

Континуальные модели прогнозирования производственного функционирования поточных линий

Заруба В.Я., Пигнастый О.М.

Конкурентоспособность промышленных предприятий в значительной степени определяется эффективностью организации и планирования их производственно-технологических процессов. Составными частями общего производственного процесса на предприятии выступают технологические процессы, реализуемые в виде заданных логически завершённых последовательностей технологических операций. Технологический процесс может быть отнесен к изделию, его составной части. Под технологической операцией понимают законченную часть технологического процесса, выполняемую на одном рабочем месте [1].

Производственные подразделения предприятия (участки, цеха) создаются на принципах технологической или предметной специализации. Подразделения технологической специализации образуются из единиц однотипного оборудования, предназначенного для проведения сходных технологических операций. В настоящее время технологическая специализация наиболее часто применяется в единичном и мелкосерийном типах производства, поскольку в её условиях для перехода на новую продукцию бывает достаточно сделать переналадку или замену отдельных единиц оборудования. Производственные линии предназначаются для производства определённого вида изделий, которые имеют схожие конструктивно-технологические признаки. Одной из разновидностей технологических линий выступают поточные линии, в которых состав и последовательность выполнения технологических операций являются жёстко фиксированными. Они могут иметь разные уровни специализации. В поточных линиях с узкой предметной специализацией оказывается возможным использовать относительно дешёвое и одновременно высокопроизводительное оборудование, автоматизировать основные и вспомогательные, в частности, транспортные, операции, сократить длительность производственного цикла, уменьшить трудоёмкость, снизить затраты материалов, упростить планирование и др. Производство на поточных линиях с узкой предметной специализацией организуется в соответствии партионным методом, предполагающим последовательное изготовление различных партий изделий (деталей), каждую из которых составляют изделия с одинаковыми технологическими характеристиками.

При этом изделия из различных партий должны иметь достаточно близкие конструктивно-технологические характеристики, для того, чтобы обеспечивать приемлемо высокую загрузку оборудования, входящего в поточную линию. Переход от производства одной партии изделий к производству следующей партии требует, как правило, затрат времени и денежных средств на переналадку оборудования. В частном случае поточная линия с узкой предметной специализацией может быть предназначена для производства единственного вида изделий. С 70-х годов прошлого столетия всё большее распространение находят гибкие технологические, в частности гибкие поточные, линии с широкой предметной специализацией [2, 3]. Возможность их создания была обусловлена появлением многоцелевых станков, робототехники, автоматических загрузочно-разгрузочных и транспортных устройств, накопительных систем, контрольно-измерительных приборов, устройств управления оборудованием. Поточные линии с предметной специализацией функционируют в соответствии с групповым методом организации производства, ориентированного на конструктивно-технологические характеристики изделия-представителя группы. При этом переход от производства одного изделия к другому либо не требует переналадки оборудования, либо переналадка оборудования осуществляется автоматически, что позволяет без дополнительных затрат устанавливать последовательность производства изделий. Оптимизация решений в сфере организации и планирования современного производства требует в связи с его сложностью применения компьютерных информационных технологий с использованием математических моделей. С практической точки зрения математическое моделирование производственно-технологических процессов предназначается в основном для использования в следующих направлениях: для изучения и оценки эффективности структурных и функциональных схем построения производственных систем с целью их усовершенствования и для оценки и реализации различных способов и методов управления производственно-технологическими процессами.

Как можно видеть, ключевой задачей математического моделирования, обеспечивающей выполнение его практического назначения, выступает прогнозирование будущих состояний исследуемого производственно-технологического объекта. Исходя из прогноза, выявляются проблемы проектного или управленческого характера. При этом как сам прогноз, так и обеспечивающие его

модели могут носить как полностью определённый (детерминированный), так и частично определённый (вероятностный или интервально определённый) характер.

