

Die Form des Integrals der Jacobischen Gleichung in der Mondtheorie.

Von Prof. Dr. A. W. Krassnow.

1. Die einzige bis jetzt allgemein anerkannte und ausschließlich erfolgreiche Methode der Integration der Jacobischen Differentialgleichung der Bewegung besteht in der Trennung der Variablen.

Aus unserer Abhandlung in Nr. 3773 ist zu sehen, daß man diese Trennung erlangen kann, wenn man nur die Bahneinhüllenden auf die eine oder andere Weise aufzufinden vermag.

In der Tat ist das System der Bahneinhüllenden das erste Kurvensystem, welches mit einem zweiten leicht bestimmbaren System die Variablen trennt. Die einzelnen dazu gehörigen Details sollen schon jetzt einer weiteren hier dargelegten Erörterung unterliegen.

2. Wir wollen ausschließlich die Bahnen der Mondtheorie betrachten, die zu denjenigen Systemen gehören, welche keine einzige bis zur Peripherie des Hillschen Ovals hinausreichende Bahn enthalten, — mit anderen Worten, — welche sich durch die permanente Unveränderlichkeit der Bewegungsrichtung auszeichnen.

Außerdem nehmen wir, in Einklang mit dem, was in der Mondtheorie stattfindet, an, daß das Hillsche Oval eine geschlossene Kurve ist.

Es dürften also z. B. für den »Moon of maximum Lunation« unsere Folgerungen nach der einen, wie auch nach der anderen Ursache ohne weiteres nicht angewandt werden.

Bei uns hat die periodische Bahn die analytischen und kinematischen Definitionen, welche in § 1 der Nr. 4132 formuliert sind. In der Poincaréschen Theorie hat die periodische Bahn die Bedeutung, daß sie die Möglichkeit les équations aux variations zu bilden, darbietet. Bei uns hat dieselbe Bahn die Bedeutung, daß sie eine Kurve des Systems der Bahneinhüllenden, welches die Variablen trennt, ist. Ihre Periodizität entsteht dadurch, daß die Bahneinhüllenden selbst periodische Kurven sind, und an und für sich ist für uns diese Periodizität von keinem bedingungslos großen Belang.

3. Es sei die Jacobische Gleichung der Mondbewegung in der Form des § 1 der Nr. 4076 angenommen worden:

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dS}{d\omega} - \mu e^{2s}\right)^2 = Q \quad (1)$$

$$Q = 2x - x^2 + 3\mu^2 x^4 \cos^2 \omega$$

wo $s = \log x$ gesetzt ist.

Es unterliegen unserer Betrachtung nur diejenigen Bahnsysteme, für die immer die Bedingung $Q \neq 0$ erfüllt ist.

Die Funktion Q hat innerhalb des Hillschen Ovals $Q = 0$ in bezug auf x nur ein Maximum und kein Minimum.

Wie es in § 1 der Nr. 3773 angedeutet wurde, nehmen wir anstatt der Funktion S eine neue zu bestimmende Funktion X , welche mit S durch die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{ds} &= \frac{dX}{ds} + \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s}\right) \sqrt{B} : R \\ \frac{dS}{d\omega} &= \frac{dX}{d\omega} - \frac{dX}{ds} \sqrt{B} : R \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

verbunden ist, wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$R^2 = \left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s}\right)^2$$

$$B = Q - R^2.$$

Die Relationen (2) genügen identisch der Gleichung (1). Bestehen sie aber simultan und sind sie folglich möglich, so muß die Funktion X ein Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sein:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) \sqrt{B} : R \right] + \frac{d}{ds} \left[\frac{dX}{ds} \sqrt{B} : R \right] = 0. \quad (3)$$

Um die Bewegung zu bestimmen, hat man aus der letzten Gleichung die Funktion X als eins von ihren Integralen, welches eine einzige willkürliche Konstante p enthält, aufzusuchen.

