

## Mathematical Simulation of Modes and Characteristics of Asynchronous Motors under Asymmetrical Power Supply

Malyar V.S., Hamola O.Ye., Maday V.S., Vasylchyshyn I.I.

Lviv Polytechnic National University

Lviv, Ukraine

**Abstract.** The purpose of this article is to develop a method and algorithm for the calculation of the steady-state mode and static characteristics of the squirrel-cage asynchronous motors that are supplied by a three-phase network with an asymmetrical voltage system. The aim is achieved by developing a method where the mathematical model of the motor takes into account the saturation of the magnetic core and the current displacement in the short-circuited rotor bars. Magnetization characteristics of the main magnetic flux and the leakage fluxes paths are used to account for the saturation. To account for the current displacement in the rotor winding the bars are divided into several layers throughout the height, resulting in a number of windings on the rotor with mutual inductive couplings. In the mathematical model, the processes in the asynchronous motor are described by a system of the nonlinear differential equations of electromagnetic equilibrium, composed in the fixed three-phase coordinate axes. The solution of this system in the steady-state mode is the periodic dependence of the currents, which are determined by solving the boundary problem. For this purpose, their algebraization is carried out by approximation of the periodic dependences at the nodes' grid of the period of repeatability of the process by the third order splines. The solution of the problem is to determine the nodal values of coordinates on the period from the obtained nonlinear system of algebraic equations. For this purpose, the continuation method and iterative refinement by the Newton method were used. Calculation of the static characteristics was performed by the differential method.

**Keywords:** asynchronous motor, three-phase coordinate system, magnetic saturation, current displacement, boundary problem, spline approximation, parameter continuation method.

**DOI:** 10.5281/zenodo.3239128

### Modelarea matematică a regimurilor și caracteristicilor motoarelor asincrone cu alimentare asimetrică

Malyar V.S., Gamola O.E., Madai V.S., Vasylchishin I.I.

Universitatea Națională "Politehnica Lviv"

Lviv, Ucraina

**Rezumat.** Articolul este dedicat dezvoltării unei metode și a unui algoritmi pentru calculul regimurilor staționare și a caracteristicilor statice ale motoarelor asincrone cu rotorul în scurtcircuit, care sunt alimentate de la o rețea trifazată cu un sistem de tensiune asimetric. Acest obiectiv este realizat prin dezvoltarea unei metode în care modelul matematic al motorului ia în considerare saturarea miezului magnetic și deplasarea curentului în tijele rotorului scurtcircuitat. Pentru a ține seama de saturație, se utilizează caracteristicile magnetizării prin fluxul magnetic principal și căile fluxurilor de dispersare ale bobinelor statorului și rotorului, calculate pe baza datelor geometrice ale motorului. Pentru a ține cont de fenomenul de deplasare a curentului în bobina rotorului, tije, împreună cu inelele de scurtcircuit, sunt împărțite în mai multe straturi în înălțime, rezultând că există mai multe înfășurări pe rotor, între care există conexiuni inductive reciproce atât datorită fluxului principal, cât și fluxului de dispersare. Bobina reală scurtcircuitată este redusă la metoda echivalentă în trei faze. În modelul matematic dezvoltat, procesele într-un motor asincron sunt descrise de un sistem de ecuații diferențiale neliniare de echilibru electromagnetic, compilate în axe fixe trifazate de coordonate. Soluția acestui sistem în regim staționar este dependența periodică a curenților, care sunt determinate prin rezolvarea unei probleme de valoare a limitei. Pentru aceasta, algebrarea lor se realizează prin aproximarea dependențelor periodice pe grila de noduri a perioadei de recurență a procesului prin splinele celei de-a treia ordine, care permit rezolvarea problemei cu un număr relativ mic de noduri per perioadă.

**Cuvinte-cheie:** motor asincron, sistem trifazat de coordonate, saturație, deplasarea curentului, problemă de valoare limită, aproximație spline, metoda de continuare a parametrului.

### Математическое моделирование режимов и характеристик асинхронных двигателей при несимметричном питании

Маляр В.С., Гамола О.Е., Мадай В.С., Васильчишин И.И.

Национальный университет "Львовская политехника", г. Львов, Украина

**Аннотация.** Целью статьи является разработка метода и алгоритма расчета установившихся режимов и статических характеристик асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором, которые питаются от

трехфазной сети с несимметричной системой напряжений. Поставленная цель достигается за счет разработки метода, где в математической модели двигателя учитывается насыщение магнитопровода и вытеснение тока в стержнях короткозамкнутого ротора. Для учета насыщения используются рассчитанные на основе геометрических данных двигателя характеристики намагничивания основным магнитным потоком и путей потоков рассеяния обмоток статора и ротора. Для учета явления вытеснения тока в обмотке ротора стержни вместе с короткозамыкающими кольцами разбиваются по высоте на несколько слоев, в результате на роторе получаем несколько обмоток, между которыми существуют взаимоиндуктивные связи как за счет основного потока, так и потоков рассеяния. Реальная короткозамкнутая обмотка приводится к эквивалентной трехфазной по общепринятой методике. В разработанной математической модели процессы в асинхронном двигателе описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений электромагнитного равновесия, составленных в неподвижных трехфазных координатных осях. Решением этой системы в установившемся режиме являются периодические зависимости токов, которые определяются путем решения краевой задачи. Для этого осуществляется их алгебраизация путем аппроксимации периодических зависимостей на сетке узлов периода повторяемости процесса сплайнами третьего порядка, которые дают возможность решить задачу при сравнительно небольшом количестве узлов на периоде. Решение задачи как краевой дает возможность решить задачу во вневременной области и сводится к решению нелинейной системы алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются узловые значения координат на периоде. Для решения нелинейной системы алгебраических уравнений используется метод продолжения по параметру и итерационное уточнение методом Ньютона. Расчет статических характеристик выполняется дифференциальным методом.

