \partial_\rho \psi, \quad (3.18)$$

De este modo, el término permanece invariante si la siguiente condición se satisface

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^\dagger a^\mu S = a^\rho, \quad (3.19)$$

o

$$\begin{aligned} (\Lambda)^\nu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^\dagger a^\mu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho, \\ \delta_\mu^\nu S^\dagger a^\mu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho \\ S^\dagger a^\nu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho, \end{aligned} \quad (3.20)$$

La solución para esta identidad es única y puede expresarse en términos de las matrices  $2 \times 2$  de Pauli más la identidad

$$\begin{aligned} a^\mu &= \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \\ &= (\sigma^0, \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$\sigma^0 = \mathbf{1} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma} = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3). \quad (3.22)$$

Por consiguiente, el Lagrangiano más general posible para espinores de dos componentes contiene al menos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \frac{i}{2} \psi^\dagger_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha - m \psi^\alpha \psi_\alpha \\ &\supset \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \psi. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Los coeficientes  $i/2$  y  $m$  se han escogido para que las ecuaciones de Euler-Lagrange den lugar a las ecuaciones de movimiento apropiadas. Para garantizar que la Acción sea un real, debemos imponer que  $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ . La forma más simple de Lograrlo es simplemente adicionar el hermítico conjugado de cada uno de los términos (h.c de las siglas en inglés). De modo que el Lagrangiano más general posible para espinores de dos componentes es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \psi + \text{h.c} \\ &= \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \psi + \left( \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \right)^\dagger - m (\psi \psi)^\dagger, \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dagger} \psi - m (\psi \psi + \psi^\dagger \psi^\dagger)$$

Ya que, de la hermiticidad de las matrices de Pauli

$$\bar{\sigma}^{\mu\dagger} = \bar{\sigma}^\mu. \quad (3.24)$$

De modo que

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu (\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi) + \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi \psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) . \quad (3.25)$$

Descartando la derivada total que no altera la Acción, podemos obtener la forma final de la densidad Lagrangiana para un campo espinorial de dos componentes

$$\mathcal{L} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi \psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) . \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta de nuevo que la Acción es adimensional, que implica  $[\mathcal{L}] = E^4$ , y considerando además que  $\sigma^\mu$  son matrices constantes adimensionales, entonces

$$[\psi] = E^{3/2} \quad \rightarrow \quad [m] = E .$$

Si al campo  $\psi$  se la asocia además una carga conservada asociada a una simetría continua tipo  $U(1)$ , tal que

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi , \quad (3.27)$$

podemos imponer que el Lagrangiano sea invariante bajo cambios de fase  $\psi$ . En tal caso, el término con coeficiente  $m$  debe de ser cero y la densidad Lagrangiana se simplifica a

$$\mathcal{L} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi . \quad (3.28)$$

The previous Lagrangian which is invariant under

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi , \quad (3.29)$$

is the most general one if  $\psi$  have any conserved charge, and will be the one the will use in the subsequent discussions.

### 3.3.1. Corriente conservada y Lagrangiano de Weyl

En general

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^\dagger \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \right] \\ &\propto i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (-i\alpha \psi) \\ &\propto i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (-i\alpha \psi) \\ &= \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \end{aligned} \quad (3.30)$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi . \quad (3.31)$$

La densidad de corriente es

$$J^0 \propto \psi^\dagger \sigma^0 \psi = \psi^\dagger \psi . \quad (3.32)$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad. Por consiguiente, la ecuación de movimiento se puede interpretar directamente como una ecuación de una función de onda de la mecánica cuántica.

### 3.3.2. Tensor momento-energía

Para el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi,$$

calcular  $T_\nu^\mu$  y a partir de las densidades de carga conservadas demostrar que

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}_W \rangle &= \int_V d^3x \psi^\dagger \hat{H}_W \psi \\ \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle &= \int_V d^3x \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi.\end{aligned}$$

donde  $\hat{H}_W = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$  y  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$

Usando  $\sigma^0 = \mathbf{1}$ ,

$$\begin{aligned}T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} - \mathcal{L} \\ &= i\psi^\dagger \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\ &= -i\psi^\dagger \bar{\sigma}^i \partial_i \psi \\ &= -\psi^\dagger \sigma^i (-i\partial_i) \psi \\ &= -\psi^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \psi, \\ &= \psi^\dagger \hat{H}_W \psi,\end{aligned}\tag{3.33}$$

donde hemos definido el Hamiltoniano de Weyl como

$$\hat{H}_W = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\tag{3.34}$$

Que corresponde a la proyección del espín en la dirección de movimiento. El signo menos justifica la definición de  $\psi_\alpha$  como un espinor de Weyl izquierdo. Como la ecuación de Schrödinger es de validez general, tenemos entonces que

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}_W \psi\tag{3.35}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H}_W \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H}_W \psi d^3x.\tag{3.36}$$

Note que esta relación no es posible para el Hamiltoniano de Weyl con término de masa.

Además

$$\begin{aligned}T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \\ &= i\psi^\dagger \partial_i \psi \\ &= -\psi^\dagger (-i\partial_i) \psi\end{aligned}\tag{3.37}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x\tag{3.38}$$

### 3.3.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (3.39)$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (B.31), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo  $\psi^\dagger$  al Lagrangiano en ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} &= 0 \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\sigma^0 \partial_0 \psi + i\bar{\sigma}^i \partial_i \psi &= 0 \\ i\sigma^0 \partial_0 \psi - i\sigma^i \partial_i \psi &= 0 \\ i\sigma^0 \partial_0 \psi + \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla) \psi &= 0, \\ i\sigma^0 \partial_0 \psi &= -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi, \end{aligned}$$

Como  $\sigma^0 = \mathbf{1}$ ,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi. \quad (3.41)$$

De la ec. (B.29)

$$\hat{H} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}. \quad (3.42)$$

Si identificamos a  $\boldsymbol{\sigma}/2$ , como el operador de espín, el signo menos del Hamiltoniano quiere decir que el espín del campo  $\psi$  se proyecta en la dirección opuesta a su momentum. De esta forma podemos interpretar el espinor de Weyl de dos componentes  $\psi$  como un espinor de Weyl izquierdo

A este punto, podemos comprobar la consistencia relacionada con que las matrices  $\bar{\sigma}^\mu$  corresponden a las matrices de Pauli más la identidad  $2 \times 2$ .

La ec. (B.34) puede escribirse como

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0. \quad (3.43)$$

El campo  $\psi$  también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left( -i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que  $\partial \hat{H} / \partial t = 0$ ,

$$\left( -i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \left( i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0$$

$$\begin{aligned}
\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi &= 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

De la ec. (B.38), y usando la condición en ec. (B.37), tenemos

$$\hat{H}^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}). \tag{3.45}$$

Sea  $A$  una matriz y  $\theta$  en un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2} \theta^{i2} + \sum_{i < j} \{A^i, A^j\} \theta^i \theta^j \tag{3.46}$$

■ **Demostración**

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})]_{\alpha\beta} &= \sum_{ij} \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i \theta^i A_{\gamma\beta}^j \theta^j \\
&= \sum_{ij} \theta^i \theta^j \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\
&= \sum_{\gamma} \sum_{ij} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\
&= \sum_{\gamma} \left( \sum_i \theta^{i2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i < j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{i > j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left( \sum_i \theta^{i2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i < j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{j > i} \theta^j \theta^i A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left[ \sum_i \theta^{i2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i < j} \theta^i \theta^j (A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i) \right] \\
&= \left[ \sum_i \theta^{i2} (A^i A^i)_{\alpha\beta} + \sum_{i < j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\}_{\alpha\beta} \right] \\
&= \left[ \sum_i \theta^{i2} A^{i2} + \sum_{i < j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\} \right]_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i < j} \{\sigma_i, \sigma_j\} p_i p_j \tag{3.48}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\sigma_i^2 = \mathbf{1}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 \quad i \neq j. \quad (3.49)$$

que se puede resumir en

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1}. \quad (3.50)$$

todo consistente con las propiedades de las matrices de Pauli en (1.36). De modo que

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2, \quad (3.51)$$

y reemplazando en la ec. (3.44) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para  $\psi$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi &= 0 \\ \square \psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Debido a la ambigüedad en el signo, podemos construir dos cuadvectores independientes

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \boldsymbol{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (3.53)$$

donde

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma} = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3). \quad (3.54)$$

Como hemos visto, las componentes en el espacio interno son  $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$  y  $\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}}$ , de modo que las matrices apropiadas son  $\bar{\sigma}^\mu$ , y el Lagrangiano y la ecuación para un espinor de Weyl izquierdo, son respectivamente de las ecs. (3.28) y (3.41)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \\ &= i\psi_\alpha^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \psi_\alpha, \end{aligned} \quad (3.55)$$

que da lugar a la ecuación de movimiento

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad (3.56)$$

Si  $\psi$  no tiene ninguna carga continua se puede adicionar un término de masa (con su correspondiente hermítico conjugado)

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m(\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger). \quad (3.57)$$

### 3.3.4. Lorentz invariance of the Weyl Action

To show that  $S(\Lambda)$  is in fact a Lorentz transformation, it is convinient to write this in covariant form. If we define

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu]. \quad (3.58)$$

We can obtain the proper boost and rotations generators:

$$\mathbf{K} = \sigma^{0i} = -i \frac{\sigma}{2}$$



$$\begin{aligned}
L_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk} = -4 \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right] \\
&= -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} i \epsilon^{jkl} \frac{\sigma_l}{2} \\
&= \frac{1}{2} \delta_i^l \sigma_l \\
&= \frac{1}{2} \sigma_i .
\end{aligned}$$

It is worth notices that in fact  $\sigma^{\mu\nu}$  satisfy the Lorentz algebra, and therefore are the generators of the Lorentz group elements:

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= \exp \left( -i \omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right) \\
&\approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Necesitamos satisfacer la siguiente condición

$$S^\dagger \bar{\sigma}^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \tag{3.60}$$

Ahora

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2},0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left( \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) , \tag{3.61}$$

y expandiendo (3.60)

$$\begin{aligned}
\left( 1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \bar{\sigma}^\mu \left( 1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) &= [1 + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
\left( \bar{\sigma}^\mu + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu - i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) \left( 1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) &= [1 + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu .
\end{aligned}$$

Hasta primer orden en los parametros  $\xi^i$  y  $\theta^i$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^\mu + \boldsymbol{\xi} \cdot \left( \bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + i \boldsymbol{\theta} \cdot \left( \bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu - i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu &= \delta^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
\bar{\sigma}^\mu + \boldsymbol{\xi} \cdot \left( \bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) + i \boldsymbol{\theta} \cdot \left( \bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) &= \delta^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
\boldsymbol{\xi} \cdot \left( \bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) + i \boldsymbol{\theta} \cdot \left( \bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) &= i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu .
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu &= i \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu &= \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu
\end{aligned}$$

La primera ecuación es

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^\mu \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^\mu &= i [K^i]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= i [J^{0i}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i [J^{0i}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= - (g^{0\mu} \delta_\nu^i - \delta_\nu^0 g^{i\mu}) \bar{\sigma}^\nu \\
&= - (g^{0\mu} \bar{\sigma}^i - g^{i\mu} \bar{\sigma}^0) ,
\end{aligned}$$

para  $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^0 \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^0 &= -\bar{\sigma}^i \\
\sigma^i &= \sigma^i .
\end{aligned}$$

Para  $\mu = j$

$$\begin{aligned}
-\sigma^j \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \sigma^j &= +g^{ij} \sigma^0 \\
-\delta^{ij} \mathbf{1} &= -\delta^{ij} \mathbf{1} .
\end{aligned}$$

La segunda ecuación es

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^\mu \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^\mu &= (L^i)^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= - (L_i)^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (J^{jk})^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j\mu} \delta_\nu^k - \delta_\nu^j g^{k\mu}) \bar{\sigma}^\nu \\
&= - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j\mu} \bar{\sigma}^k - g^{k\mu} \bar{\sigma}^j) \\
&= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j\mu} \sigma^k - g^{k\mu} \sigma^j) .
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^0 \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^0 &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j0} \sigma^k - g^{k0} \sigma^j) \\
0 &= 0 .
\end{aligned}$$

Para  $\mu = l$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^l \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^l &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{jl} \sigma^k - g^{kl} \sigma^j) \\
\frac{\sigma^i}{2} \sigma^l - \sigma^l \frac{\sigma^i}{2} &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (-\delta^{jl} \sigma^k + \delta^{kl} \sigma^j) \\
2 \frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^l}{2} - 2 \frac{\sigma^l}{2} \frac{\sigma^i}{2} &= \frac{i}{2} (-\epsilon_{ilk} \sigma^k + \epsilon_{ijl} \sigma^j) \\
2 \left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^l}{2} \right] &= \frac{i}{2} (\epsilon_{lik} \sigma^k + \epsilon_{lik} \sigma^k) \\
2i \epsilon_{lik} \frac{\sigma^k}{2} &= \frac{i}{2} (2 \epsilon_{lik} \sigma^k) \\
i \epsilon_{lik} \sigma^k &= i \epsilon_{lik} \sigma^k .
\end{aligned}$$

### 3.3.5. Righthanded fermion

Para el campo de dos componentes derecho  $\eta^{\dagger\dot{\alpha}}$  ( $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ ), el término invariante de Lorentz con derivada de primer orden debería ser

$$\begin{aligned} \eta a^\mu \partial_\mu \eta^\dagger &\rightarrow \eta' (a^\mu) \partial'_\mu \eta'^{\dagger} = \eta'^{\alpha} (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \eta'^{\dagger\dot{\alpha}} \\ &= \left[ (S^{-1})^T \right]^\alpha{}_\beta \eta^\beta (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \left[ (S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \partial_\nu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \left[ (S^{-1}) \right]^\alpha{}_\beta (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \left[ (S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^\beta \partial_\nu \eta^{\dagger\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

siempre y cuando la siguiente propiedad se satisfaga

$$S^{-1} a^\mu (S^{-1})^\dagger = (\Lambda)^\mu{}_\nu a^\nu. \quad (3.63)$$

De hecho, la única solución se puede expresar en términos de las matrices  $2 \times 2$

$$a^\mu = \sigma^\mu = (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.64)$$

y siguiendo un método similar al anterior, podemos arribar a la densidad Lagrangiana más general para un espinor derecho de dos componentes

$$\mathcal{L} = i\eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m (\eta \eta + \eta^\dagger \eta^\dagger). \quad (3.65)$$

El cálculo del tensor de momento energía en este caso, nos permite definir el Hamiltoniano de Weyl para un espinor de Weyl derecho como

$$\hat{H}_W = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (3.66)$$

que corresponde, en efecto, a la proyección del espín en la dirección de movimiento. El signo positivo justifica la definición de  $\eta^{\dot{\alpha}}$  como un espinor de Weyl derecho.

## 3.4. Espinores de Dirac

Para ir de un cuadvivector de spín barrado al sin barrar

$$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, -\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow \sigma^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.67)$$

podemos usar la *métrica de Weyl*

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} &= \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\sigma}^\mu{}^{\dot{\beta}\beta} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} &= \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

Estas expresiones se pueden comprobar explícitamente. Por ejemplo, en el caso de la primera matriz de Pauli

$$\bar{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\bar{\sigma}^1]^{i2} \\ [\bar{\sigma}^1]^{\dot{2}1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\bar{\sigma}^1]^{i2} \\ [\bar{\sigma}^1]^{\dot{2}1} & 0 \end{pmatrix}$$

Nombre	Símbolo	Lorentz	$U(1)$
$e_L$ : electrón izquierdo	$\xi_\alpha$	$[S]_\alpha^\beta$	$e^{i\theta}$
$(e_L)^\dagger = e_R^\dagger$ : positrón derecho	$(\xi_\alpha)^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}$	$[S^*]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$	$e^{-i\theta}$
$e_R$ : electrón derecho	$(\eta^\alpha)^\dagger = \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$	$[(S^{-1})^\dagger]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$	$e^{i\theta}$
$(e_R)^\dagger = e_L^\dagger$ : positrón izquierdo	$\eta^\alpha$	$[(S^{-1})^T]_{\beta}^{\dot{\beta}}$	$e^{-i\theta}$

Tabla 3.1: Componentes del electrón

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{2\beta}\epsilon^{\dot{1}\dot{\beta}}[\sigma^1]_{\beta\dot{\beta}} \\ \epsilon^{1\beta}\epsilon^{\dot{2}\dot{\beta}}[\sigma^1]_{\beta\dot{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{21}\epsilon^{\dot{1}\dot{2}}[\sigma^1]_{1\dot{2}} \\ \epsilon^{12}\epsilon^{\dot{2}\dot{1}}[\sigma^1]_{2\dot{1}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -[\sigma^1]_{1\dot{2}} \\ -[\sigma^1]_{2\dot{1}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\sigma^1.
\end{aligned}$$

Con esto podemos reescribir el siguiente producto de espinores de Weyl que transforma como un vector en el espacio externo de Lorentz

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta &= \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \eta_\alpha \\
&= \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \eta_\alpha \\
&= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \epsilon^{\alpha\beta} \eta_\alpha \\
&= \xi^{\dagger\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \eta^\beta \\
&= \pm \eta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \xi^{\dagger\dot{\beta}} \\
&= \pm \eta \sigma^\mu \xi^\dagger,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde el signo  $+$  ( $-$ ) es para campos clásicos (anticommutantes). Para describir completamente un electrón, que conserva carga eléctrica bajo  $U(1)$ , necesitamos todas las componentes detalladas en la Tabla 3.1

Podemos especificar el Lagrangiano completo para el electrón invariante bajo  $U(1)$  sin pérdida de generalidad, usando los dos fermiones izquierdos de cargas opuestas,  $\xi_\alpha$  y  $\eta^\alpha$ :

$$\xi \rightarrow \xi' = e^{i\theta} \xi \qquad \eta \rightarrow \eta' = e^{-i\theta} \eta \tag{3.70}$$

como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha + i \eta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} - m \left( \eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \right) \\
&= i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i \eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m \left( \eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger \right).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Definiendo el *espinor de Dirac* y su hermítico conjugado como

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \Psi^\dagger = \left( (\xi_\alpha)^\dagger \quad (\eta^{\dagger \dot{\alpha}})^\dagger \right) = (\xi_\alpha^\dagger \quad \eta^\alpha) \quad (3.72)$$

y usando (3.69), tenemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} (\xi_\alpha^\dagger \quad \eta^\alpha) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} &= (\eta^\alpha \quad \xi_\alpha^\dagger) \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= \eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_\alpha^\dagger \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \\ &= \eta^\alpha \xi_\alpha + \xi^\dagger \eta^\dagger, \end{aligned} \quad (3.73)$$

mientras que para los términos cinéticos

$$\begin{aligned} (\xi_\alpha^\dagger \quad \eta^\alpha) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \xi_\alpha \\ \partial_\mu \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} &= (\xi_\alpha^\dagger \quad \eta^\alpha) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha}\alpha} & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \xi_\alpha \\ \partial_\mu \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= \xi_\alpha^\dagger \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha + \eta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \\ &= \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + \eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Definiendo las matrices de Dirac (en la representación quirál) como

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

las cuales satisfacen el algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (3.76)$$

tememos en particular que,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

tal que

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}_{4 \times 4}. \quad (3.78)$$

Usando (3.72), (3.73) y (3.74)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m(\eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger) \\ &= i\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi^\dagger \gamma^0 \Psi. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Definiendo finalmente el *espinor de Dirac adjunto*

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.80)$$

podemos escribir finalmente el Lagrangiano para espinores de Dirac como

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi. \quad (3.81)$$

En adelante para simplificar la notación nos referiremos al electrón de Dirac simplemente como  $\psi$ .

En términos de los campos de Weyl un escalar y un vector de espinores Dirac se escriben como

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\Psi &= (e_R)^\dagger e_L + (e_L)^\dagger e_R \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi &= (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R,\end{aligned}\tag{3.82}$$

Un tratamiento de la invarianza de Lorentz para la Acción de Dirac esta dado en el Apéndice B.

La ecuación de Dirac se obtiene facilmente de la ecuación de Euler Lagrange para el espinor adjunto  $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= 0 \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi &= 0.\end{aligned}\tag{3.83}$$

Escrito en la forma de la ecuación de Scrodinger general, da lugar al Hamiltoniando de Dirac

$$\begin{aligned}i\gamma^0 \partial_0 \Psi &= [\gamma^i (-i\partial_i) + m] \Psi \\ i(\gamma^0)^2 \partial_0 \Psi &= \gamma^0 \left( \sum_i \gamma^i \hat{p}^i + m \right) \Psi \\ i\frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m) \Psi \\ i\frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \hat{H}_D \Psi,\end{aligned}\tag{3.84}$$

donde

$$\hat{H}_D = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m)\tag{3.85}$$

Antes de intentar tomar el límite no relativista, y para ser consistentes con relatividad espacial, se debe cambiar el Lagangiano por uno que tenga la invarianza de fase local. En tal caso, el Hamiltoniano resultante se debe reducir al Hamiltoniano de Schödinger en presencia de un campo electromagnético (ver Apéndice C.3).

**Ejercicio** Calcule la corriente de carga conservada asociada la corriente U(1) y el tensor de energía-momentum para el Lagrangiano de Dirac.



# Appendix

## 3.1. Representación de operadores

La representación adjunta se puede obtener a partir de las propiedades de los operadores en mecánica cuántica.

Consideremos primero un grupo más simple, el correspondiente a las rotaciones en tres dimensiones  $SO(3)$ . Para conocer las relaciones de conmutación de los generadores del grupo de rotaciones, podemos escribir los generadores como operadores diferenciales; de la expresión

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (-i\nabla) \quad (3.86)$$

o en componentes

$$J^k = [\mathbf{r} \times (-i\nabla)]^k = -i \sum_j \epsilon_{ijk} x^i \partial_j = i \epsilon_{ijk} x^i \partial^j. \quad (3.87)$$

Las relaciones de conmutación del momento angular (3.88) se obtienen de forma directa

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] \psi &= - [\epsilon_{ilm} x^l \partial_m, \epsilon_{jpk} x^p \partial_k] \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} [x^l \partial_m, x^p \partial_k] \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} [x^l \partial_m (x^p \partial_k \psi) - x^p \partial_k (x^l \partial_m \psi)] \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} (x^l \delta_{mp} \partial_k \psi + x^l x^p \partial_m \partial_k \psi - x^p \delta_{ql} \partial_m \psi - x^p x^l \partial_q \partial_m \psi), \end{aligned}$$

cancelando las derivadas cruzadas

$$\begin{aligned} &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} (x^l \delta_{mp} \partial_k \psi - x^p \delta_{ql} \partial_m \psi) \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} x^l \delta_{mp} \partial_k \psi + i \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} x^p \delta_{ql} \partial_m \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} x^l \partial_q \psi + i \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpl} x^p \partial_m \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} x^l \partial_q \psi + i \epsilon_{iml} \epsilon_{jqm} x^q \partial_l \psi \quad (l \leftrightarrow m) \text{ in 2nd term} \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} x^l \partial_q \psi + i \epsilon_{imq} \epsilon_{jlm} x^l \partial_q \psi \quad (l \leftrightarrow q) \text{ in 2nd term}, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] \psi &= (-\epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} + \epsilon_{imq} \epsilon_{jlm}) x^l \partial_q \psi \\ &= (\epsilon_{ilm} \epsilon_{jqm} - \epsilon_{imq} \epsilon_{jlm}) x^l \partial_q \psi \\ &= (\delta_{ij} \delta_{lq} - \delta_{iq} \delta_{lj} - \delta_{ij} \delta_{ql} + \delta_{il} \delta_{qj}) x^l \partial_q \psi \\ &= (\delta_{il} \delta_{qj} - \delta_{iq} \delta_{lj}) x^l \partial_q \psi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{klq} x^l \partial_q \psi \\
&= i \epsilon_{kij} (-i \epsilon_{klq} x^l \partial_q) \psi \\
&= i \epsilon_{kij} J^k \psi.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, Los generadores son los operadores de momento angular  $J^i$ , que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J^i, J^j] = i \epsilon_{ijk} J^k. \quad (3.88)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  son las constantes de estructura del Grupo  $SU(2)$

### 3.A. Grupo de Lorentz

Para estudiar otros posibles tipos de campos además de los escalares y vectoriales, debemos explorar las representaciones del Grupo de Lorentz en  $n$  dimensiones. El grupo de Lorentz es un subgrupo del Grupo de Poincaré que además incluye el subgrupo de las traslaciones en el espacio y el tiempo.

Seguiremos el mismo método de encontrar representaciones matriciales a partir del algebra de los generadores del Grupo (los cuales deben satisfacer la relaciones de conmutación apropiadas) para luego exponenciar estas representaciones infinitesimales.

Para el presente problema, necesitamos conocer las relaciones de conmutación de los generadores del grupo de transformaciones de Lorentz. Hemos mostrado en la ec. (3.88) que, a partir de la relación (haciendo expícito el caracter de operadores)

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{r}} \times (-i \nabla) \quad (3.89)$$

la parte correspondiente al grupo de rotaciones es

$$[\hat{J}^i, \hat{J}^j] = i \epsilon_{ijk} \hat{J}^k.$$

La ecuación (3.89) en términos de componentes esta dada en (3.87) y corresponde a

$$\hat{J}^k = i \epsilon_{ijk} x^i \partial^j \quad (3.90)$$

Definimos una representación matricial de los operadores de momento angular como

$$\begin{aligned}
\hat{J}^{lm} &\equiv \epsilon_{lmk} \hat{J}^k = i \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} x^i \partial^j \\
&= i (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) x^i \partial^j \\
&= i (x^l \partial^m - x^m \partial^l).
\end{aligned} \quad (3.91)$$

Que involucran tres generadores. La generalización a cuatro dimensiones da lugar a generadores adicionales  $\hat{J}^{0i}$ :

$$\hat{J}^{\mu\nu} = i (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (3.92)$$

Los seis generadores satisfacen el álgebra

$$[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{J}^{\rho\sigma}] = i (g^{\nu\rho} \hat{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \hat{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \hat{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} \hat{J}^{\nu\rho}). \quad (3.93)$$

Cualquier representación matricial de esta álgebra debe obedecer las mismas reglas de conmutación.

## 3.2. Problemas

### 3.2.1. Escalares

- 1 Demuestre que los terminos con derivada de la densidad Lagrangiana para un campo escalar complejo

$$\phi \equiv \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (3.94)$$

que sea invariante bajo el Grupo  $U(1)$  de sus cambios de fase (1.270), se puede escribir de forma única como

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2, \quad (3.95)$$

es decir, como la suma de la densidad Lagrangiana para dos campos reales independientes.

- 2 Calcular el Hamiltoniano para el campo escalar complejo. (Ver Sec. 1.2 de [44]).
- 3 Calcular el Tensor de Momento energía para el campo escalar complejo. (Ver Sec. 1.2 de [44]).

### 3.2.2. Fermiones

- 1 ¿Que cambios se requieren al Lagrangiano de la ecuación de Dirac para que la Acción sea invariante bajo transformaciones Gauge Locales?. Ver sección ??.



# Capítulo 4

## Campos vectoriales

### 4.1. Lagrangiano electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo la *transformación gauge local* obtenida en la ec. (1.199)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\rightarrow A'^\mu = A^\mu(x) - \partial^\mu \theta(x) \\ \delta A^\mu(x) &= -\partial^\mu \theta(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

que cuando fue descubierta parecía ser una simple curiosidad matemática de dichas ecuaciones. Comparando con la transformación más general de un campo vemos, que para un campo vectorial con dicha invarianza:  $a = 0$  y  $b = -1$  en la ec. (1.335).

Ya estamos en capacidad de responder la siguiente pregunta: ¿Cual es el Lagrangiano más general posible para el campo de cuatro componentes  $A^\mu(x)$  compatible con la invarianza de Lorentz y la invarianza bajo transformaciones gauge?

Para abordar estas preguntas podemos comenzar por resaltar algunas propiedades que debe tener el Lagrangiano

- Al igual que con el caso escalar el Lagrangiano no puede depender en una única derivada de primer de orden, por lo que el termino cinético debe contener una doble derivada del tipo  $\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu$ . Sin pérdida de generalidad, usaremos la convención que la derivada con índice superior (inferior) actúa un cuadvivector con índice superior (inferior).
- La parte del Lagrangiano que depende de la otra variable generalizada correspondiente al campo explícito  $A^\nu(x)$  no puede ser una única función de  $A^\nu$  del tipo  $A_\nu A^\nu$ , pues dicho término no es invariante gauge. Por tanto, dicha parte del Lagrangiano, de existir, debe ir acompañada de términos de interacción con otros campos. Por consiguiente, la forma más general posible para una densidad Lagrangiana que dependa en los campos  $A^\mu$  y sus derivadas, debe ser del tipo

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu, A_\nu, \phi_i) = \mathcal{L}_{\text{EM}}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\nu, \phi_i). \quad (4.2)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial A_\nu} \mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu, A_\nu, \phi_i) = \frac{\partial}{\partial A_\nu} \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\nu, \phi_i). \quad (4.3)$$

Podemos definir la derivada de  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  (la cual se determinará en capítulos posteriores) y que depende de los campos extras, como

$$j^\nu \propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}, \quad \text{with} \quad j^\nu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}, \quad (4.4)$$

que debe transformar como un campo vectorial de Lorentz:

$$j^\mu(x) \rightarrow j'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (4.5)$$

Sin poner explícitamente la transformación en las variables internas, las posibles derivadas de campo vectorial de Lorentz,  $A^\mu$ , transforman bajo Lorentz como

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu &\rightarrow \partial'_\mu A'_\nu = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \partial_\alpha \left[ (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu A_\beta \right] \\ \partial_\mu A_\nu &\rightarrow \partial'_\mu A'_\nu = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \partial_\alpha A_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu &\rightarrow \partial'_\mu A'_\nu = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \partial_\alpha A_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu, & \partial_\nu A_\mu &\rightarrow \partial'_\nu A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\nu \partial_\alpha A_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu \\ \partial^\mu A^\nu &\rightarrow \partial'^\mu A'^\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \partial^\alpha A^\beta \Lambda^\nu{}_\beta, & \partial^\nu A^\mu &\rightarrow \partial'^\nu A'^\mu = \Lambda^\nu{}_\alpha \partial^\alpha A^\beta \Lambda^\mu{}_\beta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para construir términos invariantes que pueden ir en el Lagrangiano, tenemos las dos posibilidades relevantes

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu &\rightarrow \partial'_\mu A'_\nu \partial'^\mu A'^\nu = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \partial_\alpha A_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \Lambda^\mu{}_\gamma \partial^\gamma A^\delta \Lambda^\nu{}_\delta \\ &= \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta \partial_\alpha A_\beta \partial^\gamma A^\delta \\ &= \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta, \end{aligned} \quad (4.8)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu &\rightarrow \partial'_\mu A'_\nu \partial'^\nu A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \partial_\alpha A_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \Lambda^\nu{}_\gamma \partial^\gamma A^\delta \Lambda^\mu{}_\delta \\ &= \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta \partial_\alpha A_\beta \partial^\gamma A^\delta \\ &= \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo  $A^\nu$ , son (usando (4.4))

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\nu &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \\ &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial A_\nu} \\ &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - j^\nu. \end{aligned} \quad (4.10)$$

De hecho, si aplicamos el segundo teorema de Noether al campo de radiación  $A_\nu(x)$

$$0 = \partial_\nu (\mathcal{E}^\nu b)$$

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \partial_\nu j^\nu. \quad (4.11)$$

Si asumimos que  $j^\nu$  corresponde a un cuadricorriente conservada

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.12)$$

tendremos como resultado la identidad

$$\partial_\nu \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] = 0. \quad (4.13)$$

Como  $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$  corresponde a un tensor simétrico, la identidad anteriores se puede interpretar como la necesidad de introducir el tensor antisimétrico

$$F^{\nu\mu} \propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)}, \quad \text{with:} \quad F^{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)}, \quad (4.14)$$

tal que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (4.15)$$

Para obtener una forma para  $F_{\mu\nu}$ , es conveniente imponer que la densidad Lagrangiana asociada sólo a las nuevas contribuciones de los campos  $A_\nu$  y sus derivadas  $\partial_\mu A_\nu$ , denotada como  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$ , sea invariante gauge local bajo la transformación del campo  $A_\mu$  en (1.446). Esto implica que  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$  solo puede depender de las derivadas de los campos, y por consiguiente  $F^{\mu\nu}$  debe ser una combinación antisimétrica sus derivadas

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.16)$$

Con esta definición, bajo la transformación (4.1)

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \theta) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \theta) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \theta + \partial_\nu \partial_\mu \theta \\ &= F_{\mu\nu} - \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \theta} + \cancel{\partial_\nu \partial_\mu \theta} \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En efecto, para las ecuaciones de campo electromagnético, invariante bajo la transformación gauge local, podemos considerar como campo fundamental al tensor de campo electromagnético. Más adelante se escribirán las ecuaciones del campo electromagnético en términos del tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$ . Dicho tensor electromagnético transforma en efecto como un tensor bajo el Grupo de Lorentz.

Para análisis posteriores, estableceremos la demostración del carácter tensorial de  $F_{\mu\nu}$  relajando nuestra notación de usar transformaciones de Lorentz inversas para cuadvectores con índices abajo y transformaciones de Lorentz normales para cuadvectores con índice arriba. De esta forma podemos definir la transformación de un tensor bajo el Grupo de Lorentz como

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial'_\mu A'_\nu - \partial'_\nu A'_\mu$$

$$\begin{aligned}
&= g_{\nu\alpha} \partial'_\mu A^\alpha - \partial'_\nu A'_\mu \\
&= g_{\nu\alpha} \Lambda_\mu^\beta \partial_\beta \Lambda^\alpha_\gamma A^\gamma - \partial'_\nu A'_\mu \\
&= g_{\nu\alpha} \Lambda_\mu^\beta \partial_\beta \Lambda^\alpha_\gamma g^{\gamma\delta} A_\delta - \partial'_\nu A'_\mu \\
&= \Lambda_\mu^\beta \partial_\beta A_\delta \Lambda_\nu^\delta - \partial'_\nu A'_\mu \\
&= \Lambda_\mu^\beta \partial_\beta A_\delta (\Lambda^{-1})^\delta_\nu - \partial'_\nu A'_\mu.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Aplicando el resultado al segundo término

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} &= \Lambda_\mu^\beta \partial_\beta A_\delta (\Lambda^{-1})^\delta_\nu - \Lambda_\nu^\delta \partial_\delta A_\beta (\Lambda^{-1})^\beta_\mu \\
&= \Lambda_\mu^\beta (\partial_\beta A_\delta - \partial_\delta A_\beta) (\Lambda^{-1})^\delta_\nu.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda_\mu^\alpha F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1}x) (\Lambda^{-1})^\beta_\nu. \tag{4.20}$$

que tiene la misma forma que tendrá la transformación SU(3) de la matrix de tensores de campos de gluones en la ec. (5.94).

De esta forma

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &\rightarrow g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} F'_{\mu\nu} F'_{\gamma\delta} = g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \Lambda_\mu^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\nu \Lambda_\gamma^\sigma (\Lambda^{-1})^\rho_\delta F_{\alpha\beta} F_{\sigma\rho} \\
&= \Lambda_\mu^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\nu \Lambda_\gamma^\mu \Lambda_\xi^\sigma (\Lambda^{-1})^\nu_\eta g^{\eta\rho} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\rho} \\
&= (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \Lambda_\xi^\mu (\Lambda^{-1})^\beta_\nu \Lambda_\nu^\rho g^{\xi\sigma} g^{\eta\rho} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\rho} \\
&= \delta_\xi^\alpha \delta_\eta^\beta g^{\xi\sigma} g^{\eta\rho} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\rho} \\
&= g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\rho} \\
&= F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Note que este resultado se puede obtener directamente con las transformaciones usuales de cuadvectores dadas en las ecs (4.8) y (4.9).

Por consiguiente, el único término posible que a la vez es invariante de Lorentz e invariante gauge local para el Lagrangiano electromagnético

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{4.22}$$

A partir de este Lagrangiana, podemos demostrar en efecto que

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)}, \tag{4.23}$$

Podemos coprobar que si

$$\begin{aligned}
F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\
&= \partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\rho A^\sigma \partial_\sigma A_\rho - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma + \partial^\sigma A^\rho \partial_\sigma A_\rho \\
&= g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\partial_\alpha A_\beta \partial_\rho A_\sigma - \partial_\alpha A_\beta \partial_\sigma A_\rho - \partial_\beta A_\alpha \partial_\rho A_\sigma + \partial_\beta A_\alpha \partial_\sigma A_\rho).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \partial_\rho A_\sigma + \partial_\alpha A_\beta \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \partial_\sigma A_\rho - \partial_\alpha A_\beta \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \\
&\quad - \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\rho A_\sigma - \partial_\beta A_\alpha \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} + \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\sigma A_\rho + \partial_\beta A_\alpha \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu}). \\
&= g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\alpha A_\beta - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma A_\rho - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\alpha A_\beta \\
&\quad - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\rho A_\sigma - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\beta A_\alpha + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\sigma A_\rho + g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\beta A_\alpha \\
&= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu \\
&= 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= 4F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} = F^{\nu\mu}, \tag{4.25}$$

y en efecto, como hemos definido en la ec. (4.14)

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}, \tag{4.26}$$

tal que

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \tag{4.27}$$

El Lagrangiano en ec. (4.22) admite un término adicional:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu, \tag{4.28}$$

siempre y cuando  $j^\nu(x)$  sea una corriente vectorial conservada:

$$j^\nu(x) \rightarrow j'^\nu(x) = \Lambda^\nu_\mu j^\mu(\Lambda^{-1}x), \quad \partial_\nu j^\nu(x) = 0. \tag{4.29}$$

De hecho, usando la ec. (4.49), tenemos que para la transformación interna del campo  $A^\nu$ , eq. (??)

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} - j^\nu A'_\nu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \\
&= -j^\nu A_\nu + j^\nu \partial_\nu \theta(x) + j^\nu A_\nu \\
&= j^\nu \partial_\nu \theta(x) \\
&= \partial_\nu (j^\nu \chi) - (\partial_\nu j^\nu) \theta(x).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Como el cambio en la Acción no es afectado por la derivada total, entonces

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x [\partial_\nu (j^\nu \chi) - (\partial_\nu j^\nu) \theta(x)] \\
&= - \int d^4x (\partial_\nu j^\nu) \theta(x).
\end{aligned} \tag{4.31}$$



Para tener  $\delta S = 0$ , y cómo  $\theta(x)$  es arbitrario, necesitamos asumir que  $\partial_\nu j^\nu = 0$ , tal que  $j^\nu$  es una corriente conservada. Sin embargo, veremos que esta es una condición auto consistente en la teoría completa.

En resumen, si la corriente electromagnética,  $j^\nu$  se conserva, entonces la Acción es invariante bajo la transformación gauge local (4.1).

Por lo tanto, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu, \quad (4.32)$$

es el más general que da lugar a una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local.

Usando la ec. (4.24), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\ -\frac{1}{4}\partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) \right] + j^\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\ -\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu \delta^\nu_\rho &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para completar la demostración de que la Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local, expresada en términos del Lagrangiano (4.32), da lugar a la Teoría Electromagnética, debemos mostrar que las 4 ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en la *forma covariante*

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (4.34)$$

### 4.1.1. Tensor Electromagnético

Para ilustrar la relación entre la conservación local de la carga eléctrica y la transformación gauge, que no es una conexión simple, considere las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.35)$$

que automáticamente incluyen la conservación local de carga, expresada por la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.36)$$

Además las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo la transformación gauge

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \theta, \quad (4.37)$$

ya que dicha transformación deja invariante a  $F^{\mu\nu}$ . De aquí la sugerencia de la invarianza gauge esta relacionada de alguna manera a la conservación de la carga. De hecho la acción más general posible para el campo  $A^\mu$  compatible tanto con la invarianza de Lorentz y la invarianza gauge local corresponde a la acción que da lugar a las ecuaciones de Maxwell.

La definición of  $F^{\mu\nu}$  incluye de entrada las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Para ver esto, note en primer lugar que las únicas componentes diferentes de cero son

$$F^{\mu\nu} = \begin{cases} F^{\mu 0} = F^{i0} & \nu = 0 \\ F^{\mu j} = F^{ij} & \nu = j \end{cases} \quad (4.38)$$

Siguiendo una descomposición vectorial para  $F^{\mu\nu}$  similar a la del generador tensorial del Grupo de Lorentz

$$E^i \equiv F^{i0} = -F_{i0}, \quad B^k = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}. \quad (4.39)$$

Para  $\nu = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} F^{i0} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= -\partial_i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= \left( -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^i \\ &= E^i \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.41)$$

mientras que para  $\nu = j$  tenemos

$$\begin{aligned} B^k &= -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= -\epsilon^{ijk}\partial_i A_j \\ &= \epsilon^{ijk}\partial_i A^j \\ &= (\nabla \times \mathbf{A})^k. \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.43)$$

Podemos invertir (4.42)

$$F_{lm} = -\epsilon_{lmk}B^k = \epsilon_{mlk}B^k, \quad (4.44)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \{F_{\mu\nu}\} &= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & \epsilon_{213}B^3 & \epsilon_{312}B^2 \\ -E^2 & \epsilon_{123}B^3 & 0 & \epsilon_{321}B^1 \\ -E^3 & \epsilon_{132}B^2 & \epsilon_{231}B^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

**Ejercicio:** Calcule  $F^{\mu\nu}$

De las ecuaciones. (4.41), y (4.43)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A}$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

y

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= 0\end{aligned}$$

que son justamente las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Por consiguiente la expresión

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.46)$$

con los  $\{F^{\mu\nu}\}$  dada en (4.92), no es más que una forma equivalente de las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell restante se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $A^\nu$ :

Regresando a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.47)$$

tomando la derivada con respecto a  $\nu$  en ambos lados tenemos

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu. \quad (4.48)$$

De la parte izquierda de ésta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu}) && \text{intercambiando índices mudos} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu}) && \text{conmutando derivadas} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}) && \text{usando antisimetría de } F^{\mu\nu} \\ &= 0,\end{aligned}$$

Por consiguiente, la cuatricorriente  $J^\mu$  es conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.49)$$

Además, las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.50)$$

se pueden expandir para  $\nu = 0$  y  $\nu = k$ .

Para  $\nu = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0 \\ \partial_i F^{i0} &= J^0 \\ \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\ \frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0,\end{aligned} \quad (4.51)$$

y por consiguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (4.52)$$

mientras que para  $\nu = k$  tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu k} &= J^k \\ \partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\ -\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\ -\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\ \epsilon_{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\ (\nabla \times \mathbf{B})^k - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k. \end{aligned} \quad (4.53)$$

y por consiguiente

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (4.54)$$

De esta forma, la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{where} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (4.55)$$

es completamente equivalente al conjunto completo de ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (4.57)$$

De este modo las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar del requerimiento de que la teoría, además de ser invariante de Lorentz, pueda expresarse en términos de potenciales de una forma que sea invariante gauge en esos potenciales. Si un cuadrivector potencial  $A^\mu$  es postulado, y se impone que la teoría involucre este solamente, de una forma que sea insensible a cambios de la forma (1.199), se es conducido naturalmente a la idea de que los campos físicos entran únicamente vía la cantidad  $F^{\mu\nu}$ , que es invariante bajo la ec. (1.199). De aquí se puede conjeturar la ecuación de campo en base a la covarianza de Lorentz.

Esto no corresponde ciertamente a una prueba de las ecuaciones de Maxwell. A pesar de eso, la idea que la dinámica (en este caso la completa interconexión entre los efectos eléctricos y magnéticos) pueda estar íntimamente relacionada a un requerimiento de invarianza local se ha convertido en algo muy fructífero.

En términos de transformaciones globales, se puede mostrar [23] que el cambio por una constante del potencial escalar ( $\chi = at$ ,  $A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 - a$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A}$  en ec.(4.83)), más la conservación de energía, da lugar a la conservación local de la carga. La conservación local en este contexto requiere que el cambio por una función del potencial escalar en en (4.83) sea compensado por el correspondiente cambio en el vector potencial magnético  $A$ . En general, cuando una cierta invarianza

	<b>E, B</b>	$A^\mu$	$F^{\mu\nu}$
Homogéneas	Ec. (4.76)	(4.82)	(4.89) ó (4.58) ó (4.59)
Inhomogéneas	(4.77)		(4.95)

Tabla 4.1: Ecuaciones de Maxwell

global es generalizada a una local, se requiere la existencia de un nuevo campo que compensa, interactuando de una manera específica. Las teorías que dan lugar al Modelo Estándar y que describen las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas, son ejemplos de teorías dinámicas derivadas desde un requerimiento de invarianza local.

Una de las principales razones de porque la física de partículas se formula en términos de lagrangianos, es que  $\mathcal{L}$  debe ser escalar en cada espacio relevante, e invariante bajo las transformaciones (hasta derivadas totales), ya que la acción es invariante. Haciendo el Lagrangiano covariante de Lorentz por ejemplo, garantiza que todas las predicciones son invariantes de Lorentz.

Los resultados sobre la notación covariante de las ecuaciones de Maxwell están resumidos en la Tabla 4.1

La ec. (4.89) satisface la identidad,

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (4.58)$$

Definiendo el tensor dual como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

la ec. (4.58) puede escribirse como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.59)$$

## 4.2. Invarianza U(1)

Sea  $U$  un elemento del Grupo de Transformaciones  $U(1)$ :

$$U = e^{i\theta(x)} \in U(1) \quad (4.60)$$

El Grupo está definido por el conjunto infinito de elementos  $U_i = e^{i\theta(x_i)}$ . Entonces

- Producto de Grupo

$$U_1 \cdot U_2 = e^{i[\theta(x_1) + \theta(x_2)]} \equiv e^{i\theta(x_3)} \in U(1)$$

- Identidad:

$$\theta(x) = 0 \quad \text{tal que} \quad U_I = 1$$

- Inverso

$$\theta(-x) = -\theta(x) \quad \text{tal que} \quad U^{-1} = e^{-i\theta(x)}$$

Note que si

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{i}{e} (\partial^\mu U) U^{-1} \quad (4.61)$$

(Si  $\theta = \text{cte}$ ,  $A^\mu = A'^\mu$ , invarianza de fase). Si  $\theta$  es suficientemente pequeño

$$U = e^{i\theta(x)} \approx 1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad U^{-1} = e^{-i\theta(x)} \approx 1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (4.62)$$

Entonces

$$\begin{aligned} A'^\mu &= -\frac{1}{e}(i\partial^\mu\theta(x))[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] + A^\mu[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] \\ &= A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Por consiguiente, si  $\theta(x) = -(1/e)\theta(x)$ , entonces la ec. (1.199) es la versión infinitesimal de la transformación  $U(1)$  en ec. (4.61). Del Teorema de Noether debe existir una carga conservada corresponde a la carga eléctrica, asociada la corriente  $J^\mu$ , de la cual aún no hemos especificado su origen.

Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\rightarrow F'^{\mu\nu} = (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \theta - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \theta \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \theta + \partial^\nu \partial^\mu \theta \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.64)$$

De este modo las ecuaciones homogéneas de Maxwell (4.89) son invariantes gauge. Como la transformación gauge solo afecta al campo  $A^\mu$ , las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (4.95) también son invariantes gauge. De esta forma las ecuaciones de Maxwell corresponde a una Teoría Gauge!. Esto fue una curiosidad hasta los 1950.

Si queremos que la Acción refleje las simetrías de las ecuaciones de Maxwell debemos mantener sólo los términos del Lagrangiano para  $A^\mu$  en (4.111) que sean invariantes hasta una derivada total. Bajo una transformación gauge, cada uno de los términos

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + \lambda_1 \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + \lambda_2 A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu + \lambda_3 F^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + \lambda_4 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + K_\nu(x) A^\nu A_\mu A^\mu$$

dan lugar a un  $\delta\mathcal{L} \neq \partial_\mu(\text{algo})$  y la Acción no es invariante bajo la transformación gauge.