Математические модели производственно-технологических процессов, в зависимости от формы своего представления могут быть подразделены на три группы: аналитические, аналитико-численные и имитационные. Разработка аналитических моделей предполагает получение аналитическим путём математических выражений, описывающих связи между количественными характеристиками процесса функционирования технологической линии. Непосредственное исследование аналитических моделей позволяет выявлять различные закономерности процесса функционирования технологических линий. Для самых простых аналитических моделей могут быть получены математические выражения характеристик процесса в явном виде. Однако, наиболее часто для отыскания значений исследуемых характеристик требуется применение специальных численных методов. В этих случаях можно говорить, что аналитические модели принимают форму аналитико-численных моделей. Имитационные модели представляют собой алгоритмы компьютерного моделирования, воспроизводящие численные характеристики элементарных явлений и актов производственно-технологического процесса в последовательности, отражающей их реальные связи.

Имитационное моделирование является наиболее универсальным методом прогнозирования производственно-технологических процессов любого уровня сложности, позволяет учитывать нестационарность и вероятностную природу их характеристик. Однако имитационным моделям свойственны такие недостатки, как сложность и трудоемкость построения моделирующих алгоритмов, а также сложность использования этих моделей для получения оптимальных решений в задачах управления ввиду больших затрат времени и накопления погрешностей вычислений. По этой причине актуальным направлением исследований является развитие теоретических основ аналитического и аналитико-численного моделирования функционирования производственно-технологических объектов. В частности, недостаточное развитие для практического применения имеют аналитико-численные модели стохастических производственных процессов, описывающие конкретный характер их протекания.

Проблемам общей методологии моделирования и оптимизации функционирования больших производственно-технологических систем посвящены труды отечественных и зарубежных ученых: В.А.Балашевича, С.Бира, Н.П.Бусленко, В.М.Глушкова, Е.Голдрата, Л.В.Канторовича, В.А.Летенко, А.В.Лотова, А.А.Первозванского, Б.М.Петрова, А.К.Редькина, Дж.Форрестера, В.В.Шкурбы, С.Б.Якимовича. Среди последних достижений в сфере аналитико-численного моделирования производственно-технологических процессов следует отметить класс континуальных моделей, основанных на применении уравнений в частных производных для описания изменения с течением времени плотности распределения производственных заделов по элементам поточных линий [4-7]. Эти модели обладают рядом преимуществ по сравнению с дискретно-потокowymi моделями [8], основанными на применении теории массового обслуживания.

Целью работы является систематизация моделей производственного функционирования поточных линий, изложение и обоснование теоретических основ построения континуальных моделей.

Для сравнительного анализа различных подходов к моделированию производственных процессов на технологических линиях рассмотрим следующий пример функционирования поточной линии. Положим, что поточная линия включает M технологических позиций, номера которых $m=1,2,\dots,M$ соответствуют последовательности обработки предметов производства (для определённости – деталей), установленной технологическим маршрутом. Каждая технологическая позиция, начиная со второй, содержит производственный модуль и входной накопитель деталей. Для каждого m -го модуля, $m=1,2,\dots,M$, известны нормативная длительность τ_m (час) обработки каждой детали из партии, поступающей на поточную линию в количестве N , а также момент времени t_{je}^m окончания обработки на m -м модуле последнего предмета производства из предыдущей партии.

С точки зрения смыслового содержания непосредственно моделируемых характеристик производственно-технологических процессов могут быть выделены три типа моделей: дискретно-событийные, дискретно-потокowe и континуальные. Дискретно-событийное моделирование направлено на определение моментов времени реализации событий, соответствующих изменениям стадий обработки и местоположения деталей в поточной линии. Начальным событием выступает начало

обработки 1-й детали из рассматриваемой партии на 1-м модуле поточной линии, а конечным событием – завершение обработки последней детали на последнем модуле поточной линии. Дискретно-событийные модели в аналитической форме устанавливают связи между временами реализации существенных для целей моделирования событий. В рассматриваемом примере моделируются моменты времени t_{ji}^m , t_{je}^m соответственно начала и окончания обработки на каждом m -м модуле каждой j -ой детали определяются следующими формулами:

$$t_{ji}^m = \max \{ t_{1e}^{m-1}, t_{e}^i \} \quad (m = 1, 2, \dots M); \quad (1)$$

$$t_{ji}^1 = t_{1i}^1 + (j-1)\tau_1 \quad (j = 1, 2, \dots N); \quad (2)$$

$$t_{ji}^m = \max \{ t_{je}^{m-1}, t_{j-1,e}^m \} \quad (j = 2, \dots N) \quad (i = 2, \dots M), \quad (3)$$

$$t_{je}^m = t_{ji}^m + \tau_j \quad (j = 1, 2, \dots N) \quad (m = 1, 2, \dots M) \quad (4)$$

В соответствии с формулой (2) входные предметы производства поступают на первый производственный модуль сразу после того, как он освобождается. Из формулы (3) следует, что деталь j , $j \geq 2$, поступает на обработку на модуль m , $m \geq 2$, сразу после того, как произойдут два таких события: 1) закончится обработка j -ой детали на $(m-1)$ -м модуле; 2) закончится обработка $(j-1)$ -ой детали на m -м модуле.

