

# NUOVO METODO PER LO STUDIO DELLE CONGRUENZE E DEI COMPLESSI DI RAGGI.

Nota di **Gustavo Sannia** (Torino).

Adunanza del 10 marzo 1912.

## INTRODUZIONE.

1. In due precedenti Note <sup>1)</sup> ottenni, per alcuni problemi relativi alle congruenze di raggi, delle risoluzioni di una semplicità mai prima raggiunta. Ma, se quelle risoluzioni son semplici, lo stesso non può dirsi dell'analisi, complicata ed artificiosa, con cui vi pervenni. D'altra parte è ben naturale il pensare che esse non possono trarre la loro origine da meri artifici di calcolo felicemente scelti, ma da cause ben più intime.

Ricercando queste cause, son riuscito a ritrovare quelle risoluzioni, ed a semplificarle ancora notevolmente <sup>2)</sup>, mediante un procedimento privo di ogni artificio e che è interessante di per sè stesso, in quanto che costituisce un nuovo metodo per la rappresentazione e per lo studio delle congruenze e dei complessi di raggi. Questo metodo si collega all'altro da me fondato precedentemente <sup>3)</sup> (e che riduce lo studio delle congruenze e dei complessi di raggi allo studio di una coppia di forme differenziali quadratiche) e lo rende più maneggevole nella trattazione di molti problemi.

Vedremo che esso è dovuto essenzialmente all'introduzione di certe nuove coordinate di retta che hanno grande analogia con le *coordinate tangenziali* introdotte da WEINGARTEN nello studio delle superficie.

2. In seguito indicheremo costantemente con  $X, Y, Z$  i coseni direttori di una retta generica  $r$ , con senso positivo assegnato, e con  $x, y, z$  le coordinate cartesiane ortogonali di un suo punto (*di partenza*)  $M$ . La retta sarà individuata da queste sei quantità oppure dalle sue *coordinate radiali*

$$(1) \quad X, \ Y, \ Z, \ l = yZ - zY, \ m = zX - xZ, \ n = xY - yX,$$

<sup>1)</sup> Su due forme differenziali che individuano una congruenza o un complesso di rette [questi Rendiconti, tomo XXXI (1° semestre 1911), pp. 244-256 e tomo XXXIII (1° semestre 1912), pp. 67-74].

<sup>2)</sup> eliminando molte operazioni di quadratura.

<sup>3)</sup> Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo XV (1908), pp. 143-185]; Saggio di geometria differenziale dei complessi di rette [Ibid., tomo XVII (1910), pp. 179-224].

Le citazioni che si riferiscono a queste due memorie saranno precedute rispettivamente da «*A*, I» e da «*A*, II».

legate dalle relazioni

$$(2) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

$$(3) \quad Xl + Ym + Zn = 0.$$

### Coordinate radiali ridotte nelle congruenze.

3. Supponiamo che il raggio  $r$  descriva una congruenza; perciò supponiamo che  $X, Y, Z, x, y, z$  (e quindi  $l, m, n$ ) sieno funzioni di due variabili  $u, v$  e che queste sieno *essenziali* in  $X, Y, Z$  <sup>4)</sup>.

Due raggi infinitamente vicini  $r(u, v), r'(u + du, v + dv)$  determinano un angolo  $ds'$  dato dalla formola

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \sum dX^2$$

che, se si pone

$$(4) \quad E = \sum \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \sum \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2,$$

diventa

$$(I) \quad ds'^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

La forma (I), *prima forma fondamentale* della congruenza ( $A, I, \S 2$ ), rappresenta anche il quadrato dell'elemento lineare  $ds'$  dell'*immagine sferica* della congruenza, descritta dal punto di coordinate  $X, Y, Z$ , variando  $u, v$ . Essa è definita e positiva, quindi

$$\Delta = |EG - F^2| > 0,$$

ed ha la curvatura 1.