### 4.2.1. Energía del campo electromagnético

Necesitamos la expresión para  $F_{\mu\nu}$ ,

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}F^{\rho\eta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = F_{0\nu} = g_{00}g_{ij}F^{0j} = -F^{0i} & \text{para } \mu = 0 \\ F_{ij} = F_{i\nu} = g_{ik}g_{jl}F^{kl} = F^{ij} & \text{para } \mu = i \end{cases} \quad (4.65)$$

De la ec. (??), se tiene

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)}(\partial_\nu A_\lambda) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \\ &= -F^{\mu\lambda}(\partial_\nu A_\lambda) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \end{aligned} \quad (4.66)$$

La energía del campo, corresponde a la componente  $T_0^0$ :

$$T_0^0 = -F^{0\lambda}(\partial_0 A_\lambda) - \mathcal{L}$$

$$= -F^{0\lambda}(\partial_0 A_\lambda) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu$$

Usando las ecuaciones (4.88), (4.91), (4.65)

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0 A_\lambda) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \\ &= -F^{0\mu}(\partial_0 A_\mu) + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu 0}F_{\mu 0}}^{\nu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu i}F_{\mu i}}^{\nu=i} + J^\mu A_\mu \\ &= -F^{0\mu}\partial_\mu A_0 - F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} + J^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Tenemos dos partes

$$\begin{aligned} -F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} &= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{0i}F_{0i}}^{\mu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{ji}F_{ji}}^{\mu=j} \\ &= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} \\ &= -\frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Además

$$\begin{aligned} -F^{0\mu}\partial_\mu A_0 + J^\mu A_\mu &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) + A_0\partial_\mu F^{0\mu} + J^\mu A_\mu \\ &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) - A_0\partial_\mu F^{\mu 0} + J^\mu A_\mu \\ &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) - A_0 J^0 + J^\mu A_\mu \\ &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) - \frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\ &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) + \frac{1}{2}F^{i0}F^{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F^{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\ &= \frac{1}{2}E^i E^i + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}B^k \epsilon_{ijl}B^l + \partial_i(A_0 E^i) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\delta_{kl}B^k B^l + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Entonces, en ausencia de corrientes

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}). \quad (4.71)$$

Similarmente la densidad Lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (4.72)$$

En vista a la ec. (4.67), ya que la densidad Lagrangiana está definida hasta una derivada total, como  $\nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) = \partial_\mu (A_0 F^{\mu 0})$ , la densidad Hamiltoniana también estará definida hasta una derivada total. De hecho, el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \end{aligned} \quad (4.73)$$

y corresponde a la expresión conocida para la energía del campo electromagnético. Hemos usado el hecho que en ausencia de corrientes todo lo que entra a un volumen debe salir y por consiguiente las integrales sobre el volumen de la divergencia de cualquier vector es cero.

Similarmente el momentum total del campo, en ausencia de corrientes, corresponde al vector de Pointing:

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} \partial_i A_\nu \\ &= -F^{0\nu} \partial_i A_\nu \\ &= -F^{0j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) - F^{0j} \partial_j A_i \\ &= -F^{0j} F_{ij} - F^{0j} \partial_j A_i \\ &= -F^{0j} F^{ij} - \partial_j (F^{0j} A_i) + (\partial_j F^{0j}) A_i \\ &= E^j \epsilon_{jik} B^k + \partial_j (E^j A_i) + (J^0) A_i \\ &= -(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i - \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) - \rho A^i \end{aligned} \quad (4.74)$$

En ausencia de cargas y corrientes

$$\begin{aligned} P^i &= - \int_V d^3x T_i^0 = \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) \\ \mathbf{P} &= \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.75)$$

### 4.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante

Por completitud, vamos a abordar el problema inverso de ir de la ecuaciones de Maxwell en forma vectorial a la forma covariante.

Las Ecuaciones homogéneas de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.76)$$

Ecuaciones inhomogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (4.77)$$



La primera ecuación establece la ausencia de cargas magnéticas, la segunda corresponde a la Ley de Faraday y la tercera a la Ley de Gauss. La cuarta sin el término de desplazamiento eléctrico introducido por Maxwell corresponde a la Ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (4.78)$$

Tomando la divergencia en esta expresión tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4.79)$$

que corresponde a la ecuación de continuidad (4.12) para  $\rho$  constante

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.80)$$

De este modo la Ley de Ampère da lugar a la conservación de carga eléctrica pero solo a nivel global: una pérdida de carga eléctrica en un punto del universo puede ser compensada por la aparición instantánea de carga eléctrica en otro lugar del universo. La conservación global podría necesitar la propagación instantánea de señales, y esto está en conflicto con la relatividad especial.

Tomando la divergencia de la Ley de Ampère modificada por Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (4.81)$$

obtenemos la ecuación de continuidad (4.80). Dicha ecuación establece que la razón de decrecimiento de la carga en un volumen arbitrario  $V$  es debido precisa y únicamente al flujo de la corriente fuera de su superficie; de modo que la carga no puede ser creada ni destruida dentro de  $V$ . Ya que  $V$  puede ser arbitrariamente pequeño esto significa que la carga eléctrica debe conservarse localmente. El término extra introducido por Maxwell está motivado por un requerimiento de conservación local.

A la luz del teorema de Noether la conservación local de la carga eléctrica debe provenir de una transformación continua y *local* que deje invariante a la ecuaciones de Maxwell. Las invarianza gauge de la ecuaciones de Maxwell juegan este papel. Las cargas conservadas localmente pueden determinarse a partir de la dinámica del sistema [23], además del uso de cargas conocidas que participen en alguna reacción. Por ejemplo se puede estudiar la forma como responde una partícula de carga desconocida a campos electromagnéticos para determinar su carga.

El principio gauge local, que pretendemos formular, va más allá del teorema de Noether estableciendo una relación entre las simetrías, las leyes de conservación y la dinámica. Este se constituye en el paradigma para estudiar las interacciones relevantes en física de partículas.

Para mostrar la invarianza gauge que exhiben las ecuaciones de Maxwell, es conveniente reescribirlas en forma covariante. Para ello es conveniente usar el potencial escalar eléctrico  $\phi$  y el potencia vectorial magnético  $\mathbf{A}$ .

De hecho las siguientes ecuaciones (4.82)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.82)$$

son equivalentes a las ecuaciones homogéneas de Maxwell, ya que como vimos entonces y repetimos aca

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

y

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= 0\end{aligned}$$

La ec. (4.82) es invariante bajo las siguientes transformaciones

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \theta \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.83)$$

Ya que

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = -\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \theta - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \theta = \mathbf{E} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \theta}_{=0} = \mathbf{B} \quad (4.85)$$

Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes calibraciones para sus medidas, obtienen los mismos campos. Las ecs. (4.83), corresponden a *transformaciones gauge locales*

En notación de cuadvectores, tenemos (1.199)

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \theta \quad (4.86)$$

Usando el cuadvector en ec. (1.195) y expandiendo la ec. (4.82), tenemos

$$\begin{aligned}E^i &= -\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^0}\right) \\ &= \frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0} \\ &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = i, \quad \nu = 0\end{aligned} \quad (4.87)$$

$$E^i = F^{i0} \quad (4.88)$$

donde hemos definido el Tensor de intensidad electromagnética como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.89)$$

A  $A^\mu$  se le denomina *campo vectorial*. Similarmente

$$\begin{aligned}B^k &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ \epsilon_{lmk} B^k &= \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial A^m}{\partial x^l} - \frac{\partial A^l}{\partial x^m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial A^m}{\partial x_l} + \frac{\partial A^l}{\partial x_m} \\
&= \partial^m A^l - \partial^l A^m \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = m, \quad \nu = l.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\epsilon_{lmk} B^k = F^{ml} \tag{4.91}$$

Por consiguiente la ec. (4.89) es también equivalente a las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. En forma matricial,

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & 0 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & 0 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & \epsilon_{213} B^3 & \epsilon_{312} B^2 \\ E^2 & \epsilon_{123} B^3 & 0 & \epsilon_{321} B^1 \\ E^3 & \epsilon_{132} B^2 & \epsilon_{231} B^1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Para reescribir las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en forma covariante usaremos además el cuádrivector  $J^\mu$  de la ec. (1.194). Usando la ec. (4.87), la primera ecuación de Maxwell inhomogénea (4.77) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0 \\
\frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\
\partial_i F^{i0} &= J^0 \\
\partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Usando las ecs. (4.87), (4.90), la segunda ecuación de Maxwell inhomogénea (4.77) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
-\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
-\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\
\partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\
\partial_\mu F^{\mu k} &= J^k
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Las ecuaciones (4.93), (4.94) pueden escribirse en forma compacta como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{4.95}$$

$$= \begin{cases} \partial_\mu(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) = J^0 & \text{para } \nu = 0 \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) = J^i & \text{para } \nu = i \end{cases}$$

## 4.4. Fijación del gauge

Para obtener una solución definitiva a las ecuaciones del campo electromagnético, se debe remover la arbitrariedad asociada con la libertad gauge de la ec. (1.199). De este modo los campos quedan especificados unívocamente en todas partes. De hecho, de las cuatro componentes del campo  $A^\mu$ , solo dos son independientes y corresponden a los estados de polarización de las ondas electromagnéticas [12] (Capítulo 2). A éste proceso se le denomina fijar el gauge, y consiste en imponer restricciones sobre los campos que fijan la función  $\chi$  y remueven la libertad gauge.

Nosotros usaremos el Gauge de Lorentz, definido por la condición

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.96)$$

Si inicialmente  $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ , se realiza una transformación gauge tal que  $\partial_\mu A'^\mu = 0$ . De acuerdo a la ec. (1.199), esto da lugar a la ecuación de onda inhomogénea

$$\square \chi = \partial_\mu A^\mu$$

que puede solucionarse mediante las técnicas usuales.

Es importante resaltar que la física queda inafectada por la escogencia del gauge. El resultado final para cualquier observable físico debe ser independiente del gauge usado para calcularlo.

Las ecuaciones de Maxwell (4.95) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= J^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) &= J^\nu. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Apliquemos ahora el gauge de Lorentz, ec. (4.96) a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (4.97)

$$\square A^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu. \quad (4.98)$$

De este modo, cada componente del campo  $A^\mu$  satisface la ecuación de onda (2.21), o la ecuación de Klein-Gordon (2.26) para masa cero. En ausencia de corrientes el campo  $A^\mu$  puede ser expandido en ondas planas con dos grados independientes de polarización [12], de forma similar a como se hizo en la sección ?? para el campo  $\phi$ . Una vez cuantizada la teoría,  $A^\mu$  corresponde al fotón, y solo queda con dos grados de libertad independientes que corresponden a los modos transversales de la onda electromagnética [12] (capítulo 2).

La ec. (4.32), with  $J^\mu = 0$ , en el Gauge de Lorentz puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) + A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\nu (A^\mu \partial_\mu A_\nu) + A^\mu \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) + \underbrace{\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu}_{\mu \leftrightarrow \nu}] \\
&= -\frac{1}{4}[2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (2A^\nu \partial_\nu A_\mu)] \\
&= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Incluyendo el término con corrientes, y usando el hecho de que un signo global no afecta las ecuaciones de movimiento, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + J_\mu A^\mu \tag{4.100}$$

## 4.5. Ecuaciones de Proca

Consideraremos ahora el efecto de adicionar un término de masa a la teoría de Maxwell. Los campos vectoriales masivos juegan un papel importante en física. Campos como  $W^\mu$ ,  $Z^\mu$  que median las interacciones débiles son ejemplos de campos de este tipo. Las implicaciones de una masa finita para el fotón pueden inferirse de un conjunto de postulados que hacen de las ecuaciones de Proca la única generalización posible de las ecuaciones de Maxwell [15].

Teniendo en cuenta sólo el término de masa en la ec. (4.32)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu. \tag{4.101}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\eta} F_{\rho\eta} \right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left( \frac{1}{2}m^2 A^\rho A_\rho - J^\rho A_\rho \right) &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu &= J^\nu.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Tomando la cuadridivergencia a ambos lados de la ecuación y usando la ec. (4.97), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\
\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\
m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu
\end{aligned} \tag{4.103}$$

De este modo, en ausencia de corrientes, las ecuaciones de Proca dan lugar a la condición de Lorentz. De otro lado, si asumimos que la corriente se conserva, la condición de Lorentz también aparece. Por consiguiente, si la masa de campo vectorial es diferente de cero, la condición de Lorentz, ec. (4.96), emerge como una restricción adicional que debe ser siempre tomada en cuenta. De este modo la libertad gauge de las ecuaciones de Maxwell se pierde completamente en las ecuaciones de Proca, que sin pérdida de generalidad se pueden reescribir, usando la condición de Proca

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{4.104}$$

y las ecs. (4.97), (4.102), como:

$$(\square + m^2)A^\nu = J^\nu \quad (4.105)$$

En ausencia de corrientes, cada una de las componentes del campo vectorial satisface la ecuación de Klein-Gordon (2.26). Por consiguiente  $m$  corresponde a la masa del campo vectorial  $A^\mu$ .

Aplicando la condición de Lorentz a la ec. (4.101), obtenemos el Lagrangiano de la Ecuación de Proca (4.105)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu - J^\nu A_\nu, \quad (4.106)$$

donde hemos reabsorbido un signo global que no afecta las ecuaciones de movimiento. El primer término que incluye sólo derivadas de los campos es llamado *término cinético* y dependen sólo del espín de las partículas. El término cuadrático en los campos corresponde al *término de masa*, y el último corresponde a la interacción del campo con una corriente. Cuando un Lagrangiano contiene sólo términos cinéticos y de masa diremos que el campo que da lugar al Lagrangiano es libre de interacciones, o simplemente que es un *campo libre*. Las otras partes del Lagrangiano serán llamadas *Lagrangiano de Interacción*. De este modo podemos reescribir el Lagrangiano (4.106) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -J^\nu A_\nu. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Debido a que la teoría masiva ya no es invariante gauge, la condición de Lorentz aparece automáticamente como la única restricción apropiada sobre el campo vectorial.

Una vez se toma en cuenta la condición de Lorentz el campo masivo libre puede expandirse en ondas planas con tres grados de libertad independientes de polarización. Dos de estos corresponden a los dos estados transversos que aparecen en las ondas electromagnéticas ( $A^1$ ,  $A^2$ ), y el tercero ( $A^3$ ) corresponde a un estado longitudinal en la dirección del momento de la partícula [12].

Aunque hemos hecho el análisis de la ecuación de Proca permitiendo un término de masa para el fotón, las implicaciones experimentales de una teoría de este tipo dan lugar a restricciones muy fuertes sobre la masa del fotón [15]. El límite actual sobre la masa del fotón es  $m < 6 \times 10^{-17}$  eV ( $1.1 \times 10^{-52}$  Kg) [16]. Debido al principio gauge local, desde el punto teórico se espera que la masa del fotón sea exactamente cero. En general, los campos vectoriales puede ser generados a partir de otras cargas no electromagnéticas y pueden ser masivos. El reto durante varias décadas fue entender como las masa de los campos vectoriales de la interacción débil podría hacerse compatible con el principio gauge local.

Además, el Lagrangiano libre se puede reescribir como la suma de cuatro lagrangianos independientes para cada campo  $\phi = A^0$ ,  $A^i$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{A} \cdot \partial^\mu \mathbf{A} - \frac{1}{2}m^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.108)$$



# Appendix

## 4.A. Lagrangiano para el campo vectorial

Ya estamos en capacidad de responder la siguiente pregunta: ¿Cual es el Lagrangiano más general posible para el campo de cuatro componentes  $A^\mu(x)$  compatible con la invarianza de Lorentz

Las correspondientes transformaciones son

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) . \quad (4.109)$$

Además, tenemos la ec.(1.199):

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x) . \quad (4.110)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ G^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

El Lagrangiano que da lugar a una Acción invariante de Lorentz para el cuadvivector  $A^\mu$  es, hasta derivadas totales y potencias en los campos de hasta dimensión 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \\ & - J^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + \lambda_1 \partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) + \lambda_2 A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu \\ & + \lambda_3 F^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x) + \lambda_4 G^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu + \dots \end{aligned} \quad (4.111)$$

- **Ejercicio:** Show that terms like  $\partial^\mu A^\nu(x) \partial_\mu A_\nu(x)$ , and hence  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , transforms as

$$\partial^\mu A^\nu (\Lambda^{-1}x) \partial_\mu A_\nu (\Lambda^{-1}x) \quad (4.112)$$

Hint: use the Lorentz transformation properties of  $\partial_\mu$  in eq. (2.9).

In the case of  $J^\mu A_\mu$ :

$$J^\mu(x) A_\mu(x) \rightarrow g_{\mu\nu} J'^\mu(x) A'^\nu(x) = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho J^\rho (\Lambda^{-1}x) \Lambda^\nu{}_\sigma A^\sigma (\Lambda^{-1}x)$$



$$\begin{aligned}
&= \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma J^\rho (\Lambda^{-1}x) A^\sigma (\Lambda^{-1}x) \\
&= g_{\rho\sigma} J^\rho (\Lambda^{-1}x) A^\sigma (\Lambda^{-1}x) ,
\end{aligned} \tag{4.113}$$

in the case  $\partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x)$ :

$$\begin{aligned}
\partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) &\rightarrow \partial'_\nu A'^\nu(x') A'_\mu(x') A'^\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho \partial_\sigma A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x) \\
&= \delta^\sigma{}_\rho \partial_\sigma A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x) \\
&= \partial_\rho A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x) ,
\end{aligned} \tag{4.114}$$

and similarly for the other terms. Under a Lorentz transformation the full Lagrangian transform as

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) \tag{4.115}$$

Since the Action involves the integration over all the points, it is invariant under the Lorentz transformation. The  $J^\mu(x)$  does not involves the introduction a new vector field, because it will be identified later as the 4-current.

Terms like

$$K_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) , \tag{4.116}$$

(for  $K_\nu$  constant) are not Lorentz invariant:

$$K_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) \rightarrow K_\nu A'^\nu(x') A'_\mu(x') A'^\mu(x') = K_\nu \Lambda^\nu{}_\rho A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x) . \tag{4.117}$$

$K_\nu(x) A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x)$  is Lorentz invariant

## 4.2. Problemas

4.1 Muestre que el Lagrangiano electromagnético en ausencia de corrientes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \tag{4.118}$$

4.2 Calcule el rango de la interacción débil mediada por la partícula  $W^-$  de masa

$$m_W \approx 80 \text{ GeV} \tag{4.119}$$

# Capítulo 5

## Principio gauge local

Hemos introducido ya todos los ingredientes necesarios para entender a nivel cualitativo el modelo estándar de las partículas elementales. Para permitir simetrías internas más generales que el simple cambio de fase es necesario usar siempre el hermítico conjugado, en lugar de sólo el conjugado. Con esta notación un conjunto de  $f$  fermiones (izquierdos) que conservan localmente  $n$  cargas, deben interactuar a través de  $a = n^2 - 1$  bosones gauge. Si además alguno de ellos es masivo, debemos introducir por lo menos un campo escalar. Un Lagrangiano para tal sistema debe tener la forma genérica

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & i\psi_f^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi) \\ & + h^{fg} (\psi_f \psi_g \phi + \text{h.c})\end{aligned}\tag{5.1}$$

A continuación veremos cual es la forma explícita de la derivada covariante para cada una de las interacciones fundamentales.

### 5.1. Electrodinámica Cuántica

Para hacer el Lagrangiano en ec. (3.81) invariante gauge local bajo  $U(1)_Q$ , procedemos de la forma usual. El campo transforma como<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\psi & \rightarrow \psi' = e^{iQ\theta(x)} \psi \\ \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-iQ\theta(x)},\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde  $Q$  es el generador de carga eléctrica en unidades de la carga del electrón.

La derivada covariante se define de manera que transforma de la misma forma que el campo, introduciendo el campo gauge  $A^\mu$

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu,\tag{5.3}$$

tal que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta(x).\tag{5.4}$$

---

<sup>1</sup>A partir de ahora se usará  $\psi$  (minúscula) para denotar un fermión de Dirac.

donde  $e$  es la carga eléctrica del electrón. De esta forma, si  $\psi_e$  es el campo que representa al electrón

$$Q\psi_e = -e\psi_e. \quad (5.5)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' &= \mathcal{D}'_\mu \psi' \\ &= e^{iQ\theta(x)} \mathcal{D}_\mu \psi, \end{aligned} \quad (5.6)$$

como corresponde a una derivada covariante. Para mayor generalidad de los resultados, definimos un elemento de  $U(1)_Q$  como

$$U(\theta) = e^{iQ\theta(x)}. \quad (5.7)$$

Repetimos a continuación el análisis hecho en la Sección 1.B.2 pero haciendo referencia sólo a los resultados. Para los detalles se recomienda ir a dicha Sección. De este modo, la derivada covariante se puede definir como

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = U(\mathcal{D}_\mu \psi). \quad (5.8)$$

Para encontrar las propiedades de la derivada covariante en este contexto general, necesitamos evaluar cual es la transformación de la derivada covariante como tal, es decir

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \psi)' &= \mathcal{D}'_\mu \psi' = U(\mathcal{D}_\mu \psi) \\ \mathcal{D}'_\mu (U\psi) &= U(\mathcal{D}_\mu \psi). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si mantenemos en mente que  $\mathcal{D}'_\mu U$  es todavía un operador, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu U &= U\mathcal{D}_\mu \\ \mathcal{D}'_\mu &= U\mathcal{D}_\mu U^{-1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Es decir, para comprobar esta identidad, debemos aplicar el nuevo operador sobre algún campo. Para mantener la generalidad del resultado evitaremos usar la propiedad conmutativa del algún grupo particular. Al aplicar la derivada covariante en un campo, en interpretándola como un operador, tenemos que

$$\mathcal{D}'_\mu \psi = U\mathcal{D}_\mu (U^{-1}\psi),$$

da lugar a la propiedad

$$\partial_\mu \psi - ieQA'_\mu \psi = \partial_\mu \psi + U(\partial_\mu U^{-1})\psi - ieQUA_\mu U^{-1}\psi. \quad (5.11)$$

Después de cancelar el término  $\partial_\mu \psi$  en ambos lados, y factorizando el campo  $\psi$ , tenemos que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{eQ}U(\partial_\mu U^{-1}). \quad (5.12)$$

Esta expresión es completamente general y será usada posteriormente en el contexto de grupos más complicados. En el caso particular de un Grupo Abelian  $U(1)$ , tenemos simplemente que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (5.13)$$

El Lagrangiano de Dirac invariante gauge local se obtiene reemplazando la derivada normal por la derivada covariante. Para el campo electrónico  $Q = -1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi + \mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu) \\ &= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - m\bar{\psi} \psi + -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Este Lagrangiano da lugar a una Acción que define una teoría completa correspondiente a la electrodinámica cuántica (QED de sus siglas en inglés)

Retomando los resultados para las corrientes conservadas de la Sección 1.C.2, aplicamos el segundo teorema de Noether, para una transformación  $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)} \psi$ , donde  $q = \text{cte}$

$$\begin{aligned} \phi_1 : \psi, & \quad a_1 = iq\psi, & \quad b_1 = 0 \\ \phi_2 : \psi^*, & \quad a_2 = -iq\psi^*, & \quad b_2 = 0 \\ \phi_3 : A^\mu, & \quad a_3 = 0, & \quad b_2 = -\delta^\mu_\nu, \end{aligned} \quad (5.15)$$

establezca el segundo teorema de Noether

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{E}_i a_i &= \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \\ \mathcal{E}_1 a_1 + \mathcal{E}_2 a_2 &= \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrangia para cada uno de los campos, tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \right\} a_1 + a_2 \left\{ \cancel{\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \right\} &= \partial_\mu \left[ \cancel{\partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \right] \\ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] a_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 - a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= -\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

aplicando la regla de la cadena, y usando la definición de  $j^\mu$  dada en la ec. (4.4)

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu a_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 - a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \partial_\mu j^\mu. \quad (5.18)$$

Para establecer el segundo teorema de Noether para la electrodinámica cuántica, debemos establecer la identidad general (1.360), que en este caso se reduce

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0. \quad (5.19)$$

De hecho

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \\
&= i\bar{\psi} \gamma^\mu (iq \partial_\mu \psi) - e\bar{\psi} \gamma^\mu (iq\psi) A_\mu - m\bar{\psi} (iq\psi) \\
&\quad + (-iq\bar{\psi}) (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi) + (-iq\bar{\psi}) (-e\gamma^\mu \psi A_\mu) + (-iq\bar{\psi}) (-m\psi) \\
&= -q\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + q\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - ieq\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + ieq\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - iqm\bar{\psi} \psi + iqm\bar{\psi} \psi \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

de modo que

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 \right] = \partial_\mu j^\mu. \tag{5.21}$$

Tenemos entonces que la cuadricorriente para la QED es

$$j^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_i, \tag{5.22}$$

donde habíamos establecido, ver ec. (4.29), que  $j^\mu$  debe ser una cuadricorriente conservada

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{5.23}$$

El cálculo general de la corriente a partir de la identidad (1.360), es

$$\begin{aligned}
j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Consistente con la demostración previa.

Como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi} \gamma^\mu, \tag{5.25}$$

usando el  $a_1$  de la ec. (5.15), tenemos que

$$j^\mu = -e\bar{\psi} \gamma^\mu Q\psi, \tag{5.26}$$

que corresponde a la quadri-corriente electromagnética conservada localmente de la electrodinámica cuántica.

El segundo teorema de Noether para la QED es perfectamente consistente con el campo de radiación. Por ejemplo, la identidad resultante

$$\partial_\mu \partial_\rho \left[ \frac{\mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\mu)} \right] = 0, \tag{5.27}$$

se puede interpretar como la necesidad de introducir el tensor antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)}, \quad (5.28)$$

tal que

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.29)$$

Para obtener una forma para  $F_{\mu\nu}$ , es conveniente imponer que la densidad Lagrangiana asociada sólo a las nuevas contribuciones de los campos  $A_\nu$  y sus derivadas  $\partial_\mu A_\nu$ , denotada como  $\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu)$ , sean invariantes bajo la transformación gauge local del campo  $A_\mu$  en (1.446). Esto implica que  $\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu)$  solo puede depender de las derivadas de los campos, y por consiguiente  $F^{\mu\nu}$  debe ser una combinación antisimétrica de las derivadas de los campos

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.30)$$

Con esta definición, bajo la transformación (1.446)

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (5.31)$$

Por consiguiente, el único término posible que a la vez es invariante de Lorentz e invariante gauge local es

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.32)$$

El Lagrangiano correspondiente a la interacción de un fermión y el campo electromagnético corresponde al Lagrangiano de Dirac con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante, y el correspondiente término cinético invariante gauge y de Lorentz asociado al nuevo campo introducido en la derivada covariante:  $A^\mu$ . Este campo es necesario para compensar los cambios en la energía y momentum que sufre el electrón como consecuencia de imponer la invarianza de la Acción bajo un cambio de fase local

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

y es invariante bajo transformaciones locales  $U(1)_Q$ . Desarrollando la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + eQ\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Este Lagrangiano da lugar a la Acción de la teoría conocida como Electrodinámica Cuántica (QED de sus siglas en inglés). Para el Lagrangiano de un espinor Weyl izquierdo  $\xi_\alpha$ , el término de masa esta prohibido por la invarianza gauge, y cambiando  $\bar{\psi}\gamma^\mu \rightarrow \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu$ , siguiendo los mismos pasos llegaríamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \xi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + eQ\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ , tenemos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + eQ\gamma^\mu A_\mu \psi = 0$$

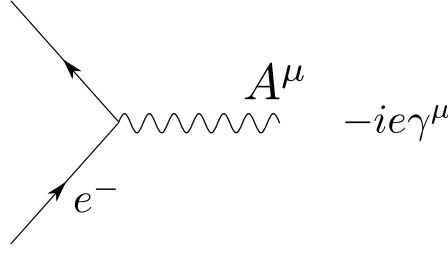


Figura 5.1: Feynman rule for QED

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial_\mu - i^2 e Q \gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \\
 [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQ A_\mu) - m]\psi &= 0 \\
 (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Que corresponde a la ecuación de Dirac en presencia del campo electromagnético. Mientras que para el campo  $A^\mu$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}\partial_\mu \left[ \frac{F^{\rho\eta} F_{\rho\eta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - eQ \bar{\psi} \gamma^\rho \psi \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\
 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -eQ \bar{\psi} \gamma^\nu \psi
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Definimos entonces la corriente electromagnética generada por el fermión como

$$\begin{aligned}
 j^\mu &= -e\bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi \\
 &= e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi,
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

donde hemos interpretado a  $Q$  como el operador de carga eléctrica con autovalor  $-1$  para el electrón:

$$Q\psi = -1\psi. \tag{5.39}$$

De nuevo, la aparición de la interacción electromagnética es una consecuencia de la invarianza gauge local.

De esta manera podemos reescribir el Lagrangiano en términos de un Lagrangiano libre y otro de interacción

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{free}} &= i\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 \mathcal{L}_{\text{int}} &= eQ \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Para la QED sólo hay un término de interacción que es suficiente para explicar todos los fenómenos electromagnéticos y su interacción con la materia. Este está representado por el diagrama de Feynman mostrado en la Figura 5.1

Para usar esta regla de Feynman debemos aclarar que línea fermiónica corresponde a partícula y cual a antipartícula. Ver 5.2

La repulsión electromagnética está representada por la figura 5.3. En la Figura (a) el primer electrón emite un fotón y se dispersa, mientras que el segundo absorbe el fotón y se dispersa en la

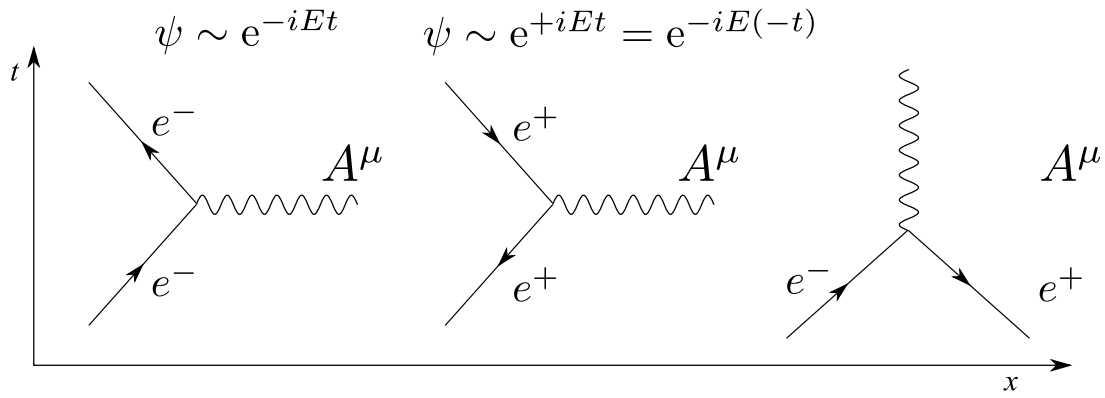


Figura 5.2: Configuraciones de Feynman rule for QED. The defined positive energy particles (antiparticles) travel in the same (opposite) direction that time.

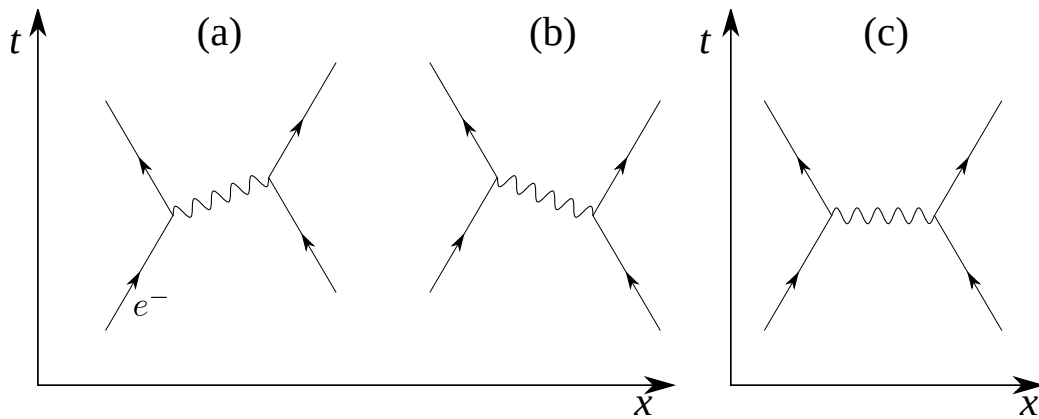


Figura 5.3: Electromagnetic repulsion. The diagrams (a) and (b) are summarized in the diagram (c)



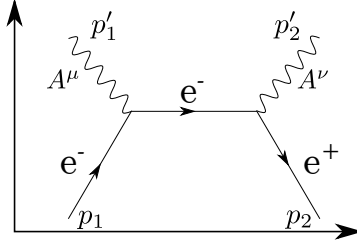


Figura 5.4: Momentum conservation force annihilation into two photons

dirección opuesta. En la Figura (b) el primer electrón absorbe el fotón emitido por el segundo electrón. Los dos diagrams se representa por uno único con el fotón en horizontal como se muestra en la Figura (c).

La aniquilación de un par electrón positrón en un fotones tiene que ser consistente con la conservación de momentum. En general, el cudrimomentum del electron es

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad \text{such that: } m^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2. \quad (5.42)$$

mientras que para el fotón es

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad \text{such that: } 0 = p_\mu p^\mu = E^2 - p^2, \quad (5.43)$$

y por consiguiente

$$E = |\mathbf{p}|. \quad (5.44)$$

Sin perdida de generalidad, cuando un electrón y su antipartícula, el positrón, sufren una colisión viajando en direcciones opuestas, podemos escoger el sistema de masa, tal que asignando los momentos iniciales como en la figura 5.4

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = 0. \quad (5.45)$$

La conservación de la cantidad de movimiento garantiza entonces que

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 = 0. \quad (5.46)$$

De este modo, si en el estado final hay un sólo fotón, necesariamente este tendría cuadrimomentum nulo, de aquí una Energía nula en clara violación de la conservación de energía. Por lo tanto, la aniquilación de un electrón y un positrón en radiación electromagnética, debe dar lugar a al menos dos fotones, como se muestra en la figura

Cada nuevo vértice en un proceso contribuye con un factor  $e^2$  pues el cálculo de las probabilidades en mecánica cuántica involucran un módulo cuadrado. La cantidad adimensional asociada es la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}. \quad (5.47)$$

En el átomo de Hidrógeno, las interacciones electromagnética que mantienen el átomo ligado provienen de la emisión de un fotón por parte del electrón que es absorbido por el protón (y viceversa). Sin embargo, es también la probable que el fotón sea reabsorbido por el propio electrón como se indica

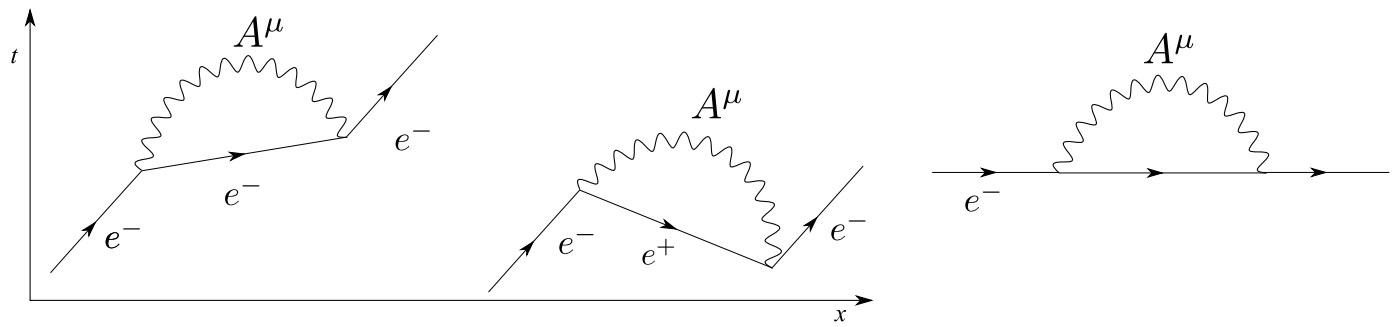


Figura 5.5: Electron self-energy

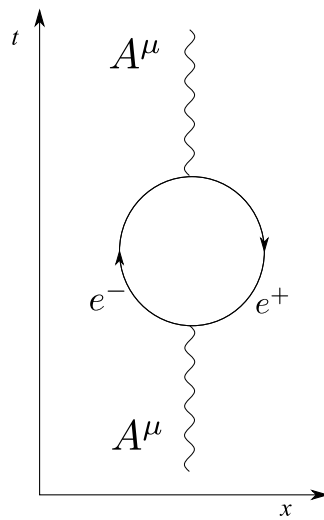


Figura 5.6: Vacuum polarization

en la figura 5.5. Sin embargo, debido a los dos vértices adicionales, la probabilidad de que esto suceda está suprimida por un factor de  $\mathcal{O}(\alpha^2) \sim 10^{-3}$ . Coloquialmente, esto implicaría que por cada mil fotones que el electrón intercambia con el protón, el propio electrón reabsorbe uno de ellos. Esto genera un nivel hiperfino en el átomo de hidrógeno con consecuencias medibles experimentalmente.

Similarmente el fotón puede “fluctuar con el vacío”, como se muestra la figura 5.6

**Ejercicio:** Realice correcciones a un loop a la interacción entre dos electrones de la figura 5.3, incluyendo la denominada *corrección al vértice*.

## 5.2. Momento magnético del electrón

La correspondiente a la ecuación de Euler-Lagrange para el campo  $\bar{\psi}$ , El Hamiltoniano para el campo electrónico completo en presencia de un campo electromagnética en la QED es

El límite no relativista de dicho Hamiltoniano es obtenido en la Apéndice C.3. El resultado es

$$\hat{H}\psi = \left[ \frac{1}{2m}(i\nabla + q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left( \frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \psi. \quad (5.48)$$

En ausencia del campo electromagnético recuperamos la Ecuación de Schrödinger para una partícula libre como era de esperarse. Sin el último término  $(q\boldsymbol{\sigma}/2m) \cdot \mathbf{B}$ , sería el Hamiltoniano de Schrödinger para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. El término adicional es interpretado como la energía en un campo magnético, de un momento magnético intrínseco asociado con un partícula de Dirac.

Definimos entonces el momento magnético intrínseco como ( $q = -e$ )

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_e &= -\frac{e\boldsymbol{\sigma}}{2m} \\ &= -2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &= -2 \left( \frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &= -g_e \left( \frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde hemos recuperado el factor  $\hbar$  y definido el *factor-g* [28],  $g_e = 2$ . Se define el momento magnético anómalo del electrón como

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \quad (5.50)$$

de modo que  $a_e = 0$ . Sin embargo experimentalmente  $a_e \sim 10^{-3}$

$$a_e = 0.001\,159\,652\,1859(38) \quad (5.51)$$

Después de la segunda cuantización, se pueden realizar correcciones perturbativas al valor calculado anteriormente de  $g_e$ . Dicho cálculo ha sido realizado a cuarto orden en teoría de perturbaciones coincidiendo con el valor experimental hasta la décima cifra significativa. Este tipo de comprobaciones entre teoría y experimento ha llevado a considerar la Electrodinámica Cuántica (QCD) como la mejor teoría que se halla construido para describir la naturaleza.

Algunas de las cientos de miles de contribuciones, se ilustran en la figura 5.7, tomada de la referencia [45]

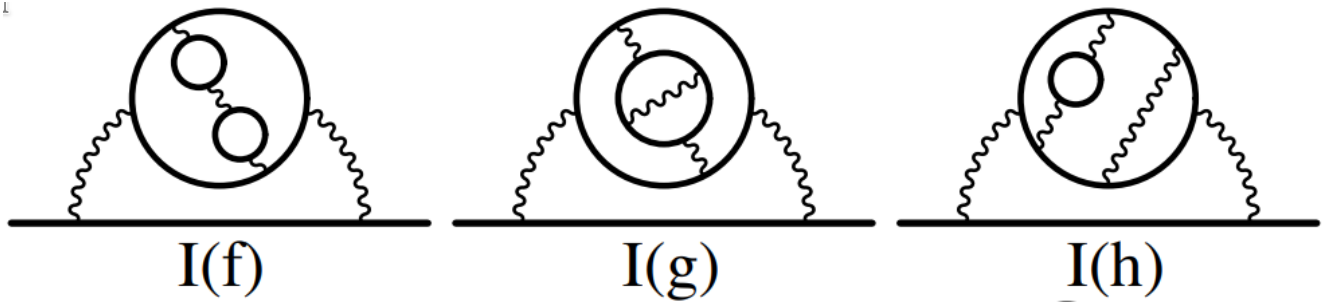


Figura 5.7: Some five-loop correction from [45]

### 5.2.1. Paridad

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi A_\mu + \eta\sigma^\mu\eta^\dagger A_\mu \\ &= (e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_L A_\mu + (e_R)^\dagger\sigma^\mu e_R A_\mu,\end{aligned}\quad (5.52)$$

de modo que el fotón se acopla por igual a los campos izquierdos que a los derechos. El Lagrangiano de la QED en términos de espinores de Weyl es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i(e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu e_L A_\mu + i(e_R)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu e_R - m\left[(e_R)^\dagger e_L + (e_L)^\dagger e_R\right] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &\quad + eQ\left[(e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger\sigma^\mu e_R\right]A_\mu\end{aligned}\quad (5.53)$$

Se dice entonces que la corriente electromagnética conserva paridad, es decir es invariante bajo el cambio  $L \leftrightarrow R$ . Una demostración de esta invarianza se muestra en el Apéndice C.6

## 5.3. Cromodinámica Cuántica

Como se ilustra en la figura 5.8, en cromodinámica cuántica existe la posibilidad que un electrón y un positrón se aniquilen mutuamente en pura energía llevada por un fotón virtual el cual se debe materializar en un par partícula-antipartícula de acuerdo a la energía disponible. Este es el principio de funcionamiento de los aceleradores electrón-positrón donde se generan dos rayos muy energéticos de electrones y positrones los cuales se hacen colisionar en un punto alrededor de un detector de partículas. El detector esta diseñado para reconstruir los productos de la aniquilación del par electrón positrón. Por ejemplo, si el par electrón-positrón colisiona con una energía superior a 212 MeV, existe la probabilidad que se cree un par muón ( $\mu^-$ ) antimuón  $\mu^+$ . En teoría cuántica de campos a dicho proceso se le llama sección eficaz y se denota como

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \quad (5.54)$$

Aunque el cálculo de dicho proceso está fuera del alcance de una descripción clásica de los campos, dicha probabilidad debe ser proporcional al cuadrado de la carga eléctrica de la partícula producida, en este caso  $Q_\mu^2 = 1$ , en unidades de la carga del electrón. El conjunto fermiones elementales que interactúan sólo de forma electrodébil se conoce como *leptones* y esta especificado en la tabla 5.9

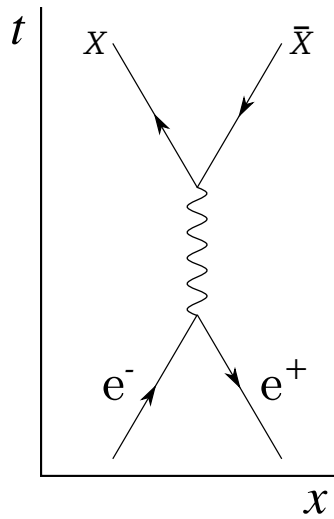


Figura 5.8: Diagrama de Feynman para la aniquilación electrón-positrón y la subsecuente creación de un par partícula-antipartícula de acuerdo a la energía disponible

Leptons				
Name	Symbol	Antiparticle	Charge (e)	Mass (MeV/c <sup>2</sup> )
Electron	$e^-$	$e^+$	-1	0.511
Electron neutrino	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	0	< 0.000 0022
Muon	$\mu^-$	$\mu^+$	-1	105.7
Muon neutrino	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	< 0.170
Tau	$\tau^-$	$\tau^+$	-1	1,777
Tau neutrino	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	< 15.5

Figura 5.9: Leptones de: [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_particles](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles)

Quarks				
Name ↕	Symbol ↕	Antiparticle ↕	Charge (e) ↕	Mass (MeV/c <sup>2</sup> ) ↕
up	u	$\bar{u}$	$+\frac{2}{3}$	1.5-3.3
down	d	$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	3.5-6.0
charm	c	$\bar{c}$	$+\frac{2}{3}$	1,160-1,340
strange	s	$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	70-130
top	t	$\bar{t}$	$+\frac{2}{3}$	169,100-173,300
bottom	b	$\bar{b}$	$-\frac{1}{3}$	4,130-4,370

Figura 5.10: Quarks de: [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_particles](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles)

Con el avance de la tecnología de aceleradores, en la década de los 50 y 60 del siglo pasado se logró establecer la existencia de un zoológico de nuevas partículas, la mayoría de ellas correspondientes a *hadrónes* en el proceso:

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrónes}). \quad (5.55)$$

Los protones, neutrones, piones, kaones y demás hadrones, son partículas compuestas de constituyentes elementales llamados quarks. Por ejemplo los protones, neutrones y piones están constituidos de quarks up y down. Los hadrones están divididos en bariones,  $B$ , constituidos de tres quarks, y los mesones,  $M$ , de dos. Para satisfacer el principio de exclusión de Pauli, y justificar el confinamiento de los hadrones, se requiere que cada quark contenga  $N_c$  cargas diferentes, llamadas cargas de color, de manera que la carga de color de un hadrón sea cero, de forma similar a como la carga eléctrica de un átomo es cero a pesar de que sus constituyentes poseen carga eléctrica. Muchos resultados experimentales respaldan la existencia de tres cargas de color para cada quark,  $N_c = 3$ . De este modo cada quark  $q = u, d, c, s, t, b$ , con las propiedades mostradas en la tabla 5.10, viene en tres colores

$$q_\alpha = q_1, q_2, q_3 = q_r, q_b, q_g, \quad (5.56)$$

donde los últimos subíndices hacen referencia a los colores red, blue, green. De este modo los Bariones y mesones están descritos por combinaciones singletes de color del tipo  $q_r q_b q_g$  y  $q_r \bar{q}_r$ ,

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |\bar{q}_\alpha q_\beta\rangle \quad (5.57)$$

Estos estados son singletes de color. Algunos ejemplos de baryones y mesones formados por quarks  $u$  y  $d$  se muestran en la tabla 5.11

Una lista completa de bariones está en: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_baryons](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_baryons)<sup>2</sup>

Una lista completa de mesones está en: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_mesons](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mesons)<sup>3</sup>

Una de las determinaciones de  $N_c$  proviene del observable

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} \quad (5.58)$$

<sup>2</sup>[http://pdg.lbl.gov/2019/tables/contents\\_tables\\_baryons.html](http://pdg.lbl.gov/2019/tables/contents_tables_baryons.html)

<sup>3</sup>[http://pdg.lbl.gov/2019/tables/contents\\_tables\\_mesons.html](http://pdg.lbl.gov/2019/tables/contents_tables_mesons.html)

Particle name	Symbol ⇄	Quark content ⇄	Rest mass (MeV/c <sup>2</sup> ) ⇄
proton <sup>[8]</sup>	$p, p^+, N^+$	uud	938.272 046(21) <sup>[a]</sup>
neutron <sup>[9]</sup>	$n, n^0, N^0$	udd	939.565 379(21) <sup>[a]</sup>
Delta <sup>[29]</sup>	$\Delta^{++}(1232)$	uuu	1232 ± 2
Delta <sup>[29]</sup>	$\Delta^+(1232)$	uud	1232 ± 2
Delta <sup>[29]</sup>	$\Delta^0(1232)$	udd	1232 ± 2
Delta <sup>[29]</sup>	$\Delta^-(1232)$	ddd	1232 ± 2

Particle name	Particle symbol ⇄	Antiparticle symbol ⇄	Quark content	Rest mass (MeV/c <sup>2</sup> ) ⇄
Pion <sup>[11]</sup>	$\pi^+$	$\pi^-$	$u\bar{d}$	139.570 18 ± 0.000 35
Pion <sup>[12]</sup>	$\pi^0$	Self	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ <sup>[a]</sup>	134.9766 ± 0.0006

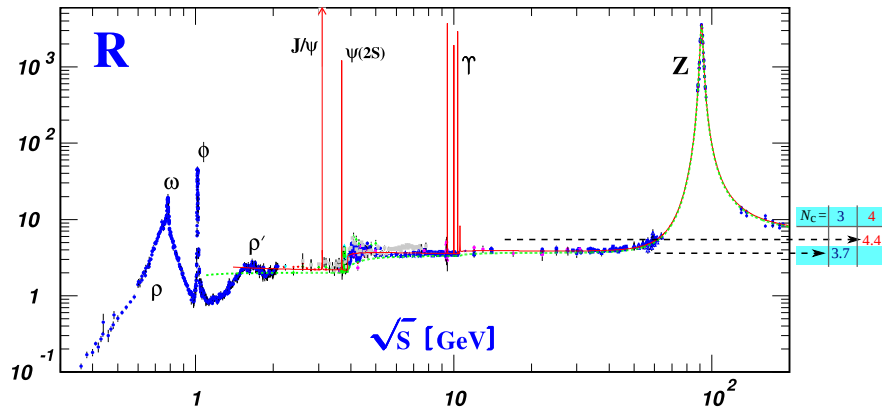
Figura 5.11: Algunos bariones y mesones de la primera generaci3n de quarks

Para  $f = u, d, s, c, b, t$ , (en orden de masa) tenemos que para una energí donde se pueden producir hadrones compuestos de hasta quarks  $f_{\max}$

$$\begin{aligned}
 R &\approx \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sigma(e^+e^- \rightarrow f_\alpha \bar{f}_\alpha)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \\
 R &\approx N_c \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

De este modo  $R$  esta dado por la suma de las cargas eléctricas al cuadrado

$$\begin{aligned}
 R &\approx N_c \frac{\sum_f Q_f^2}{Q_\mu^2} \\
 &= N_c \sum_{f=u}^{f_{\max}} Q_f^2 \\
 &= \begin{cases} N_c [(\frac{2}{3})^2 + 2(\frac{-1}{3})^2] = \frac{2}{3} N_c & f = u, d, s, f_{\max} = s \\ N_c [2(\frac{2}{3})^2 + 2(\frac{-1}{3})^2] = \frac{10}{9} N_c & f_{\max} = c \\ N_c [2(\frac{2}{3})^2 + 3(\frac{-1}{3})^2] = \frac{11}{9} N_c & f_{\max} = b \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2 & N_c = 3, f_{\max} = s \\ \frac{10}{3} & N_c = 3, f_{\max} = c \\ \frac{11}{3} & N_c = 3, f_{\max} = b \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Figura 5.12: Datos para  $R$ 

En la figura, tomada de [5], se muestra el gráfico de  $R$  con respecto a  $\sqrt{s}$  (la energía de centro de masa de la colisión). Se observan dos escalones, uno que va hasta una energía  $\sqrt{s} \approx 4$  GeV que corresponden a  $f = u, d, s$ , con un  $R \approx 2$ , y otro hasta  $\sqrt{s} \approx 40$  GeV que corresponde a  $f = u, d, s, c, b$ , con un  $R \approx 3.7 \approx 11/3$ . Los dos valores de  $R$  son compatibles con los esperados de la ec. (5.60). Como referencia también se señalan los valores para  $N_c = 4$  (en rojo).