Wenn dies erlangt ist, bekommt man eine Funktion Z :

$$Z = Z(s, \omega, p) \quad (4)$$

die folglich so beschaffen ist, daß

$$S = X + Z \quad (5)$$

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dZ}{ds} &= + \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) \sqrt{B} : R \\ \frac{dZ}{d\omega} &= - \frac{dX}{ds} \sqrt{B} : R \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so daß wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ}{ds} \cdot \frac{dX}{ds} + \frac{dZ}{d\omega} \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) &= 0 \\ \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\omega} \right)^2 &= Q - \left(\frac{dX}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Differentialgleichung der geometrischen Bahnen, die zu ein und demselben Werte der Konstante p gehören, ist

$$\left[\left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) - \frac{dX}{ds} \sqrt{B:R} \right] \cdot \frac{ds}{d\omega} = \frac{dX}{ds} + \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) \sqrt{B:R} . \quad (8)$$

4. Indem man nach der Laplaceschen Methode die singulären Auflösungen der Gleichung (8) sucht, erhält man

$$B = 0 \quad (9)$$

oder, nachdem man die Gleichung (9) bezüglich der Konstanten p aufgelöst hat,

$$p = z(s, \omega) . \quad (10)$$

Die Kurven (9) oder (10) oder auch nach (6)

$$\frac{dZ}{ds} = 0, \quad \frac{dZ}{d\omega} = 0$$

und, was folglich dasselbe ist,

$$Z = Z(s, \omega, p) = \text{Konst.} \quad (11)$$

sind die Bahneinhüllenden, wie dies schon auf einem anderen Wege in § 2 und 3 der Nr. 3773 konstatiert wurde.

5. Somit haben wir für die Gleichung der Bahneinhüllenden zwei Formen:

$$\text{erstens } Z = Z(s, \omega, p) = \text{Konst.}$$

$$\text{zweitens } z(s, \omega) = p = \text{Konst.}$$

Es muß folglich notwendig sein:

$$Z = Z(z, p) \quad (12)$$

$$\text{woraus } \frac{dZ}{ds} = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dZ}{d\omega} = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{d\omega}$$

und dementsprechend auf Grund von (7)

$$\frac{dX}{ds} : \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) = - \frac{dz}{d\omega} : \frac{dz}{ds} . \quad (13)$$

Wir haben also Recht gehabt, indem wir in § 10 der Nr. 3773 behauptet haben, daß das Verhältnis auf der linken Seite von (13) von der willkürlichen Integrationskonstanten p unabhängig ist, also mit Hilfe eines beliebigen, obgleich keine Konstante enthaltenden Integrals der Gleichung (3) bestimmt werden darf.¹⁾

Da weiter $z = p$ die allgemeine Gleichung der Bahneinhüllenden in der endlichen Form ist, so wird ihre allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{d\omega} + \frac{dz}{d\omega} = 0$$

und nach (13) sieht man leicht, auf welche Art und Weise die Gleichung der Bahneinhüllenden $B = 0$, die einen Familienparameter p enthält, der Differentialgleichung (8) der Bahnen genügt, und warum dieser Parameter aus der letzten Gleichung dabei herausfällt.

6. Die oben angeführten Erläuterungen erlauben folgende Schlüsse zu formulieren.

Wenn man ein partielles (keine Integrationskonstante enthaltendes) und eine Bewegung darbietendes Integral X_0

der Gleichung (3) hat, so erhält man somit die allgemeine Gleichung der Bahneinhüllenden auf zwei verschiedenen Wegen: 1) durch die Bildung auf Grund von (6), mit Hilfe einer bloßen Quadratur, der dem Integral X_0 entsprechenden Funktion Z_0 und durch die weitere Annahme $Z_0 = \text{Konst.}$, oder 2) durch die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{ds}{d\omega} = \frac{dX_0}{ds} : \left(\frac{dX_0}{d\omega} - \mu e^{2s} \right)$.

7. Ein solches Integral X_0 ist wohl vorhanden, und zwar läßt es sich aus dem komplexen Integral der Jacobischen Gleichung ableiten, welches wir in den A. N. 4076 und 4132 gefunden haben; X_0 ist nämlich der reelle Teil dieses komplexen Integrals, Z_0 ist sein imaginärer Teil.