**Ключевые слова:** асинхронный двигатель, трехфазная система координат, насыщение, вытеснение тока, краевая задача, сплайн-аппроксимация, метод продолжения по параметру.

## ВВЕДЕНИЕ

При проектировании асинхронных двигателей (АД) и электроприводов на их основе необходимо проверять их эксплуатационные свойства как в симметричных установившихся режимах работы, так и в динамических. При этом первоочередной задачей является расчет статических характеристик, на основании которых можно определить граничные механические и тепловые нагрузки двигателя с целью формулирования ограничений, которые являются основанием для разработки системы защиты и автоматики при их эксплуатации. Несмотря на то, что при проектировании расчет АД выполняют для работы в симметричном режиме, в практике их эксплуатации зачастую возникают несимметричные режимы. Отметим, что трехфазная система считается симметричной, когда напряжения и токи каждой из фаз имеют одинаковую амплитуду, а сдвиг амплитуды по фазе равен  $120^\circ$ . Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то система считается несимметричной. Электростанции обычно не являются источником дисбаланса, а напряжения синхронных генераторов, питающих линии электропередачи, обычно симметричны, однако в сетях низкого напряжения вследствие наличия различных однофазных потребителей обеспечить симметричность

трудно. Появлению несимметрии способствуют многие маломощные источники электрической энергии, например, солнечные батареи, которые присоединяются к распределительной сети низкого напряжения посредством однофазных электронных инверторов. Предельным видом несимметрии является аномальные состояния системы, типичными примерами которых являются повреждения цепей фаза-земля, фаза-фаза. Поскольку асимметрия напряжений относится к важным параметрам качества электроснабжения, в данной статье рассматриваются несимметричные режимы питания АД.

Несимметрия напряжений вызывает несимметрию токов, что может обусловить, перегрев как отдельных элементов, так и всего двигателя. Она оказывает негативное воздействие на работу всего оборудования, поэтому представляет собой проблему качества электроснабжения и приводит к дополнительным потерям [1,2]. Работа АД с несбалансированной системой напряжений приводит к отклонению рабочих характеристик от номинальных [5–9].

Проблема влияния асимметрии напряжений питания АД на механические, тепловые и им сопутствующие процессы является предметом многих исследований [1–11]. Методы исследований развивались и совершенствовались на протяжении многих

десятилетий вместе с развитием теории электрических машин, и в частности АД. Исторические аспекты решения этой проблемы достаточно полно изложены в [3], а основные экономические проблемы – в работе [1].

Большинство исследований режимов АД, работающих в несимметричных режимах питающего напряжения, выполнены с помощью программного комплекса Matlab/Simulink на основе метода симметричных составляющих [3, 10, 17]. Однако в его основе лежит принцип суперпозиции, который имеет теоретическое обоснование только для линейных систем. Поскольку вследствие насыщения магнитной системы АД является нелинейным объектом, полученные с применением линейной теории результаты расчета требуют экспериментальной проверки в каждом конкретном случае, поэтому до сих пор в литературе находят применение экспериментальные методы исследований [4, 5]. На основе метода симметричных составляющих можно объяснить качественную картину явлений рабочего процесса в несимметричном режиме питания АД, исходя из теории вращающихся в противоположные стороны магнитных полей. Несмотря на методологическое значение метода, результаты расчетов режимов и характеристик с его использованием можно рассматривать лишь как приближенные.

Основой большинства методов исследования процессов в АД являются адаптированные до конкретно решаемых задач классические [4, 10] либо модифицированные схемы замещения [10, 12, 13, 14], в основе которых лежат методы линейной теории электрических машин. При этом параметры схемы замещения либо принимают неизменными, либо такими, что изменяются за определенными наперед заданными законами [15, 16]. В динамических режимах АД переменными являются не только индуктивности обмоток, но вследствие вытеснения тока и активные сопротивления стержней обмотки ротора. Учет насыщения, равно как и вытеснения токов, с помощью различных коэффициентов, не решает проблемы, поскольку для каждого случая необходимо проверять достоверность полученных с их использованием результатов расчета.

Наиболее достоверные результаты расчета можно получить на основе использования теории электромагнитного поля, однако эти методы весьма сложны, требуют – и оперативной памяти компьютера, поэтому их можно использовать только для проверки упрощенных методик.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АД

Выбор математической модели АД зависит от тех задач, которые необходимо решать с ее использованием. В отечественной и зарубежной литературе известно большое количество различной сложности и адекватности математических моделей асинхронных машин, начиная от простейших в виде классических схем замещения, которые приводятся в каталогах и паспортных данных двигателей, до сложных математических моделей, разработанных с позиций уравнений Максвелла электромагнитного поля [18–21]. Первые из них весьма упрощенные и пригодные только для расчета симметричных номинальных установившихся режимов, поскольку не учитывают ряда важных факторов, влияющих на поведение АД в различных важных для практики эксплуатационных режимах. К таким относится изменение индуктивных параметров вследствие насыщения и изменение активных сопротивлений роторных контуров вследствие вытеснения тока в стержнях короткозамкнутой обмотки ротора. Известны многочисленные методы адаптации схем замещения к расчету различных режимов, но они требуют экспериментальной проверки на достоверность полученных результатов в каждом конкретном случае. Полевые математические модели лишены этих недостатков, однако требуют значительных вычислительных ресурсов и, кроме того, время расчета с их использованием для решения большинства задач неприемлемо.