Supponendo note le funzioni (1), le equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} l = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v} + cX, \\ m = a \frac{\partial Y}{\partial u} + b \frac{\partial Y}{\partial v} + cY, \\ n = a \frac{\partial Z}{\partial u} + b \frac{\partial Z}{\partial v} + cZ \end{cases}$$

determinano in modo unico  $a, b, c$ , poichè, per le (2) e (4), si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix}^2 = EG - F^2 > 0.$$

<sup>4)</sup> Con ciò escludiamo soltanto le congruenze i cui raggi si appoggiano ad una curva all'infinito e le stelle improprie.

Ponendo

$$(6) \quad \sum X \frac{\partial l}{\partial u} = - \sum l \frac{\partial X}{\partial u} = A, \quad \sum X \frac{\partial l}{\partial v} = - \sum l \frac{\partial X}{\partial v} = B,$$

si trova facilmente

$$(7) \quad a = \frac{FB - GA}{\Delta^2}, \quad b = \frac{FA - EB}{\Delta^2}, \quad c = 0;$$

dunque

$$(II) \quad \begin{cases} l = \frac{FB - GA}{\Delta^2} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{FA - EB}{\Delta^2} \frac{\partial X}{\partial v}, \\ m = \frac{FB - GA}{\Delta^2} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{FA - EB}{\Delta^2} \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ n = \frac{FB - GA}{\Delta^2} \frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{FA - EB}{\Delta^2} \frac{\partial Z}{\partial v}. \end{cases}$$

Date  $X, Y, Z$ , le (6) e le (II) danno  $A, B$  quando son note  $l, m, n$ , e viceversa; dunque le cinque funzioni di  $u, v$

$$(8) \quad X, Y, Z, A, B,$$

di cui le prime tre son legate dalla relazione (1), si possono assumere come coordinate del raggio  $r(u, v)$  della congruenza.

Le chiameremo *coordinate radiali ridotte* di  $r$ .

4. Con le funzioni  $A, B$  possiamo costruire la forma differenziale lineare

$$(9) \quad Adu + Bdv$$

che ha un significato geometrico semplice. Se osserviamo che le prime tre coordinate radiali (1) di  $r$  sono le componenti di un vettore unitario preso su  $r$  e che le rimanenti sono le componenti del momento  $\bar{\lambda}$  di questo vettore rispetto all'origine  $O$  delle coordinate, otteniamo

$$(10) \quad l = \lambda \cos(\lambda, x), \quad m = \lambda \cos(\lambda, y), \quad n = \lambda \cos(\lambda, z);$$

quindi, tenendo presenti successivamente le (6), (3) e (10), avremo

$$Adu + Bdv = - \sum l dX = - \sum l (X + dX) = - \lambda \sum \cos(\lambda, x) \cos(r', x)$$

ossia

$$Adu + Bdv = - \lambda \cos(\lambda, r'),$$

essendo  $r'$  il raggio  $(u + du, v + dv)$ .

Dunque: la forma lineare (9), cambiata di segno, rappresenta la proiezione ortogonale su  $r'$  del momento rispetto all'origine  $O$  di un vettore unitario preso su  $r$ .

5. Le due espressioni (1) e (II) di  $l$  danno

$$yZ - zY = \left( \frac{F}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{G}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} \right) \frac{A}{\Delta} + \left( \frac{F}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{E}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \frac{B}{\Delta}$$

o, per certe note identità <sup>5)</sup>,

$$yZ - zY = \left( Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \frac{A}{\Delta} - \left( Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \frac{B}{\Delta}.$$

<sup>5)</sup> Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª edizione (Pisa, Spoerri), vol. I (1902), § 77.

Questa uguaglianza si può scrivere

$$Y\left(\chi - \frac{B}{\Delta} \frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{A}{\Delta} \frac{\partial Z}{\partial v}\right) = Z\left(y - \frac{B}{\Delta} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{A}{\Delta} \frac{\partial Y}{\partial v}\right)$$

e, con le altre due analoghe che si otterrebbero partendo da  $m$  e da  $n$ , dà

$$(III) \quad \begin{cases} x = \frac{B}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{A}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + tX, \\ y = \frac{B}{\Delta} \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{A}{\Delta} \frac{\partial Y}{\partial v} + tY, \\ z = \frac{B}{\Delta} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{A}{\Delta} \frac{\partial Z}{\partial v} + tZ, \end{cases}$$

ove  $t$  è una funzione arbitraria di  $u, v$ .