Es sei in der Tat $M + \mathcal{F}$, wo \mathcal{F} eine (rein) imaginäre und M eine reelle Funktion ist, ein partielles Integral der Gleichung (1). Dann wird nach der Trennung der imaginären und reellen Teile:

$$\left(\frac{dM}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\mathcal{F}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dM}{d\omega} - \mu e^{2s} \right)^2 + \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\omega} \right)^2 = Q$$

$$\frac{dM}{ds} \cdot \frac{d\mathcal{F}}{ds} + \left(\frac{dM}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) \cdot \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} = 0 .$$

Es existieren also zwischen den Funktionen M, \mathcal{F}, Q dieselben Differentialrelationen, wie auch zwischen den Funktionen X, Z, Q [siehe (6) und (7)]; die Funktionen M und \mathcal{F} sind folglich partielle Werte resp. der Funktionen X und Z , und die Funktion M genügt also der Gleichung (3).

Das nämliche komplexe Integral haben wir schon in A. N. 4076 und 4132 gefunden. Die auffallendste Besonderheit dieses Integrals besteht darin, daß es, obgleich es komplex ist, eine reelle Bahn und eine reelle Bewegung darbietet; die Bahn eines solchen Integrals ist die Hillsche Variationskurve (siehe § 3 der Nr. 4076 und eine sehr wichtige Ergänzung dazu Nr. 4085, Seite 79, unter »Berichtigung«); diese Bahn genügt weiter auch gleichzeitig der Gleichung der Bahneinhüllenden [siehe die Gleichung (8) der Nr. 4076]; endlich gibt dieselbe Bahn mit ihrem Radiusvektor eine doppelte Wurzel der oben eingeführten Funktion B [da die Gleichung (6) der Nr. 4076 der unmittelbare analytische Ausdruck dieses Umstandes ist]. Es ist somit unsere Definition der periodischen Bahn (§ 1, Nr. 4132) völlig gerechtfertigt.

Daher, indem man den Koeffizienten von $\sqrt{-1}$ des komplexen Integrals der A. N. 4076 und 4132 einer Konstante gleich setzt, bekommt man die Gleichung der Bahneinhüllenden, welche mit $z(s, \omega) = \text{Konst.}$ äquivalent ist: die Funktion z wird hiermit bestimmt. Im reellen Teile desselben Integrals hat man ein partielles Integral der Gleichung (3).

$$\text{8. Es sei jetzt } v = \text{Konst.} \quad (14)$$

das zum System der Bahneinhüllenden $z = \text{Konst.}$ orthogonale Kurvensystem, so daß

¹⁾ Bei Reihenentwicklungen, wie die in A. N. 4076 und 4132, hat man dabei die beiden Richtungen der Bewegung getrennt zu betrachten.

$$\frac{dv}{d\omega} \cdot \frac{dz}{d\omega} + \frac{dv}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} = 0. \quad (15)$$

Die Funktion v können wir auf Grund der schon bekannten Funktion z bestimmen.

Dann ist anstatt (13):

$$\frac{dX}{ds} \cdot \frac{dv}{d\omega} - \left(\frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} \right) \cdot \frac{dv}{ds} = 0. \quad (16)$$

Das Integral X der Gleichung (3), welches die Bewegung darbietet, muß folglich von der Form sein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= [f(v) + \alpha] \cdot \frac{dv}{ds} \\ \frac{dX}{d\omega} - \mu e^{2s} &= [f(v) + \alpha] \cdot \frac{dv}{d\omega} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$X = \int f(v) \cdot dv + \beta \quad (18)$$

wo f ein Funktionszeichen ist, und

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -2\mu \int \left\{ \frac{e^{2s}}{\frac{dv}{d\omega}} \right\}_v ds = +2\mu \int \left\{ \frac{e^{2s}}{\frac{dv}{ds}} \right\}_v d\omega \\ \beta &= \mu \int (e^{2s} d\omega)_v \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei die in (19) mit $()_v$ eingeklammerten Quadraturen für

Warschau, k. Universitätssternwarte, 1907 Februar 6.

die Kurve $v = \text{Konst.}$ zu nehmen und durch s, ω (ohne Konst.) auszudrücken sind.

Die Funktion f ist nicht näher durch die Gleichung (16) bestimmbar; dazu hat man die Gleichung (3) zu benutzen.

Zu diesem Zwecke setzen wir in die Gleichung (3), deren explizite Form die Gleichung (4) der Nr. 3773 ist, anstatt der Funktion X ihren Ausdruck (17) ein und nehmen anstatt der Veränderlichen s, ω die neuen v, z ; dann müssen in der transformierten Gleichung nur die unbekannte Funktion $f(v)$ und die einzige unabhängige Veränderliche v bleiben; man erhält hiermit für die Bestimmung $f(v)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, welche schließlich die Funktion X [(17)–(18)] mit einer willkürlichen Integrationskonstanten p gibt. Die Untersuchung der Bewegung wäre somit erledigt.