Так как в разработанной математической модели рассматриваются режимы работы при несимметричном питании обмотки статора, то преобразование к ортогональным осям неприемлемо, поэтому задачу необходимо решать в фазных координатах, которые дают возможность учесть несимметрию статорной цепи. В то же время нет необходимости использовать вращающиеся физические трехфазные координаты, которые

значительно усложняют трудоемкость решения задачи. Использование неподвижной трехфазной системы координат дает возможность значительно упростить решение задачи без уменьшения точности результатов расчета.

### УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

В стационарных несимметричных режимах АД потокосцепления и токи изменяются за периодическими законами. Период их изменения определяется периодом изменения приложенного напряжения.

В симметричном режиме путем преобразования координат дифференциальные уравнения можно свести к нелинейным системам алгебраических уравнений, однако в случае асимметрии уравнения стационарных режимов, которыми они описываются, не могут быть сведены к алгебраическим. Анализ таких режимов представляет более сложную задачу.

Рассмотрим установившийся режим работы АД при заданном скольжении  $s$  ротора. Уравнения электрического равновесия статорной цепи без нейтрального провода, составленные за первым и вторым законами Кирхгофа, в неподвижных трехфазных осях имеют вид

$$\begin{aligned} i_A + i_B + i_C &= 0; \\ \frac{d\psi_{AB}}{dt} &= u_{AB} - r_A i_A + r_B i_B; \\ \frac{d\psi_{BC}}{dt} &= u_{BC} - r_B i_B + r_C i_C, \end{aligned} \quad (1a)$$

где  $u_{AB} = u_A(t) - u_B(t)$ ;  $u_{BC} = u_B(t) - u_C(t)$ ;  $u_A(t), u_B(t), u_C(t)$  – приложенные к фазам статора несинусоидальные напряжения;  $\psi_A, \psi_B, \psi_C$  – потокосцепления контуров статора;  $i_A, i_B, i_C, r_A, r_B, r_C$  – токи и активные сопротивления фаз;  $\psi_{AB} = \psi_A - \psi_B$ ;  $\psi_{BC} = \psi_B - \psi_C$ .

Уравнения электрического равновесия роторных контуров в неподвижных трехфазных осях при условии разделения по высоте каждого стержня короткозамкнутого ротора на  $k$  элементарных имеют вид

$$i_{a1} + i_{b1} + i_{c1} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{a_1 b_1}}{dt} &= -\alpha(\psi_{b_1} - 2\psi_{c_1} + \psi_{a_1}) - r_{a_1} i_{a_1} + r_{b_1} i_{b_1}; \\ \frac{d\psi_{b_1 c_1}}{dt} &= -\alpha(\psi_{c_1} - 2\psi_{a_1} + \psi_{b_1}) - r_{b_1} i_{b_1} + r_{c_1} i_{c_1}; \\ &\vdots \\ i_{a_n} + i_{b_n} + i_{c_n} &= 0; \\ \frac{d\psi_{a_k b_k}}{dt} &= -\alpha(\psi_{b_k} - 2\psi_{c_k} + \psi_{a_k}) - r_{a_k} i_{a_k} + r_{b_k} i_{b_k}; \\ \frac{d\psi_{b_k c_k}}{dt} &= -\alpha(\psi_{c_k} - 2\psi_{a_k} + \psi_{b_k}) - r_{b_k} i_{b_k} + r_{c_k} i_{c_k}, \end{aligned} \quad (1b)$$

где  $\psi_{\xi\eta}, i_{\xi\eta}, r_{\xi\eta}$ , ( $\xi = a, b, c$ ;  $\eta = 1, \dots, k$ ); – потокосцепления, токи и активные сопротивления эквивалентных контуров ротора;  $\alpha = \omega / \sqrt{3}$ ;  $\omega = \omega_0(1-s)$  – угловая скорость вращения ротора в эл. рад/с;  $\omega_0$  – циклическая частота первой гармоники напряжения питания обмотки статора;  $s = (\omega_0 - \omega) / \omega_0$  – скольжение ротора;  $\psi_{a_{\xi} b_{\xi}} = \psi_{a_{\xi}} - \psi_{b_{\xi}}$ ;  $\psi_{b_{\xi} c_{\xi}} = \psi_{b_{\xi}} - \psi_{c_{\xi}}$ .