Si queremos que el color sea una carga conservada como la carga eléctrica, ésta debe ser la consecuencia de una simetría gauge local. Para tener tres cargas diferentes la posibilidad más simple es imponer la simetría  $SU(3)_c$ , tal que tengamos un vector compuesto de 3 espinores de Dirac en el espacio de color:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \quad q = u, d, c, s, t, b. \quad (5.61)$$

El Lagrangiano de Dirac con invarianza gauge global  $SU(3)$ , para un quark, se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{\text{global}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (5.62)$$

El análisis es completamente simiar si se usa el Lagrangiano sólo para los fermiones de Weyl izquierdos

$$\mathcal{L}_{\text{global}} = i\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi \quad (5.63)$$

La transformación gauge local bajo  $SU(3)$  es

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left(i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right)\Psi. \quad (5.64)$$

donde  $a = 1, \dots, 8$ ,  $\lambda_a/2$  son los ocho generadores de  $SU(3)$  y  $\theta_a(x)$  son los parámetros de la transformación global. Los generadores de  $SU(3)$

$$\Lambda^a \equiv \frac{\lambda^a}{2}, \quad (5.65)$$

satisfacen el álgebra

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}, \quad (5.66)$$



donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura fina de  $SU(3)$ .

Las ocho matrices  $3 \times 3$   $\lambda^a$  se pueden construir a partir de las tres matrices de Pauli, pero su forma explícita no es necesaria en la siguiente discusión.

En un análisis similar al de la sección [B.1.7](#) tenemos que la Acción invariante gauge local bajo  $SU(3)_c$ , se obtiene de reemplazar la derivada normal por la derivada covariante. Para compensar los 8 cambios asociados a los 8 parámetros  $\theta_a(x)$ , la derivada covariante debe definirse en términos de 8 campos vectoriales  $G_a^\nu$ , que llamaremos campos de gluones

$$\mathcal{L}_{\text{local}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \mathcal{L}(G_a^\nu, \partial_\mu G_a^\nu) . \quad (5.67)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(x)\Psi \\ \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi, \end{aligned} \quad (5.68)$$

con la matriz  $3 \times 3$

$$U(x) = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}\right], \quad (5.69)$$

y

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s\frac{\lambda_a}{2}G_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig_s G_\mu \quad (5.70)$$

donde hemos definido la matriz  $3 \times 3$   $G_\mu$ , como

$$(G_\mu)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{\alpha\beta} G_\mu^a \quad (5.71)$$

Este Lagrangiano da lugar a la interacción fuerte y es llamado el Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica, o el Lagrangiano de la QCD de sus siglas en Inglés.

De [\(5.68\)](#), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = \mathcal{D}'_\mu\Psi' = U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi \\ \mathcal{D}'_\mu U\Psi &= U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Por consiguiente

$$\mathcal{D}'^\mu U = U\mathcal{D}^\mu \quad (5.73)$$

$$\mathcal{D}^\mu \rightarrow (\mathcal{D}^\mu)' = U\mathcal{D}^\mu U^{-1} \quad (5.74)$$

Desarrollando a ambos lados

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu\psi &\rightarrow (\mathcal{D}^\mu\psi)' = \mathcal{D}'^\mu\psi' = \mathcal{D}''^\mu\psi' \\ (\partial^\mu - ig_s G'^\mu)U\psi &= U\mathcal{D}^\mu U^{-1}U\psi \\ (\partial^\mu - ig_s G''^\mu)U\psi &= U(\partial^\mu - ig_s G^\mu)\psi \\ U\partial^\mu\psi + (\partial^\mu U)\psi - ig_s G''^\mu U\psi &= U\partial^\mu\psi - ig_s UG^\mu\psi \\ (\partial^\mu U)\psi - ig_s G''^\mu U\psi &= -ig_s UG^\mu\psi \\ -ig_s G''^\mu U\psi &= -(\partial^\mu U)\psi - ig_s UG^\mu\psi, \end{aligned} \quad (5.75)$$

QED	QCD	Diferencia
$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi + \mathcal{L}(A_\nu, \partial A_\nu)$	$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi + \mathcal{L}(G_\nu, \partial G_\nu)$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (\mathcal{D}_\mu)$
$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$	$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (A_\mu \rightarrow G_\mu)$
$A_\mu \rightarrow \hat{Q}A_\mu$	$G_\mu = \Lambda_a G_\mu^a, \quad a = 1, \dots, 8$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (\hat{Q} \rightarrow \Lambda_a)$
$A_\mu$	$G_\mu^1, \dots, G_\mu^8$	$1 \rightarrow 8$ (Gauge fields)
$A^\mu \rightarrow A'^\mu = U A^\mu U^* - \frac{i}{e}(\partial^\mu U) U^*$	$G^\mu \rightarrow G'^\mu = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s}(\partial^\mu U) U^\dagger$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (U)$
$U = \exp(i\hat{Q}\theta)$	$U = \exp(i\Lambda_a \theta^a)$	$1 \rightarrow 8: (\theta \rightarrow \theta_1, \dots, \theta_8)$
$A^\mu \rightarrow A'^\mu_a \approx A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu \theta$	$G_a^\mu \rightarrow G'^\mu_a \approx G_a^\mu + \frac{1}{g_s}\partial^\mu \theta_a + f_a^{bc} G_b^\mu \theta_c$	radiación $\rightarrow$ radiación-materia
$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx 1/137$	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} > 1$	perturbativa $\rightarrow$ no perturbativa

Tabla 5.1: Comparación entre la QED y la QCD

de modo que

$$\begin{aligned}
 G^\mu \rightarrow G'^\mu U &= \frac{1}{ig_s}(\partial^\mu U) + U G^\mu \\
 G^\mu \rightarrow G'^\mu &= -\frac{i}{g_s}(\partial^\mu U)U^{-1} + U G^\mu U^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Como  $U$  es unitaria, la transformación de los campos gauge puede escribirse como

$$G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s}(\partial^\mu U) U^\dagger. \tag{5.77}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \Lambda^a G_a'^\mu &\approx (1 + i\theta_b \Lambda^b) \Lambda^c G_c^\mu (1 - i\theta_d \Lambda^d) - \frac{i}{g_s}[i(\partial^\mu \theta_e) \Lambda^e (1 - i\theta_f \Lambda^f)] \\
 &= (\Lambda^c + i\theta_b \Lambda^b \Lambda^c) (1 - i\theta_d \Lambda^d) G_c^\mu - \frac{i}{g_s}[i(\partial^\mu \theta_e) \Lambda^e (1 - i\theta_f \Lambda^f)] \\
 &\approx [\Lambda^c - i\theta_d \Lambda^c \Lambda^d + i\theta_b \Lambda^b \Lambda^c] G_c^\mu + \frac{1}{g_s} \Lambda^e \partial^\mu \theta_e \\
 &= [\Lambda^c - i\theta_b (\Lambda^c \Lambda^b - \Lambda^b \Lambda^c)] G_c^\mu + \frac{1}{g_s} \Lambda^e \partial^\mu \theta_e \\
 &= \Lambda^a G_a^\mu - i(f^{acb} \Lambda^a) G_c^\mu \theta_b + \frac{1}{g_s} \Lambda^a \partial^\mu \theta_a \\
 &= \Lambda^a \left( G_a^\mu + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f^{acb} G_c^\mu \theta_b \right),
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

de donde

$$G_a^\mu \rightarrow G'^\mu_a \approx G_a^\mu + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f_a^{bc} G_b^\mu \theta_c, \tag{5.79}$$

que se reduce al caso Abelian cuando las constantes de estructura son cero. Como era de esperarse cada campo gauge tiene asociado un parámetro de transformación gauge  $\theta_a(x)$ .

### 5.3.1. Tensores cromodinámicos

Note entonces que en el language de los teoremas de Noether, el campo  $G_a^\mu$  transforma como un campo material y un campo de radiación a la vez, es decir, su transformación depende tanto del parámetro como de la derivada del parámetro. Por consiguiente, es conveniente definir la derivada covariante del campo  $G_a^\mu$ . Para ello se debe introducir la representación adjunta de  $SU(N)$ .

La representación adjunta de  $SU(3)$ , consiste en las 8 matrices  $8 \times 8$

$$\left[\tilde{\Lambda}^a\right]_{bc} = -if^a_{bc}. \quad (5.80)$$

**Ejemplo:** Definiendo  $\Sigma_i$  como las matrices  $3 \times 3$  generadores de  $SU(2)$  en la representación adjunta

$$(\Sigma_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}, \quad (5.81)$$

hemos comprobado en la ec. (1.66) que

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j] &= i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \\ [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

**Ejercicio:** Demostar que la representación adjunta satisface el álgebra de  $SU(3)$ .

La derivada covariante en la representación adjunta es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu &= \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \mathbb{G}_\mu \\ &= \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a, \end{aligned} \quad (5.83)$$

donde

$$\mathbb{G}_\mu \equiv \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a, \quad (5.84)$$

es ahora una matriz  $8 \times 8$  de campos de gluones en la representación adjunta. En componentes

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu]_c^b &= \delta_c^b \partial_\mu - ig_s \left[\tilde{\Lambda}_a G_\mu^a\right]_c^b \\ &= \delta_c^b \partial_\mu - g_s f_a^{bc} G_\mu^a. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Esta derivada se puede aplicar a la matriz de campo de gluones:

$$\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu = (\mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \mathbb{G}_\mu) \mathbb{G}_\nu \quad (5.86)$$

o en componentes

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu]_b^a [\mathbb{G}_\nu]_c^b &= (\delta_b^a \partial_\mu - ig_s [\mathbb{G}_\mu]_b^a) [\mathbb{G}_\nu]_c^b \\ &= \left(\delta_b^a \partial_\mu - ig_s \left[\tilde{\Lambda}_c\right]_b^a G_\mu^c\right) \left[\tilde{\Lambda}_d\right]_c^b G_\nu^d. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Veamos como transforma la derivada covariante de la matriz de campos de gluones en la representación adjunta, donde un elemento  $8 \times 8$  del grupo  $SU(3)$  se define ahora como

$$\tilde{U} = \exp \left[ i\theta_a(x) \tilde{\Lambda} \right]. \quad (5.88)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu)' = \left[ \mathbf{1} \partial_\mu - i g_s \left( \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\mu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right) \right] \left( \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right) \\
&= \left[ \mathbf{1} \partial_\mu - i g_s \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \tilde{U}^\dagger - (\partial_\mu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right] \left( \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right) \\
&= \partial_\mu \left( \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right) - i g_s \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \tilde{U}^\dagger \left( \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right) \\
&\quad - (\partial_\mu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \left( \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right) \\
&= \cancel{(\partial_\mu \tilde{U}) \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger} + \tilde{U} (\partial_\mu \mathbb{G}_\nu) \tilde{U}^\dagger + \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \partial_\mu \tilde{U}^\dagger - \frac{i}{g_s} \partial_\mu \left[ (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right] \\
&\quad - i g_s \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \tilde{U}^\dagger (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \\
&\quad - \cancel{(\partial_\mu \tilde{U}) \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger} + \frac{i}{g_s} (\partial_\mu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} (\partial_\mu \mathbb{G}_\nu) \tilde{U}^\dagger + \tilde{U} \mathbb{G}_\nu \partial_\mu \tilde{U}^\dagger - \cancel{\frac{i}{g_s} \partial_\mu \left[ \tilde{U} \tilde{U}^\dagger (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right]} \\
&\quad - i g_s \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \mathbb{G}_\nu \tilde{U}^\dagger - \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \tilde{U}^\dagger \partial_\nu \cancel{(\tilde{U} \tilde{U}^\dagger)} + \tilde{U} \mathbb{G}_\mu \tilde{U}^\dagger \tilde{U} \partial_\nu \tilde{U}^\dagger \\
&\quad + \cancel{\frac{i}{g_s} \partial_\mu \left[ \tilde{U} \tilde{U}^\dagger (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right]} - \frac{i}{g_s} \tilde{U} \partial_\mu \left[ \tilde{U}^\dagger (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right]
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[ \tilde{U}^\dagger (\partial_\nu \tilde{U}) \tilde{U}^\dagger \right] &= \partial_\mu \left[ \tilde{U}^\dagger \partial_\nu \cancel{(\tilde{U} \tilde{U}^\dagger)} - \tilde{U}^\dagger \tilde{U} \partial_\nu \tilde{U}^\dagger \right] \\
&= - \partial_\mu \left[ \tilde{U}^\dagger \tilde{U} \partial_\nu \tilde{U}^\dagger \right] \\
&= - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{U}^\dagger,
\end{aligned} \tag{5.90}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu)' = \tilde{U} [(\partial_\mu - i g_s \mathbb{G}_\mu) \mathbb{G}_\nu] \tilde{U}^\dagger + \tilde{U} \left[ \mathbb{G}_\nu \partial_\mu + \mathbb{G}_\mu \partial_\nu + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu) \tilde{U}^\dagger + \tilde{U} \left[ \mathbb{G}_\nu \partial_\mu + \mathbb{G}_\mu \partial_\nu + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{U}^\dagger.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Por consiguiente, la “derivada covariante” de la matriz del campo de gluones no transforma como la la matriz del campo de gluones. Una discusión al respecto se puede encontrar en [38].

Note que si definimos la matriz de tensores de campos de gluones como

$$\mathbb{G}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu \tag{5.92}$$

entonces,

$$\mathbb{G}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{G}'_{\mu\nu} = (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu)' - (\mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu)' , \tag{5.93}$$

y usando (5.91) da lugar a

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mu\nu} &\rightarrow \mathbb{G}'_{\mu\nu} = \tilde{U} \left\{ (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu) + \left[ \mathbb{G}_\nu \partial_\mu + \mathbb{G}_\mu \partial_\nu + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] - (\mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu) - \left[ \mathbb{G}_\mu \partial_\nu - \mathbb{G}_\nu \partial_\mu - \frac{i}{g_s} \partial_\nu \partial_\mu \right] \right\} \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} [\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu] \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} \mathbb{G}_{\mu\nu} \tilde{U}^\dagger.
\end{aligned} \tag{5.94}$$

Esto es justo lo que se espera de la transformación de un tensor para un grupo de simetría continuo.

Como hemos visto en el caso electromagnético, para demostrar la invarianza del Lagrangiano electromagnético en la ec. (4.21), es necesario que en efecto el tensor electromagnético transforme como un tensor en el espacio de Lorentz:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda_\mu^\alpha F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1}x) (\Lambda^{-1})^\beta_\nu. \tag{5.95}$$

Sin embargo, para el tensor electromagnético la transformación bajo  $U(1)_Q$  es trivial.

Retornado a la definición la matriz de tensores de campos gauge para una teoría no Abeliana  $SU(3)$ , si imponemos que la derivada covariante de  $\mathbb{G}_{\mu\nu}$  transforme como  $\mathbb{G}_{\mu\nu}$ <sup>4</sup>

$$\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu} \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu})' = \tilde{U} (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu}) \tilde{U}^\dagger, \tag{5.96}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\mu \mathbb{G}'^{\mu\nu} &= \tilde{U} \mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} \mathcal{D}_\mu \tilde{U}^\dagger \tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} \mathcal{D}_\mu \tilde{U}^\dagger \mathbb{G}'^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{5.97}$$

y obtenemos que

$$\mathcal{D}^\mu \rightarrow \mathcal{D}'^\mu = \tilde{U} \mathcal{D}^\mu \tilde{U}^\dagger. \tag{5.98}$$

Como se hizo antes, de esta propiedad se puede obtener la transformación de la matriz de gluones pero ahora en la representación adjunta:

$$\mathbb{G}^\mu \rightarrow \mathbb{G}'^\mu = -\frac{i}{g_s} (\partial^\mu \tilde{U}) \tilde{U}^{-1} + \tilde{U} \mathbb{G}^\mu \tilde{U}^{-1}. \tag{5.99}$$

De modo que es consistente asumir que la transformación de la matriz de campo  $\mathbb{G}^\mu$  es independiente de la representación, como se hizo explícitamente en (5.89).

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mu\nu} &\equiv \mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu \\
&= (\mathbf{1} \partial_\mu - i g_s \mathbb{G}_\mu) \mathbb{G}_\nu - (\mathbf{1} \partial_\nu - i g_s \mathbb{G}_\nu) \mathbb{G}_\mu \\
&= \partial_\mu \mathbb{G}_\nu - \partial_\nu \mathbb{G}_\mu - i g_s (\mathbb{G}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathbb{G}_\nu \mathbb{G}_\mu) \\
&= \partial_\mu \mathbb{G}_\nu - \partial_\nu \mathbb{G}_\mu - i g_s [\mathbb{G}_\mu, \mathbb{G}_\nu].
\end{aligned} \tag{5.100}$$

---

<sup>4</sup>o asumiendo simplemente que la propiedades de la derivada covariante no dependen de la representación

Note que en el caso Abelian, la matriz del único tensor es  $1 \times 1$  y por lo tanto el conmutador es cero, recobrando la definición usual del tensor de campo electromagnético.

Es conveniente definir los *tensores cromodinámicos*,  $G_a^{\mu\nu}$ , tal que su combinación lineal con los generadores de  $SU(3)$  generen la matriz de tensores de campos de gluones:

$$\mathbb{G}^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^a G_a^{\mu\nu} \quad (5.101)$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_a G_{\mu\nu}^a &= \tilde{\Lambda}_a (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - ig_s [\tilde{\Lambda}_b, \tilde{\Lambda}_c] G_\mu^b G_\nu^c \\ &= \tilde{\Lambda}_a (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - ig_s (if_{bc}^a \tilde{\Lambda}_a) G_\mu^b G_\nu^c \\ &= \tilde{\Lambda}_a (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{bc}^a G_\mu^b G_\nu^c). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Entonces

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{bc}^a G_\mu^b G_\nu^c \\ &= \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{bc}^a G_\mu^b G_\nu^c, \end{aligned} \quad (5.103)$$

donde hemos definido la parte Abeliana de los tensores cromodinámicos como

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a. \quad (5.104)$$

En conclusión, hemos visto que la matrix de tensores de gluones (5.101) debe transformar en la representación adjunta de  $SU(3)$  como

$$\mathbb{G}^{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{G}'^{\mu\nu} = \tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^{-1} \quad (5.105)$$

y que dicha transformación es consistente con la transformación de la matriz de campos de gluones

$$\mathbb{G}^\mu \rightarrow \mathbb{G}'^\mu = \tilde{U} \mathbb{G}^\mu \tilde{U}^{-1} - \frac{i}{g_s} (\partial_\mu \tilde{U}) \tilde{U}^{-1}. \quad (5.106)$$

Para poder obtener un invariante bajo transformaciones gauge a partir del producto  $\mathbb{G}^{\mu\nu} \mathbb{G}_{\mu\nu}$ , debemos utilizar la traza

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\mathbb{G}^{\mu\nu} \mathbb{G}_{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr} (\mathbb{G}'^{\mu\nu} \mathbb{G}'_{\mu\nu}) = \text{Tr} (\tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^{-1} \tilde{U} \mathbb{G}_{\mu\nu} \tilde{U}^{-1}) \\ &= \text{Tr} (\tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \mathbb{G}_{\mu\nu} \tilde{U}^{-1}) \\ &= \text{Tr} (\tilde{U}^{-1} \tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \mathbb{G}_{\mu\nu}) \\ &= \text{Tr} (\mathbb{G}^{\mu\nu} \mathbb{G}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.107)$$

Como las propiedades de Traza son independientes de la representación, a partir de este momento omitiremos la virgulilla para la representación adjunta y usaremos el mismo símbolo  $G_{\mu\nu}$  para representar la matriz de tensores cromodinámicos tanto en su representación adjunta como en su representación fundamental. Teniendo en cuenta la normalización de las matrices de  $SU(3)$

$$\text{Tr} (\Lambda^a \Lambda^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (5.108)$$

tenemos (suma sobre índices repetidos de  $SU(3)$ )

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr} (G'^{\mu\nu} G'_{\mu\nu}) = \text{Tr} (\Lambda^a G_a^{\mu\nu} \Lambda^b G_{\mu\nu}^b) \\
 &= \text{Tr} (\Lambda^a \Lambda^b) G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^b \\
 &= \frac{1}{2} \delta^{ab} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^b \\
 &= \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a.
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

Haciendo explícitamente la traza tenemos (suma sobre índices  $a, b, c, \dots$  repetidos aunque no estén contraidos)

$$\begin{aligned}
 G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a &= \left( \tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \right) \left( \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e \right) \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{ade} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + 2g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

### 5.3.2. Lagrangiano QCD

Expandiendo el Lagrangiano en ec. (5.67), tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2} \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \\
 &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\
 &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\
 &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left( 2g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \\
 &= \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{SI}},
 \end{aligned} \tag{5.111}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{free}} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\
 \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
 \mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{1}{4} \left( 2g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right).
 \end{aligned} \tag{5.112}$$

Hemos dividido el Lagrangiano en tres partes

- El Lagrangiano libre de Dirac

- Una parte gauge que puede escribirse como un Lagrangiano electromagnético:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - J_a^\nu G_\nu^a, \quad (5.113)$$

donde

$$J_a^\mu = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi, \quad (5.114)$$

es la nueva corriente conservada de interacción fuerte que surge como consecuencia de la invarianza gauge local  $SU(3)$ ; y

- Una parte de auto-interacciones gauge:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\ &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e. \end{aligned} \quad (5.115)$$

que no aparece en el caso Abeliano.

El Lagrangiano de interacción es:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e. \quad (5.116)$$

From [46] (pag 136):

The quarks have an additional type of polarization that is not related to geometry. The idiot physicists, unable to come up with any wonderful Greek words anymore, call this type of polarization by the unfortunate name of “color”, which has nothing to do with color in the normal sense. At a particular time, a quark can be in one of three conditions, or “colors”—R, G, or B (can you guess what they stand for?). A quark’s “color” can be changed when the quark emits or absorbs a gluon. The gluons come in eight different types, according to the “colors” they can couple with. For example, if a red quark changes to green, it emits a red-antigreen gluon—a gluon that takes the red from quark and gives it green (“antigreen” means the gluon is carrying green in the opposite direction). This gluon could be absorbed by a green quark, which changes to red (see Fig. 5.13). There are eight different possible gluons, such as red-antired, red-antiblue, red-antigreen, and so on (you’d think there’d be nine, but for technical reasons, one is missing)<sup>5</sup>. The theory is not very complicated. The complete rule of gluons is: gluons couple with things having “color”—it just requires a little bookkeeping to keep track of where the “colors go”. There is, however, an interesting possibility created by this rule: gluons can couple with other gluons (see Fig. 5.14).

El primer término da lugar a interacciones de cambio de color de quarks como la que se ilustra en la Figura 5.13, donde hemos interpretado las entradas de la matriz de campos gluones en la representación fundamental  $3 \times 3$  como compuestas de gluones con carga de color-anticolor con la restricción de traza cero. Una representación cualitativa de dicha matriz se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} r\bar{r} & r\bar{b} & r\bar{g} \\ b\bar{r} & b\bar{b} & b\bar{g} \\ g\bar{r} & g\bar{b} & g\bar{g} \end{pmatrix}, \quad \text{with } r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g} = 0. \quad (5.117)$$



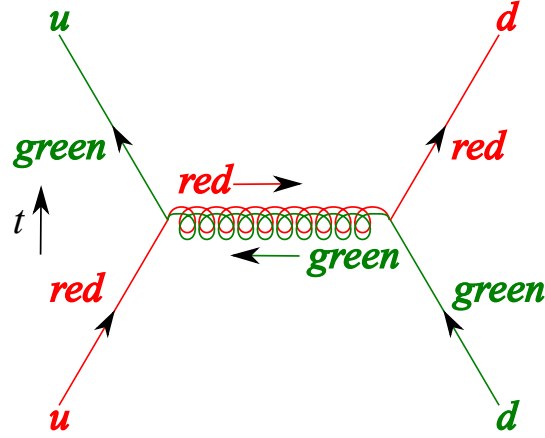


Figura 5.13: Quark–gluón interaction

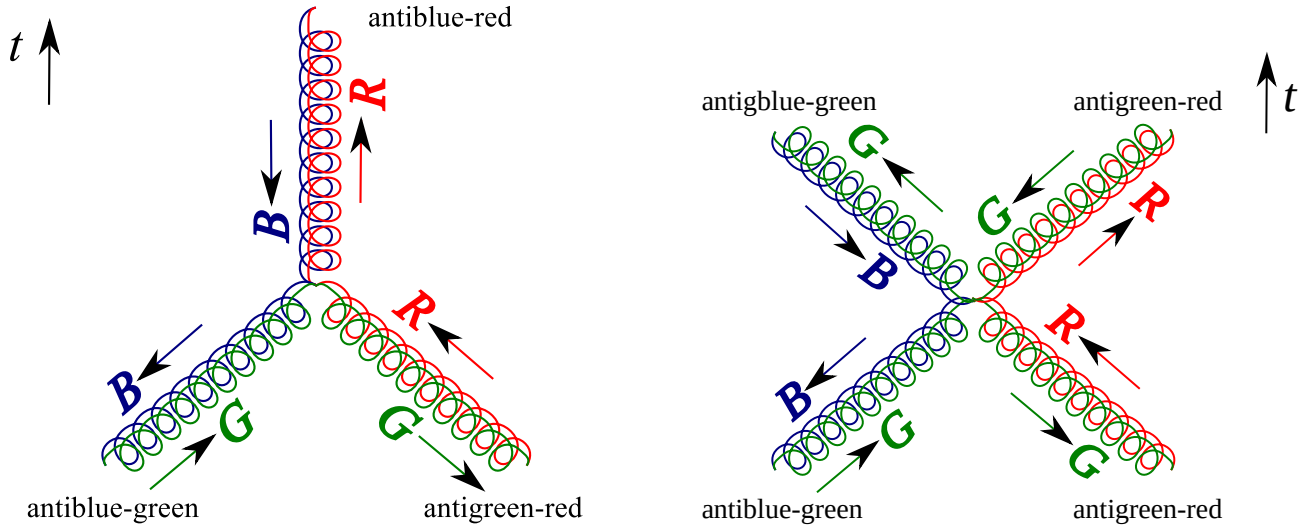


Figura 5.14: Triple–gluon and quartic–gluon self–interactions. The anticolors are the colors running back in time.

Mientras que el segundo y tercer término dan lugar a autointeracciones de los gluones como se muestra en la Figura 5.14

Estas interacciones dan lugar a la estructura interna del protón mostrada en la figura 5.15. Ver también <http://bit.ly/Baryon>

Todas las interacciones están determinadas en términos de una única constante de acoplamiento  $g_s$ . Las autointeracciones gauge pueden explicar aspectos de la interacción fuerte como la libertad asintótica, que consiste en que las interacciones fuertes se vuelven más débiles a distancias cortas.

En términos de índices de color la corriente, y las otras partes del Lagrangiano, pueden escribirse como

$$J_a^\mu = -g_s \bar{q}^\alpha \gamma^\mu q^\beta \left( \frac{\lambda_a}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (5.118)$$

Note que tanto para la Electrodinámica Cuántica como para la Cromodinámica Cuántica la corrien-

<sup>5</sup>Ver ec. 5.117.

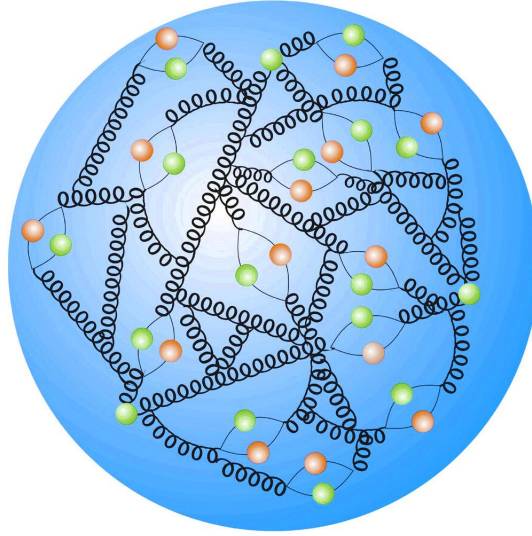


Figura 5.15: En la estructura interna del protón, además de los tres quarks de valencia representados en la figura como las tres partículas verdes aisladas, también están los gluones y los pares quark-antiquark. Estos últimos representados como las partículas naranjas. Fuente: [desy.de](https://desy.de)

te  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  es vectorial. Para las interacciones débiles la estructura es más complicada y requiere un conocimiento más profundo de la ecuación de Dirac y sus soluciones.

### 5.3.3. Ecuaciones de Euler–Lagrange

Siguiendo los mismos procedimientos anteriores debemos llegar a los siguientes resultados. Para el campo  $\Psi$  tenemos

$$\underbrace{(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)}_{3 \times 3} \underbrace{\Psi}_{3 \times 1} = 0, \quad (5.119)$$

correspondientes a 3 ecuaciones, una para cada color.

En el caso del campo gauge  $G_\mu^a$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \\ &= \partial_\mu \left\{ -\tilde{G}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f_{dbc} G_b^\rho G_c^\sigma \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} (\partial_\rho G_\sigma^d - \partial_\sigma G_\rho^d) \right\} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\ & \quad + \frac{g_s}{2} f^{dbc} \tilde{G}_d^{\rho\sigma} (\delta_{\rho\nu} \delta_{ba} G_\sigma^c + G_\rho^b \delta_{\sigma\nu} \delta_{ca}) + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ide} (g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e) \\ &= \partial_\mu \left\{ -\tilde{G}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f_{dbc} G_b^\rho G_c^\sigma (\delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} \delta_{da} - \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \delta_{da}) \right\} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\ & \quad + \frac{g_s}{2} f^{dac} \tilde{G}_d^{\nu\sigma} G_\sigma^c + \frac{g_s}{2} f^{dba} \tilde{G}_d^{\rho\nu} G_\rho^b \\ & \quad + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ide} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\delta_{\alpha\nu} \delta_{ba} G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e + G_\alpha^b \delta_{\beta\nu} \delta_{ca} G_\rho^d G_\sigma^e + G_\alpha^b G_\beta^c \delta_{\rho\nu} \delta_{da} G_\sigma^e + G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d \delta_{\sigma\nu} \delta_{ea}) \\ &= -\partial_\mu \left\{ \tilde{G}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu + \frac{1}{2} g_s f_{abc} G_b^\nu G_c^\mu \right\} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g_s}{2} f^{adc} \tilde{G}_d^{\nu\sigma} G_\sigma^c - \frac{g_s}{2} f^{adb} \tilde{G}_d^{\nu\rho} G_\rho^b \\
& + \frac{g_s}{4} f^{iac} f_{ide} g^{\rho\nu} g^{\sigma\beta} G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{iba} f_{ide} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\nu} G_\alpha^b G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{iae} g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\sigma^e \\
& + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ida} g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d.
\end{aligned} \tag{5.120}$$

Desarrollando los cuatro últimos términos, tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{g_s}{4} f^{iac} f_{ide} g^{\rho\nu} g^{\sigma\beta} G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{iba} f_{ide} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\nu} G_\alpha^b G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{iae} g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\sigma^e \\
& + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ida} g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d \\
& = \frac{g_s}{4} f^{iac} f_{ide} G_d^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{iba} f_{ide} G_e^\nu G_b^\mu G_\mu^d + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{iae} G_b^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ida} G_c^\nu G_b^\mu G_\mu^d \\
& = \frac{g_s}{4} f^{dac} f_{dje} G_j^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{dca} f_{dje} G_e^\nu G_c^\mu G_\mu^j + \frac{g_s}{4} f^{dbc} f_{dae} G_b^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{dbc} f_{dea} G_c^\nu G_b^\mu G_\mu^e \\
& = \frac{g_s}{4} f^{dac} f_{dje} G_j^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{dca} f_{dje} G_e^\nu G_c^\mu G_\mu^j + \frac{g_s}{4} f_{dac} f^{dje} G_j^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f_{dca} f^{dje} G_e^\nu G_j^\mu G_\mu^c \\
& = -\frac{g_s}{4} f^{abc} G_\mu^b f_{cej} G_e^\mu G_j^\nu - \frac{g_s}{4} f^{abc} G_\mu^b f_{cej} G_e^\mu G_j^\nu - \frac{g_s}{4} f_{abc} G_\mu^b f^{cej} G_e^\mu G_j^\nu - \frac{g_s}{4} f_{abc} G_\mu^b f^{cej} G_e^\mu G_j^\nu \\
& = -g_s f_{abc} G_\mu^b f^{cej} G_e^\mu G_j^\nu
\end{aligned} \tag{5.121}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \\
& = \partial_\mu \left( -\tilde{G}_a^{\mu\nu} - g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \right) - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi - g_s f^{acd} G_\mu^c \tilde{G}_d^{\mu\nu} - g_s f_{acd} G_\mu^c f^{dej} G_e^\mu G_j^\nu \\
& = -\partial_\mu G_a^{\mu\nu} - g_s f^{acd} G_\mu^c G_d^{\mu\nu} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi = 0.
\end{aligned} \tag{5.122}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $G_\nu^a$ , son

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} + g_s f^{acd} G_\mu^c G_d^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi. \tag{5.123}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu G_a^{\mu\nu} - i g_s f^{acd} G_\mu^c G_d^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\
& \delta_d^a \partial_\mu G^{\mu\nu d} - i g_s (-i f^{cad}) G_\mu^c G_d^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \Psi \\
& \delta_d^a \partial_\mu G^{\mu\nu d} - i g_s \left[ \tilde{\Lambda}_c \right]_d^a G_\mu^c G^{\mu\nu d} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \Psi \\
& \quad [\mathcal{D}_\mu]^a_d G^{\mu\nu d} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \Lambda^a \Psi \\
& \quad \mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \Lambda \Psi.
\end{aligned} \tag{5.124}$$

por lo tanto

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \Lambda \Psi, \tag{5.125}$$

donde  $\mathbf{G}^{\mu\nu}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  son vectores en el espacio  $SU(3)$ . Además, hemos definido la derivada covariante en la representación adjunta como matrix  $8 \times 8$

$$\mathcal{D}_\mu = \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a \quad (5.126)$$

Tenemos entonces 4 ecuaciones tipo ecuaciones Maxwell para cada gluón,  $G_\mu^a$ , por lo que en total hay 32 ecuaciones tipo Maxwell acopladas.

La ec.(5.124) puede reescribirse como:

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} = -g_s \left[ f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \quad (5.127)$$

y usando el hecho que  $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ :

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu G_a^{\mu\nu} &= \partial_\nu \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) \\ &= 0 + \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) + g_s \partial_\mu \partial_\nu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{acb} G_c^\nu G_b^\mu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) - g_s \partial_\mu \partial_\nu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.128)$$

como en el caso Abelian, tenemos la corriente conservada

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \quad (5.129)$$

donde

$$j_a^\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a}, \quad (5.130)$$

tal que

$$j_a^\nu = g_s \left[ f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right]. \quad (5.131)$$

El primer término corresponde a las autointeracciones y el segundo a la corriente de color generada por los quarks.

#### 5.3.4. Corrientes conservadas

$$\mathcal{E}_1 a_1 + \mathcal{E}_2 a_2 + \mathcal{E}_3 a_3 = \partial_\mu (\mathcal{E}_1 b_1^\mu + \mathcal{E}_2 b_2^\mu + \mathcal{E}_3 b_3^\mu). \quad (5.132)$$

Asumimos que la ecuaciones de Euler Lagrange para los fermiones se satisfacen (además  $b_1^\mu = b_2^\mu = 0$ ), entonces

$$\mathcal{E}_1 a_1 + \mathcal{E}_2 a_2 + \mathcal{E}_3 a_3 = \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu). \quad (5.133)$$

Haciendo uso de la ec. (5.130)

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu) &= \partial_\mu \left\{ \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu G_\mu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\mu^a} \right\} \\
 &= - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\mu^a} \right) \\
 &= \partial_\mu j^\mu,
 \end{aligned} \tag{5.134}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \right\} a_1 + a_2 \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} \right\} + \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \right\} a_3 = \partial_\mu j^\mu \\
 &\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} a_3 \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \partial_\mu a_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} a_1 - a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \partial_\mu a_3 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} a_3 = \partial_\mu j^\mu.
 \end{aligned} \tag{5.135}$$

Ya que, usando  $a_3 = f_a^{bc} G_c^\mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \partial_\mu a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \partial_\mu a_3 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} a_3 = 0, \tag{5.136}$$

el Segundo Teorema de Noether establece que

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} a_3. \tag{5.137}$$

## 5.4. Anotaciones finales

Hemos visto que bajo una simetría continu  $U(1)$

- Un campo escalar real se convierte en un campo escalar complejo
- Un campo vectorial se convierte en un campo tensorial
- Un campo de Weyl se convierte en un campo de Dirac

# Appendix

## 5.A. Derivación alternativa

Algunas identidades útiles en  $SU(N)$  son:

■

$$\{\Lambda^a, \Lambda^b\} = \frac{1}{N} \delta^{ab} + d^{ab}{}_c \Lambda^c \quad (5.138)$$

donde  $d^{abc}$  es totalmente simétrico en  $a, b, c$

En el caso de  $SU(2)$   $d^{ijk} = 0$ ,

Para  $SU(2)$

$$\{T_i, T_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{1}. \quad (5.139)$$

Para  $SU(3)$

$$\{\Lambda_a, \Lambda_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} \mathbf{1} + d^{ab}{}_c \Lambda^c. \quad (5.140)$$

■

$$f^{abe} f^{cde} = \frac{2}{N} (\delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}) + d^{ace} d^{bde} - d^{ade} d^{bce} \quad (5.141)$$

Similarmente, definiendo la matriz  $3 \times 3$ ,

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{g_s} [\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \equiv \frac{\lambda_a}{2} G_a^{\mu\nu}, \quad (5.142)$$

tenemos

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} \psi &= \frac{i}{g_s} [\partial^\mu - ig_s G^\mu, \partial^\nu - ig_s G^\nu] \psi \\ &= \frac{i}{g_s} [(\partial^\mu - ig_s G^\mu) (\partial^\nu - ig_s G^\nu) \psi - (\partial^\nu - ig_s G^\nu) (\partial^\mu - ig_s G^\mu) \psi] \\ &= \frac{i}{g_s} \{ \partial^\mu \partial^\nu \psi - g_s^2 G^\mu G^\nu \psi - ig_s [\partial^\mu (G^\nu \psi) + G^\mu \partial^\nu \psi] - \partial^\nu \partial^\mu \psi + g_s^2 G^\nu G^\mu \psi + ig_s [\partial^\nu (G^\mu \psi) + G^\nu \partial^\mu \psi] \} \\ &= \frac{i}{g_s} \{ (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \psi - g_s^2 (G^\mu G^\nu - G^\nu G^\mu) \psi - ig_s [(\partial^\mu G^\nu) - (\partial^\nu G^\mu)] \psi \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ig_s[G^\nu\partial^\mu\psi + G^\mu\partial^\nu\psi - G^\mu\partial^\nu\psi + G^\nu\partial^\mu\psi]\} \\
& =[\partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s(G^\mu G^\nu - G^\nu G^\mu)]\psi \\
& =\{\partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s[G^\mu, G^\nu]\}\psi
\end{aligned} \tag{5.143}$$

De modo que

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s[G^\mu, G^\nu], \tag{5.144}$$

que se reduce al caso Abeliano cuando los bosones gauge conmutan. En términos de componentes

$$\begin{aligned}
\Lambda^a G_a^{\mu\nu} &= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu - ig_s[\Lambda^b G_b^\mu, \Lambda^c G_c^\nu] \\
&= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu - ig_s[\Lambda^b, \Lambda^c] G_b^\mu G_c^\nu \\
&= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu - ig_s(i\Lambda^a f_{abc}) G_b^\mu G_c^\nu \\
&= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu + \Lambda^a g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu.
\end{aligned} \tag{5.145}$$

Por consiguiente

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \equiv \tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \tag{5.146}$$

con

$$\tilde{G}_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu \tag{5.147}$$

A diferencia del caso Abeliano  $G^{\mu\nu}$  ya no es invariante bajo transformaciones gauge

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu} \rightarrow G'^{\mu\nu} &= \frac{i}{g_s} [\mathcal{D}'^\mu, \mathcal{D}'^\nu] \\
&= \frac{i}{g_s} [U\mathcal{D}^\mu U^{-1}, U\mathcal{D}^\nu U^{-1}] \\
&= UG^{\mu\nu}U^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.148}$$

Note que con la definición (5.142), la derivada covariante de la matrix  $G^{\mu\nu}$ , transforma como la matrix  $G^{\mu\nu}$

$$\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu} \rightarrow (\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu})' = U\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu}U^{-1}. \tag{5.149}$$

## 5.B. Invarianza de fase local para campo escalar complejo

Aplicando el principio gauge local al Lagrangiano para un campo escalar complejo presentado en la ecuación ?? con  $\lambda = 0$ , debemos reemplazar la derivada normal  $\partial_\mu$ , por la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  y adicionar todos los términos invariantes asociados al campo  $A_\mu$ , de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^* \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
&= (\partial_\mu \phi^* - iqA_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi + iqA^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + iq(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) A^\mu + q^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5.150}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi - (-iq\partial_\mu \phi A^\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi - m^2 \phi) \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + iq\partial_\mu \phi A^\mu - q^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -iq\phi^* \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \right\} &= -iq\phi^* \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - iqm^2 \phi^* \phi \\ &= -iq\partial_\mu [\phi^* (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi] + iq(\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - iqm^2 \phi^* \phi \\ &= -iq\partial_\mu [\phi^* \mathcal{D}^\mu \phi] + iq\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - q^2 A^\mu (\partial_\mu \phi^*) \phi + q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - iqm^2 \phi^* \phi. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} iq \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right\} \phi &= iq\partial_\mu [(\mathcal{D}^\mu \phi) \phi^*] - iq\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + q^2 A^\mu (\partial_\mu \phi^*) \phi - q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi + iqm^2 \phi^* \phi. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Sumando las dos expresiones, todos los términos con excepción de los primeros se cancelan entre si, dando lugar a

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \partial_\mu j^\mu, \quad (5.154)$$

donde

$$j^\mu = -iq [\phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \phi], \quad (5.155)$$

que corresponde a la carga eléctrica. Note que dicho resultado se puede obtener más directamente usando la ec. (1.362).

Note además que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi &= (\partial_\mu + iqA_\mu) (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi = \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + iqA_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + iqA_\mu \partial^\mu \phi - q^2 A_\mu A^\mu \phi. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento asociada al campo  $\phi^*$

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (5.157)$$

Que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon pero con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante.

Partiendo de nuevo de 5.150, es interesente notar que



## 5.C. Soluciones a la ecuación de Dirac

### 5.C.1. Lagrangiano de Weyl

En adelante trabajaremos en la representación de Weyl que en forma compacta es

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.158)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (5.159)$$

Hemos escrito las matrices de Dirac en bloques  $2 \times 2$ , y es natural escribir similarmente las cuatro componentes del campo de Dirac como un par de campos de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.160)$$

Donde  $\psi_{L,R}$  son espinores de Weyl de dos componentes. En la representación de Weyl el Lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= i\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu\psi - m\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_L \\ \partial_\mu\psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L) \end{aligned} \quad (5.161)$$

### 5.C.2. Ecuaciones de Weyl

Las ecuaciones de Euler-Lagrangiano para el Lagrangiano en ec.(C.24), dan como resultado

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.162)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\sigma^0\partial_0\psi_L - i\sigma^i\partial_i\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^0\partial_0\psi_R + i\sigma^i\partial_i\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.163)$$

que pueden escribirse como

$$i\partial_0\psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_L - m\psi_R = 0$$

$$i\partial_0\psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_R - m\psi_L = 0 \quad (5.164)$$

Para el Lagrangiano invariante gauge local  $U(1)$  en ec.(??), tendríamos

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.165)$$

Expandiendo, para  $\mathcal{D}^\mu$  dado en la ec.(??), con  $q = -e$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (5.166)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} i(\partial_0 + iqA_0)\psi_L - i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i(\partial_0 + iqA_0)\psi_R + i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.167)$$

de donde

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)\psi_L - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0)\psi_R + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.168)$$

## 5.D. Espín

El momento angular está descrito por el álgebra

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (5.169)$$

Si dos operadores no conmutan no es posible conocer sus autovalores simultáneamente. Sin embargo

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0 \quad (5.170)$$

y por convención podemos escoger  $\langle \hat{L}_z \rangle$  y  $\hat{L}^2$  como los dos observables de momento angular.

Las matrices de Pauli forman una representación del álgebra de momento angular

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (5.171)$$

donde el *operador de espín* se define como

$$\hat{S}_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (5.172)$$

Los autovalores del operador de espín son entonces

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (5.173)$$

que corresponde a autovalores  $\lambda = \pm 1/2$  con autovectores

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.174)$$

que son autoestados de espín up y espín down respectivamente. Una función de onda de espín ha de poder expandir en términos de estos autoestados

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle \quad (5.175)$$

donde  $|c_1|^2$  y  $|c_2|^2$  corresponden a las probabilidades de encontrar el estado con espín up o espín down respectivamente. Además

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (5.176)$$

y  $\psi$  es un espinor. La ecuación de Schrödinger para un espinor es, por ejemplo

$$i\frac{\partial\psi_R}{\partial t} = \hat{H}\psi_R \quad (5.177)$$

donde

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.178)$$

con  $\psi_i$  las funciones de onda convencionales. Dicha ecuación debe ser invariante bajo rotaciones en el espacio de espín

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp(i\frac{\sigma^i}{2}\theta_i)\psi_R. \quad (5.179)$$

Esta es justo las ecuaciones que aparecen cuando se hace  $m = 0$  en la ec.(5.164). Para  $\psi_R$

$$\hat{H} = i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \quad (5.180)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R + i\psi_R^\dagger \sigma^i \partial_i \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R - i\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_R \end{aligned} \quad (5.181)$$

Como el Lagrangiano debe ser escalar entonces  $\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R$  debe ser un vector en el espacio de espín. En efecto, escogiendo los coeficientes como

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ c_2 &= e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (5.182)$$

entonces

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = c_1 c_1^* + c_2 c_2^* = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1. \quad (5.183)$$

Para

$$\begin{aligned} \psi_R &= e^{-ip \cdot x} (c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle) = e^{-ip \cdot x} \left[ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} |+\rangle \end{aligned} \quad (5.184)$$

donde

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.185)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\psi_R^\dagger \sigma_1 \psi_R &= \begin{pmatrix} c_1^\dagger & c_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_2^\dagger & c_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= c_2^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_2 \\
&= \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{-i\phi} + \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{i\phi} \\
&= (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\
&= (2 \cos \phi) \frac{1}{2} \sin \theta \\
&= \cos \phi \sin \theta
\end{aligned} \tag{5.186}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\psi_R^\dagger \sigma_2 \psi_R &= \sin \phi \sin \theta \\
\psi_R^\dagger \sigma_3 \psi_R &= \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.187}$$

Por consiguiente  $\psi^\dagger \sigma_i \psi$  son las componentes de un vector unitario  $\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi$  con ángulo polar  $\theta$  y ángulo azimutal  $\phi$ . Posibles escalares se pueden construir con otros vectores disponibles, por ejemplo  $\mathbf{p}$ , como en la ec. (5.181).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \sigma^i \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \\
&= \sigma^1 \cos \phi \sin \theta + \sigma^2 \sin \phi \sin \theta + \sigma^3 \cos \theta \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) & -\cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.188}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} |+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\theta/2) + \sin \theta \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} [\sin \theta \cos(\theta/2) - \cos \theta \sin(\theta/2)] \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= + |+\rangle
\end{aligned} \tag{5.189}$$

(El gorro en este caso, significa vector unitario). Decimos entonces que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_R = + e^{-ip \cdot x} |+\rangle = + \psi_R \tag{5.190}$$

es un estado de helicidad positiva o derecha. Como  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$  denota la proyección de espín sobre la dirección de movimiento, para la helicidad derecha, dicha proyección es positiva.