Le formole (III) danno le coordinate di un punto di partenza per ciascun raggio della congruenza definita dalle coordinate radiali ridotte (8). Il luogo di questo punto, variando  $u, v$ , è una superficie di partenza dei raggi della congruenza.

In particolare, per  $t = 0$  si ha una superficie che si può chiamare la *podaria* della congruenza rispetto all'origine  $O$ , perchè è il luogo dei piedi  $P$  delle perpendicolari condotte da  $O$  ai raggi della congruenza.

6. Sul raggio  $r(u, v)$ ,  $t$  è l'ascissa del punto di partenza  $M(x, y, z)$  rispetto al punto  $P$ . Per ottenere l'ascissa dei punti più notevoli di  $r$ , conviene anzitutto di esprimere in funzione delle (8) i coefficienti della *seconda forma fondamentale* della congruenza:

$$(IV) \quad -\mu = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2.$$

Questa forma, cambiata di segno, rappresenta il *momento* dei due raggi  $r(u, v)$ ,  $r'(u + du, v + dv)$  ed insieme con (I) individua la congruenza a meno di un movimento ( $A, I$ , §§ 4, 21). Le formole

$$(II) \quad \begin{cases} D = \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{E}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ D' + \lambda = \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{E}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ D' - \lambda = \frac{G}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ D'' = \frac{G}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

ove  $(x, y, z)$  è un punto qualunque di  $r$ , definiscono i coefficienti di (IV) ed una funzione  $\lambda(u, v)$  della quale ci occuperemo in seguito.

Derivando la prima delle (III), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left( \frac{1}{\Delta} \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{B}{\Delta} \frac{\partial \log \Delta}{\partial u} + t \right) \frac{\partial X}{\partial u} \\ &- \left( \frac{1}{\Delta} \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{A}{\Delta} \frac{\partial \log \Delta}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{B}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - \frac{A}{\Delta} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + X \frac{\partial t}{\partial u}; \end{aligned}$$

eliminando la derivata di  $\log \Delta$  mediante la prima delle formole <sup>6)</sup>

$$(12) \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial u} = \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}, \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial v} = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$$

e le derivate seconde mediante le formole <sup>7)</sup>

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - EX, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - FX, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial X}{\partial v} - GX, \end{cases}$$

si ha

$$(14) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \left( \frac{\gamma}{\Delta} + t \right) \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\alpha}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \left( \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{FA - EB}{\Delta} \right) X;$$

analogamente si trova

$$(15) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\delta}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \left( \frac{\beta}{\Delta} - t \right) \frac{\partial X}{\partial v} + \left( \frac{\partial t}{\partial v} + \frac{GA - FB}{\Delta} \right) X.$$

In queste formole si è posto per brevità

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial A}{\partial u} - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} A - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} B, & \beta = \frac{\partial A}{\partial v} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} A - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} B, \\ \gamma = \frac{\partial B}{\partial u} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} A - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} B, & \delta = \frac{\partial B}{\partial v} - \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} A - \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} B \end{cases} \quad ^8).$$

Dalle (14), (15) e dalle analoghe in  $y$ ,  $Y$  e in  $z$ ,  $Z$ , si deduce che

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{E\gamma - F\alpha}{\Delta} + Et, & \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{F\gamma - G\alpha}{\Delta} + Ft, \\ \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{E\delta - F\beta}{\Delta} + Ft, & \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{F\delta - G\beta}{\Delta} - Gr; \end{aligned}$$

quindi le (11) diventano

$$D = \alpha, \quad D' + \lambda = \beta - \Delta t, \quad D' - \lambda = \gamma + \Delta t, \quad D'' = \delta$$

e danno

$$(17) \quad D = \alpha, \quad 2D' = \beta + \gamma, \quad D'' = \delta,$$

$$(18) \quad t + \frac{\lambda}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta} (\beta - \gamma).$$

Infine, sostituendo nelle (17) i valori (16) di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , si ha che: *i coefficienti della seconda forma fondamentale (IV) della congruenza definita dalle coordinate radiali*

<sup>6)</sup> loc. cit. 5), § 72. I simboli di CHRISTOFFEL  $\left\{ \begin{smallmatrix} r s \\ t \end{smallmatrix} \right\}$  sono funzioni note dei coefficienti di (I).