С целью сокращения изложения материала перейдем к матричной форме записи уравнений. Для этого сформируем векторы потокосцеплений, токов контуров и приложенных напряжений

$$\begin{aligned} \vec{\psi} &= (\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_{a1}, \psi_{b1}, \psi_{c1}, \dots, \psi_{ak}, \psi_{bk}, \psi_{ck})^*; \\ \vec{i} &= (i_A, i_B, i_C, i_{a1}, i_{b1}, i_{c1}, \dots, i_{ak}, i_{bk}, i_{ck})^*; \\ \vec{u} &= (u_{AB}, u_{BC}, 0, \dots, 0)^*. \end{aligned}$$

Систему уравнений (1a), (1b) в матрично-векторной форме можно представить в виде одного векторного

$$M_1 \frac{d\vec{\psi}}{dt} = \vec{u} - M_2 \vec{\psi} - R \vec{i}; \quad \vec{I} \vec{i} = 0, \quad (3a, b)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \end{bmatrix} \right); \\ M_2 &= \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -2\alpha \\ -2\alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -2\alpha \\ -2\alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \right); \\ R &= \text{diag} \left( \begin{bmatrix} -r_A & r_B & \\ & -r_B & r_C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -r_{a_1} & r_{b_1} & \\ & -r_{b_1} & r_{c_1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -r_{a_k} & r_{b_k} & \\ & -r_{b_k} & r_{c_k} \end{bmatrix} \right); \\ \vec{I} &= \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) - \text{блочно-диагональные матрицы.} \end{aligned}$$

## РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

Процессы в АД при питании несимметричной системой напряжений изменяются с периодом  $T$ , который определяется периодом изменения напряжения питания, то есть установившийся режим является динамическим. Задача его расчета состоит в определении не совокупности координат, а их временных зависимостей в течение периода, то есть результатом расчета являются функциональные периодические изменения координат [28–30]. Задача расчета этих зависимостей намного сложнее, однако, располагая ими можно с высокой достоверностью анализировать как последствия несимметричного режима работы, так и его допустимые пределы.

Обычно краевые задачи рассматривают для дифференциальных уравнений второго порядка и выше [27], но учитывая, что краевые условия в данном случае определяются не численными значениями на краях периода, а их периодическими зависимостями  $\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(t+T)$ ;  $\vec{i}(t) = \vec{i}(t+T)$ ;  $\vec{u}(t) = \vec{u}(t+T)$ .

Задачу определения периодических изменений координат можно рассматривать как краевую для дифференциальных уравнений первого порядка.

Для решения краевой задачи необходимо осуществить переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим путем аппроксимации временных зависимостей координат на периоде. Среди многих способов аппроксимации наиболее эффективными являются проекционные методы, сущность которых состоит в аппроксимации координат на сетке узлов базисными функциями: полиномами [27], тригонометрические функции [28] и др. Как показано в [29], наиболее эффективно аппроксимацию можно осуществить с использованием сплайн-аппроксимаций, которые дают возможность получить зависимости с минимальной кривизной.

Построение сплайна – это численно устойчивый процесс, поскольку матрица коэффициентов при этом симметричная и имеет диагональное преобладание. Для его построения разделим период  $T$  изменения координат на  $n$  участков  $h_j = t_j - t_{j-1}$  ( $j = \overline{1, n}$ )

и каждую компоненту векторов  $\vec{y}$  ( $\vec{y} = \vec{\psi}, \vec{i}, \vec{u}$ ) представим сплайном третьего порядка вида

$$y(t) = a_j + b_j(t_j - t) + c_j(t_j - t)^2 + d_j(t_j - t)^3,$$

где  $j = \overline{1, n}$  – номер участка;  $a_j, b_j, c_j, d_j$  – коэффициенты сплайна, соотношения между которыми определяются свойствами сплайн-функций [30]. Исходя из условий непрерывности сплайна и его первых двух производных, и учитывая, что

$$a_j = \psi_j; \quad b_j = -d\psi(t)/dt|_{t=t_j},$$

вытекающие из этого [29] соотношения между коэффициентами  $a_j, b_j, c_j, d_j$ , а также периодические краевые условия, получим алгебраический аналог уравнения (3а) в виде системы алгебраических уравнений

$$(H_c M_{1c} - M_{2c}) \vec{\Psi}_c = \vec{U}_c - R_c \vec{I}_c, \quad (4a)$$

где  $H_c$  – матрица перехода от континуального изменения координат на периоде к их узловым значениям, элементы которой определяются исключительно расстояниями между узловыми точками периода [29];  $M_{1c} = \text{diag}(M_1, \dots, M_1)$ ,  $M_{2c} = \text{diag}(M_2, \dots, M_2)$  – диагональные матрицы, образованные из  $n$  матриц  $M_1$  та  $M_2$  соответственно;  $\vec{\Psi}_c = (\vec{\psi}_1, \dots, \vec{\psi}_n)^*$ ,  $\vec{I}_c = (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n)^*$ ,  $\vec{U}_c = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)^*$  – составные векторы, образованные из узловых значений потокосцеплений, токов контуров и приложенных напряжений;  $R_c = \text{diag}(R_1, \dots, R_n)$  – диагональная матрица, образованная из матриц  $R$ .

Уравнения (3b), записанные для всех  $n$  узлов периода, дополняет систему (4а) до замкнутой

$$\vec{\Gamma}_c \vec{I}_c = 0, \quad (4b)$$

где  $\vec{\Gamma}_c = \text{diag}(\Gamma, \dots, \Gamma)$  – диагональная матрица, состоящая из  $n$  матриц  $\Gamma$ .

Вследствие нелинейной зависимости потокосцеплений контуров от токов система алгебраических уравнений (4) нелинейная. Для ее решения используется метод Ньютона,

а нулевое приближение, которое обеспечивает сходимость итерационного процесса, можно получить методом продолжения по параметру [31].

Параметр введем путем умножения возмущающего воздействия – вектора  $\vec{U}_c$  приложенных напряжений – на  $\varepsilon$ , то есть приняв для каждой узловой точки

$$\vec{u}_j = \varepsilon \vec{u}_{jz},$$

где  $\vec{u}_{jz}$  – заданное значение напряжений в  $j$ -ом узле периода.