Si definimos ademas

$$\psi_L = e^{-ip \cdot x} |-\rangle \quad (5.191)$$

donde

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.192)$$

entonces

$$\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi = -(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad (5.193)$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L = -e^{-ip \cdot x} |-\rangle = -\psi_L \quad (5.194)$$

$\psi$  es un estado de helicidad negativa o izquierda. Además

$$\langle - | - \rangle = \langle + | + \rangle = 1 \quad \langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0 \quad (5.195)$$

donde  $\langle - | = | - \rangle^\dagger$ , etc.

## 5.E. Solución de partícula libre

Consideraremos inicialmente dos casos  $m^2 \gg \mathbf{p}^2$  y  $m^2 \ll \mathbf{p}^2$ .

De la ecuación relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (5.196)$$

tenemos que para el caso no relativista  $m^2 \gg \mathbf{p}^2$ , podemos tomar  $\mathbf{p} = 0$ , de modo que

$$E^2 = m^2 \Rightarrow E = \pm m \quad (5.197)$$

La aparición de soluciones de Energía negativa. . .

A  $\mathbf{p} = 0$  proponemos las soluciones de energía positiva  $E = +m$

$$\psi_L = u_L e^{-iEt} = \psi_L = u_L e^{-imt} \quad \psi_R = u_R e^{-iEt} = u_R e^{-imt} \quad (5.198)$$

En este caso las ecs. (5.164) se reducen a

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.199)$$

de modo que para que (5.198) sea solución, se debe satisfacer que

$$u_L = u_R = u \quad (5.200)$$

con

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = |+\rangle. \quad (5.201)$$

El espinor completo es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.202)$$

Con norma

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = |+\rangle^\dagger |+\rangle + |+\rangle^\dagger |+\rangle = 1 \quad (5.203)$$

Para el caso relativista  $m^2 \ll \mathbf{p}^2$ , podemos hacer  $m = 0$  y las ecuaciones (5.164) se desacoplan

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_L &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.204)$$

Proponemos como soluciones de energía positiva

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} = \psi_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad (5.205)$$

reemplazando en las ecs. (5.204) tenemos

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= 0 \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.206)$$

De modo que para que las ecs. (5.205) sean solución se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (5.207)$$

pero de la ec. (5.196), tenemos que para  $m = 0$ ,  $E = |\mathbf{p}|$ , y  $\mathbf{p}/E = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \hat{\mathbf{p}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (5.208)$$

Comparando con las ecuaciones (5.190) y (5.194) vemos que para las soluciones de energía positiva  $\psi_{R,L}$  corresponden en efecto a estado de helicidad derecha e izquierda respectivamente. Explicitamente

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L = e^{-ip \cdot x} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} |-\rangle = -e^{-ip \cdot x} |-\rangle = -\psi_L \quad (5.209)$$

El espinor de cuatro componentes para la solución de energía positiva es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.210)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \bar{u}u = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= (|-\rangle^\dagger \quad |+\rangle^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\langle -| \quad \langle +|) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | - \rangle \\ | + \rangle \end{pmatrix} \\
&= (\langle +| \quad \langle -|) \begin{pmatrix} | - \rangle \\ | + \rangle \end{pmatrix} \\
&= \langle +| - \rangle + \langle -| + \rangle = 0
\end{aligned} \tag{5.211}$$

Es convención escoger la normalización del espinor de Dirac tal que

$$\bar{u}u = 2m \tag{5.212}$$

que de hecho es cero cuando  $m = 0$ .

Para las soluciones de energía negativa tenemos

$$\hat{\psi}_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad \hat{\psi}_R = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \tag{5.213}$$

Para explorar las características de esta solución podemos reemplazar en la ec. (5.206)  $E \rightarrow -E$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ , de modo que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_L &= +\hat{\psi}_L \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_R &= -\hat{\psi}_R
\end{aligned} \tag{5.214}$$

De modo que la antipartícula de una partícula de helicidad izquierda tiene helicidad derecha. Dentro de los errores experimentales actuales se puede afirmar que en la naturaleza solo se ha observado el neutrino izquierdo y su correspondiente antineutrino derecho.

Para  $m \neq 0$ , tenemos de la ecs. (5.164) y (5.205) (ver ec. (5.206))

$$\begin{aligned}
E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= m\psi_R \\
E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= m\psi_L
\end{aligned} \tag{5.215}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left( \frac{E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_L &= \psi_R \\
\left( \frac{E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_R &= \psi_L.
\end{aligned} \tag{5.216}$$

En este caso sin embargo, la helicidad no esta bien definida y sólo podemos afirmar que  $\psi_L$  corresponde a la solución que tiene mayor probabilidad de ser izquierda que derecha. Para calcular dicha probabilidad es necesario especificar los espinores  $u_{L,R}$  (ver [2], Capítulo 6). El resultado es que la probabilidad de que  $\psi_R$  sea derecho se obtiene de

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{v}{c} \right) |\psi_R\rangle \rightarrow \begin{cases} +|\psi_R\rangle & v \rightarrow c \quad (\text{relativistic}) \\ +\frac{1}{2} |\psi_R\rangle & v \rightarrow 0 \quad (\text{non-relativistic}) \end{cases} \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v}{c} \right) |\psi_R\rangle
\end{aligned} \tag{5.217}$$

mientras que la probabilidad de que sea izquierdo se obtiene de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) |\psi_R\rangle \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) |\psi_R\rangle\end{aligned}\quad (5.218)$$

Si en un decaimiento  $\beta$  solo se emiten electrones izquierdos, el grado de polarización del electrón emitido es, usando la ec. (5.218)

$$\langle \psi_R | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi_R \rangle + \langle \psi_L | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi_L \rangle = +\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = -\frac{v}{c} \quad (5.219)$$

El grafico de polarización versus  $-v/c$ , [2] (§9.1), debe corresponder a una línea recta de pendiente  $45^\circ$ . Si sólo se emiten electrones derechos sería

$$+\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{v}{c} \quad (5.220)$$

Mientras que si se emiten por igual electrones derechos e izquierdos la polarización total sería cero.

Las soluciones en ec. (5.216) pueden ser intercambiadas por  $\psi_L \rightarrow -\psi_R$ . Esto se puede ver como una transformación de paridad definida por

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \qquad t \rightarrow t \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R. \quad (5.221)$$

De aquí el nombre de la transformación. Como  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  y  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , entonces

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}, \quad (5.222)$$

Entonces es de esperarse que el momentum angular intrínseco, transforme como el momentum angular, y

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.223)$$

Bajo la transformación de paridad

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R, \quad (5.224)$$

Las ecuaciones (5.216) quedan invariantes. Además bajo dicha transformación

$$\sigma^\mu \partial_\mu = \sigma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \rightarrow \sigma^0 \partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad (5.225)$$

de modo que el Lagrangiano correspondiente, dado en la ec. (C.24) también es invariante bajo la transformación de paridad

$$\sigma^\mu \partial_\mu \rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R \quad (5.226)$$



## 5.6. Ejercicios

- 1 Utilizando la forma más simétrica del Lagrangiano Para analizar mejor las implicaciones de este teorema, es mejor tener una forma más simétrica del Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.227)$$

cuya forma invariante gauge local se obtiene reemplazando la derivada normal por la derivada covariante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \frac{i}{2} \overline{(\mathcal{D}_\mu \psi)} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.228)$$

establezca el segundo teorema de Noether

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{E}_i a_i &= \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \\ \mathcal{E}_1 a_1 + \mathcal{E}_2 a_2 &= \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu). \end{aligned} \quad (5.229)$$

- 2 Encuentre el Hamiltoniano para la QED

# Capítulo 6

## Campos de radiación masivos

Hasta ahora los campos de radiación como el fotón o los gluones son de masa cero y median interacciones de rango infinito. En este capítulo exploraremos cual es el posible efecto de un campo que medie interacciones masivo y la posibilidad de describirlo en el contexto de una teoría gauge local.

### 6.1. Potencial de Yukawa

La interacción entre un protón y un neutrón fue determinada experimentalmente por Tomonaga en 1934 [?]

$$V(r) = A \frac{e^{-r/\Lambda}}{r}, \quad (6.1)$$

con

$$\Lambda \approx 1/(7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}) = 1.43 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (6.2)$$

Consideremos el principio de incertidumbre

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta t \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

La segunda relación de incertidumbre aplicada a la ecuación de Klein-Gordon [23], brinda un nuevo entendimiento de la relación entre el rango y la masa en ec. (6.1).  $\Delta t$  es el tiempo que el sistema cuántico interactúa con el aparato de medida y  $\Delta E = \hbar/(2\Delta t)$  es el error mínimo que se obtiene en la medida de la energía, tal que  $E = E_0 \pm \Delta E$ . Es decir, para medir la energía con una precisión  $\Delta E$ , uno necesita un tiempo mayor que  $\hbar/(2\Delta E)$ .

Si  $\Delta E < mc^2$  eso quiere decir que podemos medir la cantidad  $mc^2$  con alguna certeza. Es decir que una partícula de masa  $m$  se puede llegar a observar. Si  $\Delta E > mc^2$  entonces una partícula de masa  $m$  puede existir durante un tiempo  $\Delta t$ . A tal partícula se le llama virtual porque no es observable.

El momentum de una partícula de número de onda  $k$  es  $p = \hbar k$ , de modo que la incertidumbre en el momentum para una partícula relativista es

$$\Delta p = \hbar \Delta k \approx \hbar \frac{\Delta \omega}{c} = \frac{\Delta E}{c} \quad (6.4)$$

Si la masa de la partícula es cero entonces  $E$  puede tender a cero, que corresponde al caso de una partícula no masiva con un momentum tendiendo a cero. La cantidad por la cual la conservación de energía es violada,  $\Delta E$ , también puede llegar a ser muy pequeña. De modo que un fotón virtual de frecuencia muy baja puede existir durante un tiempo casi infinito. Durante ese tiempo un fotón viajando a la velocidad de la luz podría viajar una distancia casi infinita y puede dar cuenta de una interacción de rango infinito.

Sin embargo, para una partícula de masa  $m$ . La violación de energía para producir esta debe ser de al menos  $mc^2$ , o  $\Delta E > mc^2$ . Por el principio de incertidumbre la máxima distancia que puede recorrer es  $\Lambda = c\Delta t$

$$\begin{aligned}\Lambda &\geq \frac{\hbar c}{2\Delta E} \\ &\geq \frac{c\hbar}{2mc^2} \\ &\geq \frac{\hbar}{2mc} \\ &\geq \frac{1}{2m} \quad \text{Natural Units.}\end{aligned}\tag{6.5}$$

De la componente escalar de la ecuación de Proca, (4.106), obtenemos la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar real  $\phi = A^0$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \rho\phi\tag{6.6}$$

Donde  $\rho$  es la densidad de carga que actúa como fuente del campo  $\phi$ .

Posteriormente discutiremos en detalles porque  $m$  corresponde a la masa de la partícula. La idea básica es que  $\phi$  tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial  $V = (1/2)m^2\phi^2$  que corresponde a la energía de un oscilador armónico. Esta energía es equivalente a masa. Note que  $m^2 < 0$  no puede interpretarse como masa. En este caso  $\phi$  describirá excitaciones alrededor de la parte plana del potencial. Como estas excitaciones no cuestan energía, corresponde a una partícula sin masa.

El campo  $\phi$  puede pensarse como proveniente de una fuente de la misma manera como el campo electromagnético surge de partículas cargadas. Como en el caso del electromagnetismo, en esta sección podemos considerar los campos sin preocuparnos de las fuentes. En tal caso tendremos una teoría en la cual el campo escalar juega el papel de partícula mediadora de la interacción.

Si el campo escalar se generaliza para que pueda tener otros números cuánticos, como carga eléctrica, entonces estos pueden ser las fuentes de las respectivas cargas y corrientes en las ecuaciones para campos vectoriales. Esto se estudiará en la sección ???. En tal caso podríamos tener por ejemplo “átomos” formados de partículas escalares que se excitan emitiendo fotones.

En las secciones 2.3.1 y 4.5, hemos visto que el Lagrangiano en ec. (6.6) da lugar a las ecuaciones de Klein-Gordon en presencia de una densidad de carga

$$(\square + m^2)\phi = \rho\tag{6.7}$$

De acuerdo a la ec. (4.107), tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \rho\phi \quad (6.8)$$

En analogía con el electromagnetismo donde las densidades de carga y corrientes son la fuente del campo  $A^\mu$ , podemos pensar en  $\rho$  como la fuente del campo  $\phi$ . En el caso del electromagnetismo el análisis de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, ec. (4.95), para las componentes  $A^0$  y  $J^0$ , en el gauge de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (6.9)$$

da lugar a la Ley de Coulomb, que corresponde a una interacción de rango infinito [12]. Veremos a continuación que un análisis similar para un campo escalar masivo (o para la componente cero de un campo vectorial masivo) da lugar a una interacción de corto rango.

Consideremos el caso más simple de una fuente puntual para el campo  $\phi$ :

$$\rho(x) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (6.10)$$

donde  $g$  es una constante. Entonces  $\rho$  es independiente del tiempo y genera un campo (un potencial) independiente del tiempo. Entonces, como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

tenemos

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (6.11)$$

Para resolver la ecuación diferencial es más conveniente transformar  $\phi(\mathbf{x})$  al espacio de momentos. Su transformada de Fourier es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}). \quad (6.12)$$

La transformada inversa es

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}). \quad (6.13)$$

Ademas tenemos la propiedad

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (6.14)$$

Reemplazando ec. (6.12) en (6.11), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{k}^2 + m^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= g\delta(\mathbf{x}) \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ (\mathbf{k}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \frac{g}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (6.15)$$

Reemplazando en la ec. (6.12) y definiendo  $r \equiv |\mathbf{x}|$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\
&= \frac{g}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_0^\pi e^{i|\mathbf{k}|r \cos \theta} \sin \theta d\theta
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $u = \cos \theta$ ,  $du = -\sin \theta d\theta$ ,

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_1^{-1} e^{i|\mathbf{k}|ru} du, \\
\phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|ru} du.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|ru} du = \frac{e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}}{i|\mathbf{k}|r} \\
\phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\
&= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \left( \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) \\
&= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \left( \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \underbrace{\int_0^{-\infty} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2}}_{|\mathbf{k}| \rightarrow -|\mathbf{k}|} \right) \\
&= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\
&= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}| e^{i|\mathbf{k}|r}}{(|\mathbf{k}| + im)(|\mathbf{k}| - im)}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Definiendo

$$f(z) = \frac{ze^{izr}}{z + im}$$

y usando la integral de Cauchy para el contorno correspondiente al semiplano positivo que incluye el polo en  $z = im$

$$\int_C \frac{f(z)}{z - im} dz = 2\pi i f(im) = 2\pi i \frac{im e^{-mr}}{2im} = \pi i e^{-mr} \tag{6.18}$$

tenemos que

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \tag{6.19}$$

donde  $r \equiv |\mathbf{x}|$ .

A la luz de la interacción fuerte, un protón y un neutrón son indistinguibles y son llamados nucleones. En primera aproximación la interacción fuerte puede ser tratada como una interacción de Yukawa en el rango de los fermis entre los nucleones, mediada por mesones, como el pión. Ver sec. 2.2 de [23].

Para ver esto considere un nucleón como fuente de un mesón intermediario. De acuerdo a la ec. (6.19),

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' g \delta(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned}\quad (6.20)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\quad (6.21)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= -\mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned}\quad (6.22)$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\quad (6.23)$$

El Hamiltoniano de interacción en ec. (6.23) representa la interacción entre dos nucleones mediante el intercambio de un mesón. En forma análoga a como dos electrones intercambian un fotón mediante la interacción electromagnética. En el caso de  $m = 0$ ,  $H_{\text{int}}$ , corresponde a la de energía potencial de Coulomb. El potencial por unidad de carga al cuadrado, puede escribirse como

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}\quad (6.24)$$

El potencial en (6.24) recibe el nombre de *potencial de Yukawa* y corresponde a una interacción de rango  $r \sim 1/m$ .

Comparando con la ec. (6.1) tenemos

$$m \approx \frac{1}{\Lambda}\quad (6.25)$$

que es compatible con la ec. (6.5). Usando el valor medido de  $\Lambda$  en la ec. (6.2)

$$\begin{aligned}m &\approx \frac{1}{1.43 \times 10^{-15} \text{ m}} \frac{1.973 \times 10^{-16} \text{ m}}{\text{GeV}^{-1}} \\ &\approx 138 \text{ MeV}\end{aligned}\quad (6.26)$$

La masa del pion  $\pi^0$ , es  $m_{\pi^0} = 134.8766(6) \text{ MeV}$ .

En el caso general tenemos que  $\phi(x)$  satisface la ecuación de Klein-Gordon en el espacio libre, ec. (6.7)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0\quad (6.27)$$

con solución,

$$\phi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \quad (6.28)$$

que, consistente con la discusión en la sección 1.6, ec.(2.25), da lugar a la condición

$$m^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2. \quad (6.29)$$

De este modo  $m$ , puede interpretarse como la masa de la partícula  $\phi$ .

Para complementar la discusión, considere el caso de un aparato de medida con el mínimo requerimiento para descubrir el  $\pi^0$ . El tiempo que el  $\pi^0$  tarda en cruzar del protón al nucleón debe ser al menos de  $r/c$ . El aparato de medida debe operar a una escala de tiempos

$$\Delta t < \frac{r}{c}. \quad (6.30)$$

La incertidumbre en la energía será

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar c}{2r}. \quad (6.31)$$

Reemplazando  $\Delta E = \frac{1}{2}mc^2$  para que la medida  $E \pm \Delta E$  sea significativa a dos  $\sigma$ , tenemos que

$$r \geq \frac{\hbar}{mc}. \quad (6.32)$$

De este modo  $r$  es la medida de la separación entre  $n$  y  $p$ , tal que en el tiempo disponible, el  $\pi^0$  pueda robar la energía necesaria para llegar a existir y cruzar de uno a otro. Usando  $m = 138 \text{ MeV}$ , tenemos

$$r \geq \frac{1}{0.138} \text{ GeV}^{-1} \times \frac{1.973 \times 10^{-16} \text{ m}}{\text{GeV}^{-1}} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (6.33)$$

El valor obtenido de  $\Lambda$  es compatible con  $r$ .  $\Lambda$  es el rango efectivo de la fuerza asociada. A continuación Yukawa considero la posibilidad de que el quantum  $\phi$  pudiera ser emitido en la transición  $n \rightarrow p$ , a través del proceso

$$n \rightarrow p + \phi^- \quad (6.34)$$

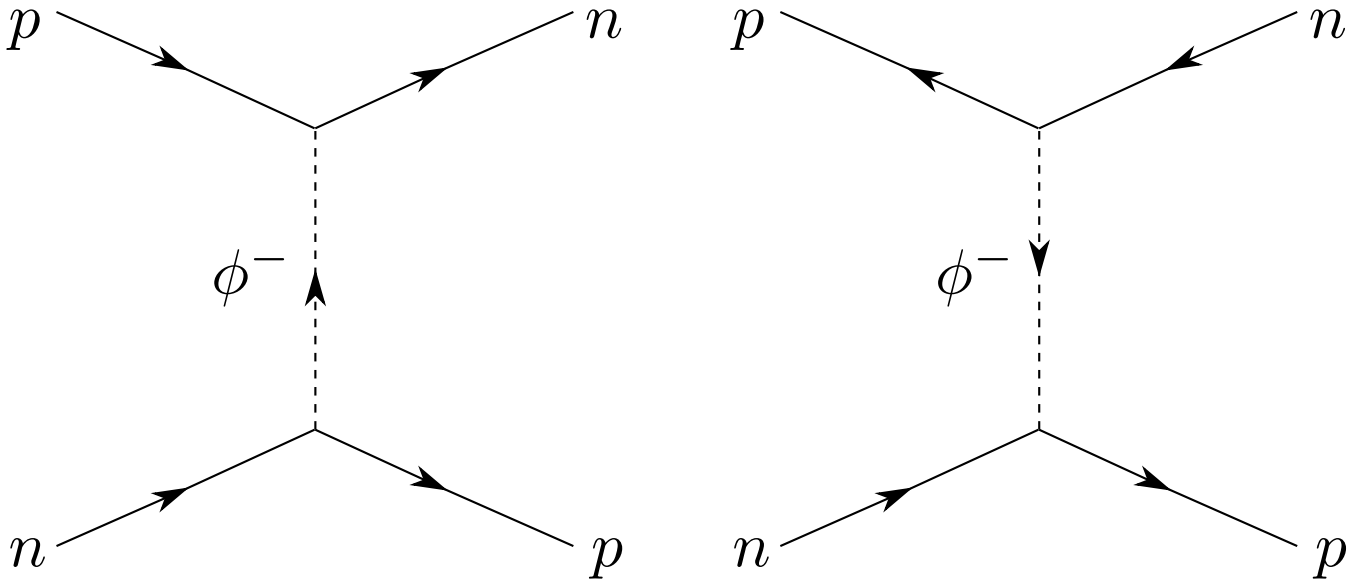
donde la conservación de la carga determina la carga de  $\phi^-$ . Sin embargo el proceso viola la conservación de la energía ya que  $m_n = 939.565 \text{ MeV}$ ,  $m_p = 938.272 \text{ MeV}$ , de modo que  $m_n < m_p + m_\phi$ , si  $m_\phi \sim 100 \text{ MeV}$ , así esto no puede ocurrir como un proceso real de emisión. Sin embargo, Yukawa notó que si (6.34) se combina con el proceso inverso

$$p + \phi^- \rightarrow n \quad (6.35)$$

entonces una interacción  $n$ - $p$  podría tomar lugar a través del mecanismo mostrado en la figura 6.1(a). Es decir a través del intercambio de un quantum  $\phi^-$ . El otro diagrama compatible con la conservación de la carga también aparece en la figura

En el espacio de momentos, la cantidad relevante que representa el intercambio de piones, es la que aparece en la ec. (6.17) y se conoce como el *propagador*:

$$\text{propagador:} \quad \frac{1}{\mathbf{k}^2 - m^2} \quad (6.36)$$

Figura 6.1: Intercambio de Yukawa de un sólo  $\phi$ 

En el caso electromagnético tendremos simplemente

$$1/\mathbf{k}^2. \quad (6.37)$$

Para partículas  $\alpha$  incidiendo sobre un metal y siendo dispersadas por un ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{q}'$ , tal que se satisface la condición de dispersión elástica  $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2$  (dispersión de Rutherford)

$$\mathbf{k}^2 = (\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 = 2\mathbf{q}^2(1 - \cos \theta) = 4\mathbf{q}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (6.38)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{cross section} &\propto \frac{1}{\mathbf{k}^2} \\ &\propto \sin^{-4} \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

que explica la famosa variación angular de la dispersión de Rutherford, en la cual las partículas  $\alpha$  son dispersadas por los núcleos positivamente cargados del metal. Ver figura 6.2

En general tendremos

$$\text{propagador:} \quad \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (6.40)$$

donde  $k = (k_0, \mathbf{k})$

## 6.2. Mecanismo de Stueckelberg

Consideremos un campo vectorial masivo tipo Proca, acompañado de un campo escalar de la misma masa. El Lagrangiano es entonces [48]

$$\mathcal{L}_{\text{Stueckelberg}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{1}{2}m^2 B^2. \quad (6.41)$$



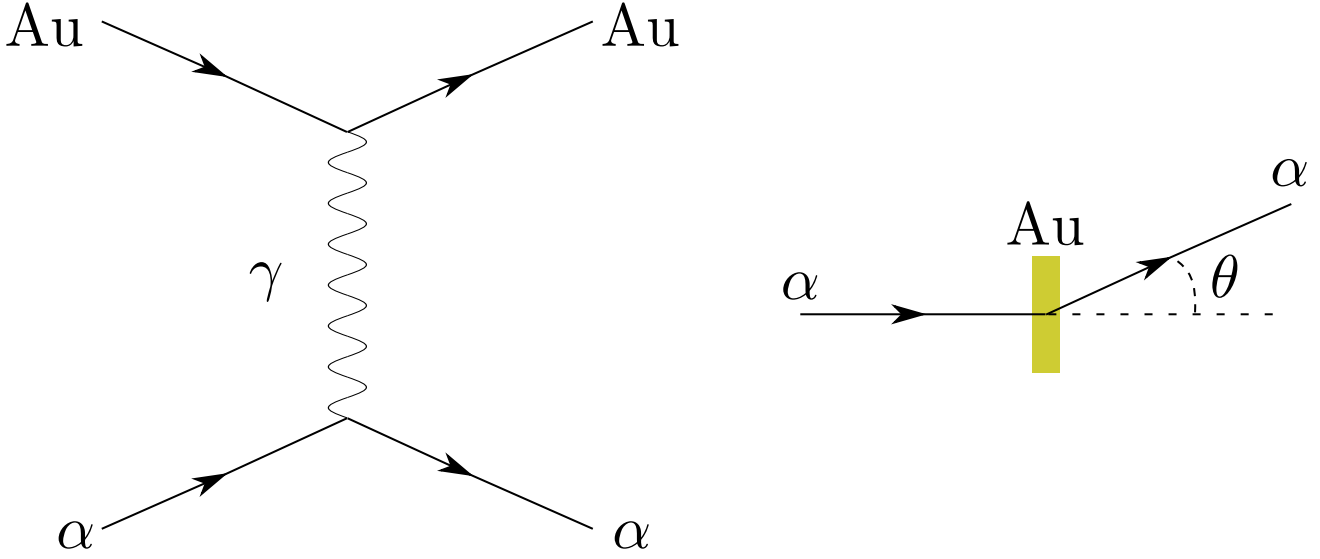


Figura 6.2: Dispersión de partículas  $\alpha$  a través de una lámina de oro

Sin pérdida de generalidad, dicho Lagrangiano se puede reescribir hasta términos de derivadas totales como

$$\mathcal{L}_{\text{Stueckelberg}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 \left( A^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B \right)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu + mB)^2. \quad (6.42)$$

Este Lagrangiano es invariante bajo las transformaciones Gauge

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \\ B &\rightarrow B' = B + m\Lambda, \end{aligned} \quad (6.43)$$

y la condición

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \Lambda = 0, \quad (6.44)$$

la cual implica que el campo  $A_\mu$  tiene tres grados de libertad independientes. Para los detalles ver <https://bit.ly/Stueckel>

Esta teoría aún no ha encontrado una realización en la naturaleza y además no se ha podido generalizar al caso no Abelian.

Para encontrar una teoría con un campo gauge masivo generalizable al caso no Abelian, debemos introducir la idea de la ruptura espontánea de la simetría.

### 6.3. El resurgimiento del éter.

Tomado de [?].

La superconductividad electromagnética puede usarse como una analogía bastante precisa para aclarar muchos aspectos del mecanismo de Higgs en las interacciones débiles y entender la relevancia del descubrimiento de la nueva partícula encontrada recientemente en el Gran Acelerador de Hadrones (LHC de sus siglas en inglés). Dentro de un *superconductor electromagnético* la luz se propaga a

través de un éter del que se conoce su composición y propiedades. El universo en su totalidad puede entenderse como un enorme *superconductor débil* del que estamos comenzando a dilucidar sus propiedades.

Existe una analogía muy precisa entre el mecanismo de Higgs y la superconductividad a bajas temperaturas. No en vano el propio mecanismo de Higgs surgió de explotar esa analogía. El descubrimiento reciente de una partícula con las propiedades esperadas para el Higgs, apunta al resurgimiento del concepto de un éter que permea todo el universo asociado con las interacciones débiles, una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza responsable del decaimiento de los núcleos radiactivos que estudiaremos en el Capítulo 7. En este trabajo se explicará como incluso el escurridizo éter lumínico ha encontrado cabida en algunos rincones muy especiales de la naturaleza, donde se ha logrado obtener la superconductividad electromagnética.

El éter lumínico había surgido de la necesidad mecanicista de dotar al universo de un medio a través del cual se pudiesen propagar las ondas electromagnéticas. Esta visión del mundo quedó poco a poco reemplazada por la visión más simple de la relatividad espacial basada en el postulado de que las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores que se muevan a velocidad constante. Aunque en la formulación inicial de la relatividad especial no quedó para nada explícito, nuestro entendimiento actual de la naturaleza del espacio y el tiempo esta estrechamente ligado con la existencia de una velocidad límite que no puede ser superada por ningún cuerpo material ni por ningún tipo de información [49]. Una partícula sin masa viaja a dicha velocidad límite, independiente de la velocidad que tenga su observador. Así mismo, si se puede determinar con suficiente precisión que la velocidad de un cuerpo es la misma independiente de la velocidad del observador, entonces necesariamente ese cuerpo debe viajar a la velocidad límite. La identificación de la velocidad límite con la velocidad de la luz es un resultado experimental sujeto a constante verificación. Cualquier desviación experimental que se encuentre al respecto podría ser evidencia de que las partículas que componen la luz tienen alguna masa.

Como la masa ha resultado ser un concepto emergente en la física moderna, la posibilidad de que las partículas que componen la luz tengan o no masa, depende de la interacción de dichas partículas con el medio en el que se propagan. Contrario a lo que se suele establecer usualmente, el resultado negativo del experimento de Michelson–Morley no implica que no existe un éter; implica que de existir un éter, la luz no interacciona con él. La presencia de otros tipos de luz, asociadas con interacciones diferentes a la electromagnética, podría hacer manifiesta la presencia de ese éter. Aún más, la existencia misma de un éter lumínico podría manifestarse bajo otras condiciones diferentes a la usuales, como por ejemplo, a temperaturas cercanas al cero absoluto y dentro de cierto tipo de materiales.

De hecho, el resurgimiento del éter sucedió casi de inmediato con el descubrimiento de la *superconductividad electromagnética* en 1911. La superconductividad electromagnética es la desaparición de la resistencia eléctrica que ocurre en algunos materiales cuando se disminuye su temperatura por debajo de algún valor crítico. La conducción de corriente eléctrica a través de un alambre superconductor es mucho más eficiente y permite generar campos magnéticos mucho más intensos que los que se obtendrían con materiales conductores convencionales a partir de la misma cantidad de energía. Además, un material superconductor tiene la propiedad de repeler los campos magnéticos externos a él. El piso de un vagón repleto de pasajeros hecho de un material superconductor, puede levitar sobre rieles imantados, como ocurre con los trenes de levitación magnética del tipo JR-Maglev en Japón.

El entender la superconductividad no fue inmediato porque es un proceso cuántico en el que convergen mucho conceptos teóricos desarrollados posteriormente. Un sistema cuántico como un

núcleo, un átomo, una molécula, etc; tiene niveles de energía discretos que pueden ser ocupados secuencialmente dependiendo de si las partículas que interaccionan con el sistema son *bosones* o *fermiones*. Los fermiones tienen una cantidad de movimiento angular intrínseco, llamado espín, en unidades semienteras de la constante de Planck reducida, denotada por  $\hbar$  (la cual caracteriza los fenómenos cuánticos). Los bosones, de otro lado, tienen espín en unidades enteras de  $\hbar$ . La contraparte clásica del espín corresponde a la cantidad de movimiento angular de una esfera en rotación sobre un eje, determinada por el producto entre su momento de inercia<sup>1</sup> y su velocidad angular. La forma en que los fermiones pueden ocupar los niveles de energía esta restringido por el principio de exclusión de Pauli, que establece que un mismo nivel de energía no puede ser ocupado por dos o más fermiones con los mismos números cuánticos. El fermión más simple es el electrón que tiene como números cuánticos la carga eléctrica (de menos uno en unidades de la propia carga del electrón) y el espín que puede ser  $\hbar/2$  o  $-\hbar/2$ . El nivel de energía fundamental de un átomo de Helio puede ser ocupado a lo sumo por dos electrones de espines opuestos. Siguiendo toda la secuencia de átomos, el Principio de exclusión de Pauli permite explicar la estructura de la tabla periódica de los elementos químicos.

Se ha logrado establecer que un metal esta conformado por una estructura cristalina, la cual también exhibe niveles de energía cuánticos cerca a su superficie. Los electrones de valencia de cada átomo, es decir los electrones del último nivel de energía atómico, pueden ocupar los niveles de energía del cristal moviéndose a través de toda su superficie. El movimiento colectivo de los electrones de valencia se comporta como un fluido de cierta profundidad que se llama mar de Fermi. Como en el mar, las profundidades son tranquilas y toda la actividad sucede en la superficie del mar de Fermi. Un rayo de luz puede viajar a través del mar de Fermi sin prácticamente interaccionar con él, manteniendo una velocidad muy cercana a la velocidad límite de la relatividad especial.

Es bien conocido que dos cargas eléctricas de signos opuestos se atraen, mientras que cargas del mismo signo se repelen. Sin embargo, cuando un metal se enfría por debajo de una temperatura crítica, puede ocurrir el fenómeno sorprendente de que dos electrones se puedan atraer entre sí. A bajas temperaturas, las oscilaciones de la estructura cristalina se estabilizan y los átomos del metal empiezan a ocupar posiciones bastante fijas en el espacio. Cada átomo del metal es visto por un electrón de valencia como un ion de carga positiva y por consiguiente lo atrae creando una acumulación de carga positiva alrededor de él como se muestra en la Figura 6.3(a). En la figura 6.3(b) se muestra el efecto de polarización de la red cristalina que corresponde a una acumulación de carga positiva alrededor del punto donde se encuentra el electrón de valencia. Cuando otro electrón de valencia se acerca a la zona polarizada por el primer electrón, siente una atracción neta hacia ese sitio. El efecto total es que dos electrones de espines opuestos se pueden atraer lo suficiente como para formar un estado ligado llamado par de Cooper. Al estar formado por pares de electrones de espines opuestos, el espín del par de Cooper es cero, y corresponde a un bosón que ya no está restringido por el principio de exclusión de Pauli. El par de Cooper entonces se puede sumergir en las profundidades mar de Fermi hasta ocupar el nivel de energía fundamental. Al final, después de que todos los electrones de valencia se han apareado, todos ellos se *condensan* en el nivel de energía fundamental.

Este tipo de condensados de bosones, que ocurren por debajo de una cierta temperatura crítica, tiene todas las características de un éter lumínico: cuando la luz se propaga a través del condensado adquiere una masa emergente que hace que su velocidad sea menor que la velocidad límite de la relatividad especial. Esta nueva velocidad ya si depende de la velocidad del observador que la mida. Si se pudiese repetir el experimento de Michelson y Morley dentro de un superconductor: ¿daría un

<sup>1</sup>El momento de inercia de una esfera uniforme de radio  $R$  y masa  $M$ , alrededor de un eje que pasa por su centro es  $2MR^2/5$ . El “espín” de la tierra es del orden de  $10^{67}\hbar$ .



Figura 6.3: En la figura (a), los círculos con líneas a trazos representan las posiciones originales de los iones positivos en el cristal. Debido a la presencia del electrón de valencia, el cristal se polariza y se genera un exceso de carga positiva alrededor del electrón que resulta entonces apantallado. En la figura (b) se muestra como el exceso de carga positiva puede causar un efecto de atracción sobre otro electrón de valencia lo que permite la formación de un par de Cooper.

resultado positivo!

Pero, ¿cómo es posible que un fotón adquiriera inercia?. Al tiempo en el que Clerk Maxwell estableció las ecuaciones del electromagnetismo, ya se conocía la Ley de Faraday que establece que los campos eléctricos en movimiento (las corrientes eléctricas) producen campos magnéticos. Usando principios de simetría, Maxwell completo las leyes electromagnéticas prediciendo que los campos magnéticos en movimiento producen también campos eléctricos. Como los campos eléctricos en movimiento producen campos magnéticos en movimiento, que a su vez producen de nuevo campos eléctricos en movimiento, entonces se genera un movimiento ondulatorio y las ecuaciones de Maxwell automáticamente predicen la existencia de ondas electromagnéticas. Una consecuencia inmediata es que la luz visible es simplemente un tipo especial de onda electromagnética en un rango de frecuencias determinado. Una onda electromagnética se puede representar entonces con un vector oscilante que representa el campo magnético, asociado con otro vector oscilante y perpendicular de campo eléctrico. La luz se propaga a la velocidad límite de la relatividad especial en una dirección perpendicular al plano definido por los dos vectores como se ilustra en la figura 6.4(a). Cuando la onda electromagnética se propaga dentro de un condensado sobre la superficie de un superconductor, una componente del par de Cooper se puede acoplar a los vectores magnético y eléctrico en la dirección de propagación de la onda, causando un efecto de frenado. En el lenguaje de la ruptura espontánea de simetría (RES), que explica la formación del condensado por debajo de una temperatura crítica, se dice que fotón se come una componente del par de Cooper para así adquirir masa, como se muestra en la figura 6.4(b). Una vez la luz adquiere masa, las interacciones electromagnéticas se convierten en interacciones de rango finito. Es decir, que a partir de cierta separación entre las cargas eléctricas dentro de un superconductor, desaparecen las fuerzas eléctricas entre ellas. Aunque cuantitativamente estos efectos son pequeños pues la masa del fotón dentro de un superconductor es del orden de una billonésima de electron-voltio [50] (similar a las masas de neutrinos), cualitativamente el comportamiento cambia drásticamente: se pasa de una interacción de rango infinito mediada por fotones de masa cero, a una interacción de *alcance restringido* mediada por fotones masivos.

Cuando se calienta un superconductor metálico por encima de su temperatura crítica correspondiente a unos pocos grados kelvin sobre el cero absoluto, todo vuelve a la normalidad. El estado no superconductor es más simétrico porque los electrones del mar de Fermi están orientados en todas direcciones. El estado superconductor representa un estado menos simétrico pues todos los pares de Cooper están orientados formando un estado coherente en una dirección específica del espacio. Al formarse el condensado se da un fenómeno de *ruptura espontánea de la simetría*: las simetrías

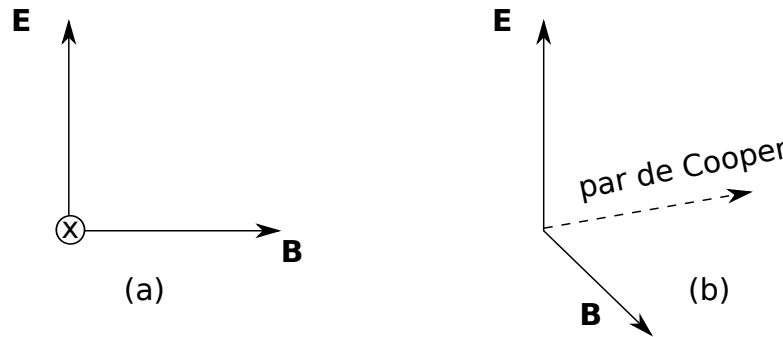


Figura 6.4: En la figura (a), se representa los campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética propagándose a la velocidad de la luz en una dirección entrando a la hoja. En la figura (b) se muestra una onda electromagnética propagándose dentro de un condensado de pares de Cooper, en la dirección de la componente ilustrada del par de Cooper.

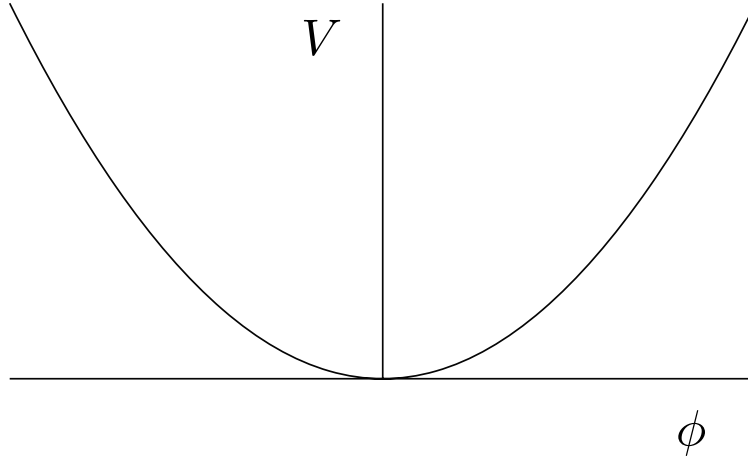
iniciales que describen las interacciones del sistema se mantienen, pero el estado fundamental rompe la simetría.

El electromagnetismo es la interacción mejor conocida de las cuatro interacciones fundamentales. Las interacciones fundamentales entre partículas están mediadas por cierto conjunto de bosones. Es así como la interacción electromagnética entre partículas cargadas, esta mediada por los fotones. La interacción fuerte, que mantiene unidos de forma estable los componentes de los núcleos atómicos, está mediada por los gluones, los cuales tampoco requieren un medio para propagarse. La fuerza fuerte es en muchos otros aspectos similar a la fuerza electromagnética.

Sin embargo, las interacciones débiles han resultado ser fuerzas de corto alcance, mediadas por nuevos fotones llamados  $W$  y  $Z$  que son bastante masivos: del orden de cien veces la masa del protón. La pregunta de si esas masas son reales o emergentes, se reduce a descubrir la existencia del éter a través del cual se propagan esas nuevas ondas débiles. Aunque no podemos acceder directamente a las componentes del condensado que se comen el  $W$  y el  $Z$  para adquirir masa, existe al menos otra componente del condensado que se debe materializar como partícula independiente y nueva: la partícula de Higgs.

De confirmarse que la partícula recientemente descubierta en el Gran Acelerador de Hadrones (LHC de sus siglas en inglés) corresponde al Higgs, significaría nada más y nada menos que el universo se encuentra en un estado de superconductividad débil (*superconductividad electrodébil para ser más exactos*.) El universo en su totalidad es un superconductor en el sentido de que las partículas que sólo tienen cargas débiles como los neutrinos, viajan por la materia sin mayor resistencia. De hecho nuestro cuerpo, e incluso el planeta entero, están siendo atravesados constantemente por neutrinos<sup>2</sup>. Para hallar las excitaciones del éter débil, correspondientes a la partícula de Higgs, debemos calentar al menos una porción del universo por encima de la temperatura crítica de la ruptura espontánea de simetría electrodébil estimada en un cuadrillón de grados kelvin ( $10^{15}$  K). Eso es precisamente lo que se está haciendo el LHC en los puntos de colisión de los detectores ATLAS y CMS, de donde al parecer están emergiendo las primeras partículas de Higgs.

<sup>2</sup>Y por las supuestas partículas de materia oscura débilmente interactuantes, aunque estas aún no ha dejado trazas ni siquiera en los diversos experimentos de detección directa instalados en varios laboratorios subterráneos de la Tierra.

Figura 6.5:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$  con  $\mu^2 > 0$ 

## 6.4. Campo escalar real

Escribamos el Lagrangiano para una partícula escalar real de masa  $m$  como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad (6.45)$$

con

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2. \quad (6.46)$$

Este Lagrangiano es simétrico bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ .

Cuando  $\mu^2 > 0$ , el campo tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial que cuestan energía y dicho término se interpreta como la masa de la partícula. Ver figura 6.5. En Teoría Cuántica de Campos al estado de mínima energía se le llama el vacío y las excitaciones alrededor del vacío corresponden a las partículas. Si  $\mu^2 < 0$ , no existe un mínimo del potencial alrededor del cual el campo pueda oscilar. Además el alejamiento del campo del punto de simetría del potencial no cuesta energía. Por consiguiente en ese caso, el término de interacción

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \quad \mu^2 < 0, \quad (6.47)$$

no puede interpretarse como un término de masa en el Lagrangiano dado por la ec. (6.45).

Consideremos ahora el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (6.48)$$

que mantiene la simetría bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ .  $\lambda > 0$  garantiza la aparición de los dos mínimos que se muestran en la figura 6.6. Si la energía es suficientemente alta como se muestra en la figura 6.6, las excitaciones son simétricas con respecto al máximo del potencial y el término en  $\mu^2$  no puede interpretarse como masa para la partícula escalar. Sin embargo, si la energía es suficientemente baja como se muestra en la figura 6.7, las excitaciones alrededor del mínimo dan lugar a la aparición de un término de masa para el campo escalar. Además, dichas excitaciones no respetan la simetrías  $\phi \rightarrow -\phi$ . En tal caso decimos que la simetría ha sido espontáneamente rota: aunque el Lagrangiano mantiene la simetría original, el vacío la rompe.

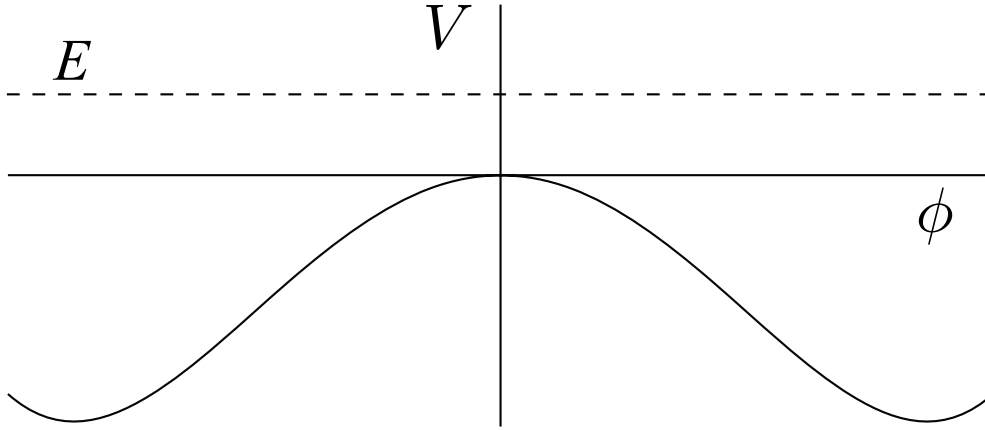


Figura 6.6:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ . Simetría exacta

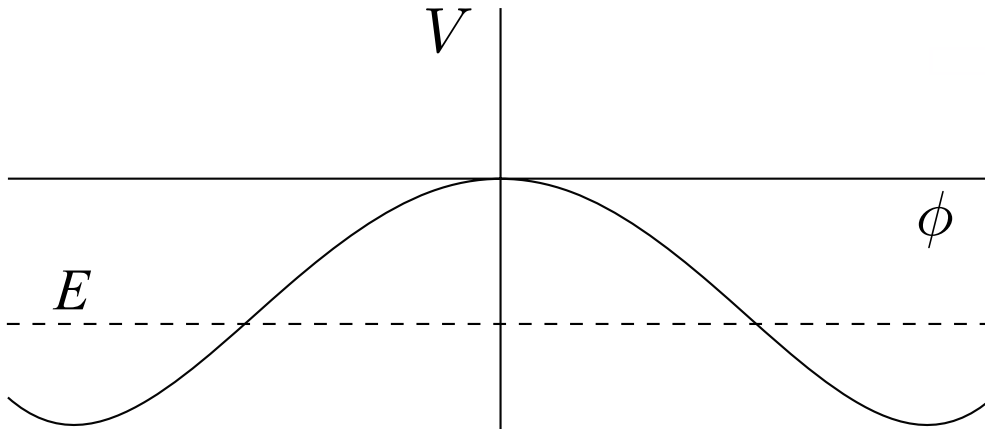


Figura 6.7:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ . Simetría espontáneamente rota.