Величины t_{ji}^m ($j = 1, 2, \dots N$) ($m = 1, 2, \dots M$) могут быть рассчитаны по результатам проведения N последовательных итераций. На 1-й итерации по формуле (1) отыскиваются величины t_{1i}^m . В начале 2-й итерации по формуле (2) находится величина t_{2i}^1 , после чего по формуле (3) рассчитываются значения t_{2i}^m ($m = 2..M$). Таким образом, перед началом каждой j -й итерации, $j = 2..N$, оказываются известными величины t_{ri}^m ($r = 1, 2, \dots j-1$) ($m = 1, 2, \dots M$), на основе которых отыскиваются величины t_{ji}^m .

Формулы (1)–(4) в совокупности с приведенным выше алгоритмом расчёта моментов времени t_{ji}^m ($j = 1, 2, \dots N$) ($m = 1, 2, \dots M$) начала обработки деталей на модулях поточной линии определяют дискретно-событийную модель функционирования поточной линии в аналитико-численной форме.

Недостаток дискретно-событийных моделей в аналитической форме состоит в том, что они не отражают непосредственно количества деталей в межоперационных

накопителях. Поэтому при наличии ограничений на ёмкость накопителей возникает необходимость моделирования процесса функционирования во временной последовательности событий. В англоязычных публикациях дискретно-событийные имитационные модели носят название DEM моделей (Discrete-Event Model) [4,5]. Эти модели позволяют учитывать частичную неопределённость (стохастичность) длительностей обработки деталей. Учет факторов случайности осуществляется путем многократного воспроизведения процесса функционирования системы.

Построение дискретно-поточковых моделей основано на применении теории массового обслуживания (теории очередей). Основными понятиями, используемыми в дискретно-поточковых моделях, являются входной и выходной потоки, время изготовления предмета производства, организация (правило обслуживания) очереди. Дискретно-поточковые модели наиболее активно используются для описания производственно-технологических процессов в форме clearing-функций, играющих важную роль в оперативном управлении производством [9]. В общем случае clearing-функция устанавливает значение пропускной способности (производительности) $[\chi]_{cl}$ производственной системы в зависимости от распределения заделов по её элементам $m=1..M$:

$$[\chi]_{cl} = \Phi(W) , \quad (5)$$

где $W = (W_m, (m=1,2..M))$ - вектор объемов незавершенного производства. Для элементарной (неделимой) единицы производственной системы вектор W трансформируется в скалярную величину. Clearing-функция может быть определена для производственного объекта любого размера (для единицы оборудования, технологической линии, цеха, завода или нескольких заводов, включенных в единый производственный процесс) [5,10] (2012). Clearing-функция, впервые была введена Graves S.C. (1986) , а возможности её корректного определения изучены Karmarkar U.S. (1989) [9]. Первоначально clearing-функции $[\chi]_{cl}$ строились на основе предположения о стационарности объемов незавершенного производства. Missbauer Н [10] (2009) распространил использование clearing-функции $[\chi]_{cl}$ на переходные процессы путём выражения с её помощью зависимости пропускной способности производственной системы от начального распределения объемов незавершенного производства по технологическому маршруту. Он впервые исследовал clearing-функции $[\chi]_{cl}$ с использованием стохастической модели очереди при стационарных

величинах интенсивности прибытия деталей ψ_{m-1} на m -ю технологическую позицию и интенсивности обработки на ней ψ_m . Предположение о стационарности параметров ψ_{m-1} и ψ_m явилось значительным ограничением для использования представленных моделей в описании переходных производственных процессов, встречающихся на практике. Armbruster D., Fonteijn J., Wienke M. (2012) исследовали модель производственной системы в виде совокупности очередей при зависимом от времени величинах $\psi_{m-1} = \psi_{m-1}(t)$, $\psi_m = \psi_m(t)$ [11]:

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = \psi_{m-1}(t) - \psi_m(t), \quad (6)$$

где $I_m(t)$ - уровень незавершенного производства для m -го технологического участка (операции). Следует отметить, что уравнение (6) может быть представлено в форме уравнений Форрестера (1961) [12]:

$$I_m(t_{j+1}) = I_m(t_j) + R_m(t_j) - X_m(t_j), \quad R_m(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \psi_{m-1}(\tau) d\tau, \quad X_m(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \psi_m(\tau) d\tau. \quad (7)$$

В теории массового обслуживания Bramson (2008) [13] предложены так называемые fluid-модели, которые являются непрерывными во времени, но прерывными в пространстве, что приводит к системе M обыкновенных дифференциальных уравнений для описания конечного числа M пространственных частей потока.

Приведём дискретно-потокową модель для описанного выше примера (формулы (1)-(4) функционирования поточной линии. Введем следующие обозначения и определения: ψ_{nm} - нормативный темп работы m -го производственного модуля, $\psi_m = 1/\tau_m$ ($m=1,2..M$); $W_m(t)$ - количество деталей на m -й технологической позиции, включая накопитель; $\psi_m(t)$ - фактический темп выхода изделий с m -й технологической позиции в момент времени t , шт/час; W_m^{\max} - максимальное количество деталей на m -й технологической позиции, обусловленное ограниченной ёмкостью имеющегося на ней накопителя.

Дискретно-потокová модель функционирования поточной линии может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{dW_m(t)}{dt} = \psi_{m-1}(t) - \psi_m(t) \quad (m=2, \dots, M); \quad W_m(0) = W_{m0} \quad (m=2, \dots, M), \quad (8)$$

$$\psi_1(t) = \psi_{n1}, \text{ если } W_2(t) < W_2^{\max};$$

$$\psi_m(t) = \psi_{nm}, \text{ если } t \geq t'_{mk}, W_m(t) > \alpha, (m=2, \dots, M), W_{m+1}(t) < W_m^{\max} \quad (m=2, \dots, M-1);$$

$$\psi_m(t) = 0, \text{ если } W_m(t) \leq \alpha, \text{ или если } t < t'_{ik}, \text{ или если } W_m(t) \geq W_m^{\max},$$

где W_{m0} ($m=2, \dots, M$) - объёмы незавершённого производства рассматриваемой партии деталей в начальный момент времени $t = 0$, α - параметр модели, $0 \leq \alpha \leq 1$. Для свободной поточной линии $W_{m0} = 0$, $t'_{mk} = 0$ ($m=2, \dots, M$).

Континуальные модели являются относительно новым классом моделей, используемых для моделирования и управления поточной линии. Аналогии континуальных моделей носят название PDE-моделей (partial differential equation) [4-6, 11]. Построение континуальной модели предполагает континуализацию (переход от дискретного к непрерывному описанию) позиций поточной линии, по которым определяются физические состояния и местоположения каждой конкретной детали из рассматриваемой партии. Возможность континуализации обуславливается следующими соображениями. Если длительности $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ обработки детали являются детерминированными величинами, то стадия технологических преобразований, на которой находится рассматриваемая деталь в момент времени t (с учётом пролёживания в накопителях) находится во взаимно однозначном соответствии с общей длительностью $T(t)$ обработки детали непосредственно на производственных модулях в течение времени t : $T(t) = \sum_{m=1}^M \tau_m$, если технологический процесс изготовления детали в момент времени t завершён; $T(t) = \sum_{r=1}^{m-1} \tau_r + t_m$, если к моменту времени t деталь в течение времени t_m обрабатывалась на m -м производственном модуле, $0 < t_m < \tau_m$; $T(t) = \sum_{r=1}^{m-1} \tau_r$ если в момент времени t деталь находится в накопителе на m -й позиции.