В результате получим нелинейную систему алгебраических уравнений, состоящую из уравнения

$$(H_c M_{1c} - M_{2c}) \vec{\Psi}_c + R_c \vec{I}_c = \varepsilon \vec{U}_{cz}; \quad \vec{\Gamma}_c \vec{I}_c = 0. \quad (5)$$

Изменение параметра  $\varepsilon$  от нуля до единицы эквивалентно наращиванию вектора приложенных напряжений от нуля до заданных значений, соответственно будут изменяться в функции  $\varepsilon$  узловые значения токов. Поскольку при  $\varepsilon = 0$  векторы  $\varepsilon \vec{u}_j$  в каждой узловой точке равны нулю, начальные условия (значения вектора  $\vec{I}_c$ ) – нулевые.

В результате дифференцирования уравнений (5) по  $\varepsilon$  получим

$$G_c \frac{d\vec{I}_c}{d\varepsilon} = \vec{U}_{cz}, \quad (6)$$

где  $G_c = \left( \frac{(H_c M_{1c} - M_{2c}) L_c - R_c}{\Gamma_c} \right)$  – матрица

Якоби системы (5).

Учитывая, нелинейную зависимость потокосцеплений от токов

$$\vec{\Psi}_c = \vec{\Psi}_c(\vec{I}_c), \quad (7)$$

в результате дифференцирования по  $\varepsilon$  получим

$$\frac{d\vec{\Psi}_c}{d\varepsilon} = \frac{\partial \vec{\Psi}_c}{\partial \vec{I}_c} \frac{d\vec{I}_c}{d\varepsilon} = L_c \frac{d\vec{I}_c}{d\varepsilon}.$$

Потокосцепление каждого контура в  $j$ -м узле зависит только от значения вектора  $\vec{I}_j$  токов в этом же узле, поэтому матрица  $L_c$  блочно-диагональная, а каждый блок

определяется значениями дифференциальных индуктивностей АД в  $j$ -м узле периода [31]

$$L_c = \text{diag}(L_1, \dots, L_n),$$

где

$$L_j = \begin{bmatrix} L_{SSj} & L_{SR_{1j}} & \dots & L_{SR_{nj}} \\ L_{R_1Sj} & L_{R_1R_{1j}} & & L_{R_1R_{nj}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{R_nSj} & L_{R_nR_{1j}} & \dots & L_{R_nR_{nj}} \end{bmatrix}$$

– матрица, в которой:

$$L_{SSj} = \begin{bmatrix} L_{AAj} - L_{BAj} & L_{ABj} - L_{BBj} & L_{ACj} - L_{BCj} \\ L_{BAj} - L_{CAj} & L_{BBj} - L_{CBj} & L_{BCj} - L_{CCj} \end{bmatrix}$$

$$L_{R_kSj} = \begin{bmatrix} L_{a_kA_j} - L_{b_kA_j} & L_{a_kB_j} - L_{b_kB_j} & L_{a_kC_j} - L_{b_kC_j} \\ L_{b_kA_j} - L_{c_kA_j} & L_{b_kB_j} - L_{c_kB_j} & L_{b_kC_j} - L_{c_kC_j} \end{bmatrix}$$

$$L_{SR_{kj}} = \begin{bmatrix} L_{Aa_{kj}} - L_{Bakj} & L_{Ab_{kj}} - L_{Bbkj} & L_{Akj} - L_{Bckj} \\ L_{Ba_{kj}} - L_{Cakj} & L_{Bb_{kj}} - L_{Cbkj} & L_{Bckj} - L_{Cckj} \end{bmatrix}$$

Интегрируя систему ДР (6) одним из численных методов, (это можно выполнить методом Эйлера за несколько шагов), что дает возможность получить периодические зависимости токов (и потокосцеплений) с некоторым приближением, обусловленным применением метода Эйлера, однако они достаточные для обеспечения сходимости итерационного процесса. Полученное значение вектора  $\vec{I}_c$  уточняем итерационным методом Ньютона, в котором поправка  $\Delta \vec{I}_c^{(l)}$  определяется из системы линейных уравнений

$$W_c^{(l)} \Delta \vec{I}_c^{(l)} = Q^{(l)}, \quad (8)$$

где  $Q^{(l)}$  – вектор невязок системы (5) при  $\vec{I}_c = \vec{I}_c^{(l)}$ .

Электромагнитный момент в трехфазной системе координат вычисляются в каждой узловой точке периода за формулой [31]

$$M_e = p_0 L_\mu \times \left( (i_{\mu B} - i_{\mu C}) i_A + (i_{\mu C} - i_{\mu A}) i_B + (i_{\mu A} - i_{\mu B}) i_C \right) / \sqrt{3},$$

где  $p_0$  – количество пар полюсов двигателя;  $L_\mu = d\psi_\mu / di_\mu$  – индуктивность, которая определяется из основной кривой намагничивания;  $i_{\mu A}$ ,  $i_{\mu B}$ ,  $i_{\mu C}$  – проекции изображающего вектора тока  $\vec{i}_\mu$  на соответствующие оси координат, которые определяются по формулам:  $i_{\mu A} = i_A + (i_{1a} + \dots + i_{ka})$ ;  $i_{\mu B} = i_B + (i_{1b} + \dots + i_{kb})$ ;  $i_{\mu C} = i_C + (i_{1c} + \dots + i_{kc})$ .