Para analizar cuantitativamente el espectro de partículas es necesario expandir el campo alrededor del mínimo y determinar las excitaciones. Establezcamos en primer lugar los mínimos del potencial. La  $\partial V/\partial\phi = 0$  da lugar a

$$\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (6.49)$$

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0, \quad (6.50)$$

con extremos  $\phi_{\max} = 0$ , y

$$\phi_{\min} \equiv \langle\phi\rangle \equiv v = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (6.51)$$

De hecho

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi^2. \quad (6.52)$$

$\phi = 0$  corresponde a un máximo, mientras que la segunda derivada para  $\phi = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$  es  $-2\mu^2 > 0$  y corresponden a los mínimos. Expandiendo el campo alrededor del mínimo

$$\phi(x) = H(x) + v \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda(H^2 + 2vH + v^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 2H^2(2vH + v^2) + (2vH + v^2)^2] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 2H^2v^2 + 4v^2H^2 + 4v^3H + v^4] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2H^2 - \frac{3}{2}H^2\mu^2 + \mu^2vH - \mu^2vH + \frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{1}{4}\mu^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3] \\ V(H) &= \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \frac{1}{4}\mu^2v^2, \end{aligned} \quad (6.54)$$

y, usando la ec. (6.51),  $-\mu^2 = \lambda v^2$

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 - \lambda vH^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}. \quad (6.55)$$

Entonces  $H$  adquiere una masa al cuadrado  $\lambda v^2$  y  $V(H)$  no es invariante bajo  $H \rightarrow -H$ .

Otro método es usar las ecuaciones de mínimo  $-\mu^2 = \lambda v^2$ , para eliminar un parámetro del potencial:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= -\frac{1}{2}\lambda v^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\ &= \lambda v^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant} \\ &= \lambda v^2H^2 \left[1 + 2\frac{H}{2v} + \left(\frac{H}{2v}\right)^2\right] + \text{constant} \\ &= \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 \left(1 + \frac{H}{2v}\right)^2 + \text{constant}. \end{aligned} \quad (6.56)$$



Podemos escribir el potencial en términos del nuevo campo como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - V(H) = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 \left(\frac{H}{2v} + 1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \frac{1}{2}\frac{m_H^2}{v}H^3 - \frac{1}{8}\frac{m_H^2}{v^2}H^4.\end{aligned}\quad (6.57)$$

donde

$$m_H^2 = 2|\mu^2| = 2\lambda v^2, \quad (6.58)$$

es la masa del campo de Higgs después de rompimiento espontáneo de simetría.

### 6.4.1. Ausencia de taquiones

Uno se podría preocupar por la presencia de un término de masa imaginaria en el Lagrangiano, pero como estamos hablando de transiciones de fase, estos procesos deben suceder en presencia de temperatura, por ejemplo la temperatura asociada al universo primitivo durante las fases tempranas del Big Bang. En presencia de temperatura, todas las partículas adquieren una masa térmica proporcional a la temperatura como resultado de su interacción con el plasma. De este modo, a altas temperaturas la masa de la partícula escalar esta dominada por la temperatura y al ser positiva el potencial escalar tiene un único mínimo simétrico. Cuando la temperatura baja lo suficiente para que la masa al cuadrado negativa domine, el mínimo se convierte en un máximo local altamente inestable y ocurre muy rapidamente la transición de fase al nuevo mínimo no simétrico donde la masa del escalar esta bien definida.

### 6.4.2. Caso complejo

Consideremos ahora un campo escalar complejo sin término de masa, pero con potencial:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (6.59)$$

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (6.60)$$

La simetría del Lagrangiano corresponde a  $U(1)$  global. Este potencial corresponde al “sombrero mexicano”, como se ilustra en la Figura 6.8. Para una energía suficientemente baja de manera que el campo deba oscilar alrededor del mínimo aparecen dos tipos de excitaciones. Una sobre las paredes que cuestan energía y corresponden a un campo escalar masivo como en el caso anterior, y otra a lo largo de la circunferencia de mínimo, que corresponde a una partícula escalar sin masa, y es llamada bosón del Golstone.

El Lagrangiano escalar complejo es equivalente al Lagrangiano de dos campos escalares reales con los mismos parámetros. Para un conjunto de  $N$  campos reales tendremos (suma sobre  $i$ ) [?]<sup>3</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi^i \partial_\mu \phi_i - \frac{1}{2}\mu^2 \phi_i \phi^i - \frac{1}{2}\mu^2 (\phi_i \phi^i)^2, \quad (6.61)$$

que es invariante bajo una simetría  $O(N)$

$$\phi^i \rightarrow \phi'^i = R^{ij} \phi^j, \quad (6.62)$$

---

<sup>3</sup>§11.1

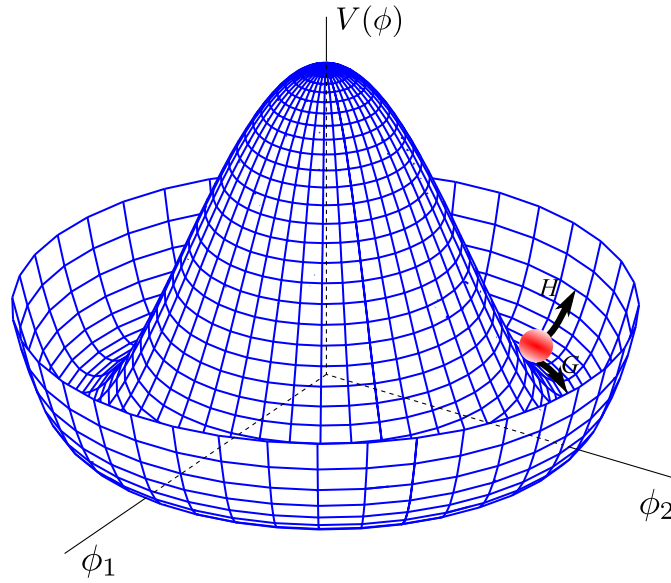


Figura 6.8: Potential for complex scalar field

para cualquier matriz  $N \times N$  ortogonal  $R$ . El análisis para  $N = 2$  da lugar a un bosón de Goldstone. El análisis para  $N > 2$  es el mismo y por cada campo real que se introduzca aparece un nuevo bosón de Goldstone [?]:

[...] there are not continuous symmetries for  $N = 1$ , while for  $N = 2$  there is a single direction of rotation. A rotation in  $N$  dimensions can be in any one of  $N(N - 1)$  planes, so the  $O(N)$ -symmetric theory has  $N(N - 1)/2$  continuous symmetries. After spontaneous symmetry breaking there are  $(N - 1)(N - 2)/2$  remaining symmetries corresponding to rotations of the  $(N - 1)$  [non massive] fields. The number of *broken* symmetries is the difference,  $N - 1$ .

Entonces tenemos el siguiente teorema [?]

*Goldstone's theorem states that for every spontaneously broken continuous symmetry, the theory must contain a massless particle.*

Also from [?]<sup>4</sup>

In a global symmetry that is spontaneously broken the symmetry currents are still conserved and interactions are similarly restricted [the Lagrangian keeps the symmetry], but the vacuum state does not respect the symmetry and the particles do not form obvious symmetry multiplets. Instead, such a theory contains massless particles, Goldstone bosons, one for each generator of the spontaneously broken symmetry. The third case is that of a local, or gauge, symmetry. [...] such a symmetry requires the existence of a massless vector field for each symmetry generator, and the interactions among these fields are highly restricted.

It is now only natural to consider a fourth possibility: What happens if we include both local gauge invariance and spontaneous symmetry breaking in the same theory?

<sup>4</sup>Introduction to Chapter 20

La ruptura espontánea de simetría (RES) se puede parametrizar convenientemente en este caso en coordenadas polares:

$$\phi(x) = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} e^{i\bar{G}(x)}, \quad (6.63)$$

donde el factor de  $\sqrt{2}$  se ha puesto para obtener la normalizaciones apropiadas para la Acción, y  $\bar{G}(x)$  es una función adimensional del espacio tiempo. Expandiendo la ec. (6.59)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta - i\eta \partial^\mu \bar{G})^* (\partial_\mu \eta + i\eta \partial_\mu \bar{G}) - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \eta^2 \partial^\mu \bar{G} \partial_\mu \bar{G} - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Como  $\eta^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$ , el módulo del campo complejo, podemos expandirlo alrededor del campo que oscila en mínimo en el modo que sube por las paredes, como se describió en la fig. 6.8. Hacemos entonces el cambio de variables

$$\eta(x) = H(x) + v, \quad (6.65)$$

tal que  $|\eta_{\min}| = v$ . Reemplazando en el Lagrangiano anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H^2}{v^2} \partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H^2}{v^2} \partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4, \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde hemos definido el bosón de Goldstone sin masa como

$$G(x) = v \bar{G}(x), \quad (6.67)$$

y  $m_H$  está dado por la ec. (6.58).

Como era de esperarse, obtenemos un modo masivo  $H$  cuyas oscilaciones cuestan energía, y un modo  $G$  sin masa que se mueve sobre el mínimo. La prueba de la simetría de fase global espontáneamente rota estaría en el término de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G, \quad (6.68)$$

que predice que el campo  $H$  debe decaer a dos campos  $G$  sin masa. Sin embargo, este tipo de procesos aún no se han observado en la naturaleza.

## 6.5. Electrodinámica cuántica escalar

En el caso de la Acción invariante gauge local bajo el Grupo  $U(1)$ , tenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \mu^2 < 0 \text{ and } \lambda > 0. \quad (6.69)$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (6.70)$$

Este es el Lagrangiano más general posible para un campo escalar complejo y el campo  $A_\mu$  que deja la Acción invariante de Lorentz e invariante bajo la transformación gauge  $U(1)$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x), \quad (6.71)$$

En el caso de la superconductividad electromagnética,  $\phi$  representaría al campo escalar asociado al par de Cooper con carga eléctrica  $-2$ . Claramente el Lagrangiana en la ec. (6.69) es invariante local bajo tal  $U(1)$  de carga eléctrica.

### 6.5.1. Gauge unitario

Como  $\phi$  es un campo complejo, podemos escribirlo en coordenadas polares con un campo real asociado a la magnitud del campo complejo y otro a la fase

$$\phi(x) = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} e^{i\bar{G}(x)}$$

Expandiendo el campo  $\eta(x)$  alrededor del mínimo:  $\eta(x) = (H(x) + v)$ , tenemos

$$\phi(x) = e^{i\bar{G}(x)} \left( \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right).$$

La libertad gauge nos permite en un momento determinado escoger la fase  $\theta(x)$  de la ec. (6.71) sin que ese alteren los observables de la teoría. Para el campo en coordenadas polares tenemos que

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta(x)} e^{i\bar{G}(x)} \left( \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right)$$

Haciendo  $\theta(x) = -\bar{G}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= e^{-i\bar{G}(x)+i\bar{G}(x)} \left( \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) = \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= [(\mathcal{D}^\mu)' \phi']^* (\mathcal{D}_\mu)' \phi' - \mu^2 (\phi^*)' \phi' - \lambda [(\phi^*)' \phi']^2 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})' \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu H + igA'^\mu (H + v)] [\partial_\mu H - igA'_\mu (H + v)] - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})'. \end{aligned} \quad (6.73)$$

En adelante omitiremos las primas, aunque debe estar claro que se esta trabajando en el gauge específico de la ec. (6.72). Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu (H + v)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (6.74)$$

Usando la ec. (6.57)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{A^\mu} + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H, \quad (6.75)$$

donde  $\mathcal{L}_H$  esta dado por la ec. (6.57) y

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^\mu A_\mu. \quad (6.76)$$

Teniendo en cuenta la ec. (??) para el Lagrangiano de Proca, vemos que como consecuencia de la ruptura espontánea de simetría el campo gauge ha adquirido una masa

$$m_A = gv. \quad (6.77)$$

Por lo tanto, y sin pérdida de generaliad, podemos escribir el Lagrangiano de Proca resultante como

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}m_A^2 A^\nu A_\nu. \quad (6.78)$$

donde hemos usado la condición de Proca, eq. (4.104):  $\partial_\nu A^\nu = 0$ .

El mecanismo completo mediante el cual, a partir de un Lagrangiano invariante gauge local, los bosones gauge adquieren masa se llama *mecanismo de Brout-Englert-Higgs* [18, 19]. La partícula escalar que adquiere masa se llama Higgs, mientras que el bosón de Goldstone es absorbido por campo gauge como modo longitudinal.

El número de grados de libertad independientes en el Lagrangiano original en la ec. (6.69) es cuatro. Correspondientes a los dos grados de libertad del bosón gauge no masivo y los dos del campo escalar complejo. En el Lagrangiano final en la ec. (6.75) no aparece el bosón de Goldstone. Sin embargo esto no es un problema porque dicho Lagrangiano también tiene cuatro grados de libertad correspondientes a los tres grados de libertad del bosón gauge masivo y al grado de libertad del bosón de Higgs.

### 6.5.2. Superconductividad

El campo  $H$  dentro del superconductor, que hereda la carga  $-2$  de  $\phi$ , rompe espontáneamente carga eléctrica para esa configuración especial del vacío (mínimo de energía) donde se forma el condensado de pares de Cooper. Pero la acción claramente conserva en todo momento la carga eléctrica.

A review of the use of the Proca Equations for a massive photon in superconductivity is given in [?]. A popularization review along this lines is in the book of Frank Wilczek “The Lightness of Being” (see Additional references).

The photon mass inside a superconductor is  $10^{-11}$  GeV (or  $1/1000$  of the electron mass according to [?]). Also from the article in Beamline  $\lambda \sim 10 \mu\text{m}$  y  $M_\gamma = \hbar/\lambda c$

There are two important length scales in a superconductor. The first measures how efficiently the condensate expels a magnetic field. In fact, the expulsion is not

Additional references:

- The Lightness of Being: Mass, Ether, and the Unification of Forces, Frank Wilczek, <http://www.amazon.com/The-Lightness-Being-Unification-Forces/dp/0465018955>
- [http://www.scholarpedia.org/article/Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble\\_mechanism\\_\(history\)](http://www.scholarpedia.org/article/Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble_mechanism_(history))

- Elementary Particle Physics: Volume 1: Quantum Field Theory and ..., Volume 1 By Yorikiyo Nagashima, [ElementaryParticlePhysics:Volume1:QuantumFieldTheoryand...,Volume1ByYorikiyoNa](#)
- From Superconductors to Supercolliders by LANCE DIXON <http://www.slac.stanford.edu/pubs/beamline/26/1/26-1-dixon.pdf>
- Electrodynamics of Superconductors <http://www.physics.buffalo.edu/phy514/w11/index.html>
- Observan el análogo a un bosón de Higgs en un superconductor <http://francis.naukas.com/2014/09/05/analogo-al-boson-de-higgs-en-un-superconductor/>

## 6.6. $SU(2)$ escalar con RES

Para construir la teoría gauge no Abelian  $SU(2)$  para campos escalares con ruptura espontánea de simetría (RES), usaremos los mismos métodos desarrollados para  $SU(3)$  de la Sección 5.3 con los siguientes cambios de notación

$$\begin{aligned} G_\mu^a &\rightarrow W_\mu^i, & i = 1, 2, 3 \\ G_{\mu\nu}^a &\rightarrow W_{\mu\nu}^i. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Consideremos un doblete escalar bajo  $SU(2)$  compuesto de dos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}, \quad (6.80)$$

con un Lagrangiano gauge local

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}, \quad (6.81)$$

donde

$$\mathcal{L}_\Phi = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \text{con } \mu^2 < 0, \lambda > 0, \quad (6.82)$$

con

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i g T_i W_\mu^i, \quad T_i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (6.83)$$

y  $\tau_i$  son las matrices de Pauli que satisfacen el algebra de  $SU(2)$

$$\left[ \frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon^{ijk} \frac{\tau_k}{2}. \quad (6.84)$$

Las condiciones sobre los parámetros del potencial escalar garantizan un rompimiento espontáneo de la simetría. Los cuatro grados de libertad de  $\Phi$ , pueden escribirse en forma polar con la parte real neutra desplazada para generar la ruptura espontánea de la simetría  $SU(2)$

$$\Phi = e^{i G_j T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v) \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

(6.86)

de modo que

$$\begin{aligned}\Phi &\approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + iG_3 & \sqrt{2}iG^+ \\ \sqrt{2}iG^- & 1 - iG_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iG^+H + viG^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H + v - iG_3H - iG_3v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v - i\eta^0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Para SU(2) tenemos tres generadores y tres bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (7.62) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone y un campo de Higgs con masa, de manera que todos los campos gauge adquirirán masa. Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs y tres bosones gauge masivos.

Podemos hacer una transformación gauge similar a la de la ec. (??) sobre el campo  $\Phi$ , tal que

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi' = e^{i\theta_i(x)T_i} e^{iG_i(x)T_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6.87}$$

que define el *gauge unitario*:  $\theta_i(x) = -G_i(x)$ . En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados  $\Phi'$  y  $W'_{\mu\nu}$ . Además

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \Phi &= (\mathbf{1}\partial_\mu - i g T_i W_\mu^i) \Phi \\ &= \partial_\mu \Phi - i g T_i W_\mu^i \Phi.\end{aligned}\tag{6.88}$$

De este modo

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi &= (\partial_\mu \Phi - i g T_i W_\mu^i \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi - i g T_j W^{j\mu} \Phi) \\ &= (\partial_\mu \Phi^\dagger + i g \Phi^\dagger T_i^\dagger W_\mu^i) (\partial^\mu \Phi - i g T_j W^{j\mu} \Phi) \\ &= (\partial_\mu \Phi^\dagger + i g \Phi^\dagger T_i W_\mu^i) (\partial^\mu \Phi - i g T_j W^{j\mu} \Phi) \\ &= \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - i g \partial_\mu \Phi^\dagger T_j W^{j\mu} \Phi + i g \Phi^\dagger T_i W_\mu^i \partial^\mu \Phi + g^2 \Phi^\dagger T_i W_\mu^i T_j W^{j\mu} \Phi.\end{aligned}\tag{6.89}$$

Ya que

$$\begin{aligned}T_i W_\mu^i T_j W^{j\mu} &= \frac{1}{2} (T_i W_\mu^i T_j W^{j\mu} + T_i W_\mu^i T_j W^{j\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (T_i W_\mu^i T_j W^{j\mu} + T_j W_\mu^j T_i W^{i\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (T_i W_\mu^i T_j W^{j\mu} + T_j W^{j\mu} T_i W_\mu^i) \\ &= \frac{1}{2} (T_i T_j + T_j T_i) W_\mu^i W^{j\mu} \\ &= \frac{1}{8} \{\tau_i, \tau_j\} W_\mu^i W^{j\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} (2\delta_{ij} \mathbf{1}) W_\mu^i W^{j\mu} \\
&= \frac{1}{4} \mathbf{1} W_\mu^i W_i^\mu,
\end{aligned} \tag{6.90}$$

y de la ec. (7.64) tenemos  $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2 \end{pmatrix}^T$  con  $\Phi_2 = (H(x) + v) / \sqrt{2}$  y real. De manera que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - ig \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (T_j W^{j\mu})_{12} \Phi_2 \\ (T_j W^{j\mu})_{22} \Phi_2 \end{pmatrix} + ig \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (T_j W^{j\mu})_{12} \partial^\mu \Phi_2 \\ (T_j W^{j\mu})_{22} \partial^\mu \Phi_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + g^2 \Phi_2^2 W_\mu^i W_i^\mu \\
&= \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - ig \partial_\mu \Phi_2 (T_j W^{j\mu})_{22} \Phi_2 + ig \Phi_2 (T_j W^{j\mu})_{22} \partial_\mu \Phi_2 + \frac{g^2}{4} \Phi_2^2 W_\mu^i W_i^\mu \\
&= \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 + \frac{g^2}{4} \Phi_2^2 W_\mu^i W_i^\mu.
\end{aligned} \tag{6.91}$$

Reemplazando en ec. (6.82)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - V(H) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} + \frac{g^2}{8} W_\mu^i W_i^\mu (H + v)^2,
\end{aligned} \tag{6.92}$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned}
V(H) &= \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
&= \mu^2 \Phi_2^2 + \lambda \Phi_2^4 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 [H(x) + v] + \frac{1}{4} \lambda [H(x) + v]^2,
\end{aligned} \tag{6.93}$$

el cual da lugar de nuevo a la ec. (6.57) correspondiente al potencial de Higgs

$$V(H) = \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( \frac{H}{2v} + 1 \right)^2, \tag{6.94}$$

que incluye el término de masa para el bosón de Higgs (6.58):

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2 \lambda v^2. \tag{6.95}$$

De este modo el último término en el Lagrangiano de la ec. (6.92) se puede interpretar como la interacción de un campo escalar real de Higgs,  $H(x)$ , con los campos gauge de  $SU(2)$ ,  $W_\mu^i$ . Procediendo de forma similar a como se hizo con el potencial del Higgs, tenemos

$$\frac{g^2}{8} W_\mu^i W_i^\mu (H + v)^2 = \frac{g^2 v^2}{8} W_\mu^i W_i^\mu \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2. \tag{6.96}$$

Si además definimos

$$m_W = \frac{gv}{2}, \tag{6.97}$$



como la masa degenerada de los tres bosones gauge  $W_i^\mu$ , el resultado final para la ec. (6.82), es

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} \quad (6.98)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - V(H) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_W^2 W_\mu^i W_i^\mu \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2. \quad (6.99)$$

En la primera ecuación anterior (6.98) hay 10 grados de libertad independientes (g.l.i) correspondientes a los 4 g.l.i del doblete escalar complejo  $\Phi$  y los  $2 \times 3$  g.l.i para tres bosones gauge sin masa. Estos mismos 10 g.l.i se ven reflejados en la segunda ecuación (6.99) para el g.l.i asociado al campo escalar real  $H$  y los  $3 \times 3$  g.l.i asociados a tres bosones gauge con masa  $W_i^\mu$ . En el lenguaje de la ruptura espontánea de simetría se dice que los bosones gauge sin masas (con 2 g.l.i cada uno) se comen los tres bosones de Goldstone  $G_i(x)$ , asociados a los tres generadores espontáneamente rotos, para así adquirir las masas degeneradas  $m_W$ . Las masas emergen de esta manera si y sólo si el Higgs interactúa con los bosones gauge a través de

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{m_W^2}{v} W_\mu^i W_i^\mu H + \frac{1}{2} \frac{m_W^2}{v^2} W_\mu^i W_i^\mu H^2. \quad (6.100)$$

Esto es de nuevo la predicción del mecanismo de Brout–Englert–Higgs que permite su comprobación en aceleradores de partículas. Para el primer término del Lagrangiano de interacción,  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , esto quiere decir por ejemplo, que una vez producido el Higgs en un acelerador de partículas este puede decaer con alguna probabilidad a cualquier par de bosones gauge a los que les haya dado masa

Esta teoría escalar gauge SU(2) con RES, se puede aplicar tanto para explicar el surgimiento de la masa de los tres piones en la física nuclear, como para explicar las masas de los tres bosones gauge de la interacción débiles de una forma compatible con el principio gauge local, ya que la Acción mantiene la simetría SU(2): el análisis de las masas sólo es válido alrededor del mínimo después de la RES que permite la formación del condensado de campo de Higgs. El caso de la interacción débil será explicado en el capítulo 7.

**Ejemplo.** Estudie el espectro de masas en el Gauge unitario, expandiendo explícitamente la Derivada covariante.

Comenzaremos analizando la parte escalar del Lagrangiano del Modelo dada en la ec. (7.19)

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} \right]^\dagger \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}, \quad (6.101)$$

donde  $V(H)$  dado en la ec. (6.94).

Como

$$\begin{aligned} W_\mu &= T_i W_\mu^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} \frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \frac{W_\mu^1 + i W_\mu^2}{\sqrt{2}} & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_\mu^3 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{6.102}$$

donde hemos definido

$$W_\mu^+ \equiv \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad W_\mu^- = (W_\mu^+)^* = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}}. \tag{6.103}$$

$\mathcal{D}_\mu$  corresponde a la matrix  $2 \times 2$

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i}{2}gW_\mu^3 & -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial_\mu + \frac{i}{2}gW_\mu^3 \end{pmatrix}. \tag{6.104}$$

Entonces

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix}. \tag{6.105}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_W &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix} - V(H) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) & \partial_\mu H - \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_{\tilde{\Phi}}B_\mu \right) (H+v) \end{pmatrix} - V(H) \\
&= \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+(H+v)^2 + \frac{1}{2} \left[ \partial^\mu H - \frac{i}{2}gW_3^\mu(H+v) \right] \left[ \partial_\mu H + \frac{1}{2}gW_\mu^3(H+v) \right] - V(H) \\
&= -V(H) + \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+(H+v)^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{8}g^2W_{3\mu}W_3^\mu(H+v)^2,
\end{aligned} \tag{6.106}$$

donde la última línea corresponde a la magnitud del “número” complejo:

$$\left[ \partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \right] \tag{6.107}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_W &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\
&\quad + \left( \frac{gv}{4} \right)^2 W^{\mu-}W_\mu^+ + \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+H^2 + \frac{1}{2}vg^2W^{\mu-}W_\mu^+H + \frac{1}{8}g^2W_3^\mu W_\mu^3(H^2 + 2vH + v^2).
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_W &= (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - V(H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}g^2 W^{\mu-} W_{\mu}^+ H^2 + \frac{1}{2}g^2 v W^{\mu-} W_{\mu}^+ H + \frac{1}{8}g^2 W_3^{\mu} W_{\mu}^3 H^2 + \frac{1}{4}g^2 v W_3^{\mu} W_{\mu}^3 H \\
& + m_W^2 W^{\mu-} W_{\mu}^+ + \frac{1}{2}m_3^2 W_3^{\mu} W_{\mu}^3,
\end{aligned} \tag{6.109}$$

donde:

- Masas gauge:

$$m_W = m_3 = \frac{gv}{2}. \tag{6.110}$$

Note que todas las masas son degeneradas.

- Masa del Higgs

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2. \tag{6.111}$$

## 6.7. Masas para fermiones de Weyl

Es interesante notar que el mismo mecanismo que funciona para dar masa a un bosón gauge también puede permitir la aparición de un término de masa para un fermión de Weyl. Considere un fermión de Weyl izquierdo  $\psi$  con una cierta carga, que por simplicidad, consideraremos conservada globalmente. Si además permitimos la presencia de un escalar complejo,  $\phi$ , con el doble de dicha carga, tal que

$$\begin{aligned}
\psi & \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \\
\phi & \rightarrow \phi' = e^{-2i\alpha} \phi,
\end{aligned} \tag{6.112}$$

entonces el Lagrangiano más general posible para los dos campos es

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - h (\psi\psi\phi + \phi^* \psi^\dagger \psi^\dagger) + \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2. \tag{6.113}$$

Es importante notar a este punto que el acoplamiento  $h$ , llamado acoplamiento de Yukawa, es adimensional. Si imponemos además las condiciones  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ , podemos analizar el espectro de la teoría cerca al mínimo  $\langle \phi \rangle = v$ , haciendo el cambio de variables a

$$\phi(x) = \frac{H(x) + v + iJ(x)}{\sqrt{2}}, \tag{6.114}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} & = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{hv}{\sqrt{2}} (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{h}{\sqrt{2}} (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) H - i \frac{h}{\sqrt{2}} (\psi\psi - \psi^\dagger \psi^\dagger) J \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J - \frac{\mu^2}{2} [(H+v)^2 + J^2] - \frac{\lambda}{4} [(H+v)^2 + J^2]^2 \\
& = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{m}{v} (\psi\psi H + \psi^\dagger \psi^\dagger H + i\psi\psi J - i\psi^\dagger \psi^\dagger J) \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} \mu^2 (H+v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H+v)^4 \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J + \frac{1}{2} |\mu^2| J^2 - \frac{1}{4} \lambda [2J^2 (H^2 + 2vH + v^2) + J^4],
\end{aligned}$$

Usando

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 > 0,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{m}{v} (\psi\psi H + \psi^\dagger \psi^\dagger H + i\psi\psi J - i\psi^\dagger \psi^\dagger J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J + \cancel{\frac{1}{4} m_H^2 J^2} - \cancel{\frac{1}{4} m_H^2 J^2} - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} J^4 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} J^2 H - \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{v^2} J^2 H^2 \\ &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{m}{v} (\psi\psi H + \psi^\dagger \psi^\dagger H + i\psi\psi J - i\psi^\dagger \psi^\dagger J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} J^4 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} J^2 H - \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{v^2} J^2 H^2. \end{aligned} \tag{6.115}$$

El espectro de partículas alrededor del mínimo asociado a la ruptura espontánea de la simetría corresponde a fermión de Weyl con masa (como podría ser por ejemplo un neutrino izquierdo masivo)

$$m = \frac{hv}{\sqrt{2}},$$

un Higgs con masa  $m_H^2$  y un bosón de Goldstone sin masa  $J(x)$ . Cuando el bosón de Goldstone no puede ser reabsorbido como la masa de un bosón gauge, corresponde a una partícula física que se suele llamar el Majoron. El término de interacción  $\psi\psi J$  implica que un par de fermiones de Weyl se pueden aniquilar en un Majoron (sin masa). Este tipo de procesos están fuertemente suprimidos a partir de observaciones astrofísicas pues podrían implicar por ejemplo un enfriamiento demasiado rápido de una supernova por energía perdida a través de Majorones provenientes de la aniquilación de neutrinos.

## Ejercicio

Considere un espinor de Weyl que además tiene una carga continua  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \tag{6.116}$$

de modo que su término de masa esta prohibido.

Escriba el Lagrangiano más general posible para el campo  $\psi$  y un campo escalar complejo  $\phi$  que transforma como

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-2i\alpha} \phi. \tag{6.117}$$

con un potencial escalar  $V(\phi)$  con ruptura espontánea de la simetría continua  $U(1)$ . Especifique explícitamente las dimensiones y el carácter positivo o negativo de cada uno de los coeficientes.

Ayuda: sólo hay un término de interacción posible entre los campos fermiónicos y el campo escalar (más el correspondiente hermítico conjugado).

### 6.7.1. Ejercicio

Para el Lagrangiano del punto anterior, encuentre el espectro de partículas cuando la parte real del campo escalar complejo adquiera un valor esperado de vacío,  $v$ :

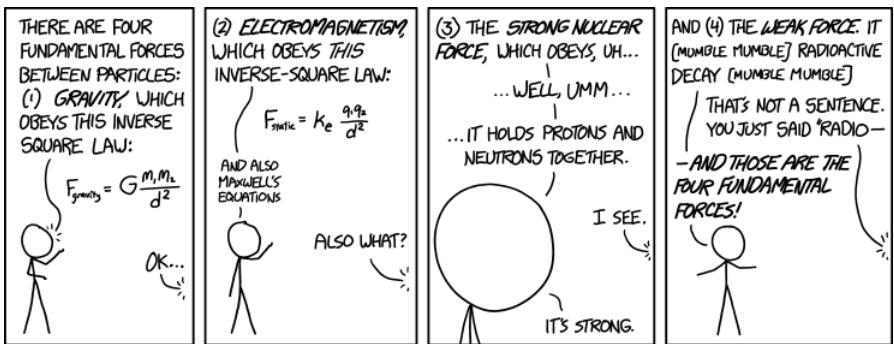
$$\phi = \frac{H(x) + v + iJ(x)}{\sqrt{2}}$$

y especifique cuales son los campos masivos y cuales quedan sin masas. Note entonces que un fermión sin masa también puede adquirir una masa después de la ruptura espontánea de la simetría, como consecuencia de su interacción con un campo escalar.

---

# Capítulo 7

## Modelo Estándar



- Of these four forces, there's one we don't really understand.
- Is it the weak force or the strong?
- It's gravity.

<http://xkcd.com/1489/>

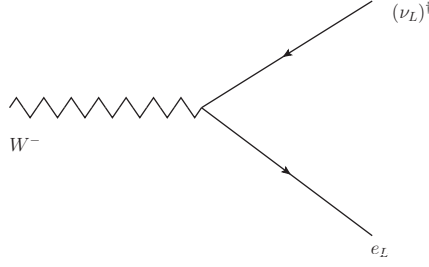
### 7.1. Contenido de partículas

La materia conocida esta constituida de un conjunto de *fermiones de Dirac* elementales definidos en la Tabla 7.1 donde podemos definir los tripletes de color de quarks como

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (7.1)$$

Tipo	Nombre	Simbolo	Carga
leptones	electrón	$e$	$-1$
	neutrino	$\nu$	$0$
quarks	quark up	$u_1, u_2, u_3$	$2/3$
	quark down	$d_1, d_2, d_3$	$-1/3$

Tabla 7.1: Fermiones elementales: El símbolo representa tanto la partícula, i.e  $e^-$ , como la anti-partícula, i.e  $e^+$ . La carga eléctrica está dada en unidades de la carga del electrón  $e$ .

Figura 7.1: Decaimiento del  $W_\mu^-$ .

Este conjunto de partículas está bien definido para interacciones que conservan paridad como la interacción electromagnética o la fuerte. Para introducir las interacciones débiles usaremos más bien espinores de Weyl.

## 7.2. Interacciones débiles

Las interacciones débiles son las responsables, entre otros fenómenos, del decaimiento de neutrones libres en un protón, un electrón y un anti-neutrino electrónico. En nuestro entendimiento actual, se asume que dicho decaimiento está mediado por un bosón vectorial masivo y cargado llamado  $W_\mu^-$  con su correspondiente antipartícula  $W_\mu^+$ . El carácter masivo da cuenta del corto alcance de la interacción comparado con el rango infinito de la interacción electromagnética mediada por un fotón sin masa  $A_\mu$ . En la primera parte del decaimiento, el neutrón decae al protón y un  $W_\mu^-$  virtual, el cual a su vez decae en un anti-neutrino derecho y un electrón izquierdo como se muestra en la figura 7.1.

Dicho decaimiento debe involucrar un término de interacción del tipo

$$\mathcal{L}_W \propto (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+. \quad (7.2)$$

Este tipo de interacción significa que en el contexto de las interacciones débiles un  $e_L$  debe ser completamente equivalente a un campo  $\nu_L$ . Es decir, el Lagrangiano debe ser invariante bajo una transformación  $SU(2)_L$  de esos campos. A las energías normales, a las que se encuentra por ejemplo un neutrón dentro de un núcleo de Uranio, dicha simetría permanece oculta pues un electrón izquierdo y un neutrino izquierdo son campos completamente diferentes. La diferencia entre ellos no sólo está en sus respectivas cargas eléctricas sino también en sus masas, pues la masa del neutrino es mucho más pequeña que la del electrón.

Para poder explicar dicha interacción en el contexto de una simetría gauge local  $SU(2)_L$ , debemos asumir que dicha simetría es explícita en alguna otra escala de energía donde en efecto  $e_L$  sea completamente equivalente a  $\nu_L$ .

Debemos asumir entonces que ambos campos tienen una misma hipercarga, asociada a una nueva simetría Abelian U(1)<sub>Y</sub> que sea la precursora de la simetría Abelian de carga eléctrica U(1)<sub>Q</sub>. En tal caso, podríamos esperar que la corriente electromagnética apropiada pueda obtenerse a partir del Grupo semisimple  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Además, la respectiva masa para  $W_\mu^-$  se podría obtener a partir del mecanismo de Higgs.

La simetría  $SU(2)_L$  entre las partes izquierdas del neutrino y el electrón, y entre las partes izquierdas de los quarks up y down, se establece definiendo los dobletes:

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

Nombre	Símbolo	$(SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y)$
$\Xi_{1\alpha}$ : Doblete leptónico	$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, Y_L)$
$\Xi_{2\alpha}$ : Doblete de quarks	$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, Y_Q)$
$\eta_1^\alpha$ : positrón izquierdo	$(e_R)^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, Y_E)$
$\eta_2^\alpha$ : anti-up izquierdo	$(u_R)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, Y_U)$
$\eta_3^\alpha$ : anti-down izquierdo	$(d_R)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, Y_D)$

Tabla 7.2: Espinores de Weyl izquierdos para la primera generación del modelo estándar

De otro lado, La invarianza bajo  $U(1)_Y$  requiere que

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_{\nu_L} = Y_{e_L} \\ Y_Q &= Y_{u_L} = Y_{d_L}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

El generador de carga eléctrica  $\hat{Q}$ , se va obtener a partir de una combinación lineal del generador diagonal de  $SU(2)_L$ ,  $T_3$ , y del generador de hipercarga,  $\hat{Y}$ .

Para considerar las interacciones débiles en conjunto con las interacciones electromagnéticas y fuertes, es conveniente definir los campos de la primera generación en términos de los espinores ( $\xi_\alpha$ ) y anti-espinors ( $\eta^\alpha$ ) de Weyl izquierdos, de acuerdo a las convenciones de la Tabla 3.1. El contenido de partículas con sus propiedades de transformación bajo el Grupo semisimple  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  está dado en la Tabla 7.2, donde el  $\mathbf{3}$  o el  $\bar{\mathbf{3}}$  de  $SU(3)_c$  quieren decir que, además, para cada quark

$$u_L = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{pmatrix} \quad (u_R)^\dagger = ((u_R)_1^\dagger \quad (u_R)_2^\dagger \quad (u_R)_3^\dagger), \quad (7.5)$$

respectivamente.

Bajo la simetría  $SU(2)_L$ , los campos transforman como:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L' = \exp(iT^i \theta_i) L \approx (1 + iT^i \theta_i) L \\ Q &\rightarrow Q' = \exp(iT^i \theta_i) Q \approx (1 + iT^i \theta_i) Q \\ e_R &\rightarrow e'_R = e_R \\ u_R &\rightarrow u'_R = u_R \\ d_R &\rightarrow d'_R = d_R. \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde

$$T^i = \frac{\tau^i}{2}, \quad (7.7)$$

y  $\tau^i$  son las matrices de Pauli dadas en la ec. (1.33).

### 7.3. Simetría gauge local $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Los términos de masa de Dirac, usando las convenciones de la Tabla 7.2 no son invariantes bajo la simetría  $SU(2)_L$  porque no hay forma de escribir términos escalares usando combinaciones los



campos  $\Xi$  y  $\eta$ . De la ec. (3.71), y usando la definición para los dobletes adjuntos de  $SU(2)_L$  en la ec. (1.220), el Lagrangiano más general posible para los campos de la Tabla 7.2 compatibles con las simetría de Lorentz y el grupo global  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^2 i\epsilon_{ab} \tilde{\Xi}_i^a \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Xi_i^b + \sum_{i=1}^3 i\eta_i \sigma^\mu \partial_\mu \eta_i^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^2 i\tilde{\Xi}_i \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Xi_i + \sum_{i=1}^3 i\eta_i \sigma^\mu \partial_\mu \eta_i^\dagger \\
&= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu Q + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R \\
&= i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L + i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_L + i(d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu d_L \\
&\quad + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

donde

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} (e_L)^\dagger \\ -(\nu_L)^\dagger \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} (d_L)^\dagger \\ -(u_L)^\dagger \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L &= i\epsilon_{ab} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L \\
&= i\tilde{L}^1 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L^2 - i\left(-\tilde{L}^2\right) \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L^1 \\
&= i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L
\end{aligned}$$

y lo mismo para  $Q$ .

Para obtener la interacciones del modelo estándar, reemplazamos las derivadas normales por derivadas covariantes.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\
&\quad - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{7.10}$$

donde

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu - ig_2 \frac{\tau^i}{2} W_i^\mu - ig_1 Y B^\mu. \tag{7.11}$$

y además

$$\begin{aligned}
\Lambda^a &\equiv \frac{\lambda^a}{2}, \quad a = 1, 2, \dots, 8 && 8 \text{ generadores de } SU(3)_c \\
T^i &\equiv \frac{\tau^i}{2}, \quad i = 1, 2, 3 && 3 \text{ generadores de } SU(2)_L \\
Y &&& \text{generador de } U(1)_Y,
\end{aligned}$$

A este nivel, tanto los 15 fermiones de Weyl (cada quark izquierdo y derecho viene en tres colores), como los 12 bosones gauge, *tienen masa nula*. Necesitamos entonces un mecanismo de ruptura espontánea de simetría para generar por lo menos masas para los tres bosones gauge asociados a la interacción débil, el cual será abordado en la Sección 7.4.

Además,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (7.12)$$

y  $G_{\mu\nu}^a$  está dado en la ec. (5.103).

Bajo una transformación gauge local, las derivadas covariantes de los campos (y por consiguiente los campos) transforman como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu L &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu L)' = \exp(-i\theta_i T^i - i\beta Y_L) \mathcal{D}_\mu L \\ \mathcal{D}_\mu Q &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu Q)' = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\theta_i T^i - i\beta Y_Q) \mathcal{D}_\mu Q \\ \mathcal{D}_\mu \Phi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \Phi)' = \exp(-i\theta_i T^i - i\beta Y_\Phi) \mathcal{D}_\mu \Phi \\ \mathcal{D}_\mu e_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu e_R)' = \exp(-i\beta Y_E) \mathcal{D}_\mu e_R = \exp(-i\beta Q_e) \mathcal{D}_\mu e_R \\ \mathcal{D}_\mu d_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu d_R)' = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Y_D) \mathcal{D}_\mu d_R = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Q_d) \mathcal{D}_\mu d_R \\ \mathcal{D}_\mu u_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu u_R)' = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Y_U) \mathcal{D}_\mu u_R = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Q_u) \mathcal{D}_\mu u_R. \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde  $Q_e = -1$ , etc, son las cargas eléctricas asociadas a los campos.

## 7.4. Ruptura espontánea de simetría

Todas las partículas en este lagrangiano son no masivas. Esto funciona sólo para los gluones y uno de los bosones gauge abelianos, pero no es realista para los bosones gauge cargados. Para solucionar este problema se postula la existencia de un nuevo doblete escalar complejo (y su correspondiente adjunto de SU(2)) con cuatro grados de libertad:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

El “ $\pm$ ” y el superíndice 0, se ponen de forma conveniente para obtener expresiones consistentes. Es claro que  $(\phi^+)^* = \phi^-$ .

Es posible ahora construir invariantes SU(2) con las siguientes combinaciones de campos similares al del término de masa de Dirac en (3.71)

$$\begin{aligned} -\eta_1 \Xi_1 \cdot \tilde{\Phi} - \left( \eta_1 \Xi_1 \cdot \tilde{\Phi} \right)^\dagger &= -\eta_1 \Xi_1 \cdot \tilde{\Phi} - \text{h.c} \\ &= -\eta_1^b \epsilon_{ab} \Xi_1^a \cdot \tilde{\Phi}^b - \text{h.c} \\ &= -(e_R)^\dagger \epsilon_{ab} L^a \tilde{\Phi}^b - \text{h.c} \\ &= (e_R)^\dagger L^1 \tilde{\Phi}^2 + (e_R)^\dagger L^1 \tilde{\Phi}^2 + \text{h.c} \\ &= (e_R^-)^\dagger \nu_L \phi^- + (e_R^-)^\dagger e_L^- \phi^0 + \text{h.c}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde h.c, denota el hermitico conjugado de cada término (para garantizar que el Lagrangiano sea real) y hemos puesto la carga del electrón para hacer explícita la conservación de la carga eléctrica.

Note que

$$(e_R)^\dagger \epsilon_{ab} L^a \tilde{\Phi}^b = (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}. \quad (7.16)$$

El Lagrangiano completo involucrando estos campos es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ & - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ & - \left[ h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger Q \cdot \tilde{\Phi} + h_u (u_R)^\dagger Q \cdot \Phi + \text{h.c} \right] \\ = & \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{WBH} - \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

donde  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ ,

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Resumiendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}} = & i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L \\ & + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ \mathcal{L}_{WBH} = & \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ -\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger Q \cdot \tilde{\Phi} + h_u (u_R)^\dagger Q \cdot \Phi + \text{h.c} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Para el potencial escalar usaremos la forma más conveniente del producto matricial para el invariante de  $SU(2)_L$  por que no hay ambigüedad con el conjugado de un campo escalar.

Para los campos del Lagrangiano, debemos asegurarnos de que todos los términos invariantes gauge locales y renormalizables sean considerados. De hecho, términos de interacción entre fermiones y el campo escalar, correspondiente a una interacción de Yukawa, son invariantes bajo transformaciones  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  si

$$\begin{aligned} Y_L + Y_{\tilde{\Phi}} - Q_e &= 0 \\ Y_Q + Y_{\tilde{\Phi}} - Q_d &= 0 \\ Y_Q + Y_\Phi - Y_u &= Y_Q - Y_{\tilde{\Phi}} - Q_u = 0, \end{aligned}$$

donde hemos fijado  $Y_{\tilde{\Phi}} = -Y_\Phi$ . Solucionado para las hipercargas de los dobletes tenemos

$$\begin{aligned} Y_L &= \frac{1}{2} (-Q_d + 2Q_e + Q_u) = -\frac{1}{2} \\ Y_Q &= \frac{1}{2} (Q_d + Q_u) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$Y_{\tilde{\Phi}} = -Y_{\Phi} = \frac{1}{2} (Q_d - Q_u) = -\frac{1}{2}. \quad (7.20)$$

De este modo, es consistente interpretar los superíndices de  $\phi^+$  y  $\phi^0$  en la ec. (7.14) como las cargas eléctricas de las componentes del doblete de Higgs,  $\Phi$ . El hecho de que la información necesaria y suficiente para determinar las hipercargas requiera el sector completo de quarks y leptones es un indicio de la autoconsistencia sólo al nivel de la simetría completa asociada con las tres interacciones subatómicas que definen el modelo estándar de las interacciones fundamentales.

El potencial escalar contiene los términos

$$V(\Phi) = \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi + \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \quad (7.21)$$

con  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ .

El modelo estándar es entonces una combinación de una teoría gauge local  $SU(3)_c$  con una simetría gauge local con ruptura espontánea de simetría (RES)  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . A continuación nos enfocaremos de momento en la parte leptónica de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  con RES.

## 7.5. Una teoría para leptones de la primera generación

Comenzaremos analizando una versión simplificada del Lagrangiano con sólo los leptones de la primera de generación,

$$\mathcal{L}^{\text{lepton}} = \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} + \mathcal{L}_{WBH} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} - \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{lepton}}, \quad (7.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ \mathcal{L}_{WBH} &= (\widetilde{\mathcal{D}_\mu \Phi}) \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ -\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{lepton}} &= h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + \text{h.c} \end{aligned} \quad (7.23)$$

y sin pérdida de generalidad para las partes del Lagrangiano  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  y  $\mathcal{L}_{WBH}$  que no involucran fermiones.

### 7.5.1. Interacciones débiles fermión-gauge para leptones

Nos enfocaremos de momento en la parte leptónica pues las interacciones para quarks involucran el mismo tipo de cálculos.

Los términos de interacción generados por la simetría gauge para el sector leptónico son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R \\ &\quad + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (-ig_2 T_i W_\mu^i - ig_1 Y_L B_\mu) L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu (-ig_1 Y_R B_\mu) e_R. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Definiendo

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}} = i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R \quad (7.25)$$

$$\mathcal{L}_{WBL} = i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (-ig_2 T_i W_\mu^i - ig_1 Y_L B_\mu) L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu (-ig_1 Y_R B_\mu) e_R.$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WBL} &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (g_2 T_1 W_\mu^1 + g_2 T_2 W_\mu^2 + g_2 T_3 W_\mu^3 + g_1 Y_L B_\mu) L + g_1 Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R B_\mu \\ &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[ \frac{g_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} + g_2 T_3 W_\mu^3 + g_1 Y_L B_\mu \right] L + g_1 Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R B_\mu \\ &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \frac{g_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} L + \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [g_2 T_3 W_\mu^3 + g_1 Y_L B_\mu] L + g_1 Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R B_\mu \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} e_L W_\mu^+ \\ \nu_L W_\mu^- \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{AZL}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde

$$\mathcal{L}_{AZL} = \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [g_2 T_3 W_\mu^3 + g_1 Y_L B_\mu] L + g_1 Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R B_\mu. \quad (7.27)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{g_2}{\sqrt{2}} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} e_L W_\mu^+ \\ \nu_L W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[ \epsilon^{12} \tilde{L}_1 \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- + \epsilon^{21} \tilde{L}_2 \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ \right], \quad (7.28)$$

y usando (7.9)

$$\frac{g_2}{\sqrt{2}} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} e_L W_\mu^+ \\ \nu_L W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[ (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- + (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ \right]. \quad (7.29)$$

De este modo, la simetría gauge genera la interacción deseada con los bosones gauge cargados  $W_\mu^\pm$ . Sin embargo, se generan muchas otras interacciones las cuales deben contener apropiadamente la interacción electromagnética en algún cambio de base.