Wenn es wünschenswert ist, auch die Funktion Z zu haben, so bildet man diese durch eine Quadratur nach (6):

$$Z = \int \left(\frac{dZ}{ds} ds + \frac{dZ}{d\omega} d\omega \right) = \int \varphi(z) dz.$$

Im Resultat ist somit nach (5) und (18):

$$S = S' + \beta$$

$$S' = \int f(v) dv + \int \varphi(z) dz$$

und die Integrationskonstante p geht sowohl in die Funktion $f(v)$ wie auch in die Funktion $\varphi(z)$ ein.

Prof. Dr. A. W. Krassnow.

Aufnahmen des Sternhaufens λ Persei mit Spiegeln von sehr großem Öffnungsverhältnis.

Von K. Schwarzschild und W. Villiger.

Herr H. C. Vogel hat kürzlich gezeigt, mit welcher wunderbarer Schnelligkeit geometrisch vollkommene parabolische Spiegel großer Öffnung die photographische Fixierung äußerst schwacher Sterne vollziehen.¹⁾ Wir möchten hier dieses Resultat bestätigen an Aufnahmen des Sternhaufens λ Persei, welche mit zwei parabolischen Spiegeln der Firma Zeiß erfolgt sind, und möchten zugleich die Helligkeitsangaben für

die schwächeren Sterne in diesem Sternhaufen mitteilen, die sich bei dieser Gelegenheit ergeben haben.

Die Dimensionen der Spiegel waren: Nr. 1 Öffnung 400 mm, Brennweite 1000 mm; Nr. 2 Öffnung 450 mm (durch die provisorische Montierung bei den Aufnahmen auf 420 mm abgeblendet), Brennweite 1000 mm. Die Daten der in Jena gemachten Aufnahmen sind:

M. E. Z.				
a	1905 Okt. 17	Spiegel Nr. 2	14 ^h 25 ^m 00 ^s –27 ^m 30 ^s	Leichte Wolken, Luftruhe 2
b	1906 Jan. 2	» Nr. 1	7 25 –30	Luft 2, dunstig, Ruhe 2
c	1905 Okt. 26	» Nr. 2	13 37 –57	Luft 1–2, Ruhe 1, 13 ^h 47 ^m –57 ^m leichte Wolken.

Die feinsten Sternbilder haben einen Durchmesser von 0.015 bis 0.020 mm. Für die Ausdehnung der Koma gelten dieselben Zahlen, wie sie Herr Vogel angibt. Daß diese Zahlen hinter den von der Theorie geforderten Beträgen zurückbleiben, beruht auf der von Herrn Vogel eingeschlagenen Reduktionsart und bedeutet keinen wirklichen Widerspruch.

Vermessen wurden auf den Platten alle Sterne, welche in dem Hauptkatalog Nr. I des Sternhaufens von Bronsky und Stebnitzky²⁾ innerhalb des Areal

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^h 10^m 43^s & \delta &= +56^\circ 34' 40'' \\ \text{und} & & \alpha &= 2 \ 11 \ 40 & \delta &= +56 \ 43 \ 40 \end{aligned}$$

angegeben sind. Dieser Katalog enthält alle Sterne von zwei Aufnahmen, die bei 20^m Exposition mit dem Normalrefraktor der Sternwarte Helsingfors gewonnen sind. Schon die Spiegelaufnahme a hat mit 150^s Exposition diese Sterne sämtlich und dazu noch eine Anzahl schwächerer Objekte. Die Aufnahme c hat auf demselben Areal 2.2 mal soviel (258 gegen 118) Sterne. In dem hier mitzuteilenden Verzeichnis fehlen 6 Sterne des Katalogs von Br. und St. deshalb, weil sie infolge teilweiser Verschmelzung mit Nachbarsternen unmeßbar waren.

Die Bestimmung der Helligkeit der Sterne erfolgte durch

¹⁾ Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1906, p. 332.

²⁾ Mémoires de l'Acad. de St. Pétersbourg, 1895, Vol. II.