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Изложенный выше алгоритм дает возможность рассчитать установившийся режим при заданном скольжении. Его можно использовать и для расчета статических характеристик как совокупности установившихся режимов. Однако более универсальным, и вместе с тем более эффективным, является дифференциальный метод расчета характеристик, сущность которого состоит в следующем. Полагая вектор приложенных напряжений неизменным и учитывая (7), запишем нелинейную систему (5) в виде одного векторного уравнения

$$D(\vec{I}) = 0. \quad (9)$$

Дифференцируем уравнение (9) по переменной  $\eta$  как параметру, в функции которого необходимо рассчитать многомерную характеристику. В результате получим новое дифференциальное уравнение, аргументом в котором является независимая переменная  $\eta$

$$G_c \frac{d\vec{I}_c}{d\eta} = \frac{\partial D}{\partial \eta}. \quad (10)$$

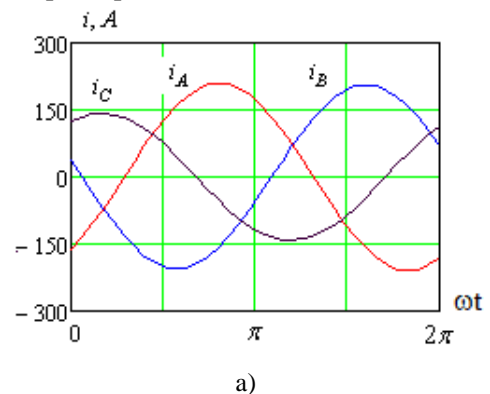
Статическую характеристику получим в результате интегрирования уравнения (10) численным методом. Таким образом, расчет характеристики состоит из двух этапов: на первом из них необходимо рассчитать установившийся режим при заданном скольжении (например,  $s = 1.0$ ), а на втором заменив в уравнении (10) параметр  $\eta$  на  $s$ , проинтегрировать полученную систему вида (10) по  $s$  в требуемом диапазоне изменения.

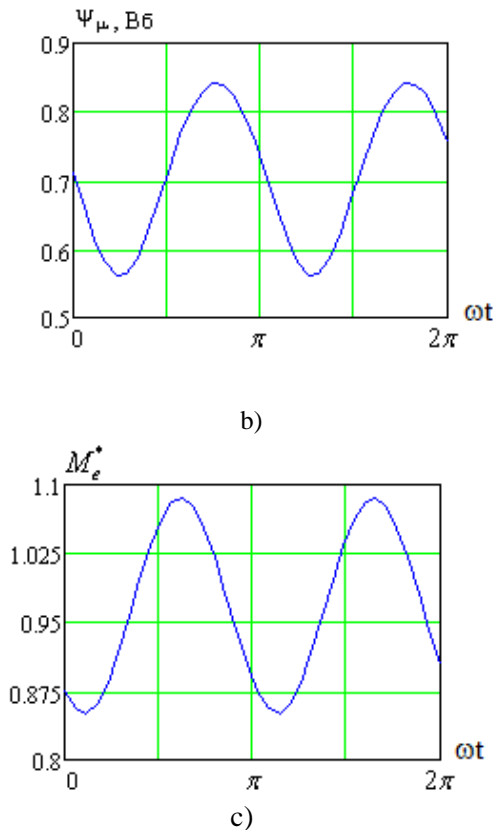
В результате интегрирования получим многомерную статическую характеристику в виде зависимости узловых значений, координат от некоторой независимой переменной. В процессе интегрирования на каждом шагу или через несколько шагов можно выполнять итерационное уточнение методом Ньютона. Отметим, что матрица Якоби при вычислении поправок и при интегрировании одна и та же, что дает возможность объединить эти два этапа расчета в одном алгоритме.

В качестве примера, на рис.1–2 приведены выполненные по разработанному алгоритму расчеты установившихся режимов и статических характеристик двигателя 4A160S4Y3 ( $P_n = 15 \text{ кВт}$ ;  $U_n = 380/220 \text{ В}$ ). На рис. 1а показаны кривые токов фаз в установившемся режиме при скольжении  $s = 0.5$  и приложенном к фазе C напряжении, равном половине номинального, а на рис 1б и 1в – главного потокоцепления  $\psi_\mu$  и относительного значения электромагнитного момента  $M_e^*$ , соответственно.

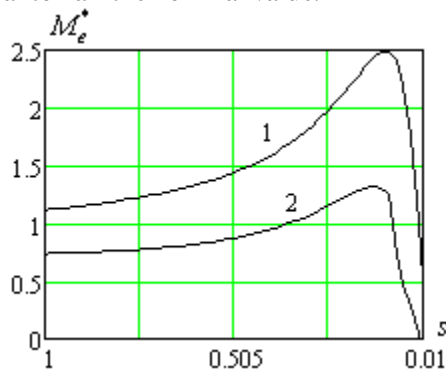
На рис. 2 приведены статические характеристики электромагнитного момента при симметричной системе номинальных напряжений и в условиях указанной выше асимметрии.

Таким образом, разработан метод и алгоритм расчета установившихся режимов и статических характеристик асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором при несимметричном питании, которые отличаются от известных учетом насыщения магнитопровода и вытеснения токов в стержнях ротора, а также использованием сплайн-аппроксимации для приведения задачи к краевой и дифференциальной методе расчета характеристик.