Будем интерпретировать значения некоторой монотонно возрастающей функции F как значения обобщённого показателя S технологических трансформаций детали, который должен быть достигнут после её обработки на производственных модулях в течение времени T , $S = F(T)$. В качестве этого показателя в работах Armbruster D., Ringhofer C. предложено использовать величину x , характеризующую

степень завершения изготовления изделия [4,6,14,]: $x = T/T_0$, где T_0 – общее нормативное время изготовления изделия. В работах [6,7] значения функции F предложено интерпретировать как сумму затрат (перенесённую на деталь стоимость ресурсов) S (грн. /шт), определяемую длительностью T обработки детали. Величине $S(t)$ стоимости, перенесённой на деталь к моменту времени t , однозначно соответствует длительность $T(t)$ её обработки на производственных модулях, $T(t) = F^{-1}(S(t))$, где F^{-1} - функция, обратная к F . Поскольку длительность $T(t)$ однозначно определяет стадию технологических преобразований детали, то стоимость $S(t)$ будет однозначно определять текущие значения физических параметров детали. Заметим, что поскольку в качестве функции F может быть выбрана любая монотонно возрастающая функция, то вопрос о том, насколько точно она отражает реальные затраты, может вообще не рассматриваться.

Пусть партия технологически однородных деталей включает N единиц, а длительности $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ обработки детали являются детерминированными величинами. Стоимость S_m детали после окончания её обработки на m -м производственном модуле будет определяться следующим образом: $S_1 = F(\tau_1)$, $S_m = F(\sum_{r=1}^m \tau_r)$ ($m=2, \dots, M$). Обозначим как $\tilde{\chi}(t, S)$ - количество деталей, на которые к моменту времени t перенесена стоимость в размере S , $S_0 = 0 < S \leq S_M$. Нетрудно видеть, что функция $\tilde{\chi}(t, S)$ однозначно определяет количество деталей, находящихся в накопителе и в производственном модуле на каждой m -й технологической позиции. Действительно, любой величине S , $S_0 \leq S < S_M$, однозначно соответствует такой номер m технологической позиции, $m=1, \dots, M$, что $S_{m-1} \leq S < S_m$. При этом значение функции $\tilde{\chi}(t, S)$ при $S = S_m$ определяет количество деталей в накопителе на m -й позиции. Если $S_{m-1} < S < S_m$ то величина $\tilde{\chi}(t, S)$ определяет количество деталей, обрабатываемых на m -м производственном модуле, $m=1, 2, \dots, M$. Величине $\tilde{\chi}(t, S_M)$ соответствует количество деталей, процесс изготовления которых в момент времени t завершён.

Если длительности $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ обработки детали являются случайными величинами, то количество деталей, которые в момент времени t имеют стоимость S ,

является случайной величиной, плотность распределения которой задаётся функцией $\chi(t, S, \mu)$, где μ - случайная величина, имеющая смысл скорости (грн/час) перемещения каждой детали по технологическим позициям (скорости перенесения на деталь стоимости технологических ресурсов). В этом случае можно говорить об ожидаемом количестве $[\tilde{\chi}]_0(t, S)$ деталей со стоимостью S в момент времени t :

$$[\tilde{\chi}]_0(t, S) = \int_0^{\infty} \tilde{\chi}(t, S, \mu) d\mu. \quad (9)$$

Исходя из заданной функции $[\tilde{\chi}]_0(t, S)$, могут быть однозначно установлены (как это было показано для функции $\tilde{\chi}(t, S)$) ожидаемые количества деталей, которые в момент времени t будут находиться в накопителе и в производственном модуле на каждой m -й технологической позиции, а также ожидаемое количество деталей, процесс изготовления которых завершён.

Для создания континуальных моделей в последние годы разработаны методы, позволяющие отыскивать функции $[\chi]_0(t, S)$, определяющие плотности распределения производственных заделов на основе уравнений переноса в механике жидкости и газа [4, 6]. Наличие функции $[\chi]_0(t, S)$ позволяет находить количество $W_m(t)$ деталей на каждой m -й технологической позиции в момент времени t :

$$W_m(t) = \int_{S_{m-1}}^{S_m} [\chi]_0(t, S) dS, \quad (m=1, 2, \dots, M). \quad (10)$$

При этом в любой момент времени t производства рассматриваемой партии деталей оказывается, что $\int_0^{S_M} [\chi]_0(t, S) dS = N$.