<sup>7)</sup> loc. cit. 5), § 56.

<sup>8)</sup> Queste funzioni  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sono le *derivate prime covarianti* delle due funzioni  $A$ ,  $B$  rispetto alla forma (I). Cfr. RICCI, *Delle derivazioni covarianti e contravarianti* (Padova, 1888).

ridotte (8) hanno le espressioni seguenti:

$$(V) \quad \begin{cases} D = \frac{\partial A}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} B, \\ 2D' = \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} A - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} B, \\ D'' = \frac{\partial B}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} B \end{cases} \quad (9).$$

7. Tra le funzioni formate con i coefficienti delle due forme fondamentali (I) e (IV) sono particolarmente notevoli gli invarianti algebrici comuni alle due forme:

$$(19) \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}, \quad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

Se  $2f$  è la distanza dei fuochi e  $2l$  è la distanza dei punti limiti del raggio  $r(u, v)$ , si ha ( $A, I$ , §§ 15, 16)

$$(20) \quad f = \sqrt{1 - K}, \quad 2l = \sqrt{H^2 - 4K},$$

quindi

$$(21) \quad 4(l^2 - f^2) = H^2.$$

Queste formole danno delle interpretazioni geometriche per  $H$  e  $K$ . Mediante le (V) si possono esprimere  $H$  e  $K$  in funzione delle coordinate (8). Particolarmente semplice è l'espressione di  $H$  (*parametro medio* della congruenza).

Si ha infatti

$$\Delta^2 H = F \left( \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} \right) - E \frac{\partial B}{\partial v} - G \frac{\partial A}{\partial u} + \left[ \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} E - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} G \right] A + \left[ \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} E - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} G \right] B;$$

ma le formole di CODAZZI, applicate all'immagine sferica della congruenza, danno <sup>10)</sup>

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} E - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} G = \Delta \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{F}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{G}{\Delta} \right),$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} E - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} G = \Delta \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{E}{\Delta} \right),$$

quindi

$$(22) \quad H = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{FB - GA}{\Delta} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{FA - EB}{\Delta} \right\}.$$

8. Una congruenza *normale* è caratterizzata da  $H = 0$ . Infatti una congruenza è normale se su ciascun raggio  $r(u, v)$  esiste un punto  $(x, y, z)$  tale che sia

$$\sum X dx = 0 \quad \circ \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial u} = \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

<sup>9)</sup> I coefficienti delle due forme fondamentali (I) e (IV) di una congruenza sono legate da una equazione differenziale che è lineare nei coefficienti di (IV) e nelle loro derivate prime e seconde ( $A, I$ , § 21). Le formole (V) risolvono questa equazione.

<sup>10)</sup> loc. cit. <sup>5)</sup>, § 72.

ossia, per le (14) e (15),

$$(23) \quad \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{EB - FA}{\Delta}, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{FB - GA}{\Delta}.$$

La condizione di integrabilità delle (23) è appunto  $H = 0$ . Se nelle (III) si pone in luogo di  $t$  quella funzione che si deduce (con quadrature) dalle (23), si hanno tutte le superficie  $S$  ortogonali ai raggi della congruenza.

Dalle (23) si ha

$$(24) \quad A = \frac{1}{\Delta} \left( F \frac{\partial t}{\partial u} - E \frac{\partial t}{\partial v} \right), \quad B = \frac{1}{\Delta} \left( F \frac{\partial t}{\partial v} - G \frac{\partial t}{\partial u} \right);$$

dunque: le coordinate radiali ridotte  $X, Y, Z$  e (24), ove  $t$  è una funzione arbitraria di  $u, v$ , definiscono la più generale congruenza normale.