**Рис. 1.** Периодические зависимости токов фаз  $i_A, i_B, i_C$ , модуля вектора главного потокосцепления  $\psi_\mu$  (b) и электромагнитного момента  $M_e^*$  (c) при скольжении  $s = 0.5$  и напряжении в фазе C, равном половине номинального. **Fig. 1.** Periodic dependences of phase currents  $i_A, i_B, i_C$ , main flux linkage vector module  $\psi_\mu$  (b) and electromagnetic moment  $M_e^*$  (c) on slip  $s = 0.5$  and voltage in phase C, which is equal to half the nominal value.



**Рис. 2.** Механические характеристики двигателя при симметричном питании (1) и при напряжении в фазе C, равном половине номинального (2). **Fig. 2.** Mechanical characteristics of the motor for symmetrical supply (1) and for phase C voltage, which is equal to half of the nominal (2).

## ВЫВОДЫ

Разработана математическая модель и алгоритм расчета установившихся режимов и статических характеристик асинхронного электродвигателя при питании несимметричной системой напряжений. Задача решается в трехфазной системе координат, которая позволяет учитывать пофазную несимметрию питающих напряжений. Расчет выполняется во вневременной области путем решения краевой задачи, что значительно сокращает объем вычислений и может служить основой для выполнения оптимизационных расчетов. В результате расчета определяются кривые зависимости токов, электромагнитного момента, и других величин. Это дает возможность определять их гармонический состав, нагревание различных элементов двигателя и другие величины. При этом используется математическая модель АД, в которой учитывается насыщение магнитопровода и вытеснение токов в стержнях ротора.

## Литература (References)

- [1] Faiz J., Ebrahimpour H., Pillay P. Influence of unbalanced voltage on efficiency of three phase squirrel cage induction motor and economic analysis. *IEEE Trans EC*, 2006, vol.47, pp.289-302.
- [2] Sandhu K.S., Chaudhary V. Steady State Modelling of Induction Motor Operating with Unbalanced Supply System. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 2009, vol.8, no. 2, pp. 197-206.
- [3] Sandhu K.S., Chaudhary V. [Simulations of Three-Phase Induction Motor Operating with Voltage Unbalance]. [Proc. of the 8th WSEAS International Conference on Electric Power Systems, High Voltages, Electric Machines (POWER '08)]. Venice, Italy, November 21-23, 2008, pp. 273-279.
- [4] Quisque, E.C., Lopez-Fernandez X.M., Mendes A.M.S, Marques A.J., Palacios J.A. [Experimental study of the effect of positive sequence voltage on the derating of induction motors under voltage unbalance]. [Proceedings of the IEEE International Electric Machines and Drives Conference]. IEEE Xplore Press, Niagara Falls, Canada, May 2011, 15-18, pp. 908-912.
- [5] Temiz I., Akuner C., Calik H. Analysis of Balanced Three-Phase Induction Motor Performance under Unbalanced Supply using Simulation and Experimental Results, *Electronics*