Один из распространённых подходов к отысканию функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ основан на формировании системы уравнений моментов, позволяющих получить балансовые уравнения в достаточном для необходимой точности количестве [15]. Построение одномоментного описания производственной системы фактически означает определение clearing-функции, выражающей темп их движения через плотность распределения предметов производства [4, 6, 9]. В случае двух-моментного описания темп движения предметов производства рассматривается как нестационарная переменная [4, 6]. В работе [6] для построения двух-моментного описания функционирования поточной линии использованы следующие балансовые уравнения:

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial [\chi]_1}{\partial t} + \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \cdot \frac{\partial [\chi]_1}{\partial S} = ([\chi]_{1\psi} - [\chi]_1) \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \right), \quad (10)$$

где $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$ - плотность распределения деталей и темп их движения по технологическому маршруту, $[\chi]_{1\psi}(t, S) = 1/\tau_m$ - нормативная скорость обработки деталей в месте S технологического маршрута, $S \in [S_{m-1}, S_m]$, $(m=1, 2, \dots, M)$.

Анализ публикаций показывает, что использование PDE-моделей является новым и перспективным направлением в моделировании производственных систем [5, 6, 9, 12, 15]. Данные модели позволяют более точно описывать функционирование производственных систем по сравнению с моделями очередей и являются существенно менее громоздкими и трудоемкими при их разработке и использовании по сравнению с DEM-моделями. В работах Berg R.A., Lefebvre, Rooda J.E. показано [6], что результаты PDE-модели, основанные на решении одного уравнения в частных производных, соответствуют в рамках тех же допущений результатам DES-моделирования, полученного в результате одного миллиона имитаций.

Перспективность исследований в направлении разработки PDE-моделей для описания производственных систем также подтверждается многочисленными грантами в сфере моделирования производственных систем со сборочными операциями. В то же время необходимы дальнейшие исследования, которые позволят более точно оценить сферу эффективного использования PDE-моделирования в задачах прогнозирования и управления производственными системами, в частности для синхронизации функционирования поточных линий, обеспечивающих комплектующими изделиями процессы сборки. Интерес представляет также исследование функционирования технологических линий с возвратно-поступательными перемещениями предметов производства по технологическим позициям.

Литература

1. ГОСТ 3.1109.82. Термины и определения основных понятий. – М.: Госстандарт России, 2003. – 15 с.
2. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
3. Митрофанов С.П. Куликов Д.Д. Технологическая подготовка гибких производственных систем. Л.: Машиностроение, 1987. – 352 с.

4. Пигнастый О. М. Целевая функция производственной системы с массовым выпуском продукции / В. П. Демуцкий, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов, М. Н. Азаренкова // - Вестник Харьковского национального университета. - Харьков: ХНУ. - 2006. - N746. – С.95-103. [http://nuclear.univer.kharkov.ua/lib/746_4\(32\)_06_p95-103.pdf](http://nuclear.univer.kharkov.ua/lib/746_4(32)_06_p95-103.pdf)
5. Berg R.A., Lefebvre E., Rooda J.E. Modeling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2008, 16(1), p.130-136
6. Пигнастый О.М., Заруба В.Я. Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – Ч.2. – 256 с.
7. Пигнастый О.М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2006. – N5 – С.79-85;
8. Ramadge P., Wonham W., “The control of discrete event systems” IEEE Proc., 1989. – vol. 77, no. 1, pp. 81–98.
9. Karmarkar, U. S. Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Leadtimes. Journal of Manufacturing and Operations Management , 1989. , (105-123).
10. Missbauer H Order release planning with clearing functions: a queueing-theoretical analysis of the clearing function concept. Int J Prod Econ. doi:10.1016/j.ijpe.2009.09.003
11. Armbruster D., Fonteijn J., Wienke M. Modeling production planning and transient clearing functions, Logistics Research, 2012. – VOL 87 -№3, P. 815 - 822
12. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. М.: Прогресс, 1961. 341 с.
13. Bramson M. Stability of queueing networks, lecture notes in mathematics, Journal of Probability Surveys, Vol. 5 , 2008, pp 169–345
14. Armbruster D., Marthaler D., Ringhofer C. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes, Bulletin of the Inst. Math., Academica Sinica, 2007, P:433-460.
15. Пигнастый О. М. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". - 2011. –№2– С. 29-35.