La funzione  $t$  rappresenta su ciascun raggio la distanza tra la podaria della congruenza rispetto all'origine  $O$  ed una superficie ortogonale  $S$ , cioè la distanza del piano tangente di  $S$  da  $O$ . Insomma  $X, Y, Z, t$  sono le coordinate tangenziali (di WEINGARTEN) per la superficie  $S$ .

9. Più generalmente, consideriamo le congruenze aventi il parametro medio  $H$  costante. Dalla (21) risulta che esse hanno la seguente proprietà caratteristica: la differenza dei quadrati delle distanze dei punti limiti e dei fuochi è costante.

Io ho già dato il modo di costruire tre classi particolari notevoli di queste congruenze: 1<sup>a</sup> le congruenze  $W$ <sup>11)</sup>; 2<sup>a</sup> le congruenze aventi per invilupata media (inviluppo dei piani medii, cioè dei piani normali ai raggi nei punti medii) una superficie ad area minima<sup>12)</sup>; 3<sup>a</sup> le congruenze aventi il parametro medio costante e che inoltre conservano questa proprietà quando una superficie di partenza, convenientemente scelta, si deforma per flessione trascinando seco i raggi della congruenza<sup>13)</sup>.

Ora possiamo costruire tutte le congruenze con  $H$  costante. Infatti, in tale ipotesi, la (22) si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{FB - GA}{\Delta} - \frac{H}{2} \int \Delta du \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{EB - FA}{\Delta} + \frac{H}{2} \int \Delta dv \right),$$

e però è soddisfatta se si pone

$$\frac{FB - GA}{\Delta} - \frac{H}{2} \int \Delta du = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{EB - FA}{\Delta} + \frac{H}{2} \int \Delta dv = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

ove  $\varphi(u, v)$  è una funzione arbitraria, da cui

$$(25) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{\Delta} \left( F \frac{\partial \varphi}{\partial u} - E \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) - \frac{H}{2\Delta} \left( F \int \Delta dv + E \int \Delta du \right), \\ B = \frac{1}{\Delta} \left( F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) - \frac{H}{2\Delta} \left( F \int \Delta du + G \int \Delta dv \right). \end{cases}$$

<sup>11)</sup> Sul teorema di MOUTARD e la sua interpretazione geometrica per le congruenze  $W$  [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLIII (1908), pp. 745-762].

<sup>12)</sup> Sull'invilupata media di una congruenza di rette [Ibid., volume XLV (1910), pp. 56-78].

<sup>13)</sup> Congruenze rettilinee che possono deformarsi conservando il parametro medio [Giornale di Matematiche di Battaglini, volume XLVI (1908), pp. 299-312].

Dunque: la più generale congruenza di parametro medio  $H$  costante è definita dalle coordinate radiali ridotte (8), ove  $A$  e  $B$  sono funzioni della forma (25).

10. Ora consideriamo la (18). In questa formola  $t$  è l'ascissa sul raggio  $r(u, v)$  del punto  $M(x, y, z)$  rispetto alla proiezione  $P$  dell'origine  $O$  su  $r$  (§ 5) e  $\frac{\lambda}{\Delta}$  è l'ascissa del punto medio  $M_0$  di  $r$  rispetto ad  $M$  ( $A, I, § 14$ ); dunque il primo membro è l'ascissa  $t_0$  di  $M_0$  rispetto a  $P$ . Se nel secondo membro sostituiamo a  $\beta$  e a  $\gamma$  le loro espressioni (16), otteniamo per questa ascissa l'espressione:

$$(26) \quad t_0 = \frac{1}{2\Delta} \left( \frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u} \right).$$

Si ha inoltre dalle (20) che le ascisse dei fuochi e dei punti limiti di  $r$  rispetto al punto  $P$  sono rispettivamente:

$$t_0 \pm \sqrt{-K}, \quad t_0 \pm \sqrt{H^2 - 4K}.$$

Da tutto ciò raccogliamo che: la superficie media, le due falde della superficie focale e le superficie limiti della congruenza definita dalle coordinate radiali ridotte (8) sono date dalle formole (III), nelle quali si ponga rispettivamente

$$t = t_0, \quad t = t_0 \pm \sqrt{-K}, \quad t = t_0 \pm \sqrt{H^2 - 4K}.$$

Inoltre: la involupata media della congruenza è definita dalle coordinate tangenziali  $X, Y, Z, t_0$ .