- and *Electrical Engineering*, 2011, no. 3(109), pp. 31-45.
- [6] Wang Y.J. Analytical study of study state performance three-phase induction motor. *IEEE Power Engineering Society*, 2000, Singapore, pp. 23-27.
- [7] Wang Y.J. Analysis of effects of three-phase voltage unbalance on induction motors with emphasis on the angle of the complex voltage unbalance factor, *IEEE Trans. On EC*, 2001, vol. 16, no.3, pp.270-275.
- [8] Faiz J., Ebrahimpour H., Pillay P. Influence of unbalanced voltage on the study state performance of a three-phase squirrel-cage induction motor, *IEEE Trans EC*, 2004, vol.19, no.4, pp. 657-662.
- [9] Faiz J., Ebrahimpour H. Precise derating of three-phase induction motors with unbalanced voltages, *IEEE Trans IAS*, 2005, vol.6, no.5, pp.485- 491.
- [10] Romanova V., Khromov S. Effect of asymmetry of supply voltages on asynchronous motor operation modes. E3S Web of Conferences vol.58, 03013 Rudenko International Conference "Methodological problems in reliability study of large energy systems" (RSES 2018). Available at: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20185803013>
- [11] Peter A., Okakwu I.K., Oluwasogo E.S., Alayande A.S., Airoboman A.E. // Influence of Power Quality Problem on the Performance of an Induction Motor, *American Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol.4, no. 4, 2015, pp.39-44.
- [12] Hrisanov V. I., Brzhezinskiy R. Voprosy adekvatnosti matematicheskikh modeley asinhronnyih dvigateley pri analize perehodnyih protsessov puska [Adequacy of mathematical models of asynchronous motors in the analysis of transient starting processes]. *Elektrotehnika*, 2004, no.10, pp. 20-25. (in Russian).
- [13] Petrushin V.S. Asinhronnyie dvigateli v reguliruemom elektroprivode [Asynchronous motors in a variable speed drive]. Odessa: Nauka i tehnika, 2006, 320 p. (in Russian).
- [14] Beshta A.S., Semin A.A. Opredelenie parametrov ekvivalentnoy tsepi asinhronnoy mashiny s asimmetrichnyim odnofaznyim pitaniem [Determination parameters of equivalent circuit of asynchronous machine with asymmetrical single-phase power supply]. *Elektromechanicheskie i energosberigayushchie sistemy*, 2014, no.2, pp.10-16. (in Russian).
- [15] Sivokobyilenko V.F., Pavlyukov V.A., Hennidi Halid. Metod rascheta shem zamescheniya i puskovyih harakteristik glubokopaznyih sinhronnyih dvigateley [Method for calculation of substitution schemes and starting characteristics of deep-groove synchronous motors]. *Elektrotehnika*, 1996, no. 1, pp. 38-41. (In Russian).
- [16] Tsukanov V.I., Geogiadi V.H. Raschet na EVM koeffitsientov vyitesneniya toka v sterzhnyah rotora elektricheskikh mashin [Computer-based calculation of current displacement coefficients in rotor rods of electric machines]. *Elektrotehnika*, 1982, no.12, pp. 52-55.
- [17] Moshchinskiy Yu.A., Petrov A.P. Matematicheskaya model asinhronnogo kondensatornogo dvigatelya s ispolzovaniem simmetrichnogo komponentnogo metoda v standartnom programmnom obespechenii [Mathematical model of asynchronous capacitor motor using symmetrical component method in standard software]. *Elektrichestvo*, 2001, no. 7, pp. 43-48. (in Russian).
- [18] Milykh I.I., Polyakova N.V. Determination of electromagnetic parameters of electric machines based on numerical calculations of magnetic field. *Electrical engineering & electromechanics*, 2006, no. 2, pp. 40-46. doi: 10.2098/2074-272X.2016.05.
- [19] Lorenz R.D., Novotny D.W. Saturation effects in field-oriented induction machines. *IEEE Trans. Ind. Applicat*, 1990, vol. 26, no 2, pp. 283-289.
- [20] Gaydenko Yu.A., Tsvinskiy S.S. Opredelenie integralnyih harakteristik elektricheskikh mashin metodami teorii elektromagnitnogo polya [Determination of integrated characteristics of electric machines by methods of electromagnetic field theory]. *Elektrotehnika i elektromekhanika*, 2006, no. 1, pp. 28-32. (in Russian).
- [21] Levi E., Vuckovic V., Vukosavic S. [Study of main flux saturation effects in field-oriented induction motor drives]. [Proc. 15th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society IECON'89]. Philadelphia, PA, USA, 6-10 November 1989, vol. 1, pp. 219-224.
- [22] Rogers G., Beraraghana D. An induction motor model with deep-bar effect and leakage inductance saturation. *Arhiv fur Electrotechnik*, 1978, vol. 60, no. 4, pp. 193-201.
- [23] Peter A.A., Okakwu I.K., Oluwasogo E.S., Alayande A.S., Airoboman A.E. Influence of Power Quality Problem on the Performance of an Induction Motor. *American Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2015 vol.4, no. 4, pp. 39-44.
- [24] Ching-Yin Lee. Effect of unbalanced voltage on Operation Performance of a three-phase Induction Motor. *IEEE trans. on Energy Conservation*, 1999, vol.14, no 2.
- [25] Benamiral N., Rachedi M.F., Bouras S., Kerfali S., Bouraiou A. Numerical simulation of three phase asynchronous motor to diagnose precisely the stator unbalanced voltage anomaly. *Rev. Sci. Technol.*, 2017, no. 34, pp.134-150.

- [26] Levi E. A unified approach to main flux saturation modeling in D-Q axis models of induction machines. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, 1995, vol. 10, no. 3, pp. 455-461.
- [27] Samarskiy A. Vvedenie v chislennyye metody [Introduction to numerical methods]. Moscow, Russia: Nauka, 1987. (in Russian).
- [28] Hlukhivskiy L. Periodic nonlinear processes in Electrical Engineering (differential harmonic method and its software) – Kyiv, Ukraine: Alpha PC, 2005. 159 p. (in Russian).
- [29] Malyar V.S, Malyar A.V. Matematicheskoe modelirovanie periodicheskikh rezhimov raboty elektrotehnicheskikh ustroystv [Mathematical simulation of periodic modes of electrotechnical appliances]. *Electronnoe modelirovanie*, 2005, vol.27, no. 3, pp. 39–53. (in Russian).
- [30] Laurent P-J. Approximation et optimisation, Hermann, Paris, 1972, 531 p. (in French).
- [31] Filts R.V. Matematicheskie osnovy teorii elektromekhanicheskikh preobrazovateley [Mathematical fundamentals of theory of electrical mechanical converters]. 'Naukova Dumka' Publishing House, Kyiv, 1979, 208 p. (in Russian).

#### Сведения об авторах.



**Маляр Василий Сафронович** – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и общей электротехники национального университета “Львовская политехника”. Тематика научных исследований – математическое моделирование динамических режимов электрических цепей и систем.  
[vasyl.s.malyar@lpnu.ua](mailto:vasyl.s.malyar@lpnu.ua)



**Мадай Владимир Степанович** – к.т.н., доцент кафедры теоретической и общей электротехники национального университета “Львовская политехника”. Научное направление – измерение электрических и магнитных величин аналого-цифровыми устройствами.  
[volodymyr.s.madai@lpnu.ua](mailto:volodymyr.s.madai@lpnu.ua)



**Гамола Орест Евгеньевич** – к.т.н., доцент кафедры теоретической и общей электротехники национального университета “Львовская политехника”. Научное направление – математическое моделирование электромеханических преобразователей.  
[orest.y.hamola@lpnu.ua](mailto:orest.y.hamola@lpnu.ua)



**Васильчишин Иванна Ивановна** – к.т.н., ассистент кафедры теоретической и общей электротехники национального университета “Львовская политехника”. Научное направление – макро моделирование компонент электромеханических систем.  
[ivanna.i.vasylchyshyn@lpnu.ua](mailto:ivanna.i.vasylchyshyn@lpnu.ua)