Entonces

$$\mathcal{L}_{WBL} = \mathcal{L}_{WL} + \mathcal{L}_{AZL}, \quad (7.30)$$

donde

$$\mathcal{L}_{WL} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[ (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- \right]. \quad (7.31)$$

El principal problema con  $\mathcal{L}_{AZL}$  en la ec. (7.27) es que el neutrino izquierdo  $\nu_L$  presente en  $L$  se acopla a los dos bosones gauge neutros  $W_3^\mu$  y  $B^\mu$ . Debemos buscar una base en la cual se pueda recuperar la interacción electromagnética de tal forma que el fotón  $A_\mu$  no se acople a partículas neutras como el neutrino,  $\nu_L$ . Definimos entonces el posible fotón a partir de la rotación

$$\begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

donde  $\theta_W$ , es el ángulo de rotación débil (Weak de sus siglas en inglés) y  $Z^\mu$  es el otro campo que resulta de la rotación a la nueva base que define al fotón  $A^\mu$ . Aplicando esta rotación a (7.27), tenemos que

$$\mathcal{L}_{AZL} = \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [g_2 T_3 (c_W Z_\mu + s_W A_\mu) + g_1 Y_L (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu)] L$$

$$\begin{aligned}
& + g_1 Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) \\
& = \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [g_2 T_3 c_W Z_\mu + g_2 T_3 s_W A_\mu - g_1 Y_L s_W Z_\mu + g_1 Y_L c_W A_\mu] L \\
& \quad - g_1 s_W Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R Z_\mu + g_1 c_W Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R A_\mu \\
& = \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [(g_2 c_W T_3 - g_1 s_W Y_L) Z_\mu + (g_2 s_W T_3 + g_1 c_W Y_L) A_\mu] L \\
& \quad - g_1 s_W Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R Z_\mu + g_1 c_W Y_R (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R A_\mu,
\end{aligned} \tag{7.33}$$

donde  $c_W = \cos \theta_W$ ,  $s_W = \sin \theta_W$ .

Para identificar  $A_\mu$  con el fotón, debemos imponer la condición

$$e\hat{Q} = g_2 s_W T_3 + g_1 c_W \hat{Y}. \tag{7.34}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
e\hat{Q}L & = (g_2 s_W T_3 + g_1 c_W \hat{Y}) L \\
& = (g_2 s_W T_3 + g_1 c_W Y_L) L,
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Usando la definición de  $L$  tenemos que

$$e \begin{pmatrix} Q_\nu \nu_L \\ Q_e e_L \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 0 \\ Q_e e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}g_2 s_W + g_1 c_W Y_L) \nu_L \\ (-\frac{1}{2}g_2 s_W + g_1 c_W Y_L) e_L \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

Igualando los coeficientes que acompañan los campos resultan las dos condiciones

$$0 = \frac{1}{2}g_2 s_W + g_1 c_W Y_L \tag{7.37}$$

$$eQ_e = \left(-\frac{1}{2}g_2 s_W + g_1 c_W Y_L\right) \tag{7.38}$$

una tercera condición surge de imponer que el electrón derecho se acople apropiadamente al fotón

$$\begin{aligned}
e\hat{Q}e_R & = (g_2 s_W T_3 + g_1 c_W \hat{Y}) e_R \\
eQ_e e_R & = g_1 c_W Y_R e_R.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

con estas condiciones podemos despejar tres incógnitas que corresponden a  $g_1 c_W$ ,  $g_2 s_W$  y  $Y_L$ . La primera de ellas la podemos obtener de igualar los coeficientes que acompañan los campos para la tercera condición, teniendo en cuenta que  $\hat{Q} = \hat{Y}$  para los campos derechos los cuales no participan de la interacción débil asociada a  $SU(2)_L$

$$e = g_1 c_W. \tag{7.40}$$

Reemplazando en (7.37)

$$g_2 s_W = -2eY_L, \tag{7.41}$$

y reemplazando ambos resultado en (7.38), obtenemos

$$eQ_e = -\frac{1}{2}e + eY_L, \tag{7.42}$$

de donde podemos despejar  $Y_L$

$$Y_L = Q_e + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \quad (7.43)$$

El resultado final es entonces

$$Y_L = -\frac{1}{2}, \quad e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W. \quad (7.44)$$

Note que el valor para la hipercarga es consistente con el que se obtiene de exigir el Lagrangiano de Yukawa completo para una familia de modelo estándar en la ec. (7.20). La segunda ecuación se puede reemplazar en la ec. (7.34) para obtener la predicción en término de los generadores diagonales

$$\hat{Q} = T_3 + \hat{Y}, \quad (7.45)$$

la cual es válida para cualquier campo fermiónico.

La ec. (7.45), se conoce como la relación de Gell-Mann–Nishijima, y junto con (7.44), establece las condiciones que se deben satisfacer para obtener apropiadamente la QED a partir de la interacción electrodébil asociada al grupo semisimple  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

**Ejercicio:** Demostrar que los valores numéricos de las hipercargas en (7.20) son consistentes con la relación de Gell-Mann–Nishijima (7.45):

$$\hat{Q} = T_3 + \hat{Y}. \quad (7.46)$$

De la segunda ecuación (7.44), podemos expresar el ángulo  $\theta_W$  en términos de  $g_1$  y  $g_2$  como

$$\tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2}. \quad (7.47)$$

A modo de ilustración podemos comprobar los valores numéricos para  $Y_L$  y  $Y_R$  usando directamente la relación de Gell-Mann–Nishijima (7.45)

$$\begin{aligned} \hat{Q}L &= (T_3 + Y_L)L \\ \begin{pmatrix} Q_\nu & 0 \\ 0 & Q_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_\nu \nu_L \\ Q_e e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + Y_L & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + Y_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

de modo que

$$Q_\nu = 0 = \frac{1}{2} + Y_L, \quad Q_e = -1 = -\frac{1}{2} + Y_L, \quad (7.49)$$

lo cual requiere que

$$Y_L = \frac{1}{2}. \quad (7.50)$$

De la misma forma

$$Y_R = Q_e = -1. \quad (7.51)$$

Note que para campos derechos la hipercarga coincide con la carga eléctrica.

Usando la relación entre  $g_2$  y  $g_1$  (7.47) en (7.33)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AZL} = & g_2 s_W \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [(\cot \theta_W T_3 - \tan \theta_W Y_L) Z_\mu + (T_3 + Y_L) A_\mu] L \\ & + g_2 s_W (e_R)^\dagger \sigma^\mu [(0 - \tan \theta_W Y_R) Z_\mu + (0 + Y_R) A_\mu] e_R,\end{aligned}\quad (7.52)$$

donde hemos puesto explícitamente el cero correspondiente a:  $T_3 e_R = 0 e_R$ .

Como el generador asociado a  $A_\mu$  debe ser el generador de carga eléctrica, podemos usar la primera ecuación en (7.44):

$$e = g_2 \sin \theta_W, \quad (7.53)$$

y si además definimos

$$\mathcal{L}_E = g_2 s_W (e_R)^\dagger \sigma^\mu [(0 - \tan \theta_W Y_R) Z_\mu + (0 + Y_R) A_\mu] e_R, \quad (7.54)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AZL} = & e \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (\cot \theta_W T_3 - \tan \theta_W Y_L) L Z_\mu + e \tilde{L} \cdot \gamma^\mu \hat{Q} L A_\mu + \mathcal{L}_E \\ = & e \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[ \cot \theta_W T_3 - \tan \theta_W (\hat{Q} - T_3) \right] L Z_\mu + e \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q} L A_\mu + \mathcal{L}_E \\ = & \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[ \tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] L Z_\mu + e \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q} L A_\mu \\ & + \frac{e}{2c_W s_W} (e_R)^\dagger \sigma^\mu \left[ 0 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] e_R Z_\mu + e (e_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q} e_R A_\mu \\ = & \mathcal{L}_{ZL} + \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}},\end{aligned}\quad (7.55)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} = e \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q} L A_\mu + e (e_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q} e_R A_\mu \quad (7.56)$$

$$\mathcal{L}_{ZL} = \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[ \tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] L Z_\mu + \frac{e}{2c_W s_W} (e_R)^\dagger \sigma^\mu \left[ 0 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] e_R Z_\mu. \quad (7.57)$$

Como las expresiones están en términos de los generadores como operadores, deberían ser válidas para otros conjuntos apropiados de fermiones para ser definidos más adelante.

De la ecuación (7.56)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} = & e \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q} L A_\mu + e (e_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q} e_R A_\mu \\ = & -e \left[ (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right] A_\mu,\end{aligned}\quad (7.58)$$

y la interacción de la electrodinámica cuántica se recupera satisfactoriamente.

Para obtener la interacción requerida de los  $W^\pm$  con el  $\nu_L$  y  $e_L$  dada en la ec (7.31) y genera el fotón con las propiedades adecuadas resumidas en la ec. (7.56), el modelo gauge local  $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$  predice entonces la existencia de nuevas interacciones con un nuevo bosón gauge  $Z_\mu$  dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ZL} = & \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[ \tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] L Z_\mu + \frac{e}{2c_W s_W} (e_R)^\dagger \sigma^\mu \left[ 0 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] e_R Z_\mu \\ = & \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L + (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu [-1 + 2s_W^2] e_L + 2s_W^2 (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right\} Z_\mu\end{aligned}$$



$$= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L - (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + 2s_W^2 \left[ (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right] \right\} Z_\mu. \quad (7.59)$$

Vemos entonces que el  $Z_\mu$  tiene acoplamientos a las partes izquierdas de los leptones y otro acoplamiento que no diferencia partes izquierdas y derechas similar al del fotón, pero suprimido por  $2 \sin^2 \theta_W$ .

Una predicción bastante concreta es que los neutrinos izquierdos se acoplan con el nuevo bosón gauge neutro a través del término de interacción

$$\mathcal{L}_{Z\nu} = \frac{e}{2c_W s_W} (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_L Z_\mu, \quad (7.60)$$

que implica la existencia de corrientes neutras en carga eléctrica y por lo tanto abren la posibilidad de un desbalance de energía completo en colisiones electrón positrón. Dichas corrientes fueron medidas en 1971 y permitieron una primera determinación de los valores experimentales para  $g_2$  y  $\theta_W$ .

Resumiendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ &= \mathcal{L}_{\text{kinetic}} + \mathcal{L}_{WL} + \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{ZL}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

dados en las ecs. (7.25), (7.31), (7.56) y (7.59).

Note que a este nivel el bosón gauge  $Z_\mu$  es no masivo. Sin embargo para explicar porque dicha interacción no había sido observada al momento de su predicción se tiene que asumir que el bosón gauge  $Z_\mu$  debe ser muy masivo para que la interacción sea de corto alcance y por consiguiente suprimida con respecto a la de bosones gauge sin masa.

Por lo tanto, para obtener una teoría realista se debe adicionar un mecanismo de ruptura espontánea de simetría para dar masa a los tres bosones  $W_\mu^+$ ,  $W_\mu^-$  y  $Z_\mu$ . Dicho mecanismo será discutido en la Sección 7.5.2.

### 7.5.2. El gauge unitario

Retornando al doblete de Higgs del modelo estándar en la ec. (??), los cuatro grados de libertad de  $\Phi$ , pueden escribirse en forma polar con la parte real neutra desplazada para generar la ruptura espontánea de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . De este modo, y sin pérdida de generalidad

$$\Phi = e^{iG_j(x)T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}. \quad (7.62)$$

Para  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  tenemos cuatro generadores y cuatro bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (7.62) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone y un campo de Higgs con masa, de manera que quedará un generador no roto correspondiente a una simetría remanente del vacío  $U(1)_Q$

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \tilde{\Phi} \rangle} U(1)_Q. \quad (7.63)$$

Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs, tres bosones gauge masivos, y un bosón gauge sin masa.

Podemos hacer una transformación gauge similar a la de la ec. (??) sobre el campo  $\tilde{\Phi}$ , tal que

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \quad (7.64)$$

que define el *gauge unitario*. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados  $\Phi'$  y  $W'_{\mu\nu}$ .

Comenzaremos analizando la parte escalar del Lagrangiano del Modelo dada en la ec. (7.19) en el gauge unitario

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} \right] \cdot \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H),\end{aligned}\quad (7.65)$$

donde  $V(H)$  dado en la ec. (6.57), incluye el término de masa para el bosón de Higgs (6.58):

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 \quad (7.66)$$

De la ec. (6.102)

$$W_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_3^\mu \end{pmatrix}. \quad (7.67)$$

$\mathcal{D}_\mu$  corresponde a la matrix  $2 \times 2$ , dada en la ec. (6.104), con el reemplazo

$$\mp \frac{i}{2} g_2 W_\mu^3 \rightarrow -i \left( \pm \frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y B_\mu \right) \quad (7.68)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \left( \frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y B_\mu \right) & -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^- & \partial_\mu - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y B_\mu \right) \end{pmatrix}. \quad (7.69)$$

Entonces

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

El correspondiente productor escalar  $SU(2)_L$  es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WBH} &= \frac{1}{2} \left( \partial^\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \right) \cdot \left( \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right) - V(H) \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial^\mu H + i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \right) \cdot \left( \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right) - V(H) \\ &= \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 - V(H) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \partial^\mu H + i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \right] \times \\ &\quad \left[ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right] \\ &= -V(H) + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 +\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} g_2 W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right)^2 (H + v)^2 \quad (7.71)$$

donde la última línea corresponde a la magnitud del “número” complejo:

$$[\partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v)] \quad (7.72)$$

Entonces

$$\mathcal{L}_{WBH} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) + \frac{g_2^2 v^2}{4} W^{\mu-} W_\mu^+ \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 + \mathcal{L}_{ZAH}, \quad (7.73)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} g_2^2 W_3^\mu W_\mu^3 - g_2 g_1 Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu + g_1^2 Y_{\tilde{\Phi}}^2 B^\mu B_\mu \right) (H + v)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} g_2^2 W_3^\mu W_\mu^3 - \frac{1}{2} g_2 g_1 Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu - \frac{1}{2} g_2 g_1 Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu + g_1^2 Y_{\tilde{\Phi}}^2 B^\mu B_\mu \right) (H + v)^2. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Haciendo  $Y_{\tilde{\Phi}} = 1/2$  como en la ec. (7.20),

$$\mathcal{L}_{ZAH} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} W_3^\mu & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2. \quad (7.75)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ -g_1 & g_2 \end{pmatrix}, \quad (7.76)$$

con  $\tan \theta_W = g_1/g$ , tal que  $g \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$ , como en la ec. (7.44). De esta forma podremos comprobar si la misma condición que hace que los neutrinos no se acoplen con el fotón, garantiza el campo neutro  $H$  tampoco se acopla directamente con el fotón.

Note que  $V$  es una matrix ortogonal que satisface  $VV^T = V^T V = \mathbf{1}$ . Si (ver ec. (7.32)),

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (7.77)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} V V^T \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} V V^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \left[ V^T \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} V \right] \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned} V^T \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} V &= \frac{1}{g_2^2 + g_1^2} \begin{pmatrix} g_2^3 + g g_1^2 & -g_2^2 g_1 - g_1^3 \\ +g_2^2 g_1 - g_2^2 g_1 & -g_2 g_1^2 + g_2 g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ -g_1 & g_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g_2^2 + g_1^2} \begin{pmatrix} g_2^3 + g_2 g_1^2 & -g_2^2 g_1 - g_1^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ -g_1 & g_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g_2^2 + g_1^2} \begin{pmatrix} g_2^4 + g^2 g_1^2 + g_2^2 g_1^2 + g_1^4 & g_2^3 g_1 + g_2 g_1^3 - g_2^2 g_1 - g_2 g_1^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} g_2^2 + g_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.79)$$

De este modo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (g_2^2 + g_1^2) Z^\mu Z_\mu \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g_2 v}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_W) Z^\mu Z_\mu \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g_2 v}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Retornando a la ec. (7.73), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2, \end{aligned} \quad (7.81)$$

donde el termino 1 en la expansión binomial  $(H/v + 1)^2$  corresponde al término de masa en cada caso:

- Masas gauge:

$$m_W = \frac{g_2 v}{2} \quad m_Z = \frac{g_2 v}{2 \cos \theta_W}, \quad (7.82)$$

y

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (7.83)$$

- Ver eq. (6.57)

$$\begin{aligned} V(H) &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4 \\ &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( \frac{H}{2v} + 1 \right)^2, \end{aligned} \quad (7.84)$$

con

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2, \quad (7.85)$$

además:

■

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (7.86)$$

tal que

$$g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W. \quad (7.87)$$

**Ejercicio:** Demostrar que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} &= i\tilde{L} \cdot \vec{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ &= \mathcal{L}_{\text{kinetic}} + \mathcal{L}_{WL} + \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{ZL},\end{aligned}\quad (7.88)$$

dados en las ecs. (7.25), (7.31), (7.56) y (7.59), usando directamente la expresión para la derivada covariante para un doblete, en esta caso  $L$ , dada en la ec. (7.69).

### 7.5.3. Auto interacciones

El Lagrangiano gauge

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \quad (7.89)$$

Se debe expresar en la base de  $Z_\mu$ ,  $A_\mu$ . Los detalles están en <https://www.overleaf.com/read/pxkqqdhrqyrk>

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\tilde{G}_a^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ &\quad - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2\sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\ &\quad - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ &\quad - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ &\quad - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu),\end{aligned}\quad (7.90)$$

donde

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_\nu^\nu - \partial^\nu A_\mu^\mu, & (F_W)_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \\ Z^{\mu\nu} &= \partial^\mu Z_\nu^\nu - \partial^\nu Z_\mu^\mu,\end{aligned}\quad (7.91)$$

### 7.5.4. Lagrangiano de Yukawa para leptones

En el gauge unitario

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{lepton}} &= h_e (e_R)^\dagger \epsilon^{ab} L_a \tilde{\Phi}_b + \text{h.c} \\ &= \frac{h_e}{\sqrt{2}} \left[ (e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L \right] [H(x) + v] \\ &= \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \left[ (e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L \right] \left[ \frac{H(x)}{v} + 1 \right].\end{aligned}\quad (7.92)$$

Note que de forma autoconsistente

$$-Y_R + Y_L - Y_\Phi = -Q_e + Y_L - Y_\Phi = 1 - 1/2 - 1/2 = 0. \quad (7.93)$$

Definiendo

$$m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \quad (7.94)$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e (e_L)^\dagger e_R + \frac{m_e}{v} (e_L)^\dagger e_R H + \text{h.c.} \quad (7.95)$$

Definiendo los fermiones de Dirac, términos de espinores de Weyl como

$$e = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \quad (7.96)$$

y usando la ec. (3.82), podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= m_e \bar{e} e \left[ \frac{H(x)}{v} + 1 \right] \\ &= m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} \bar{e} e H \end{aligned}$$

Vemos entonces que si la masa de los fermiones no es fundamental sino emergente, necesariamente se predice la existencia de interacciones entre fermiones y el Higgs que son proporcionales a la masa del fermión que recibe la masa desde la RES.

### 7.5.5. Lagrangiano completo para leptones

Recopilando los resultados para  $\mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}}$  (7.61),  $\mathcal{L}_{WBH}$  (7.81),  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  (7.90),  $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  (7.92), y tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{lepton}} &= i \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i (e_R)^* \sigma^\mu \partial_\mu e_R + m_e \left[ (e_L)^\dagger e_R + \text{h.c.} \right] \left( \frac{H}{v} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( \frac{H}{2v} + 1 \right)^2 \\ &\quad + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\ &\quad + e (e_L)^* \cdot \bar{\sigma}^\mu e_L A_\mu + e (e_R)^* \sigma^\mu e_R A_\mu \\ &\quad + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L - (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + 2 \sin^2 \theta_W [(e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^* \sigma^\mu e_R] \right\} Z_\mu \\ &\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} [(\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\ &\quad - i e \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - i e \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& -e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& -e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu).
\end{aligned} \tag{7.97}$$

### 7.5.6. Notación de Dirac

Consideremos alguno de los términos que involucra interacciones sólo entre fermiones izquierdos, como la parte  $SU(2)_L$  pura de la corriente de electrones con  $Z^\mu$

$$\begin{aligned}
(e_L) \bar{\sigma}^\mu e_L &= \frac{1}{2} (e_L) \bar{\sigma}^\mu e_L + \frac{1}{2} (e_L) \bar{\sigma}^\mu e_L \\
&= \left[ \frac{1}{2} (e_L) \bar{\sigma}^\mu e_L + \frac{1}{2} (e_R) \sigma^\mu e_R \right] - \left[ \frac{1}{2} (e_R) \sigma^\mu e_R - \frac{1}{2} (e_L) \bar{\sigma}^\mu e_L \right],
\end{aligned} \tag{7.98}$$

Ya sabemos que el primer corchete corresponde a una corriente vectorial de Lorentz, V. El segundo término corresponde a su vez a lo que se conoce como corriente vectorial axial de Lorentz, A. De esta manera, la corriente izquierda corresponde a una corriente tipo V-A.

Para poder describir la corriente axial de campos de Weyl en términos de espinores de Dirac, debemos definir

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \\
&= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.99}$$

donde

$$-\sigma_0 = i\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \tag{7.100}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
-\sigma_0 &= i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= -\mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{7.101}$$

Entonces

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (7.102)$$

Con esto podemos definir los proyectores

$$P_L = \frac{\mathbf{1}_{4 \times 4} - \gamma_5}{2} \quad P_R = \frac{\mathbf{1}_{4 \times 4} + \gamma_5}{2}. \quad (7.103)$$

En adelante se dejará implícito el caracter  $4 \times 4$  de la indentidad.

Sea  $\Psi$  un espinor de Dirac construido a partir de dos espinores de Weyl

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (7.104)$$

Tenemos las sigientes propiedades

$$\begin{aligned} P_L \Psi &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi & P_R \Psi &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.105)$$

Además, as matrices  $P_{L,R}$  tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (7.106)$$

Usando la ec. (B.63)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (7.107)$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{L,R} &= (\Psi_{L,R})^\dagger \gamma^0 \\ &= (P_{L,R} \Psi)^\dagger \gamma^0 \\ &= \Psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0, \end{aligned} \quad (7.108)$$

y usando (7.107)

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{L,R} &= \Psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} \\ &= \overline{\Psi} P_{R,L}. \end{aligned} \quad (7.109)$$

De modo que

$$\overline{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L = \overline{\Psi} P_R \gamma^\mu P_L \Psi = \overline{\Psi} \gamma^\mu P_L^2 \Psi = \overline{\Psi} \gamma^\mu P_L \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L \Psi$$



$$\begin{aligned}
&= (\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}^\mu \psi_L \end{pmatrix} \\
&= (\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L.
\end{aligned} \tag{7.110}$$

Similarmente

$$\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R = \bar{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R. \tag{7.111}$$

Podemos extender ahora los resultados de la ec. (3.82) para corrientes escalares y vectoriales. En términos de los campos de Weyl una corriente escalar (S), pseudoscalar (P), vectorial (V), axial (A), V-A y V+A de espinores Dirac, se pueden escribir respectivamente como

$$\begin{aligned}
\text{S:} & \quad \bar{\Psi} \Psi = (\psi_R)^\dagger \psi_L + (\psi_L)^\dagger \psi_R \\
\text{P:} & \quad \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi = (\psi_L)^\dagger \psi_R - (\psi_R)^\dagger \psi_L \\
\text{V:} & \quad \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \\
\text{A:} & \quad \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R - \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \\
\text{V-A:} & \quad \bar{\Psi} \gamma^\mu P_L \Psi = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \\
\text{V+A:} & \quad \bar{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R.
\end{aligned} \tag{7.112}$$

Para escribir el Lagrangiano en términos de espinores de 4 componentes, debemos reescribir los acoplamientos fermiónicos del Lagrangiano en (7.97). Entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ &= \bar{\nu} P_R \gamma^\mu P_L e W_\mu^+ \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu P_L^2 e W_\mu^+ \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu P_L e W_\mu^+ \\
&= \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+,
\end{aligned} \tag{7.113}$$

y además la parte  $\mathcal{L}_{ZL}$  dada en la ec. (7.59). Para poder tener las corrientes en términos de la ec. (7.112), debemos sumar y restar  $\frac{1}{2} (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ZL} &= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R - (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L \right] + \left( -\frac{1}{2} + 2s_W^2 \right) \left[ (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right] \right\} Z_\mu
\end{aligned} \tag{7.114}$$

Claramente la corriente de neutrinos es del tipo V-A, pero la corriente de electrones tiene dos contribuciones: una tipo A con coeficiente 1/2 y una tipo V con coeficiente  $-1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$ , como se muestra en la Tabla 7.3. Entonces

$$\mathcal{L}_{ZL} = \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu P_L \nu + \frac{1}{2} \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e + \left( -\frac{1}{2} + 2s_W^2 \right) \bar{e} \gamma^\mu e \right\} Z_\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \nu + \bar{e} \gamma^\mu \left[ \left( -\frac{1}{2} + 2s_W^2 \right) + \frac{1}{2} \gamma_5 \right] e \right\} Z_\mu \\
&= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \nu + \bar{e} \gamma^\mu \left[ \frac{(-1 + 4s_W^2) + \gamma_5}{2} \right] e \right\} Z_\mu, \tag{7.115}
\end{aligned}$$

Las otras corrientes del modelo con leptones son la corriente tipo S generada por el Higgs, la tipo V generada por el fotón y la V-A generada por los bosones gauge cargados  $W_\mu^\pm$ .

### 7.5.7. Lagrangiano completo para leptones en notación de Dirac

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & i\bar{\nu} \gamma^\mu \partial_\mu \nu + \bar{e} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) e + \frac{m_e}{v} \bar{e} e H \\
& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( \frac{H}{2v} + 1 \right)^2 \\
& + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( \frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\
& + e \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \\
& + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \nu + \bar{e} \gamma^\mu \left[ \frac{(-1 + 4s_W^2) + \gamma_5}{2} \right] e \right\} Z_\mu \\
& + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\
& - ie \cot \theta_W [(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu}] \\
& - ie [(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu}] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} [(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-}] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu). \tag{7.116}
\end{aligned}$$

Una vez fijados los acoplamientos fundamentales:  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $v$  y  $\lambda$ , los acoplamientos del Lagrangiano pasan a ser predicciones. Es de anotar que la mayoría de ellos ya han sido medidos en los valores predichos por el Lagrangiano anterior. Algunos de los observables asociados con dichos acoplamientos serán discutidos en la Sección 7.9.

## 7.6. Una teoría para la primera generación

### 7.6.1. Interacciones débiles Fermión-gauge

De la ec. (7.10) tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R. \tag{7.117}$$

Donde,

$$\begin{aligned}\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q &= \epsilon_{ab} \tilde{Q}^a \bar{\sigma}^\mu (\mathcal{D}_\mu Q)^b \\ \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L &= \epsilon_{ab} \tilde{L}^a \bar{\sigma}^\mu (\mathcal{D}_\mu L)^b.\end{aligned}\quad (7.118)$$

Note que las partes derechas involucran necesesariamente una simetría  $U(1)_Y$  de la que debemos obtener la interacción electromagnética entre fermiones derechos. Por eso la implementación la simetría  $SU(2)_L$  debe hacerse en el contexto del Grupo Gauge semisimple  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

### 7.6.2. Interacciones fermiónicas para la primera generación

Generalizando para los otros campos, tenemos

$$\mathcal{L}_{AZL} \rightarrow \sum_{F=Q,L,e_R,d_R,u_R} \left\{ \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu [\tau_3 - 2s_W^2 Q_F] F Z_\mu + e \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu Q_F F A_\mu \right\}, \quad (7.119)$$

con

$$\tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \rightarrow F^\dagger \sigma^\mu \quad \text{for } F = e_R, d_R, u_R. \quad (7.120)$$

Generalizando para todos los campos:

$$\mathcal{L}_{WL} \rightarrow \frac{g_2}{\sqrt{2}} [\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.}] . \quad (7.121)$$

Usando los acoplamientos gauge de los quarks con los gluones (5.112), de los fermiones con el  $W_\mu^\pm$  (7.121) y con  $Z_\mu$  y  $A_\mu$  (7.119) para expandir  $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$  en (7.117), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ &= i(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_L + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu d_L + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R \\ &\quad + i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L \\ &\quad + g_s \left( (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} u_L + (u_R)^\dagger \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} u_R + (d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} d_L + (d_R)^\dagger \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} d_R \right) G_\mu^a \\ &\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} [(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\ &\quad + \sum_{F=Q,L,e_R,d_R,u_R} \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu [\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_L] F Z_\mu \\ &\quad + e \left[ (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_e e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_e e_R \right. \\ &\quad \left. + (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_u u_L + (u_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R + (d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_d d_L + (d_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right] A_\mu. \quad (7.122)\end{aligned}$$

### 7.6.3. Lagrangiano de Yukawa

En el gauge unitario

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = h_e (e_R)^\dagger \epsilon^{ab} L_a \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger \epsilon^{ab} Q_a \tilde{\Phi}_b + h_u (u_R)^\dagger \epsilon_{ab} Q_a \Phi_b + \text{h.c.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ h_e((e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L) + h_d((d_L)^\dagger d_R + (d_R)^\dagger d_L) + h_u((u_L)^\dagger u_R + (u_R)^\dagger u_L) \right] \times [H(x) + v] . \quad (7.123)$$

Definiendo

$$m_f = \frac{h_f v}{\sqrt{2}} \quad (7.124)$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e(e_L)^\dagger e_R + m_d(d_L)^\dagger d_R + m_u(u_L)^\dagger u_R + \frac{m_e}{v}(e_L)^\dagger e_R H + \frac{m_d}{v}(d_L)^\dagger d_R H + \frac{m_u}{v}(u_L)^\dagger u_R H + \text{h.c.} . \quad (7.125)$$

Definiendo los fermiones de Dirac, términos de espinores de Weyl como

$$e = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_L \\ d_R \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (7.126)$$

y usando la ec. (3.82), podemos escribir

$$\mathcal{L} = \frac{v}{\sqrt{2}} (h_e \bar{e}e + h_d \bar{d}d + h_u \bar{u}u) \left[ \frac{H(x)}{v} + 1 \right] .$$

Definiendo

$$m_f = \frac{h_f v}{\sqrt{2}} \quad (7.127)$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v} \bar{e}e H + \frac{m_d}{v} \bar{d}d H + \frac{m_u}{v} \bar{u}u H . \quad (7.128)$$

Vemos entonces que si la masa de los fermiones no es fundamental sino emergente, necesariamente se predice la existencia de interacciones entre fermiones y el Higgs!

#### 7.6.4. Lagrangiano completo para la primera generación en el gauge unitario

Recopilando los resultados para  $\mathcal{L}_{WBH}$  (7.81),  $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  (7.125),  $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$  (7.119), y  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  (7.90), tenemos para  $f = \nu_L, e_L, e_R, u_L, u_R, d_L, d_R$ ;  $q = u_{L,R}, d_{L,R}$  con

$$f' = \begin{cases} e & \text{for } f = \nu \\ d & \text{for } f = u \end{cases}, \quad \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu = \begin{cases} f^\dagger \bar{\sigma}^\mu & \text{for } f = \nu_L, e_L, d_L, u_L \\ f^\dagger \sigma^\mu & \text{for } f = e_R, d_R, u_R \end{cases}, \quad (7.129)$$

$$t_f = \begin{cases} 1 & \text{for } f = \nu_L, u_L \\ -1 & \text{for } f = e_L, d_L, \\ 0 & \text{for } f_R \end{cases} \quad (7.130)$$

que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & \sum_f i \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu f + \sum_{g=e,u,d} m_g \left[ (g_L)^\dagger g_R + \text{h.c} \right] \\
& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
& + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \tilde{q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left( \frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu Q_f f A_\mu \\
& + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu [t_f - 2s_W^2 Q_f] f Z_\mu \\
& + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{f=\nu,u} (f_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu f'_L W_\mu^+ + \text{h.c} \right] + \sum_{g=e,u,d} \frac{m_g}{v} \left[ (g_L)^\dagger g_R + \text{h.c} \right] H \\
& - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) . \tag{7.131}
\end{aligned}$$

## 7.7. Notación de Dirac para la primera generación

Para escribir este Lagrangiano en terminos de espinores de 4 componentes, tomemos algunos casos específicos:

■

$$\begin{aligned}
& \left[ Q^\dagger \bar{\sigma}^\mu \left( \tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_Q \right) Q - 2s_W^2 u_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R - 2s_W^2 d_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right] Z_\mu \\
= & \left[ (u_L^\dagger \quad d_L^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} 1 - 2s_W^2 \hat{Q}_u & 0 \\ 0 & -1 - 2s_W^2 \hat{Q}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right. \\
& \left. - 2s_W^2 u_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R - 2s_W^2 d_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right] Z_\mu \\
= & \left\{ u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_L - d_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L - 2s_W^2 [u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu Q_u u_L + u_R^\dagger \sigma^\mu Q_u u_R + d_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu Q_d d_L + d_R^\dagger \sigma^\mu Q_d d_R] \right\} Z_\mu
\end{aligned}$$

	$u$	$d$	$\nu_e$	$e$
$2v_f$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$1$	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$
$2a_f$	$1$	$-1$	$1$	$-1$

Tabla 7.3: Acoplamientos de corrientes neutras

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u - \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d - 2s_W^2 (\bar{u} \gamma^\mu Q_u u + \bar{d} \gamma^\mu Q_d d) \right] Z_\mu \\
&= \left\{ \bar{u} \gamma^\mu \left[ \left( \frac{1}{2} - 2s_W^2 Q_u \right) - \frac{1}{2} \gamma_5 \right] u + \bar{d} \gamma^\mu \left[ \left( -\frac{1}{2} - 2s_W^2 Q_d \right) + \frac{1}{2} \gamma_5 \right] d \right\} Z_\mu \\
&= [\bar{u} \gamma^\mu (v_u - a_u \gamma_5) u + \bar{d} \gamma^\mu (v_d - a_d \gamma_5) d] Z_\mu,
\end{aligned} \tag{7.132}$$

donde

$$v_f = T_3^f - 2 \sin^2 \theta_W Q_f \quad a_f = T_3^f \gamma_5 \tag{7.133}$$

Los valores explícitos para  $v_f$  y  $a_f$  en el modelo estándar, están dados en la Tabla 7.3.

Usando las expresiones para pasar de fermiones  $L, R$  a los fermiones de Dirac de cuatro componentes, y las ecuaciones (7.113), (7.132) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i \bar{u} \gamma^\mu \partial_\mu u + i \bar{d} \gamma^\mu \partial_\mu d + i \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + i \bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L \\
&\quad + g_s \left( \bar{u} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} u + \bar{d} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} d \right) G_a^\mu \\
&\quad + \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ + \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d W_\mu^+ + \text{h.c.}] + \sum_{f=u,d,\nu,e} \frac{e}{2c_W s_W} \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f \\
&\quad + e (\bar{e} \gamma^\mu \hat{Q}_e e + \bar{u} \gamma^\mu Q_u u + \bar{d} \gamma^\mu Q_d d) A_\mu \\
&= \sum_{f=u,d,\nu,e} i \bar{f} \gamma^\mu \partial_\mu f + \sum_{q=u,d} g_s \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q G_a^\mu \\
&\quad + \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ + \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\
&\quad + \sum_{f=u,d,\nu,e} \frac{e}{2c_W s_W} \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f \\
&\quad + e \sum_{f=u,d,\nu,e} \bar{f} \gamma^\mu \hat{Q}_f f A_\mu,
\end{aligned} \tag{7.134}$$

donde  $Q_f$  están dadas en la Tabla 7.1 y  $v_f, a_f$  en la Tabla 7.3.

Recopilando los resultados para  $\mathcal{L}_{WBH}$  (7.81),  $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$  (7.128),  $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$  (7.134), y  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  (7.90), tenemos para  $f = \nu_e, e, u, d$ ;  $q = u, d$  [con  $f' = e$  ( $d$ ) para  $f = \nu_e$  ( $u$ )], podemos escribir en notación de Dirac:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 \text{ gen} &= \sum_f \bar{f} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f \\
&\quad - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
& + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left( \frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu \\
& + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\
& + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_{f=\nu_e, u} \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\
& - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right).
\end{aligned}$$

donde  $v_f$ ,  $a_f$  están definidos en la ec. (7.133) y evaluados en la Tabla 7.3.

## 7.8. Dinámica de sabor

### 7.8.1. Dos generaciones leptónicas

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix} : \quad L_1 = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} \quad e_R^i : e_R, \mu_R. \quad (7.135)$$

Las interacciones de Yukawa necesitan explicar 2 autovalores correspondientes a las masas del electrón y el muón y las interacciones de corrientes cargadas no involucran observables adicionales pues hay implícita una hipótesis de universalidad cuando se define el neutrino electrónico como el que se acopla al electrón y el neutrino muónico como el que se acopla al muón. Por lo tanto el Lagrangiano más general se obtiene simplemente adicionando una segunda familia que no tiene ningún tipo de mezclas con la primera en ningún sector de Lagrangiano. Lo mismo aplica al caso de tres generaciones que se discutirá en detalle más adelante. Por lo tanto postpondremos la discusión al caso de tres generaciones.

### 7.8.2. Dos generaciones de quarks

$$Q_i^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^{i\alpha} \\ d_L^{i\alpha} \end{pmatrix} : \quad Q_1^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix}, \quad Q_2^\alpha = \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix}, \quad u_R^i : u_R, c_R, \\ d_R^i : d_R, s_R. \quad (7.136)$$

Cuando el modelo electrodébil para dos generaciones de quarks fue formulada por Sheldon Glashow, John Iliopoulos and Luciano Maiani in 1970 (y conocido como el mecanismo GIM [1]) se predijo la existencia del quark  $c$ , el cual se descubrió finalmente en 1974. En este caso el potencial de Yukawa deber dar cuenta de las cuatro masas para los quarks y en principio dejar abierta la posibilidad que cualquier quark de isospín débil hacía arriba pueda convertirse en cualquier quark de isospín hacia abajo a través de las corrientes cargadas.

Para ilustrar la situación consideremos mezclas sólo en el sector down (El caso más general se tratara más adelante en el contexto de tres generaciones)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk}}^{ud} &= \left[ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + M_{11}^d (d_R)^\dagger d'_L + M_{12}^d (d_R)^\dagger s'_L + M_{21}^d (s_R)^\dagger d'_L + M_{22}^d (s_R)^\dagger s'_L \right] \times \\ &\quad \left( \frac{H}{v} + 1 \right) \\ &= \left\{ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + [(d_R)^\dagger \quad (s_R)^\dagger] \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \end{pmatrix} \right\} \left( \frac{H}{v} + 1 \right). \end{aligned} \quad (7.137)$$

Definimos entonces la matriz de masa del sector down para dos familias como

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix}. \quad (7.138)$$

Una matriz general es más simple de diagonalizar que una matriz simétrica, pues es suficiente usar una única multiplicación matricial con una matriz de rotación<sup>1</sup>

$$V_c = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix}, \quad (7.139)$$

bien sea a izquierda o a derecha, es decir, la otra matriz que en el caso simétrico corresponde a la transpuesta de la matriz de rotación, en el caso general se puede escoger como la identidad. Si escogemos multiplicar a izquierda, no se generarían mezclas en ningún otro sector de Lagrangiano. Por lo tanto escogeremos el caso más interesante de multiplicación a derecha, es decir

$$M \cdot V = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix}. \quad (7.140)$$

El problema se puede invertir, de manera que podemos determinar las entradas de la matriz en términos de los autovalores  $m_d$ ,  $m_s$  y el ángulo de mezcla de Cabibbo  $\theta_c$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d \cos \theta_c & -m_d \sin \theta_c \\ m_s \sin \theta_c & m_s \cos \theta_c \end{bmatrix}. \quad (7.141)$$

---

<sup>1</sup>donde  $\theta_c$  es el ángulo de Cabibbo [1]



Haciendo explícitamente la rotación de la base de interacción a la base de autoestados de masa

$$\begin{bmatrix} d'_L \\ s'_L \end{bmatrix} = V_c \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \end{bmatrix}, \quad (7.142)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk}}^{ud} &= \left\{ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + [(d_R)^\dagger \quad (s_R)^\dagger] \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} V_c V_c^T \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \end{pmatrix} \right\} \left( \frac{H}{v} + 1 \right) \\ &= \left\{ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + [(d_R)^\dagger \quad (s_R)^\dagger] \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} \right\} \left( \frac{H}{v} + 1 \right) \\ &= \left[ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + m_d (d_R)^\dagger d_L + m_s (s_R)^\dagger s_L \right] \left( \frac{H}{v} + 1 \right). \end{aligned} \quad (7.143)$$

El único sector afectado por la rotación (ver la demostración general más adelante en la Sección 7.8.3) es el de las corrientes cargadas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WQ} &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} [(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d'_L W_\mu^+ + (c_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu s'_L W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ [(u_L)^\dagger \quad (c_L)^\dagger] \bar{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} d'_L \\ s'_L \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\} \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ [(u_L)^\dagger \quad (c_L)^\dagger] \bar{\sigma}^\mu V_c \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\} \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ [(u_L)^\dagger \quad (c_L)^\dagger] \bar{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} \cos \theta_c d_L + \sin \theta_c s_L \\ -\sin \theta_c d_L + \cos \theta_c s_L \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\} \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ [\cos \theta_c (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L + \sin \theta_c (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu s_L - \sin \theta_c (c_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L + \cos \theta_c (c_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu s_L] W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\} \end{aligned} \quad (7.144)$$

De hecho, la constante de Fermi asociada al decaimiento débil del quark down,  $G_\beta$ , también es conocida y resulta ser diferente a la constante de Fermi asociada al decaimiento del muón,  $G_F$ . Sin embargo, la posibilidad de la mezcla nos permite mantener una única constante de Fermi tal que

$$G_\beta = G_F V_{c11} = G_F \cos \theta_c. \quad (7.145)$$

Esta expresión será discutida más en detalle en la sección de fenomenología 7.9.

La explicación que hemos presentado de porque la constante  $G_\beta$  asociada al decaimiento del protón es menor que la correspondiente constante  $G_F$  asociada al decaimiento del muon recibe el nombre de mecanismo GIM []. Este mecanismo predice las transiciones intergeneracionales  $s \rightarrow u W_\mu^-$  y  $c \rightarrow d W_\mu^-$  las cuales se han medido con las probabilidades esperadas.

Es de anotar que usar una segunda matriz de rotación diferente a la identidad no afecta el resultado, como demostraremos a continuación en la Sección 7.8.3 para el caso de tres generaciones.

### 7.8.3. Tres generaciones

El Modelo Estándar esta compuesto de las siguientes tres familias de fermiones  $i = 1, 2, 3$ . A cada familia se le asigna una carga de *sabor* diferente

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix} : \quad L_1 = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad e_R^i : e_R, \mu_R, \tau_R$$

$$Q_i^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^{i\alpha} \\ d_L^{i\alpha} \end{pmatrix} : \quad Q_1^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix} \quad Q_2^\alpha = \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix} \quad Q_3^\alpha = \begin{pmatrix} t_L^\alpha \\ b_L^\alpha \end{pmatrix} \quad u_R^i : u_R, c_R, t_R \\ d_R^i : d_R, s_R, b_R. \quad (7.146)$$

Con

$$Y_{L_i} = -\frac{1}{2} \quad Y_{Q_i} = \frac{1}{6} \quad Y_{e_R^i} = -1 \quad Y_{u_R^i} = \frac{2}{3} \quad Y_{d_R^i} = -\frac{1}{3}. \quad (7.147)$$

De los procesos entre familias, es decir de cambio de sabor, sabemos que

- No se han observado procesos de corrientes neutras que cambian sabor.
- Los bosones gauge cargados  $W_\mu^\pm$  decaen siempre a leptones de la misma generación y con la misma intensidad.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\tilde{Q}'_i \bar{\sigma}^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu Q'^i + i\tilde{L}'_i \bar{\sigma}^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu L'^i + i(e'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R'^i + i(d'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R'^i + i(u'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R'^i \\ & - \sum_{ij} \left( h_{ij}^E (e'_R)_i^\dagger L'_j \cdot \tilde{\Phi} + h_{ij}^D (d'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \tilde{\Phi} + h_{ij}^U (u'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \Phi + \text{h.c} \right) \\ & - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2. \end{aligned} \quad (7.148)$$

Para aclarar la notación, obviando de momento la definición definitiva de  $h_{ij}$  y las primas sobre los campos, consideremos el Lagrangiano de Yukawa para el sector down

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & h_{ij}^D (d'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \tilde{\Phi} + \text{h.c} \\ \supset & - h_{ij}^D d_{Ri}^\dagger \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a Q_j^b + \text{h.c} \\ \supset & - h_{ij}^D \epsilon_{ab} d_{Ri}^\dagger \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^b + \text{h.c} \\ \supset & - h_{ij}^D \epsilon_{ab} (d_{R\gamma}^\dagger)_i^\alpha \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^{b\gamma} + \text{h.c}, \end{aligned} \quad (7.149)$$

donde  $i, a, \gamma, \alpha$  son índices en los espacios de familia,  $SU(2)_L$ ,  $SU(3)_c$  y de Weyl, respectivamente. Por ejemplo el primer termino de la sumatoria

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & h_{11}^D (d_{R1}^\dagger)_1^\alpha \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^1 Q_{1\alpha}^{21} + \dots \\ \supset & h_{11}^D \overline{d_R^r} \phi^{0*} d_L^r + \dots \end{aligned} \quad (7.150)$$

corresponde a la interacción de Yukawa del quark down rojo ( $r$ ) con un campo escalar complejo neutro en carga eléctrica pero de isospín débil 1/2. En forma compacta la primera expresión en la ec. (7.149) puede escribirse como (en el gauge unitario)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{h}^D \mathbf{Q}' \cdot \tilde{\Phi} + \text{h.c} \\ \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{h}^D \left( \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{d}'_L + \text{h.c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\supset (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D}{\sqrt{2}} H(x) \mathbf{d}'_L + (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D v}{\sqrt{2}} \mathbf{d}'_L + \text{h.c.} \\
&\supset (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D}{\sqrt{2}} H(x) \mathbf{d}'_L + (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{M}^D \mathbf{d}'_L + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.151}$$

La matrix  $3 \times 3$   $\mathbf{M}^D$  es en general una matriz compleja no diagonal, la cual se debe diagonalizar con una transformación biunitaria (de similaridad). Retornado a la ec. (7.148), tenemos que para definir apropiadamente la masa de los quarks, rotamos de los autoestados de interacción a los autoestados de masa con la matrices unitarias

$$d_{R,Lj}' = (V_{R,L}^D)_{jk} d_{R,Lk} \quad (d'_{R,L})_j^\dagger = (d'_{R,L})_k^\dagger (V_{R,L}^D)_{kj}^\dagger \tag{7.152}$$

Tal que

$$(V_{R,L}^D)_{ij}^\dagger (V_{R,L}^D)_{jk} = \delta_{ik} \quad (V_R^D)_{ki}^\dagger M_{ij}^D (V_L^D)_{jl} = m_k^D \delta_{kl} \tag{7.153}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_R^{D\dagger} (\mathbf{M}^D \mathbf{M}^{D\dagger}) \mathbf{V}_R^D &= (\mathbf{V}_R^{D\dagger} \mathbf{M}^D \mathbf{V}_L^D) (\mathbf{V}_L^{D\dagger} \mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{V}_R^D) \\
&= \mathbf{M}_{\text{diag}}^D \mathbf{M}_{\text{diag}}^{D\dagger},
\end{aligned} \tag{7.154}$$

donde  $\mathbf{M}_{\text{diag}}^D = \text{diag}(m_1^D, m_2^D, m_3^D)$ ,

$$\mathbf{M}_{\text{diag}}^D = \mathbf{V}_R^{D\dagger} \mathbf{M}^D \mathbf{V}_L^D. \tag{7.155}$$

Similarmente

$$\mathbf{V}_L^{D\dagger} (\mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{M}^D) \mathbf{V}_L^D = \mathbf{M}_{\text{diag}}^{D\dagger} \mathbf{M}_{\text{diag}}^D, \tag{7.156}$$

Con definiciones similares para los campos  $u_i$  y  $e_i$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &\supset (d'_R)_i^\dagger M_{ij}^D d'_{Lj} \\
&= (d_R)_k^\dagger (V_R^D)_{ki}^\dagger M_{ij}^D (V_L^D)_{jl} d_{Ll} \\
&= (d_R)_k^\dagger m_k^D \delta_{kl} d_{Ll} \\
&= m_k^D (d_R)_k^\dagger d_{Lk}
\end{aligned} \tag{7.157}$$

Para las diferentes combinaciones de términos de corrientes

$$\begin{aligned}
(u'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu d'_{Li} &= (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^D)_{il} d_{Ll} \\
&= V_{kl} (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_{Ll} \\
(\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu e'_{Li} &= (\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^E)_{ij} e_{Lj} \\
&= (\nu'_L)_i^\dagger (V_L^E)_{ij} \bar{\sigma}^\mu e_{Lj} \\
&= (\nu_L)_j^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_{Lj}
\end{aligned} \tag{7.158}$$

Donde hemos definido la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) como

$$V_{\text{CKM}} = V_L^{U\dagger} V_L^D$$

$$V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} = V_L^{D\dagger} V_L^U V_L^{U\dagger} V_L^D = \mathbf{1} \Rightarrow \sum_j V_{ij}^\dagger V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j V_{ji}^* V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j |V_{ji}|^2 = \sum_j |V_{ij}|^2 = 1 \quad (7.159)$$

y los autoestados débiles de los neutrinos como

$$\nu_{L_i}' = (V_L^{E\dagger})_{ij} \nu_{L_j} \quad (7.160)$$

Con esta definición, las corrientes débiles cargadas para los leptones siguen siendo universales. Similarmemente

$$\begin{aligned} (u_L')_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{L_i}' &= u_{L_k}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^U)_{il} u_{L_l} \\ &= \delta_{kl} (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{L_l} \\ &= (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{L_k} \end{aligned} \quad (7.161)$$

De modo que todas las corrientes neutras permanecen universales después de la redefinición de los campos fermiónicos. A éste resultado, basado en la unitariedad de las transformaciones biunitarias se le llama *Mecanismo GIM*. En muchas extensiones del Modelo Estándar las matrices que transforman los fermiones a sus autoestados de masa no son unitarias y dan lugar a corrientes débiles neutras que cambian sabor (FCNC de sus siglas en inglés).