In particolare, si ha  $t_0 = 0$  solo quando  $A$  e  $B$  sono le derivate parziali prime di una funzione  $\varphi(u, v)$ ; dunque: le coordinate radiali ridotte

$$X, Y, Z, \quad A = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

ove  $\varphi(u, v)$  è una funzione arbitraria, definiscono la più generale congruenza i cui piani medii concorrono in un punto <sup>14</sup>).

11. Quanto abbiamo esposto finora già mostra i vantaggi dell'uso delle coordinate radiali ridotte nella rappresentazione e nello studio delle congruenze di raggi. Date queste coordinate (8) come funzioni di due parametri, possiamo calcolare, mediante le (4) e le (V), i coefficienti delle due forme fondamentali (I) e (IV) della congruenza, e quindi tutte quelle funzioni di questi coefficienti avanti qualche significato geometrico notevole, nonchè scrivere le equazioni differenziali delle superficie sviluppabili, delle superficie principali, etc. Possiamo poi costruire la congruenza: o calcolando le coordinate radiali (ordinarie) dei suoi raggi [le prime tre son già note, le rimanenti si calcolano mediante le (II)], o calcolando le coordinate  $x, y, z$  di un punto di partenza per ciascun raggio, mediante le (III). Infine possiamo ottenere le equazioni parametriche di superficie notevoli collegate alla congruenza (superficie media, superficie focale, superficie limiti, etc.), ponendo nelle (III) al posto di  $t$  funzioni convenienti di  $u, v$  (§ 9).

Tutto ciò senza alcuna integrazione.

<sup>14</sup>) In loc. cit. <sup>12</sup>) avevo già costruito queste congruenze, per altra via.



Ma la grande utilità delle coordinate radiali ridotte spicca principalmente in tutti i problemi nei quali si tratta di costruire congruenze avanti una immagine sferica assegnata. Vedremo infatti che mediante esse si ottengono risoluzioni molto più semplici di tutte quelle finora conosciute.

### Congruenze con assegnata immagine sferica.

**12. Superficie sviluppabili.** — Sulla sfera che ha per centro l'origine  $O$  e per raggio 1 supponiamo tracciato un doppio sistema di linee che assumiamo come linee coordinate  $u, v$ . Supponiamo anche note in funzione di  $u, v$  le coordinate cartesiane  $X, Y, Z$  del punto  $(u, v)$  della sfera <sup>15)</sup>, e proponiamoci di costruire tutte le congruenze le cui superficie sviluppabili hanno per immagini le linee  $u, v$ .

Sia  $C$  una qualunque delle congruenze richieste. Di ciascun suo raggio si conoscono tre coordinate radiali ridotte, cioè  $X, Y, Z$ ; dunque basta calcolare le altre due  $A, B$  affinché  $C$  sia individuata. La prima forma fondamentale di  $C$  è nota ed è (I); la seconda (IV) eguagliata a zero dà evidentemente l'equazione differenziale delle superficie sviluppabili; quindi affinché queste sieno le superficie rigate  $u, v$  occorre e basta che sia  $D = D' = 0$  ossia, per le (V),

$$(27) \quad \frac{\partial A}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} A + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} B, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} A + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} B.$$

Ogni soluzione  $(A, B)$  del sistema (27) individua una delle congruenze richieste.

La risoluzione nota finora è quella del GUICHARD <sup>16)</sup>, che esige l'integrazione dell'equazione di LAPLACE

$$(28) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + F \right] f = 0.$$

Ogni soluzione  $f(u, v)$  determina una delle congruenze richieste. Per costruirla basta conoscere la superficie media e questa si determina, con quadrature, mediante le formole

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} f \right] X - f \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \left[ \frac{\partial f}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} f \right] X + f \frac{\partial X}{\partial v}$$

e le analoghe in  $y$  e  $z$ .