Teniendo en cuenta estos resultados podemos escribir finalmente el Lagrangiano completo del Modelo Estándar en la Gauge Unitario, para los fermiones de Dirac:

$$f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b; \quad q = u, c, t, d, s, b; \quad l = e, \mu, \tau \quad (7.162)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} &= \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f \\ &\quad - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\ &\quad + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\ &\quad + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left( \frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu \\ &\quad + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\ &\quad + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_{l=e}^\tau \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \sum_{ij} V_{\text{CKM}}^{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_j W_\mu^+ + \text{h.c} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\ &\quad - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ &\quad - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& -\frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right).
\end{aligned} \tag{7.163}$$

donde  $m_{\nu_l} = 0$ .

El caso de tres generaciones predice entonces tres ángulos de mezcla  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$ , y una fase compleja  $\delta$ , asociadas a la matrix de rotación unitaria  $V_{\text{CKM}}$

$$\begin{aligned}
V_{\text{CKM}} &= \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.164}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{7.165}$$

donde  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ .

La fase compleja  $\delta$  se parametriza en términos de un número complejo  $\rho + i\eta$ . Más específicamente, definido de una forma que es independiente de la convención de fase

$$\bar{\rho} + i\bar{\eta} \equiv -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}, \tag{7.166}$$

la combinación de los datos experimentales al respecto da lugar al valor real e imaginario diferentes de cero mostrados en la figura 7.2

## 7.9. Fenomenología Electrodébil

El Lagrangiano del Modelo contiene los parámetros  $g_s, g, \sin \theta_W, v, m_H$ . Alternativamente uno puede escoger como parámetros, en lugar de  $g, \sin \theta_W, v$  [5]

$$\begin{aligned}
G_F &= 1.166\,371(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \\
\alpha^{-1} &= 137.035\,999\,679(94) \\
m_Z &= 91.1876(20) \text{ GeV} \\
\alpha_s(m_Z) &= 0.1176(20).
\end{aligned} \tag{7.167}$$

donde  $\alpha_i = g_i^2/(4\pi)$  con  $\alpha_3 = \alpha_s$  ( $g_3 = g_s$ ) y  $\alpha = e^2/(4\pi)$ . Esto tiene la ventaja de usar las cuatro cantidades experimentales mejor medidas.

Para relacionar la constante de Fermi,  $G_F$ , con los parámetros del Lagrangiano del Modelo Estándar (ME), consideremos el decaimiento del muón como un proceso en el cual el muón decae directamente a tres fermiones a través de la interacción de contacto ilustrada en la figura 7.3. Entonces dicho proceso estaría explicado por un Lagrangiano no fundamental

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e], \tag{7.168}$$

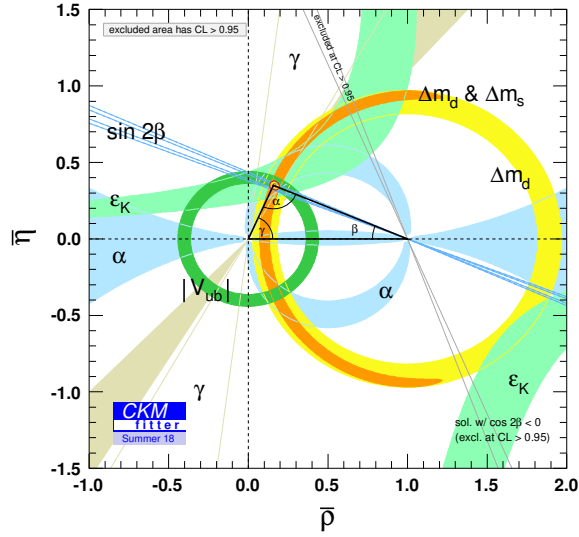


Figura 7.2: Fase completa de  $V_{CKM}$ . El valor para el modelo estándar corresponde a la región amarilla con contorno rojo en el vértice con ángulo  $\alpha$ . Obtenida de <http://ckmfitter.in2p3.fr>

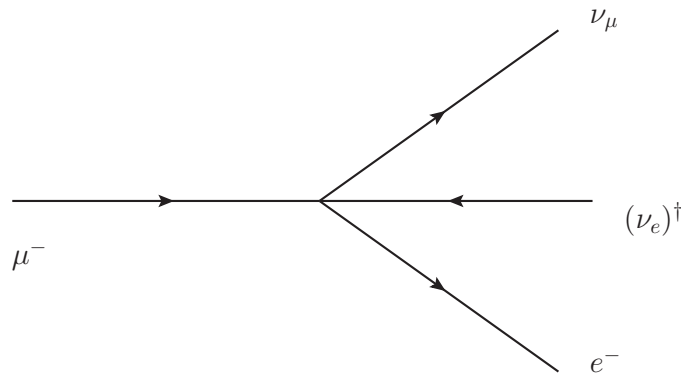


Figura 7.3: Decaimiento del muón a tres cuerpos

donde  $G_F$  tiene las dimensiones de uno sobre masa al cuadrado.

Construyendo la misma interacción a partir del Lagrangiano del ME

$$\mathcal{L} = \frac{g_2^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [W_\mu^+ W_\nu^-] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] . \quad (7.169)$$

Por lo tanto la contracción apropiada de  $[W_\mu^+ W_\nu^-]$  debe generar el coeficiente inverso de masa al cuadrado:

$$[W_\mu^+ W_\nu^-] \rightarrow \frac{1}{m_W^2} . \quad (7.170)$$

Una deducción más rigurosa se realizará en la Sección 7.9.1. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8m_W^2} \\ &= \frac{e^2}{8m_W^2 \sin^2 \theta_W} \\ &= \frac{4\pi e^2}{8(4\pi)m_W^2 \sin^2 \theta_W} \\ &= \frac{\pi\alpha}{2m_W^2 \sin^2 \theta_W} \\ m_W^2 \sin^2 \theta_W &= \frac{\sqrt{2}\pi\alpha}{2G_F} \\ m_W^2 \sin^2 \theta_W &= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} . \end{aligned} \quad (7.171)$$

Además, de la ec. (7.83)

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_W &= \frac{m_W^2}{m_Z^2} \\ 1 - \sin^2 \theta_W &= \frac{m_W^2}{m_Z^2} \\ \sin^2 \theta_W &= 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} . \end{aligned} \quad (7.172)$$

De esta forma tenemos las relaciones

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} , \quad m_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} , \quad (7.173)$$

que permiten determinar que

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &\approx 0.21 \\ m_W &\approx 81 \text{ GeV} . \end{aligned} \quad (7.174)$$

El uso de  $\alpha(M_Z) \approx 1/128$ , permite tener en cuenta algunas correcciones cuánticas dando lugar a

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.23$$

$$m_W \approx 80 \text{ GeV} \quad (7.175)$$

Los valores medidos son  $\sin^2 \theta_W = 0.23149(13)$ ,  $m_W = 80.398(25) \text{ GeV}$ , y pueden ser reproducidos por el modelo estándar una vez se tienen en cuenta correcciones perturbativas inducidas por partículas virtuales.

El acelerador  $e^+e^-$  LEP, que funcionó desde 1998 hasta el 2000 [29], operó a energías suficientes para producir millones de  $Z$ . Combinado con otros resultados experimentales, se pudo verificar todo el Lagrangiano del Modelo Estándar hasta un nivel del 1 por mil. Con excepción de las interacciones asociadas con el Higgs.

La universalidad de los decaimientos del  $Z$  está soportada por los resultados experimentales siguientes donde sólo se muestran los decaimientos leptónicos del  $Z$  diferentes de cero [5]

$$\begin{aligned} \Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= 83.92(12) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 83.99(18) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 84.08(22) \text{ MeV} \\ \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= 3.363(4) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 3.366(7) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 3.370(8) \% \end{aligned} \quad (7.176)$$

Mientras que para el  $W^\pm$ , en %, [?]

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = 10.71(16), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) = 10.63(15), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\tau \tau^-) = 11.38(21). \quad (7.177)$$

La diferencia de  $\bar{\nu}_\tau \tau$  respecto a los otros representa un efecto alrededor de  $2\sigma$ . La universalidad de los acoplamientos leptónicos de  $W$  puede comprobarse también indirectamente a través de los decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas. Los datos actuales verifican la universalidad de los acoplamientos de corrientes cargadas leptónicas al nivel del 0.2 % [5]. Sin necesidad de entrar en detalles de los cálculos de las amplitudes de decaimiento, podemos usar el hecho de que ellas son proporcionales a los acoplamientos al cuadrado correspondiente, de modo que un cociente entre amplitudes de decaimiento es igual, en primera aproximación, a los cocientes de los acoplamientos al cuadrado. Tendremos en cuenta además que el Branching es la amplitud de decaimiento a un canal específico dividido por la suma de las amplitudes de decaimiento a todos los canales posibles.

Para los decaimientos del  $Z$  el Modelo Estándar predice, además de la ausencia de eventos del tipo  $Z \rightarrow e^+\mu^-$ , que para un cierto  $l = e, \mu, \tau$ , o  $q = d, s, b$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Br}(Z \rightarrow l^+l^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{q}q)} &\approx \frac{(|v_l|^2 + |a_l|^2)}{N_c(|v_q|^2 + |a_q|^2)} \\ &= \frac{\left[ \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W\right)^2 + \frac{1}{4} \right]}{N_c \left[ \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W\right)^2 + \frac{1}{4} \right]} \\ &\approx \frac{0.776}{N_c} = \begin{cases} 0.338 & N_c = 2 \\ 0.225 & N_c = 3 \\ 0.169 & N_c = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.178)$$

Para ser comparado con el resultado experimental de por ejemplo

$$\frac{\text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{b}b)} = \frac{3.363(4)}{15.12(5)} \approx 0.222 \quad (7.179)$$



que de nuevo da lugar al  $N_c = 3$ , que seguiremos tomando en adelante.

Los Branchings de decaimiento en la ec. (7.177) y ec. (7.176) pueden ser calculados sin entrar en detalles del cálculo de las amplitudes. Teniendo en cuenta que el canal  $Z \rightarrow \bar{t}t$  esta cerrado

$$\begin{aligned}
\text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= \frac{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \\
&= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{\sum_l [(|v_l|^2 + |a_l|^2) + (|v_{\nu_l}|^2 + |a_{\nu_l}|^2)] + N_c [\sum_{i=1}^2 (|v_{u_i}|^2 + |a_{u_i}|^2) + \sum_{i=1}^3 (|v_{d_i}|^2 + |a_{d_i}|^2)]} \\
&= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{3[(|v_e|^2 + |a_e|^2) + (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)] + 3[2(|v_u|^2 + |a_u|^2) + 3(|v_d|^2 + |a_d|^2)]} \\
&= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{21|a_e|^2 + 3[|v_e|^2 + |v_{\nu_e}|^2] + 3[2|v_u|^2 + 3|v_d|^2]} \\
&= \frac{(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1}{21 + 3[(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1] + 3[2(1 - \frac{8}{3}s^2\theta_W)^2 + 3(-1 + \frac{4}{3}s^2\theta_W)^2]} \\
&= \frac{2 - 8s^2\theta_W + 16s^4\theta_W}{42 - 80s^2\theta_W + \frac{320}{3}s^4\theta_W} \\
&\approx 3.43 \%
\end{aligned} \tag{7.180}$$

Para  $W^\pm$  tenemos por ejemplo

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{\Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \tag{7.181}$$

donde, teniendo en cuenta que los canales a top están cerrados, y usando la condición de unitariedad de la matriz CKM en ec. (7.159), tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{total}} &= \sum_l \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_l l^-) + N_c \sum_i [\Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_1 d_i) + \Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_2 d_i)] \\
&= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) \{3 + N_c \sum_i [|V_{1i}|^2 + |V_{2i}|^2]\} \\
&= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) (3 + 2N_c)
\end{aligned} \tag{7.182}$$

entonces

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3 + 2N_c} = 11.1 \% \tag{7.183}$$

Una mejor predicción de dichos resultados en el contexto del Modelo Estándar requiere tener en cuenta las correcciones radiativas.

El ME también tiene una predicción concreta para la amplitud del  $Z$  a neutrinos,  $\Gamma_{\text{inv}}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} &= \frac{\sum_l \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)} \\
&= \frac{N_\nu \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{N_\nu(|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)}{|v_e|^2 + |a_e|^2} \\
&= \frac{2N_\nu}{(-1 + 4\sin^2\theta_W)^2 + 1} \\
&= \frac{N_\nu}{1 - 4\sin^2\theta_W + 8\sin^4\theta_W} \\
&\approx \begin{cases} 5.865 & N_\nu = 3 \\ 7.819 & N_\nu = 4 \end{cases}, \tag{7.184}
\end{aligned}$$

mientras que el valor medido experimentalmente para esta cantidad 5.942(16) [5], es una evidencia muy fuerte de que sólo existen tres neutrinos livianos.

Note que el mismo resultado se puede obtener usando la notación de dos componentes de (7.131). Con  $t_{e_R} = 0$ ,  $t_\nu = -t_{e_L} = 1$ ,  $Q_\nu = 0$  y  $Q_e = -1$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} &= \frac{\sum_l \Gamma [Z \rightarrow (\nu_l)^\dagger \nu_l]}{\Gamma [Z \rightarrow (e_L)^\dagger e_L] + \Gamma [Z \rightarrow (e_R)^\dagger e_R]} \\
&= \frac{N_\nu t_\nu^2}{(t_{e_L} - 2Q_e \sin^2\theta_W)^2 + (2Q_e \sin^2\theta_W)^2} \\
&= \frac{N_\nu}{(-1 + 2\sin^2\theta_W)^2 + 4\sin^4\theta_W} \\
&= \frac{N_\nu}{1 - 4\sin^2\theta_W + 4\sin^4\theta_W + 4\sin^4\theta_W} \\
&= \frac{N_\nu}{1 - 4\sin^2\theta_W + 8\sin^4\theta_W}. \tag{7.185}
\end{aligned}$$

### 7.9.1. Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas

De la corrientes cargadas para leptones tenemos

$$\mathcal{L}_{cc} \supset \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_l W_\mu^- \right] \tag{7.186}$$

Esto da lugar a los posibles diagramas para decaimientos de leptones a bosones virtuales, y bosones a leptones mostrados en la figura 7.4. Las flechas representan el flujo de número leptónico. La flecha de tiempo es de izquierda a derecha. Al lado izquierdo del vértice entran partículas y salen antipartículas. Mientras que al lado derecho entran antipartículas y salen partículas. Del primer y cuarto diagrama obtenemos el diagrama de Feynman para el decaimiento  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ , mostrado en la figura 7.5. El propagador para el bosón  $W$  de momentum  $q$  resulta ser

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 - m_W^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right). \tag{7.187}$$

Para los propósitos actuales la obtención de este resultado no es necesaria, el punto importante es que cuando los momentum de las partículas iniciales y finales son mucho más pequeñas que  $m_W$ ,

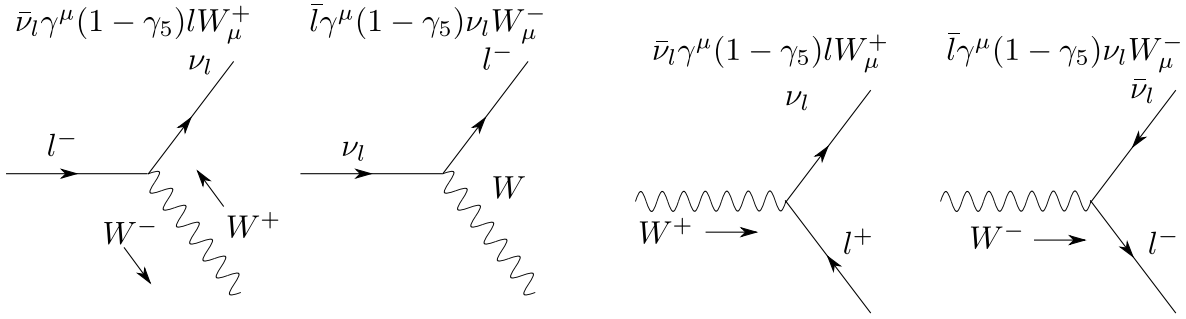
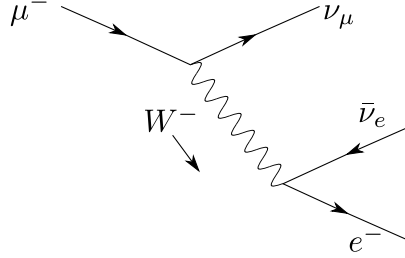


Figura 7.4: Diagramas de Feynman para las corrientes cargadas

Figura 7.5: diagrama de Feynman para el decaimiento  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ 

esto se reduce a

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}. \quad (7.188)$$

Este resultado se entiende fácilmente cuando se compara con el propagador de una partícula escalar masiva  $1/(q^2 - M^2) \rightarrow -1/M^2$ . Las componentes espaciales de  $W_\mu$  con  $\mu = 1, 2, 3$ , a bajas energías tienen el mismo propagador que el de una partícula escalar, mientras  $W_0$ , tiene el signo opuesto.

El Lagrangiano efectivo para el decaimiento del muón,  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$  es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g_2^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{g_2^2}{8m_W^2} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e], \end{aligned} \quad (7.189)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g_2^2}{8m_W^2} \\ &= \frac{g_2^2 4}{8g^2 v^2} \\ &= \frac{1}{2v^2}, \end{aligned} \quad (7.190)$$

y

$$v = \left( \sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV}$$

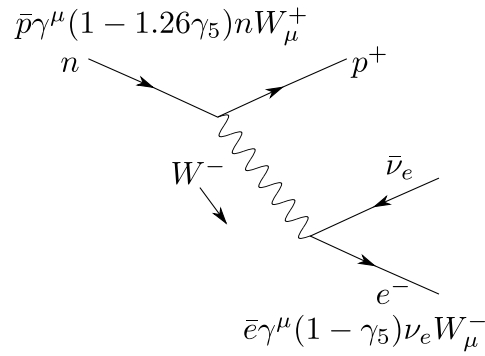


Figura 7.6: Decaimiento del neutrón.

$$\begin{aligned}
 &\approx 2.9 \times 10^{15} \text{ K} \\
 &\approx 4.9 \times 10^{-14} \text{ m} \\
 &\approx 1.6 \times 10^{-22} \text{ s}.
 \end{aligned} \tag{7.191}$$

De otro lado, para el decaimiento  $\beta$ ,  $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ , de acuerdo a la figura 7.6, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} [\bar{p}\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma_5)n] [\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e]. \tag{7.192}$$

con  $G_F$  dado en la ec. (7.167) y  $G_\beta = 1.10 \times 10^{-5} \text{ GeV}^2$ . La corriente hadrónica tiene la forma V-1.26A. El factor 1.26 puede entenderse como debido a las correcciones a nivel hadrónico de una corriente que es de la forma V-A a nivel del quarks, como en la ec. (??). A nivel de quarks el decaimiento del neutrón ( $udd$ ) al protón ( $uud$ ) corresponde al decaimiento de uno de los quarks down del neutrón  $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{11} [\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d] [\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e]. \tag{7.193}$$

De modo que  $G_\beta = G_F V_{11} = G_F \cos \theta_C$ , donde  $\theta_C$  es el ángulo de Cabbibo. Una vez se tienen en cuenta correcciones electrodébiles se obtiene el valor  $|V_{11}| = 0.97418(27)$  [25]. Las magnitudes de los elementos de la matriz CKM (7.164) son [25]

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} 0.97419 & 0.2257 & 0.0359 \\ 0.2256 & 0.97334 & 0.0415 \\ 0.00874 & 0.0407 & 0.999133 \end{pmatrix} \sim \mathbf{1} \tag{7.194}$$

Para cerrar esta notas, transcribo a continuación el último párrafo de la conferencia de Steven Weinberg en 1979 con motivo de la entrega del premio nobel del física por el desarrollo del modelo estándar de las interacciones fundamentales:

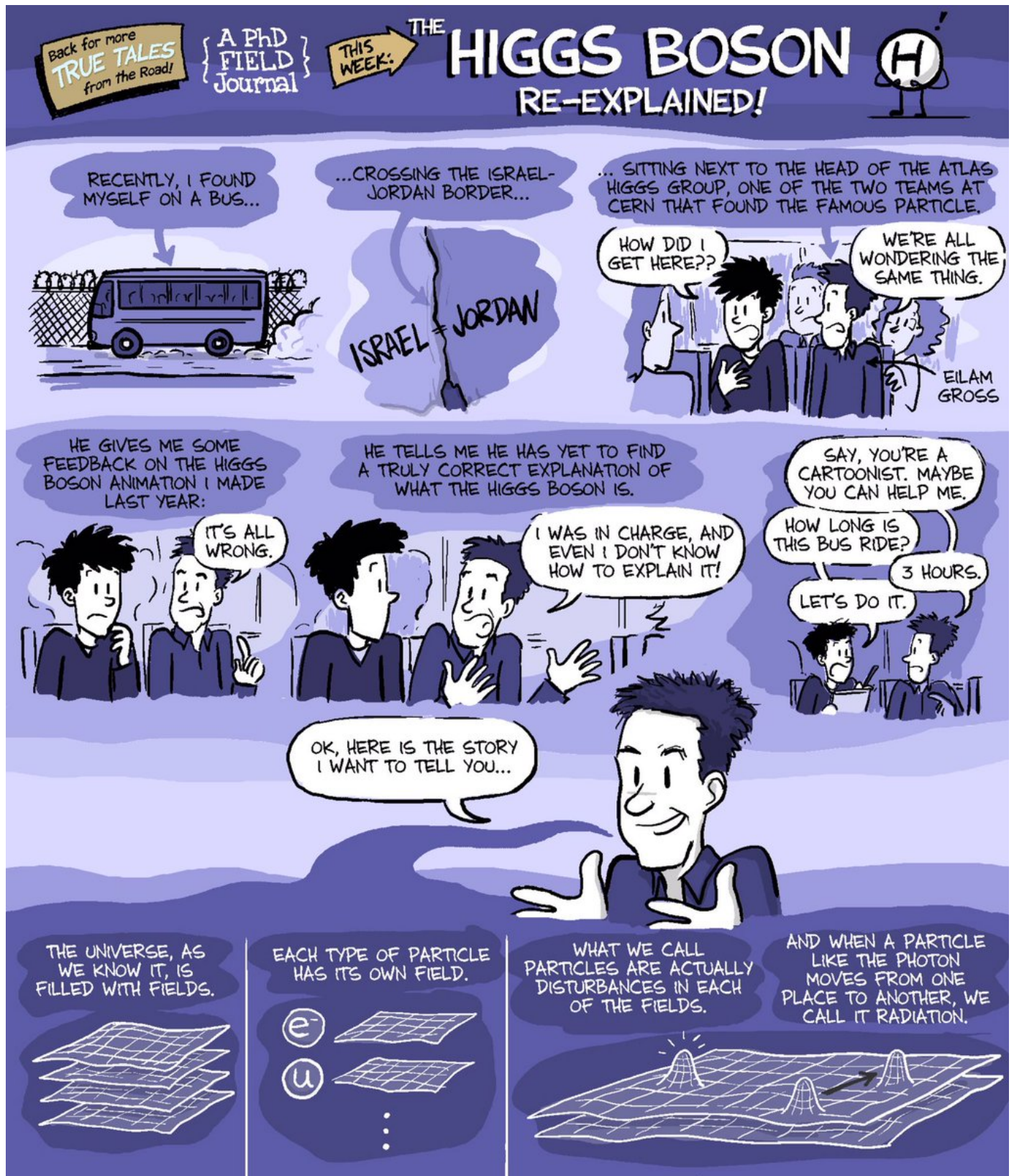
[...] And nothing makes me more optimistic than the discovery of broken symmetries. In the seventh book of the Republic, Plato describes prisoners who are chained in a cave and can see only shadows that things outside cast on the cave wall. When released from the cave at first their eyes hurt, and for a while they think that the shadows they saw

in the cave are more real than the objects they now see. But eventually their vision clears, and they can understand how beautiful the real world is. We are in such a cave, imprisoned by the limitations on the sorts of experiments we can do. In particular, we can study matter only at relatively low temperatures, where symmetries are likely to be spontaneously broken, so that nature does not appear very simple or unified. We have not been able to get out of this cave, but by looking long and hard at the shadows on the cave wall, we can at least make out the shapes of symmetries, which though broken, are exact principles governing all phenomena, expressions of the beauty of the world outside.

S. Weinberg, Nobel lecture, 1979

## 7.10. Resumen

A modo de resumen, usaremos a continuación la siguiente secuencia de la historieta de <http://www.phdcomics.com> re-explicando el bosón de Higgs:





NOW, TO DESCRIBE REALITY, PHYSICISTS START BY WRITING A SET OF EQUATIONS THAT DEFINE THE ENERGY OF A SYSTEM:

$$\mathcal{L} = T - V$$

THE LAGRANGIAN      KINETIC ENERGY      POTENTIAL ENERGY

PHYSICISTS ASSUME THAT THESE EQUATIONS ARE "SYMMETRIC."

WHY? BECAUSE A THEORY OF EVERYTHING SHOULD BE BEAUTIFUL.

AND SYMMETRY IS BEAUTIFUL.

SYMMETRY IS THE "QUEEN" OF PHYSICS.

IT PROTECTS REALITY FROM DIVERGENCE.

SIMPLY PUT, IT MEANS THAT NO MATTER HOW YOU ROTATE OR REFLECT THE EQUATIONS...

... THEY SHOULD STILL END UP LOOKING THE SAME (LOCALLY AND GLOBALLY).

WITHOUT SYMMETRY, THE EQUATIONS DESCRIBING REALITY BECOME INFINITE AND UNDEFINED.

WHEN PHYSICISTS FIRST FORMULATED THESE EQUATIONS FOR BASIC PARTICLES, THEY NOTICED SOMETHING WEIRD...

IN ORDER TO PRESERVE SYMMETRY, THEY HAD TO MIX IN EXTRA TYPES OF FIELDS.

THESE FIELDS TURNED OUT TO BE THE PARTICLES THAT TRANSMIT FORCES IN NATURE:

- ① photon
- ② gluon
- ③ Z, W boson

THE EQUATIONS DICTATED THAT THESE FORCE PARTICLES HAD TO HAVE ZERO MASS.

BUT THIS PRESENTED A PROBLEM.

SOME OF THE FORCE PARTICLES COULDN'T BE MASSLESS.

IF THEY WERE MASSLESS, THEY WOULD MOVE AT THE SPEED OF LIGHT, AND HAVE INFINITE RANGE.

SO, PHYSICISTS IN THE 1960'S FACED A PROBLEM: HOW DO YOU PRESERVE SYMMETRY...

ENTER THE HIGGS FIELD.

BUT EXPERIMENTS SHOWED THEY DIDN'T.

...WHILE STILL GIVING MASS TO THESE PARTICLES?

IN THE 60'S, FRANCOIS ENGLERT AND OTHERS FIGURED OUT THAT AN EXTRA FIELD WOULD ADD THE NECESSARY DEGREE OF FREEDOM NEEDED TO GIVE THESE PARTICLES MASS.

THIS FIELD WAS SCALAR, MEANING THAT IT WAS DIRECTIONLESS AND IT WAS EVERYWHERE.

BUT ADDING THIS FIELD TO THE EQUATIONS MEANT THAT ALL THE OTHER PARTICLES HAD TO INTERACT WITH IT.

IN THE EQUATIONS, THIS INTERACTION COMES OUT AS THE MASS OF THE PARTICLES.

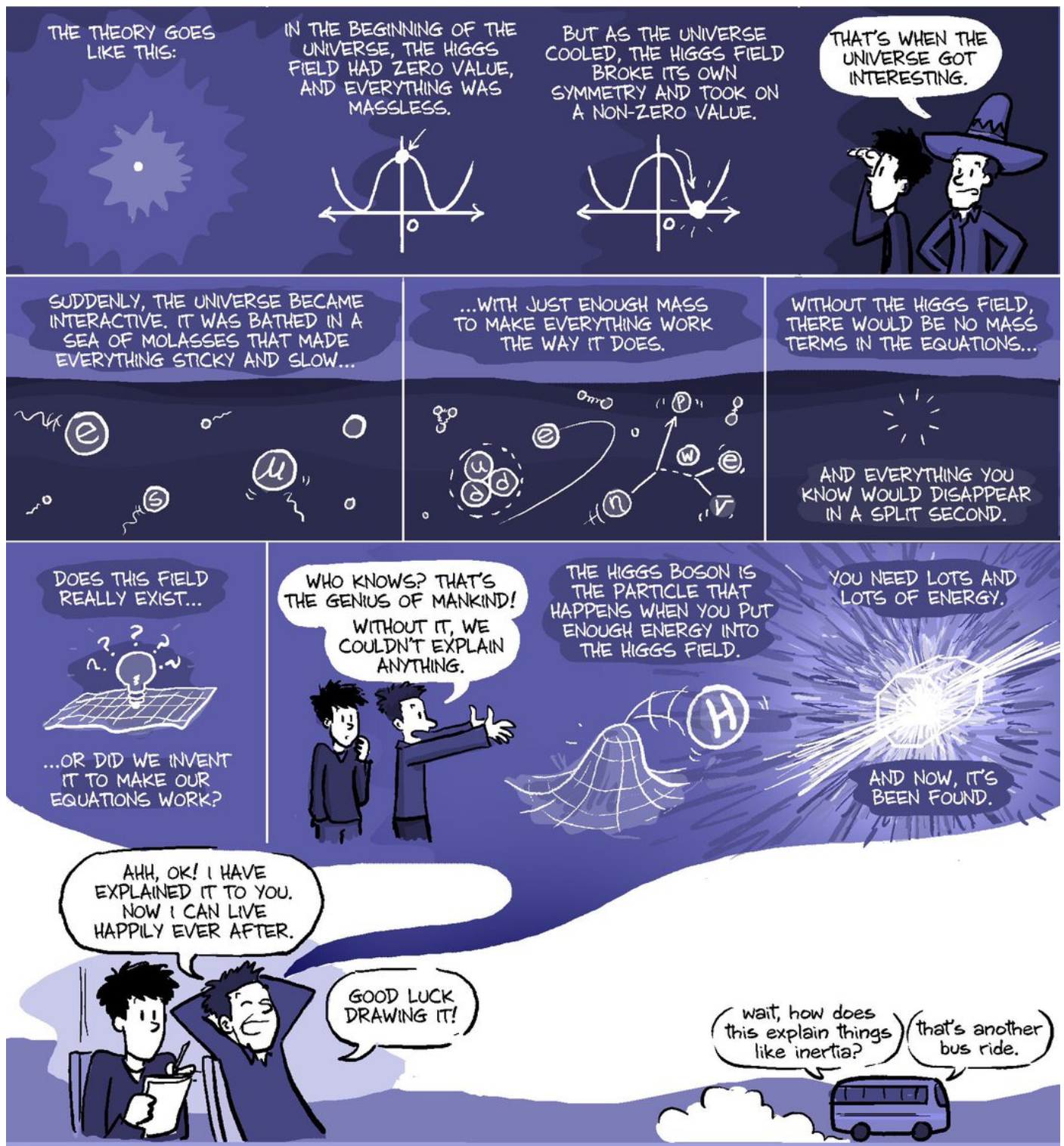
$$m\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \dots$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \lambda\phi^4$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{\psi}\phi\psi$$







## 7.11. Lecturas recomendadas

Libros:

- [1, 2, 20]

Artículos originales

- Teorías no abelianas [37]
- Mecanismo de Higgs [19]
- Teoría electrodébil [39]

Artículo de divulgación

- The deconstructed Standard Model equation, Rashmi Shivni <https://www.symmetrymagazine.org/article/the-deconstructed-standard-model-equation>

Videos:

- Strange Stars Explained: [https://www.youtube.com/watch?v=p\\_8yK2kmxoo](https://www.youtube.com/watch?v=p_8yK2kmxoo)

# Capítulo 8

## Construcción de modelos

### 8.1. Representación diagramática de interacciones

Como un término en el Lagrangiano respeta todas las cargas conservadas, se puede visualizar en términos de corrientes que fluyen. Por ejemplo, si denotamos el doblete de Higgs de hipercarga 1/2 como  $H$ , podemos escribir el término del Lagrangiano con el Higgs, el quark  $u_R$  y el doblete de quarks  $Q$  como

$$\mathcal{L}_u = h_u (u_R)^\dagger Q H . \quad (8.1)$$

El flujo de hipercarga puede visualizarse en la figura 8.1. Allí la línea a trazos representa a la partícula escalar y las continuas a los fermiones. Las cargas que entran deben igualar a las cargas que salen en el vértice de la figura donde confluyen los tres campos, correspondiente al punto verde. Denotando por simplicidad la hipercarga con el símbolo del campo, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} Y : \quad Q + H &= u_R \\ Q + H - u_R &= 0 . \end{aligned} \quad (8.2)$$

De este modo, al vértice ingresa  $Q$  con hipercarga 1/6 y el doblete de Higgs con hipercarga 1/2 y por lo tanto sale un estado de hipercarga 2/3 correspondiente al quark derecho.

Nótese que la ecuación (8.2) es perfectamente compatible con el Lagrangiano pues la hipercarga negativa del quark up derecho representa el campo conjugado  $(u_R)^\dagger$  en el Lagrangiano.

Como en mecánica cuántica todos los procesos que mantienen la conservación de la carga tienen alguna probabilidad de ocurrir, entonces los diagramas que construyamos con algún flujo consistente de alguna carga conservada, serán automáticamente permitidos por la teoría. El cálculo explícito de la probabilidad se realiza haciendo la expansión de la denominada matriz  $S$  en teoría cuántica de campos.

Por lo tanto, podemos construir diagramas de flujo de cargas conservadas para explorar las predicciones de un Lagrangiano a nivel cualitativo.

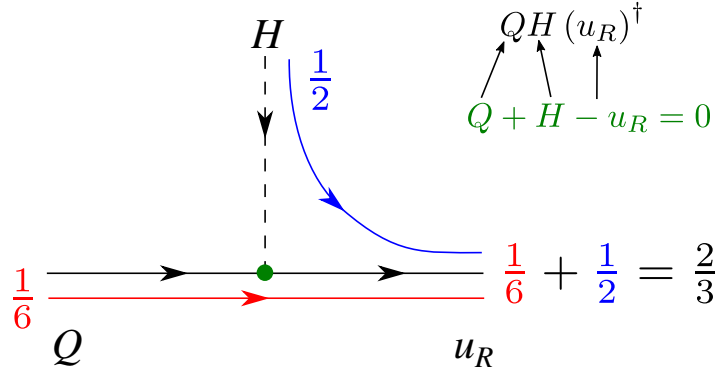


Figura 8.1: Un doblete de quarks,  $Q$ , ingresa con su hipercarga de  $\frac{1}{6}$  al vértice denotado por el punto verde, y junto con un doblete de Higgs de hipercarga  $\frac{1}{2}$  generan un quark up derecho,  $u_R$  de hipercarga  $\frac{2}{3}$ . La ecuación resultante para la conservación de hipercarga en la parte superior derecha de la figura, es compatible con el término en el Lagrangiano una vez se reemplaza la hipercarga negativa por el campo conjugado,  $(u_R)^\dagger$ .

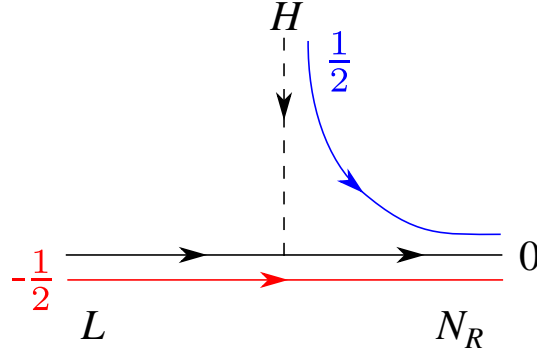


Figura 8.2: Un doblete de leptones,  $L$ , ingresa con su hipercarga de  $-\frac{1}{2}$  al vértice y junto con un doblete de Higgs de hipercarga  $\frac{1}{2}$  generan un neutrino derecho,  $N_R$ , de hipercarga  $0$ .

## 8.2. Masas de neutrinos

Si introducimos un neutrino derecho,  $N_R$ , con número leptónico  $-1$ , al modelo estándar, se genera al menos la contribución de Dirac

$$\underbrace{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}}_{Y:} = \underbrace{h\epsilon_{ab}L^a H^b (N_R)^\dagger}_{L + H - N_R = 0} + \text{h.c.} \quad (8.3)$$

La ecuación de conservación de hipercarga es representada en la figura 8.2<sup>1</sup>

## 8.3. Masas de neutrinos a 1-loop

Contenido de partículas

$$R_d = \begin{pmatrix} \psi_L^0 \\ \psi_L^- \end{pmatrix} \quad \tilde{R}_u = \begin{pmatrix} -(\psi_R^-)^\dagger \\ (\psi_R^0)^\dagger \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>Por lo tanto en el operador de Weinberg todos los campos entran al vértice efectivo

Symbol	$(SU(2)_L, U(1)_Y)$	$Z_2$	Spin
$S_\alpha$	$(1, 0)$	—	0
$(N_R)^\dagger$	$(1, 0)$	—	1/2
$\tilde{R}_u,$	$(2, +1/2)$	—	1/2
$R_d$	$(2, -1/2)$	—	1/2

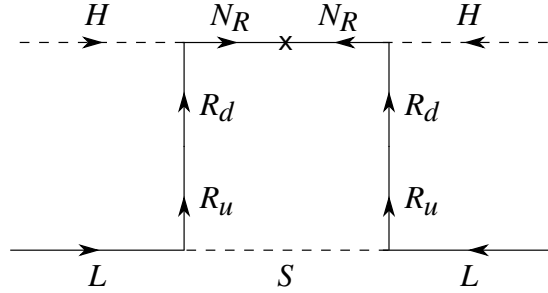
Tabla 8.1: Conjunto  $\alpha$  de escalares y fermiones de Weyl del modelo.

Figura 8.3: Masas de neutrinos a 1-loop para el Lagrangiano (8.4)

El correspondiente Lagrangiano incluye los siguientes términos con las correspondientes ecuaciones para la conservación de la hipercarga

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \underbrace{M_D \epsilon_{ab} R_d^a \tilde{R}_u^b}_{R_d - R_u = 0} - \underbrace{\frac{1}{2} M_N N_R N_R}_{N_R + N_R = 0} - \underbrace{h_{i\alpha} \epsilon_{ab} \tilde{R}_u^a L_i^b S_\alpha}_{-R_u + L + S = 0} - \underbrace{\lambda_d \epsilon_{ab} H^a R_d^b (N_R)^\dagger}_{H + R_d - N_R = 0} - \underbrace{\lambda_u \epsilon_{ab} \tilde{H}^a \tilde{R}_u^b (N_R)^\dagger}_{H - R_u - N_R = 0} \\
 Y : & \quad R_d - R_u = 0 \quad N_R + N_R = 0 \quad -R_u + L + S = 0 \quad H + R_d - N_R = 0 \quad H - R_u - N_R = 0 \\
 & \quad + \text{h.c}
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Con estos campos e interacciones podemos construir el diagrama de masas de neutrinos a 1-loop que se ilustra en la figura 8.3.

Note que el diagrama directo con  $R_u$  no es compatible con un Higgs entrando al vértice, como exige la figura 8.2. Por lo tanto es inconsistente con masas de neutrinos. Finalmente, si asociamos un número leptónico de  $-1$  a todos los campos fermiónicos de la figura 8.3, entonces el término  $N_R N_R$  termina violando el número leptónico en dos unidades.



# Apéndice A

## Potencial de Yukawa

### A.1. Ecuación de Klein-Gordon



# Apéndice B

## Dirac Action

### B.1. Dirac's Action

The Scrodinger equation can be written as

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}_S\psi, \quad (\text{B.1})$$

where

$$\hat{H}_S = \quad (\text{B.2})$$

In order to have a well defined probabiltly in relativistic quantum mechanics it is necessary that Lagrangian be linear in the time derivative, in order to obtain the general Sc  dinger equation:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi, \quad (\text{B.3})$$

like the Scrödinger Lagrangian. However, this automatically imply that the Lagrangian will be also linear in the spacial derivatives. A pure scalar field cannot involve a Lorentz invariant term of only first derivatives (see eq. (3.1)). Therefore the proposed field must have some internal structure associated with some representation of the Lorentz Group. Therefore we build the Lagrangian for a field of several components

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

#### B.1.1. Lorentz transformation

If the field is to describe the electron. it must have spin and in this way it must transform under some spin representation of the Lorentz Group

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x). \quad (\text{B.5})$$



One possible invariant could be the term  $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ . However, under a Lorentz transformation we should have  $\psi^\dagger S^\dagger S \psi$ . As we cannot assume that  $S(\Lambda)$  is unitary, the solution is to define the *adjoint* spinor

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger b. \quad (\text{B.6})$$

which transforms as

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \psi'^\dagger(x)b = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) S^\dagger(\Lambda)b, \quad (\text{B.7})$$

and,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) S^\dagger(\Lambda)bS(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{B.8})$$

The condition that must be fulfilled for Lorentz invariance of the Action is

$$S^\dagger(\Lambda)bS(\Lambda) = b, \quad (\text{B.9})$$

and therefore,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x), \quad (\text{B.10})$$

and:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) &= \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) bS^{-1}(\Lambda) \\ &= \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) S^{-1}(\Lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A Action with a Lagrangian term linear in the derivatives, could be Lorentz invariant if, taking into account:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}_a(\Lambda^{-1}x) S_{ab}^{-1}(\Lambda)\gamma_{bc}^\mu(\Lambda^{-1})^\rho_\mu \partial_\rho S_{cd}(\Lambda)\psi_d(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}\psi(\Lambda^{-1}x) (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)) \partial_\rho\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

if the following condition is satisfied:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\sigma \gamma^\sigma. \quad (\text{B.13})$$

the most general Lagrangian for this field is

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (\text{B.14})$$

Where the coefficients have been already fixed by convenience. Since the Action is real, it is convenient to rewrite this as

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Para que este nuevo Lagrangiano sea real se requiere que,

$$\begin{aligned}
b^\dagger &= b \\
b^2 &= I \\
b\gamma_\mu^\dagger b &= \gamma_\mu
\end{aligned} \tag{B.16}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger &= \left( \frac{i}{2}\psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger b \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger b \psi \right) - m\psi^\dagger b \psi \\
&= \left( \frac{i}{2}\psi^\dagger b^2 \gamma_\mu^\dagger b \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger b^2 \gamma_\mu^\dagger b \psi \right) - m\psi^\dagger b \psi \\
&= \left( \frac{i}{2}\bar{\psi} b \gamma_\mu^\dagger b \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi} b \gamma_\mu^\dagger b \psi \right) - m\bar{\psi} \psi \\
&= \left( \frac{i}{2}\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - m\bar{\psi} \psi
\end{aligned}$$

### B.1.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac

De la ec. (??)

$$\begin{aligned}
J^0 &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \right] \\
&= i\bar{\psi} \gamma^0 \delta \psi
\end{aligned} \tag{B.17}$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de fase globales,  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi \approx \psi - i\alpha \psi, \tag{B.18}$$

de modo que

$$\delta \psi = -i\alpha \psi. \tag{B.19}$$

Por consiguiente

$$J^0 = \alpha \bar{\psi} \gamma^0 \psi \tag{B.20}$$

Para que  $J^0$  pueda interpretarse como una densidad de probabilidad, se debe cumplir

$$b\gamma^0 = I \tag{B.21}$$

La densidad de corriente es

$$J^0 \propto \psi^\dagger \psi. \tag{B.22}$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad.

De la ec. (B.21), ya que la inversa de es única:

$$b = \gamma^0. \quad (\text{B.23})$$

$\bar{\psi}$  se define como la *adjunta* de  $\psi$ :

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{B.24})$$

It is convenient at this point to summarize the properties for  $\gamma^0$ :

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 & (\gamma^0)^2 &= 1 & \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^\mu \\ S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) &= \gamma^0. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

En general

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] \\ &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\ &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger b \gamma^\mu \psi. \quad (\text{B.27})$$

### B.1.3. Tensor momento-energía

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} - \mathcal{L} \\ &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\ &= -i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi, \\ &= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\ &= \psi^\dagger \hat{H} \psi, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

donde

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \quad (\text{B.29})$$

la ecuación de Schrödinger de validez general es entonces:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (\text{B.30})$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H} \psi d^3x. \quad (\text{B.31})$$

Además

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger (-i \partial_i) \psi
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{B.33}$$

#### B.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \tag{B.34}$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (B.31), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo  $\bar{\psi}$  al Lagrangiano en ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\
 i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Expandiendo

$$\begin{aligned}
 i \gamma^0 \partial_0 \psi + i \gamma^i \partial_i \psi - m \psi &= 0 \\
 i \gamma^0 \partial_0 \psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i \boldsymbol{\nabla}) \psi - m \psi &= 0, \\
 i \gamma^0 \partial_0 \psi &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m) \psi,
 \end{aligned}$$

de donde

$$i \gamma^{02} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi. \tag{B.36}$$

tenemos que

$$(\gamma^0)^2 = 1. \tag{B.37}$$

De la ec. (B.29)

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m), \tag{B.38}$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros  $\gamma^\mu$ .

La ec. (B.34) puede escribirse como

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0. \tag{B.39}$$

El campo  $\psi$  también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que  $\partial\hat{H}/\partial t = 0$ ,

$$\begin{aligned} &\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi = 0 \\ &\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) = 0 \\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi = 0 \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi = 0. \end{aligned} \tag{B.40}$$

De la ec. (B.38), y usando la condición en ec. (B.37), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m)(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m) \\ &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}\gamma_0 + m\gamma_0^2\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m^2 \end{aligned} \tag{B.41}$$

Sea

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma^0 \\ \alpha^i &= \beta\gamma^i \\ \gamma^i &= \beta\alpha^i \end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + m\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m^2 \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m(\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} + m^2 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Sea  $A$  una matriz y  $\theta$  en un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2}\theta^{i2} + \sum_{i<j} \{A^i, A^j\} \theta^i\theta^j \tag{B.44}$$

#### ■ Demostración

$$\begin{aligned} [(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})]_{\alpha\beta} &= \sum_{ij} \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i \theta^i A_{\gamma\beta}^j \theta^j \\ &= \sum_{ij} \theta^i \theta^j \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\ &= \sum_{\gamma} \sum_{ij} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\ &= \sum_{\gamma} \left( \sum_i \theta^{i2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{i>j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\gamma} \left( \sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{j>i} \theta^j \theta^i A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left[ \sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j (A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i) \right] \\
&= \left[ \sum_i \theta^{i^2} (A^i A^i)_{\alpha\beta} + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\}_{\alpha\beta} \right] \\
&= \left[ \sum_i \theta^{i^2} A^{i^2} + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\} \right]_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i<j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + m^2 \tag{B.46}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned}
\alpha_i^2 &= 1 \\
\{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad i \neq j \\
\alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0
\end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2 + m^2 \tag{B.48}$$

y reemplazando en la ec. (B.40) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para  $\psi$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi &= 0 \\
(\square + m^2) \psi &= 0
\end{aligned} \tag{B.49}$$

En términos de las matrices  $\gamma^\mu$  las condiciones en ec. (B.47) son

$$\begin{aligned}
(\gamma^0)^2 &= 1 \\
(\alpha^i)^2 = 1 &\rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = 1 \rightarrow (\gamma^i)^2 = -1 \\
\gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i &= \{\gamma^i, \gamma^0\} = 0
\end{aligned} \tag{B.50}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\{\alpha^i, \alpha^j\} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 0 \quad i \neq j \\
-\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^i &= 0 \quad i \neq j \\
\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i &= 0 \quad i \neq j \\
\{\gamma^i, \gamma^j\} &= 0 \quad i \neq j
\end{aligned} \tag{B.51}$$

Las ecuaciones (B.50)(B.51) pueden escribirse como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} \tag{B.52}$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i) \quad (\text{B.53})$$

Además, de la ec. (B.25)

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{B.54})$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfagan el álgebra en ec. (B.52) y la condición en ec. (B.54), se conocen como matrices de Dirac. A  $\psi$  se le llama espinor de Dirac.

En términos de la matrices  $\gamma^\mu$ , el Lagrangiano de Dirac y la ecuación de Dirac, son respectivamente de las ecs. (??) y (??)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (\text{B.55})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (\text{B.56})$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{B.57})$$

### B.1.5. Propiedades de las matrices de Dirac

De la ec. (B.54)

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^{02} \gamma^i = -\gamma^i \end{cases} \begin{matrix} \mu = 0 \\ \mu = i \end{matrix}. \quad (\text{B.58})$$

Definiendo

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad (\text{B.59})$$

entonces,

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= +\gamma_0^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= +\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= -\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= \gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1}, \quad (\text{B.61})$$

Teniendo en cuenta que  $\gamma_\mu^2 \propto \mathbf{1}$  y conmuta con las demás matrices, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned} \gamma_5\gamma_3 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 = \gamma_3^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_3\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_2 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3 = -\gamma_2^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = -\gamma_2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_1 &= i\gamma_0\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1^2 i\gamma_0\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_0 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0^2 i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_0\gamma_5. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

De modo que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (\text{B.63})$$

Expandiendo el anticonmutador tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma_\mu \\
\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_\mu \\
\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5) &= -\text{Tr} \gamma_\mu \\
\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\mu) &= -\text{Tr} \gamma_\mu \\
\text{Tr} \gamma_\mu &= -\text{Tr} \gamma_\mu,
\end{aligned} \tag{B.64}$$

y por consiguiente

$$\text{Tr} \gamma_\mu = 0. \tag{B.65}$$

De otro lado, si

$$\tilde{\gamma}_\mu \equiv U \gamma_\mu U^\dagger, \tag{B.66}$$

para alguna matriz unitaria  $U$ , entonces  $\tilde{\gamma}_\mu$  corresponde a otra representación de álgebra de Dirac en ec. (B.52), ya que

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \{U \gamma^\mu U^\dagger, U \gamma^\nu U^\dagger\} \\
&= U \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} U^\dagger \\
&= 2g^{\mu\nu} U U^\dagger \\
&= 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{B.67}$$

Claramente, la condición en ec. (B.54) se mantiene para la nueva representación. Como  $\gamma_0$  es hermítica, siempre es posible escoger una representación tal que  $\tilde{\gamma}_0 \equiv U \gamma_0 U^\dagger$  sea diagonal. Como  $\gamma_0^2 = 1$ , sus entradas en la diagonal deben ser  $\pm 1$ , y como  $\text{Tr} \tilde{\gamma}_0 = 0$ , debe existir igual número de  $+1$  que de  $-1$ . Por lo tanto la dimensión de  $\gamma_0$  (y de  $\gamma_\mu$ ) debe ser par:  $2, 4, \dots$ . Para un fermion sin masa

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi + i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi = i\psi^\dagger \partial_0 \psi + i\psi^\dagger \alpha^i \partial_i \psi, \tag{B.68}$$

solo se requieren tres matrices  $2 \times 2$  que satisfacen

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \tag{B.69}$$

y por lo tanto pueden identificarse con las tres matrices de Pauli. Como en general tenemos 4 matrices independientes, su dimensión mínima debe ser 4.

Como  $\tilde{\gamma}^i = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ , podemos definir la *representación de paridad*

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0, \quad \tilde{\gamma}^i = -\gamma^i, \quad \text{para} \quad U = \gamma^0 \tag{B.70}$$

### B.1.6. Lorentz invariance of the Dirac Action

We need to satisfy the following conditions

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \\
S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) &= \gamma^0 \quad \text{or} \quad S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda).
\end{aligned} \tag{B.71}$$

We now set the notation

$$\Lambda = 1 + \xi_i b^i + \frac{1}{2} \theta_i \epsilon_{ijk} r^{jk}, \tag{B.72}$$



$$b^i = -iJ^{i0} \quad r^{jk} = -iJ^{jk}. \quad (\text{B.73})$$

In order to find a representation of the Lorentz Group in terms of the Dirac matrices we propose

$$S(\Lambda) = 1 + \xi_i B^i + \frac{1}{2} \theta_i \epsilon_{ijk} R^{jk}. \quad (\text{B.74})$$

Instead of show the Lorentz invariance of the Dirac Action, we use the conditions derived from the invariance, to find a representation in terms of the Dirac matrices for  $B^i$  and  $R^{jk}$ . As a consistency check, the resulting representation would satisfy the Lorentz algebra. In this way, by using eq. (B.72) and (B.74), we obtain from

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (\text{B.75})$$

that

$$\begin{aligned} B^i &= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^i \\ R^{jk} &= \frac{1}{2} \gamma^j \gamma^k, \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

which can be written in covariant form if we define

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{B.77})$$

In fact, the six set of non-zero independently generators are

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{0i} &= \frac{i}{4} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) = \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^i = iB^i \\ \mathcal{S}^{ij} &= \frac{i}{4} (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) = \frac{i}{2} \gamma^i \gamma^j = iR^{ij}. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

It is worth notices that in fact  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  satisfy the Lorentz algebra, and therefore are the generators of the Lorentz group elements:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp \left( -i \omega_{\mu\nu} \frac{\mathcal{S}^{\mu\nu}}{2} \right) \\ &\approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Another consistency check is

$$S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) = \gamma^0, \quad (\text{B.80})$$

or equivalently

$$\begin{aligned} S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 &= \gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \\ \left( 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu\dagger} \right) \gamma^0 &= \gamma^0 \left( 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} \right) \\ \mathcal{S}^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^0 \mathcal{S}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Taking into account that

$$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = (\gamma^0)^2\gamma^{\mu\dagger}(\gamma^0)^2\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu, \quad (\text{B.82})$$

we have

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 &= -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger\gamma^0 \\ &= -\frac{i}{4}[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}]\gamma^0 \\ &= \frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]\gamma^0 \\ &= \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\gamma^0 \\ &= \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

### B.1.7. Dirac's Lagrangian

Para una matriz de  $n$  dimensiones existen  $n^2$  matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes. Si se sustrae la identidad quedan  $n^2 - 1$  matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes de traza nula. En el caso  $n = 2$  corresponden a las 3 matrices de Pauli. En el caso de la ecuación de Dirac se requieren 4 matrices independientes, por lo tanto deben ser matrices  $4 \times 4$ . En efecto para  $n = 4$  existen 15 matrices independientes de traza nula dentro de las cuales podemos acomodar sin problemas las 4  $\gamma^\mu$ .

De [?]:

All Dirac matrix elements will now be written in the form

$$\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x), \quad (\text{B.84})$$

where  $\Gamma$  is a  $4 \times 4$  complex matrix. The most general such matrix can always be expanded in terms of 16 independent  $4 \times 4$  matrices multiplied by complex coefficients. In short the matrices  $\Gamma$  can be regarded as a *16-dimensional complex vector space* spanned by 16 matrices.

It is convenient to choose the 16 matrices,  $\Gamma_i$ , so that they have well defined transformation properties under the Lorentz Transformations. Since the  $\gamma^\mu$ 's have such properties, we are lead to choose the following 16 matrices for this basis:

En la Tabla C.1 se muestran las matrices de traza nula con sus propiedades de transformación bajo el Grupo de Lorentz. En la última se muestra el correspondiente escalar en el espacio de Dirac  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ . Demostración

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &\equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Matriz $\Gamma$	Transformación	Número	Escalar en Dirac
$\mathbf{1}$	Escalar (S)	1	$\bar{\psi}\psi$
$\gamma_5$	Pseudoescalar (P)	1	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
$\gamma_\mu$	Vector (V)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$\gamma_\mu\gamma_5$	Vector axial (A)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$	Tensor antisimétrico (T)	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
		16	

Tabla B.1: Matrices  $\Gamma_i$ .

In [?]: Problem 5.4:

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \rightarrow \bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)\gamma^5S(\Lambda)\psi = (\det \Lambda)\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (\text{B.86})$$

The solution is in Appendix C. of Burgess book, by using

$$\gamma^5 = \frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta \quad (\text{B.87})$$

and

$$\det \Lambda = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Lambda^\mu{}_1\Lambda^\nu{}_2\Lambda^\alpha{}_3\Lambda^\beta{}_4. \quad (\text{B.88})$$

# Apéndice C

## Soluciones a la ecuación de Dirac

### C.1. Fermiones quirales de cuatro componentes

Sea

$$\begin{aligned} P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Además

$$\begin{aligned} \psi_L &\equiv P_L \psi \\ \psi_R &\equiv P_R \psi. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Entonces

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (\text{C.3})$$

Las matrices  $P_{L,R}$  tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Usando la ec. (B.63)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (\text{C.5})$$

Para escribir el Lagrangiano en término de los nuevos  $\psi_{L,R}$  debemos tener en cuenta que

$$\overline{\psi_{L,R}} = (P_{L,R} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} = \overline{\psi} P_{R,L} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi \\ &= i \overline{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} (P_L + P_R) \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L \psi - m \overline{\psi} P_R \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\bar{\psi}P_L P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\bar{\psi}P_R P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}P_L P_L \psi - m\bar{\psi}P_R P_R \psi \\
&= i\bar{\psi}P_L \gamma^\mu \partial_\mu P_R \psi + i\bar{\psi}P_R \gamma^\mu \partial_\mu P_L \psi - m\bar{\psi}P_L P_L \psi - m\bar{\psi}P_R P_R \psi \\
&= i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \tag{C.7}
\end{aligned}$$

En términos de espinores izquierdos y derechos de cuatro componentes la transformación de paridad

$$\begin{array}{llll}
t \rightarrow t & \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} & \psi_L(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_R(t, -\mathbf{x}), & \psi_R(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_L(t, -\mathbf{x}) \\
\partial_0 \rightarrow \partial_0 & \nabla \rightarrow -\nabla & \psi_L(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_R(t, -\mathbf{x}), & \psi_R(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_L(t, -\mathbf{x}). \tag{C.8}
\end{array}$$

Además  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$ , y como  $\gamma^\mu$  esta asociado al momento angular intrínscico, entonces también  $\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu$

Entonces la transformación de paridad da lugar a (sin tener en cuenta el cambio de argumento en los campos que desaparece en la integral de la Acción)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= \bar{\psi}_R \gamma^0 \partial_0 \psi_R + \bar{\psi}_R \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi_R \rightarrow \bar{\psi}_L \gamma^0 \partial_0 \psi_L - \bar{\psi}_L \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi_L \\
&= \bar{\psi}_L \gamma^0 \partial_0 \psi_L + \bar{\psi}_L \boldsymbol{\gamma}^\dagger \cdot \nabla \psi_L \\
&= \bar{\psi}_L \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 \cdot \nabla \psi_L \\
&= \bar{\psi}_L \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \psi_L + \bar{\psi}_L \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \psi_L \\
&= \bar{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L. \tag{C.9}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i\bar{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_R + i\bar{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R), \tag{C.10}$$

donde  $\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger$ , con  $U = \gamma^0$ . Como las dos representaciones dan lugar a la misma física, podemos decir que la Acción en términos de espinores  $L, R$  de cuatro componentes es invariante bajo la transformación de paridad.

La existencia de ambos espinores  $\psi_{L,R}$  garantizan que el Lagrangiano de Dirac es invariante bajo la transformación de paridad.

La corriente de la electrodinámica cuántica en ec. (5.38) (o la de la cromodinámica cuántica, ec. (5.118)) conservan paridad ya que, siguiendo los mismos pasos que en la ec. (C.7)

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \rightarrow \bar{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \psi_R. \tag{C.11}$$

Si para alguna partícula, como es el caso del neutrino, no existe la componente derecha, entonces la correspondiente interacción vectorial viola paridad y no puede tener ni interacciones electromagnéticas ni fuertes, es decir, no se acopla con el fotón o los gluones. Además dicha partícula no puede tener masa de Dirac. En el caso del neutrino esto se entiende pues al no tener carga eléctrica sólo requiere dos grados de libertad independientes.

De otro lado, si una determinada interacción, como es el caso de la interacción débil, solo participa la componente izquierda de la ec. (C.11), está corresponde a una interacción del tipo

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi \\
&= \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi, \tag{C.12}
\end{aligned}$$

que de acuerdo a la asignación en la Tabla corresponde a una corriente V-A.

### C.1.1. Fermiones de Weyl

Sea  $\psi$  un campo que satisface una ecuación covariante de segundo orden. La parte cinética del Lagrangiano sin términos de masa y sin términos de interacción debe tener la forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi - m\psi^\dagger b\psi \quad (\text{C.13})$$

La Acción debe ser real, de modo que el Lagrangiano también. En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left( \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi \right)^\dagger - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \left( -\frac{i}{2}\partial^\mu \psi^\dagger a_\mu^\dagger \psi + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \right) - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \mathcal{L} \quad \text{si } b^\dagger = b. \end{aligned}$$

Como al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este Lagrangiano debemos obtener la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (\text{C.14})$$

con  $\hat{H}$  una función por determinar del operador  $\hat{\mathbf{p}}$ , entonces

$$a_\mu^\dagger = a_\mu \quad (\text{C.15})$$

El Lagrangiano en ec. (C.13) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \\ &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) - m\psi^\dagger b\psi \\ \mathcal{L} &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Ahora utilizaremos el método desarrollado en capítulos anteriores para analizar el Lagrangiano. Calcularemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la corriente conservada y el tensor de momento-energía.

## C.2. Soluciones a la ecuación de Dirac

### C.2.1. Lagrangiano de Weyl

En la ec. (C.69), obtuvimos el Hamiltoniano en ec. (C.78)

$$\hat{H} = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (\text{C.17})$$

Una escogencia particular de las cuatro matrices  $\gamma^\mu$ , conocida como la representación de Weyl, o representación quiral, puede escribirse en términos de las matrices de Pauli. Escritas en bloques  $2 \times 2$ , tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Con  $\sigma^0 = 1$ . Con la matriz de transformación

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

podemos obtener la representación de Dirac, tal que  $U$  diagonaliza  $\gamma^0$ ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

En adelante trabajaremos en la representación de Weyl que en forma compacta es

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Hemos escrito las matrices de Dirac en bloques  $2 \times 2$ , y es natural escribir similarmente las cuatro componentes del campo de Dirac como un par de campos de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

Donde  $\psi_{L,R}$  son espinores de Weyl de dos componentes. En la representación de Weyl el Lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= i\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu\psi - m\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_L \\ \partial_\mu\psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

### C.3. Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético

En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético (electrodinámica cuántica en la sección 5.1) debe contener la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético. Combinando las ecuaciones (5.168) tenemos

$$(i\partial_0 - qA_0)(\psi_L + \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L - \psi_R) - m(\psi_L + \psi_R) = 0$$

$$(i\partial_0 - qA_0)(\psi_L - \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L + \psi_R) + m(\psi_L - \psi_R) = 0 \quad (\text{C.25})$$

Esta forma es útil porque de la solución de partículas libre esperamos que  $\psi_L - \psi_R$  sea pequeña. Como antes prongamos como solución

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} \quad (\text{C.26})$$

Para solucionar este sistema de ecuaciones acopladas definimos

$$\begin{aligned} \phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) \Rightarrow (\psi_L + \psi_R) = e^{-imt}\phi \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) \Rightarrow (\psi_L - \psi_R) = e^{-imt}\chi \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

donde

$$\begin{aligned} \phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) = e^{imt} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} (u_L + u_R) = e^{i(m-E)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (u_L + u_R) \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) = e^{imt} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} (u_L - u_R) = e^{i(m-E)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (u_L - u_R) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Reemplazando (C.27) en eq. (C.25)

$$\begin{aligned} e^{-imt}[m\phi + (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi - m\phi] &= 0 \\ e^{-imt}[m\chi + (i\partial_0 - qA_0)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi + m\chi] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

de donde

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Para una solución  $\chi \propto e^{i(-Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ , dentro de un sistema atómico, tenemos

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi = (E - qV + 2m)\chi \quad (\text{C.31})$$

Para los potenciales de coulomb atómicos  $qV = qA_0 \sim 10\text{eV}$ , y como  $m \approx 0.5\text{ MeV}$  para el electrón, entonces

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi \rightarrow (i\partial_0 + 2m)\chi \quad (\text{C.32})$$

de la ec. (C.28) tenemos

$$(i\partial_0 + 2m)\chi = [(E - m) + 2m]\chi \quad (\text{C.33})$$

En el límite no relativista de  $|\mathbf{p}| \approx 0$  ( estamos en la solución de energía positiva), de la ec. (5.196)  $E \approx +m$  y  $E - m \approx 0$ , entonces

$$(i\partial_0 + 2m)\chi \approx 2m\chi \quad (\text{C.34})$$

Reemplazando en ec. (C.30)

$$\chi = \frac{1}{2m} \sigma^i (i\partial_i - qA_i) \phi \quad (\text{C.35})$$

entonces

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \hat{H} \phi \quad (\text{C.36})$$



con

$$\begin{aligned}
\hat{H}\phi &= qA_0\phi + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\frac{1}{2m}\sigma^j(i\partial_j - qA_j)\phi \\
&= \frac{1}{2m}\sigma^i(i\partial_i - qA_i)\sigma^j(i\partial_j - qA_j)\phi + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m}\sigma^i\sigma^j(-\partial_i\partial_j - iq(\partial_i A_j) - iqA_j\partial_i - iqA_i\partial_j + q^2 A_i A_j)\phi + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m}\left[(-\sigma^i\sigma^j\partial_i\partial_j + q^2\sigma^i\sigma^j A_i A_j)\phi - iq\sigma^i\sigma^j(\partial_i A_j)\phi - iq\sigma^i\sigma^j A_j\partial_i\phi - iq\sigma^i\sigma^j A_i\partial_j\phi\right] + qA_0\phi
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de las matrices de Pauli en ecs.(?) y la ec.(C.85), que para  $A^i = \sigma^i$  es

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i \theta_i^2 \quad (\text{C.37})$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{H}\phi &= \frac{1}{2m} \left\{ [-(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2]\phi - iq\{\sigma^i, \sigma^j\}A_j\partial_i\phi - iq\sigma^i\sigma^j(\partial_i A_j)\phi \right\} + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2 A_i^2]\phi - 2iq\delta_{ij}A_j\partial_i\phi - iq(i\epsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij})(\partial_i A_j)\phi \right\} + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2 A_i^2]\phi - 2iqA_i\partial_i\phi - iq(\partial_i A_i)\phi - q\sigma^k(\epsilon_{ijk}\partial_i A^j)\phi \right\} + qA_0\phi
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
(i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2\phi &= (i\partial_i - qA_i)(i\partial_i - qA_i)\phi \\
&= (-\partial_i\partial_i + q^2 A_i A_i)\phi - iq(\partial_i A_i)\phi - iqA_i\partial_i\phi - iqA_i\partial_i\phi \\
&= \sum_i (-\partial_i^2 + q^2 A_i^2)\phi - 2iqA_i\partial_i\phi - iq(\partial_i A_i)\phi
\end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{H}\phi &= \frac{1}{2m} \left\{ (i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2\phi - q\sigma^k(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_k\phi \right\} + qA_0\phi \\
&= \left[ \frac{1}{2m}(i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left( \frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \phi
\end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

En ausencia del campo electromagnético recuperemos la Ecuación de Schrödinger para una partícula libre como era de esperarse. Sin el último término  $(q\boldsymbol{\sigma}/2m) \cdot \mathbf{B}$ , sería el Hamiltoniano de Schrödinger para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. El término adicional es interpretado como la energía en un campo magnético, de un momento magnético intrínseco asociado con una partícula de Dirac. Definimos entonces el momento magnético intrínseco como ( $q = -e$ )

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_e &= -\frac{e\boldsymbol{\sigma}}{2m} \\
&= -2\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \left( \frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\
&= -g_e \left( \frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}
\end{aligned}
\tag{C.40}$$

donde hemos recuperado el factor  $\hbar$  y definido el *factor-g* [28],  $g_e = 2$ . Se define el momento magnético anómalo del electrón como

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \tag{C.41}$$

de modo que  $a_e = 0$ . Sin embargo experimentalmente  $a_e \sim 10^{-3}$

$$a_e = 0.001\,159\,652\,1859(38) \tag{C.42}$$

Después de la segunda cuantización, se pueden realizar correcciones perturbativas al valor calculado anteriormente de  $g_e$ . Dicho cálculo ha sido realizado a cuarto orden en teoría de perturbaciones coincidiendo con el valor experimental hasta la décima cifra significativa. Este tipo de comprobaciones entre teoría y experimento ha llevado a considerar la Electrodinámica Cuántica (QCD) como la mejor teoría que se halla construido para describir la naturaleza.

## C.4. Problemas

- 1 Calcule la dimensión del campo  $\psi$
- 2 Demuestre que para una transformación  $SU(3)_c$  global, los estados  $B$  y  $M$  en la ec.(??) son invariantes. Es decir, son singletes de color (ver [2] §16.2)
- 3 Lagrangiano de Weyl.

a) Demuestre que  $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L = -\psi_L \sigma^\mu \psi_L^\dagger$

b) Definiendo  $\xi = \psi_L$  y  $\chi^\dagger = \psi_R$ , demuestre que hasta derivadas totales

$$\mathcal{L} = i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m(\xi\chi + \xi^\dagger\chi^\dagger) \tag{C.43}$$

De modo que el Lagrangiano para un fermión de Weyl,  $\psi_W$ , no masivo puede escribirse como

$$\mathcal{L} = i\psi_W^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_W \tag{C.44}$$

## C.5. Apéndices

## C.6. Fermiones quirales de cuatro componentes

Los fermiones izquierdos y derechos pueden ser escritos en terminos de espinores de Dirac como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R \tag{C.45}$$

En la representación de Weyl

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.46})$$

Podemos definir

$$\begin{aligned} P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

De modo que

$$\begin{aligned} P_L \psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L \\ P_R \psi &= \tilde{\psi}_R. \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

En adelante omitiremos las tildes sobre los espinores de Dirac  $\tilde{\psi}_{L,R}$ .

Las matrices  $P_{L,R}$  tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Usando la ec. (C.102)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (\text{C.50})$$

Para escribir el Lagrangiano en término de los nuevos  $\psi_{L,R}$  debemos tener en cuenta que

$$\overline{\psi_{L,R}} = (P_{L,R} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} = \overline{\psi} P_{R,L} \quad (\text{C.51})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi \\ &= i \overline{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} (P_L + P_R) \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L \psi - m \overline{\psi} P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu P_R \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu P_L \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m (\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R). \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

En términos de espinores de izquierdos y derechos de cuatro componentes la transformación de paridad

$$t \rightarrow t \quad \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \quad \psi_L \rightarrow \psi_R, \quad \psi_R \rightarrow \psi_L. \quad (\text{C.53})$$

da lugar a

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i \overline{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m (\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R), \quad (\text{C.54})$$

donde  $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$ , con  $U = \gamma^0$ . Como las dos representaciones dan lugar a la misma física, podemos decir que el LAGRANGIANO en términos de espinores  $L, R$  de cuatro componentes es invariante bajo la transformación de paridad.

La existencia de ambos espinores  $\psi_{L,R}$  garantizan que el Lagrangiano de Dirac es invariante bajo la transformación de paridad.

La corriente de la electrodinámica cuántica en ec. (??) (o la de la cromodinámica cuántica, ec. (??)) conservan paridad ya que, siguiendo los mismos pasos que en la ec. (C.52)

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R. \quad (\text{C.55})$$

Si para alguna partícula, como es el caso del neutrino, no existe la componente derecha, entonces la correspondiente interacción vectorial viola paridad y no puede tener interacciones electromagnéticas ni fuertes, es decir, no se acopla con el fotón o los gluones. Además dicha partícula no puede tener masa de Dirac. En el caso del neutrino esto se entiende pues al no tener carga eléctrica sólo requiere dos grados de libertad independientes.

De otro lado, si una determinada interacción, como es el caso de la interacción débil, solo participa la componente izquierda de la ec. (C.55), está correspondiente a una interacción del tipo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L &= \bar{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5)\psi, \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

que de acuerdo a la asignación en la Tabla corresponde a una corriente V-A.

### C.6.1. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac

De la ec. (C.16)

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta\psi + \delta\psi^\dagger \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \right] \\ &= i\psi^\dagger a^0 \delta\psi \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de fase globales,  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi \approx \psi - i\alpha\psi, \quad (\text{C.58})$$

de modo que

$$\delta\psi = -i\alpha\psi. \quad (\text{C.59})$$

Por consiguiente

$$J^0 = \alpha\psi^\dagger a^0\psi \quad (\text{C.60})$$

Para que  $J^0$  pueda interpretarse como una densidad de probabilidad, debemos redefinir el Lagrangiano en ec. (C.13) como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (\text{C.61})$$

tal que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger c, \quad (\text{C.62})$$

con

$$c\gamma^0 = I \quad (\text{C.63})$$

Para que este nuevo Lagrangiano sea real se requiere que,

$$\begin{aligned} c^2 &= I \\ c\gamma_\mu^\dagger c &= \gamma_\mu \\ cb^\dagger c &= b \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left( \frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger b^\dagger c \psi \\ &= \left( \frac{i}{2} \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger c^2 b^\dagger c \psi \\ &= \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \bar{\psi} c b^\dagger c \psi \\ &= \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} b \psi \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos hacer  $b = I$ , y

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (\text{C.65})$$

La nueva corriente conservada contiene

$$\begin{aligned} J^0 &\propto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \right] \\ &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\ &= \psi^\dagger c \gamma^0 \psi \\ &= \psi^\dagger \psi \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad.  $\bar{\psi}$  se define como la *adjunta* de  $\psi$ .

En general

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] \\ &\propto i\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\alpha\psi) \\ &\propto i\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\alpha\psi) \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger c \gamma^\mu \Psi \quad (\text{C.68})$$

### C.6.2. Tensor momento-energía

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} - \mathcal{L} \\
&= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\
&= -i\bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m\bar{\psi} \psi, \\
&= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
&= \psi^\dagger c(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
&= \psi^\dagger \hat{H} \psi,
\end{aligned} \tag{C.69}$$

donde

$$\hat{H} = c(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \tag{C.70}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H} \psi d^3x. \tag{C.71}$$

Además

$$\begin{aligned}
T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \\
&= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\
&= -\psi^\dagger (-i\partial_i) \psi
\end{aligned} \tag{C.72}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{C.73}$$

### C.6.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \tag{C.74}$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (C.71), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo  $\bar{\psi}$  al Lagrangiano en ec. (C.65), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\
i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0.
\end{aligned} \tag{C.75}$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^i\partial_i\psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^0\partial_0\psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\boldsymbol{\nabla})\psi - m\psi &= 0, \\ i\gamma^0\partial_0\psi &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m)\psi, \end{aligned}$$

de donde

$$i\gamma^{02}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)\psi. \quad (\text{C.76})$$

Comparando con ecs. (C.74) y (C.70), tenemos que

$$\begin{aligned} c &= \gamma^0 \\ \gamma^{02} &= 1. \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

De la ec. (C.70)

$$\hat{H} = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m), \quad (\text{C.78})$$

y de la ec. (C.64)

$$\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{C.79})$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros  $\gamma^\mu$ .

La ec. (C.74) puede escribirse como

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi = 0. \quad (\text{C.80})$$

El campo  $\psi$  también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que  $\partial\hat{H}/\partial t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi &= 0 \\ \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) &= 0 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

De la ec. (C.78), y usando la condición en ec. (C.77), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m)(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m) \\ &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}\gamma_0 + m\gamma_0^2\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m^2 \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

Sea

$$\begin{aligned}\beta &= \gamma^0 \\ \alpha^i &= \beta \gamma^i \\ \gamma^i &= \beta \alpha^i\end{aligned}\tag{C.83}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + m\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m^2 \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m(\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} + m^2\end{aligned}\tag{C.84}$$

Sea  $A$  una matriz y  $\theta$  un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2} \theta^{i2} + \sum_{i < j} \{A^i, A^j\} \theta^i \theta^j\tag{C.85}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i < j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + m^2\tag{C.86}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned}\alpha_i^2 &= 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad i \neq j \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0\end{aligned}\tag{C.87}$$

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2 + m^2\tag{C.88}$$

y reemplazando en la ec. (C.81) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para  $\psi$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) \psi &= 0 \\ (\square + m^2) \psi &= 0\end{aligned}\tag{C.89}$$

En términos de las matrices  $\gamma^\mu$  las condiciones en ec. (C.87) son

$$\begin{aligned}\gamma^{02} &= 1 \\ \alpha^{i2} = 1 &\rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^{i2} = 1 \rightarrow \gamma^{i2} = -1 \\ \gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i &= \{\gamma^i, \gamma^0\} = 0\end{aligned}\tag{C.90}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\{\alpha^i, \alpha^j\} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 0 \quad i \neq j \\ -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^i &= 0 \quad i \neq j \\ \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i &= 0 \quad i \neq j \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= 0 \quad i \neq j\end{aligned}\tag{C.91}$$



Las ecuaciones (C.90)(C.91) pueden escribirse como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.92})$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i) \quad (\text{C.93})$$

Además, de la ec. (C.79),

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{C.94})$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfagan el álgebra en ec. (C.92) y la condición en ec. (C.94), se conocen como matrices de Dirac. A  $\psi$  se le llama espinor de Dirac.

En términos de la matrices  $\gamma^\mu$ , el Lagrangiano de Dirac y la ecuación de Dirac, son respectivamente de las ecs. (C.65) y (C.75)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (\text{C.95})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (\text{C.96})$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{C.97})$$

#### C.6.4. Propiedades de las matrices de Dirac

De la ec. (C.94)

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 & \mu = 0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^{02} \gamma^i = -\gamma^i & \mu = i \end{cases}. \quad (\text{C.98})$$

Definiendo

$$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (\text{C.99})$$

entonces,

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1}, \quad (\text{C.100})$$

Teniendo en cuenta que  $\gamma_\mu^2 \propto \mathbf{1}$  y conmuta con las demás matrices, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned} \gamma_5 \gamma_3 &= i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2 = \gamma_3^2 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 = -\gamma_3 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_3 \gamma_5 \\ \gamma_5 \gamma_2 &= -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3 = -\gamma_2^2 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 = -\gamma_2 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_2 \gamma_5 \\ \gamma_5 \gamma_1 &= i\gamma_0 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_1^2 i\gamma_0 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_1 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_1 \gamma_5 \\ \gamma_5 \gamma_0 &= i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 = -\gamma_0^2 i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_0 \gamma_5. \end{aligned} \quad (\text{C.101})$$

De modo que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (\text{C.102})$$

Expandiendo el anticonmutador tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma_\mu \\ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_\mu \\ \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5) &= -\text{Tr} \gamma_\mu \\ \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\mu) &= -\text{Tr} \gamma_\mu \end{aligned}$$

Matriz $\Gamma$	Transformación	Número	Escalar en Dirac
$\mathbf{1}$	Escalar (S)	1	$\bar{\psi}\psi$
$\gamma_5$	Pseudoescalar (P)	1	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
$\gamma_\mu$	Vector (V)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$\gamma_\mu\gamma_5$	Vector axial (A)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$	Tensor antisimétrico (T)	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
		16	

Tabla C.1: Matrices  $\Gamma_i$ .

$$\text{Tr } \gamma_\mu = -\text{Tr } \gamma_\mu, \quad (\text{C.103})$$

y por consiguiente

$$\text{Tr } \gamma_\mu = 0. \quad (\text{C.104})$$

Si

$$\tilde{\gamma}_\mu \equiv U\gamma_\mu U^\dagger, \quad (\text{C.105})$$

para alguna matriz unitaria  $U$ , entonces  $\tilde{\gamma}_\mu$  corresponde a otra representación de álgebra de Dirac en ec. (C.92), ya que

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \{U\gamma^\mu U^\dagger, U\gamma^\nu U^\dagger\} \\
&= U\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U^\dagger \\
&= 2g^{\mu\nu}UU^\dagger \\
&= 2g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

Claramente, la condición en ec. (C.94) se mantiene para la nueva representación. Como  $\gamma_0$  es hermítica, siempre es posible escoger una representación tal que  $\tilde{\gamma}_0 \equiv U\gamma_0 U^\dagger$  sea diagonal. Como  $\gamma_0^2 = 1$ , sus entradas en la diagonal deben ser  $\pm 1$ , y como  $\text{Tr } \tilde{\gamma}_0 = 0$ , debe existir igual número de  $+1$  que de  $-1$ . Por lo tanto la dimensión de  $\gamma_0$  (y de  $\gamma_\mu$ ) debe ser par:  $2, 4, \dots$

Si  $U = \gamma^0$ , entonces  $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$  y  $\tilde{\gamma}^i = -\gamma^i$ .

Para una matriz de  $n$  dimensiones existen  $n^2$  matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes. Si se sustrae la identidad quedan  $n^2 - 1$  matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes de traza nula. En el caso  $n = 2$  corresponden a las 3 matrices de Pauli. En el caso de la ecuación de Dirac se requieren 4 matrices independientes, por lo tanto deben ser matrices  $4 \times 4$ . En efecto para  $n = 4$  existen 15 matrices independientes de traza nula dentro de las cuales podemos acomodar sin problemas las 4  $\gamma^\mu$ . En la Tabla C.1 se muestran las matrices de traza nula con sus propiedades de transformación bajo el Grupo de Lorentz. En la última se muestra el correspondiente escalar en el espacio de Dirac  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ .



# Apéndice D

## Soluciones a los problemas

### Capítulo 4

4.5. De

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \quad (\text{D.1})$$

tenemos que

$$a'_{\rho} = g_{\mu\rho} a'^{\mu} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\eta} a_{\eta} = \Lambda_{\rho}^{\eta} a_{\eta} \quad (\text{D.2})$$

De la definición de transformación de Lorentz

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = a^{\mu} b_{\mu} \quad (\text{D.3})$$

tenemos

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} a^{\nu} b_{\rho} = a^{\nu} b_{\nu} = \delta_{\nu}^{\rho} a^{\nu} b_{\rho} \quad (\text{D.4})$$

de donde

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = \delta_{\nu}^{\rho} \quad (\text{D.5})$$

4.2.

$$r \sim \frac{1}{m} \approx \frac{1}{80 \text{ GeV}} \times \frac{1 \text{ GeV}}{1/(1.97 \times 10^{-16} \text{ m}^{-1})} \approx 2.5 \times 10^{-18} \text{ m} \quad (\text{D.6})$$

### Capítulo 3

3.?? Tenemos

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Haremos la parte correspondiente al término de masa. Para el término cinético es igual.

$$\begin{aligned} -m^2 \tilde{\Phi}^{\dagger} \tilde{\Phi} &= -m^2 \begin{pmatrix} \phi^0 & -\phi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \\ &= -m^2 (\phi^0 \phi^{0*} + \phi^+ \phi^-) \\ &= -m^2 \Phi^{\dagger} \Phi \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

de modo que  $\Phi$  y  $\tilde{\Phi}$  son representaciones equivalentes de  $SU(2)$ .

Además

$$\begin{aligned} -m^2 \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a \Phi^b &= -m^2 (\epsilon_{12} \tilde{\Phi}^1 \Phi^2 + \epsilon_{21} \tilde{\Phi}^2 \Phi^1) = -m^2 (\phi^{0*} \phi^0 + \phi^+ \phi^-) \\ &= -m^2 \Phi^\dagger \Phi \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

3.?? De las ecs. (??) y (??)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) W_k^\mu W_\mu^l \phi_m - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} W_k^\mu W_\mu^k \phi_i - g^2 \phi^{*i} W_k^\mu W_\mu^i \phi_k - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^* \cdot \phi \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu - g^2 \phi^* \cdot \mathbf{W}^\mu \mathbf{W}_\mu \cdot \phi - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^l W_\nu^m \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^j W_\nu^k - W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^k W_\nu^j) \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\nu \cdot \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\nu \cdot \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

3.??

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} [\partial^\mu (-sZ^\nu + cA^\nu) - \partial^\nu (-sZ + cA)^\mu] [\partial_\mu (-sZ + cA)_\nu - \partial_\nu (-sZ + cA)_\mu] \\ &= -\frac{1}{4} [-s\partial^\mu Z^\nu + c\partial^\mu A^\nu + s\partial^\nu Z^\mu - c\partial^\nu A^\mu] [-s\partial_\mu Z_\nu + c\partial_\mu A_\nu + s\partial_\nu Z_\mu - c\partial_\nu A_\mu] \\ &= -\frac{1}{4} [-s(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] [-s(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{4} [-s(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] [-s(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{4} [s^2 (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c^2 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad - 2sc (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Similarmente, reemplazando  $s^2 \leftrightarrow c^2$  y  $s \rightarrow -s$

$$-\frac{1}{4} W_3^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^3 \supseteq -\frac{1}{4} [c^2 (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + s^2 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)]$$

$$+ 2sc(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \quad (D.13)$$

$$-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_3^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^3 \supset = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} \quad (D.14)$$

De otro lado, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^- &= \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^+ + W_\mu^- &= \frac{2}{\sqrt{2}}W_\mu^1 = \sqrt{2}W_\mu^1 \\ W_\mu^- - W_\mu^+ &= \frac{2}{\sqrt{2}}W_\mu^2 = \sqrt{2}iW_\mu^2 \end{aligned} \quad (D.15)$$

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= \frac{W_\mu^- + W_\mu^+}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^2 &= \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{\sqrt{2}i} \end{aligned} \quad (D.16)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 - \frac{1}{4}W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 &\supset -\frac{1}{4}[(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu)(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1) \\ &\quad + (\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu)(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)] \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 - \partial^\nu W_1^\mu \partial_\mu W_\nu^1 + \partial^\nu W_1^\mu \partial_\nu W_\mu^1) \\ &\quad + (1 \rightarrow 2)\} \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 + \partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1) \\ &\quad + (1 \rightarrow 2)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1) + (\partial^\mu W_2^\nu \partial_\mu W_\nu^2 - \partial^\mu W_2^\nu \partial_\nu W_\mu^2)\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[(\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- + \partial_\nu W_\mu^+)] \\ &\quad + i^2[(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^+)]\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[(\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- + \partial_\nu W_\mu^+)] \\ &\quad - [(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^+)]\} \end{aligned} \quad (D.17)$$

Teniendo en cuenta que los terminos cruzados son los únicos que no se cancelarán, tenemos

$$-\frac{1}{4}W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 - \frac{1}{4}W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 \supset -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu \partial_\mu W_\nu^+ + \partial^\mu W_+^\nu \partial_\mu W_\nu^- - \partial^\mu W_-^\nu \partial_\nu W_\mu^+ - \partial^\mu W_+^\nu \partial_\nu W_\mu^-]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W_-^\nu - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W_-^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + \partial_\nu W_\mu^+ \partial^\nu W_-^\mu - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W_-^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) - \partial^\nu W_-^\mu(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2}[(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu)(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{D.18}$$

## Capítulo 7

7. ???. Haciendo un análisis similar al de la sección ??, tenemos de la ec. (??) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fWB} &= i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\
&= (i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \quad i\bar{e}_L\gamma^\mu) \begin{pmatrix} \partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu & -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
&\quad + i\bar{e}_R\gamma^\mu(\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu)e_R \\
&= (i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \quad i\bar{e}_L\gamma^\mu) \begin{pmatrix} (\partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L - \frac{i}{\sqrt{2}}ge_L W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}g\nu_L W_\mu^- + (\partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R\gamma^\mu(\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu)e_R \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - igT_3^\nu W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^- + i\bar{e}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - igT_3^e W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu(\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu)e_R \\
&= i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu \nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^-) \\
&\quad + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu(-igT_3^\nu W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L + i\bar{e}_L\gamma^\mu(-igT_3^e W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu(-ig'Y_R B_\mu)e_R \\
&= i\bar{\psi}_e\gamma^\mu\partial_\mu \psi_e + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu \nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \text{h.c.}) + \mathcal{L}_{fAZ}
\end{aligned} \tag{D.19}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fAZ} &= \bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L(gT_3^\nu W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L(gT_3^e W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) + g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R(Y_R B_\mu) \\
&= g[\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L(T_3^\nu W_\mu^3 + \tan\theta_W Y_L B_\mu) + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L(T_3^e W_\mu^3 + \tan\theta_W Y_L B_\mu) + Y_R \tan\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu] \\
&= g\{\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L[T_3^\nu(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + \tan\theta_W Y_L(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)] \\
&\quad + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L[T_3^e(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + \tan\theta_W Y_L(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)] \\
&\quad + Y_R \tan\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)\} \\
&= \frac{g}{\cos\theta_W}[(T_3^\nu \cos^2\theta_W - Y_L \sin^2\theta_W)\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L \\
&\quad + (T_3^e \cos^2\theta_W - Y_L \sin^2\theta_W)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + (0 \times \cos\theta_W - Y_R \sin^2\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R)Z_\mu \\
&\quad + g \sin\theta_W[(T_3^\nu + Y_L)\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L + (T_3^e + Y_L)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + (0 + Y_R)\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]A_\mu.
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Como  $T_3^f \cos^2\theta_W - Y_f \sin^2\theta_W = T_3 - (T_3^f + Y_f) \sin^2\theta_W$ , entonces usando  $Q_f = T_3^f + Y_f$ , y  $e = g \sin\theta_W$  tenemos

$$\mathcal{L}_{fAZ} = \sum_{f=e_L, \nu_L, e_R} \left[ \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} (T_3^f - Q_f \sin^2\theta_W) Z_\mu + e Q_f A_\mu \right] \bar{f}\gamma^\mu f \tag{D.21}$$

Como  $Q_\nu = 0$ , claramente los neutrinos no se acoplan a los fotones como se esperaba y además se obtiene la corriente electromagnética apropiada, ya que

$$\sum_{f=e_L, \nu_L, e_R} eQ_f A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f = eQ_e \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e A_\mu. \quad (\text{D.22})$$





# Apéndice E

## Trabajos de fin de curso

Overleaf template: <https://www.overleaf.com/read/zbkfygtmkmjv>

### E.1. 2017-1

- <https://www.sharelatex.com/project/5941b2e8b6f983660ce27c36>
- <https://www.overleaf.com/9578218vyjnrnhyvnx>
- <https://www.overleaf.com/9850124vbnhhchxypkb>
- <https://www.overleaf.com/9969793stbhmhzbsxrx>

### E.2. 2018-1

- <https://www.overleaf.com/read/djnffshsyskp>
- <https://www.overleaf.com/read/vwpkbkrqqrff>
- <https://www.overleaf.com/read/jsfwwfpsbthg>



# Bibliografía

- [1] Modern Elementary Particle Physics, Gordon Kane, Perseus Publishing, 1993.
- [2] An Introduction to Standard Model of Particle Physics. W.N Cottingham and D.A. Greenwood, Cambridge University Press, 1988
- [3] Quantum Field Theory, L.H Reyder, Cambridge University Press
- [4] Quantum Field Theory, F. Mandl, G. Shaw, John Wiley & Sons, INC. 1993
- [5] A. Pich, The Standard Model of Electroweak Interactions, hep-ph/0502010
- [6] The Standard Model: Alchemy and Astrology, hep-ph/0609274
- [7] Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Franz Gross, John Wiley & Sons, INC. 1993
- [8] [http://es.wikipedia.org/wiki/Principio\\_de\\_m%C3%ADnima\\_acci%C3%B3n](http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_m%C3%ADnima_acci%C3%B3n), [http://en.wikipedia.org/wiki/Action\\_%28physics%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Action_%28physics%29)
- [9] <http://www.eftaylor.com/software/ActionApplets/LeastAction.html>
- [10] “Lagrangian Densities and Principle of Least Action in Nonrelativistic Quantum Mechanics”, Donald H. Kobe, arXiv:0712.1608
- [11] [http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes\\_de\\_Newton#Segunda\\_Ley\\_de\\_Newton\\_o\\_Ley\\_de\\_la\\_Fuerza](http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Newton#Segunda_Ley_de_Newton_o_Ley_de_la_Fuerza), [http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s\\_laws\\_of\\_motion](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_laws_of_motion)
- [12] Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Franz Gross, Wiley Interscience, 1993, Chapter 1.
- [13] [http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_la\\_divergencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia)
- [14] <http://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembertian>
- [15] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, “Terrestrial and extra-terrestrial limits on the photon mass,” Rev. Mod. Phys. **43** (1971) 277.
- [16] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [17] [http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli\\_matrices](http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_matrices)
- [18] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.

- [19] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508. doi:10.1103/PhysRevLett.13.508. P. W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” *Phys. Lett.* **12** (1964) 132. doi:10.1016/0031-9163(64)91136-9. P. W. Higgs, “Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons,” *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156. doi:10.1103/PhysRev.145.1156
- [20] A. Pich, “The standard model of electroweak interactions,” arXiv:hep-ph/0502010, Published in \*Sant Feliu de Guixols 2004, European School of High-Energy Physics\* 1-48.
- [21] [http://en.wikipedia.org/wiki/Natural\\_units](http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_units)
- [22] [http://en.wikipedia.org/wiki/Plank\\_units](http://en.wikipedia.org/wiki/Plank_units)
- [23] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, “Gauge theories in particle physics: A practical introduction. Vol. 1: From relativistic quantum mechanics to QED,” *Bristol, UK: IOP (2003) 406 p*
- [24] <http://groups.google.com/group/sci.physics.research/msg/e6cc1b288df8bbb2>
- [25] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” *J. Phys. G* **33** (2006) 1.
- [26] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p*
- [27] [http://en.wikipedia.org/wiki/Gell-Mann\OT1\textendashNishijima\\_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Gell-Mann\OT1\textendashNishijima_formula)
- [28] [http://en.wikipedia.org/wiki/Spin\\_\(physics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_(physics))
- [29] <http://en.wikipedia.org/wiki/LEP>
- [30] <http://en.wikipedia.org/wiki/Muon>
- [31] <http://blogs.uslhlc.us/?p=481>
- [32] Lie Groups in Physics, M.J.G Veltman (English version by G. 't Hooft)
- [33] K. Brading and H. R. Brown, “Noether’s theorems and gauge symmetries,” hep-th/0009058.
- [34] K. Brading and E. Castellani, “Symmetries in physics: Philosophical reflections,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2003) 445 p
- [35] K. Sundermeyer, “Symmetries in fundamental physics,” *Fundam. Theor. Phys.* **176** (2014). doi:10.1007/978-94-007-7642-5
- [36] Emmy Noether, Invariant variation problems, arXiv:physics/0503066.
- [37] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,” *Phys. Rev.* **96** (1954) 191. doi:10.1103/PhysRev.96.191
- [38] Y. Rodriguez, “A New Pedagogical Way of Finding Out the Gauge Field Strength Tensor in Abelian and Non-Abelian Local Gauge Field Theories”, arXiv:1512.03827
- [39] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264. doi:10.1103/PhysRevLett.19.1264

- [40] Rodrigues' rotation formula. In Wikipedia. Retrieved August 10, 2018, from [https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues'\\_rotation\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues'_rotation_formula)
- [41] A. Zee, "Group Theory in a Nutshell for Physicists,"
- [42] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, "Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry," *Phys. Rept.* **494** (2010) 1 doi:10.1016/j.physrep.2010.05.002 [arXiv:0812.1594 [hep-ph]].
- [43] F. Quevedo, S. Krippendorff and O. Schlotterer, [arXiv:1011.1491 [hep-th]]. See also: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3P7.pdf> Google Drive
- [44] W. Greiner, "Relativistic quantum mechanics: Wave equations,"
- [45] T. Aoyama, T. Kinoshita and M. Nio, "Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron," *Atoms* **7** (2019) no.1, 28 doi:10.3390/atoms7010028
- [46] R. Feynman, "QED: The Strange Theory of Light and Matter,"
- [47] Warren Siegel, "Fields" [https://bit.ly/Siegel\\_Fields](https://bit.ly/Siegel_Fields)
- [48] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, "The Stueckelberg field," *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004), 3265-3348 doi:10.1142/S0217751X04019755 [arXiv:hep-th/0304245 [hep-th]].
- [49] Z. K. Silagadze, "Relativity without tears," *Acta Phys. Polon. B* **39** (2008), 811-885 [arXiv:0708.0929 [physics.ed-ph]].
- [50] Ryusuke Matsunaga, Naoto Tsuji, Hiroyuki Fujita, and others, "Light-induced collective pseudospin precession resonating with Higgs mode in a superconductor," *Science* 05 Sep 2014: Vol. 345, Issue 6201, pp. 1145-1149, DOI: 10.1126/science.1254697