Evidentemente la mia risoluzione è più semplice. Infatti, se uno dei due sistemi sferici dati  $u, v$  è costituito da cerchi massimi (geodetiche), si ha <sup>17)</sup>

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

<sup>15)</sup> Se fosse noto soltanto il quadrato (I) dell'elemento lineare sferico, per calcolare  $X, Y, Z$  bisognerebbe integrare un'equazione differenziale di RICCATI.

<sup>16)</sup> *Surfaces rapportées à leurs asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. VI (1889), pp. 333-348].

<sup>17)</sup> loc. cit. 5), § 43.

ed allora il sistema (27) si integra con sole quadrature. In ogni altro caso l'eliminazione di  $A$  o di  $B$  fra le (27) conduce ad una equazione del tipo (28) in  $B$  o in  $A$ . Dunque fin qui le due risoluzioni sono generalmente equivalenti. Ma poi, per la costruzione della congruenza, mentre quella del GUICHARD esige delle quadrature, la mia non esige alcuna ulteriore integrazione.

La funzione  $f$  rappresenta la semidistanza tra i fuochi del raggio  $(u, v)$  della corrispondente congruenza; quindi, per la prima delle (20), si ha

$$f = \sqrt{-K} = \frac{D'}{\Delta}$$

ossia, per la seconda delle (V),

$$f = \frac{1}{2\Delta} \left[ \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} A - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} B \right].$$

Questa relazione è il ponte di passaggio fra le due risoluzioni.

**13. Sistemi isoterma-coniugati.** — I due sistemi di superficie sviluppabili sono reali e distinti solo nelle congruenze a raggi *iperbolici*, nei quali il *parametro assoluto*  $K$  è negativo. Nelle congruenze a raggi *ellittici*, nei quali  $K$  è positivo, vi sono infiniti doppi sistemi reali di rigate che per molti riguardi si comportano come il doppio sistema delle sviluppabili. Questi sistemi, che possono chiamarsi *isoterma-coniugati* ( $A, I$ , § 12), assunti come coordinati fanno prendere alla seconda forma fondamentale (IV) della congruenza la forma isoterma, cioè rendono

$$D = D'', \quad D' = 0.$$

Sostituendo a  $D, D', D''$  i valori (V), si ha

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial v} = \left[ \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] A + \left[ \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] B, \\ \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} A + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} B. \end{cases}$$

Come nel § precedente, si deduce che: *ad ogni soluzione*  $(A, B)$  *del sistema* (29) *corrisponde una congruenza che ammette il dato doppio sistema sferico*  $u, v$  *come immagine di un doppio sistema isoterma-coniugato.*

**14. Superficie principali e rigate medie.** — In ogni congruenza esistono due sistemi, sempre reali e distinti, di *superficie principali* e due sistemi, pure reali e distinti, di *rigate medie* <sup>13)</sup>. Le loro immagini sferiche formano un doppio sistema ortogonale ( $A, I$ , §§ 9 e 11).

Or proponiamoci di *costruire tutte le congruenze nelle quali le superficie principali o le rigate medie hanno per immagini sferiche le linee di un dato doppio sistema ortogonale.*

<sup>13)</sup> Così chiamate dal BURGATTI che pel primo le considerò nella Nota: *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette* [Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, vol. VIII, 2° semestre, 1899, pp. 515-520]. In  $A, I$  le chiamai *superficie distributrici*.

Assunte queste linee come linee coordinate  $u, v$ , il quadrato del corrispondente elemento lineare sferico assumerà la forma canonica

$$ds'^2 = E du^2 + G dv^2$$

e sarà prima forma fondamentale comune a tutte le congruenze richieste.

I simboli di CHRISTOFFEL avranno i valori <sup>19)</sup>

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u}, & \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u}, & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}, & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v}; \end{aligned}$$

quindi i coefficienti (V) della seconda forma fondamentale di una qualunque delle congruenze richieste avranno la forma

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \sqrt{E} \frac{\partial A}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{B}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ 2D' &= E \frac{\partial}{\partial v} \frac{A}{E} + G \frac{\partial}{\partial u} \frac{B}{G}, \\ D'' &= \sqrt{G} \frac{\partial B}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{A}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

15. Affinchè le linee sferiche ortogonali  $u, v$  sieno le immagini delle superficie principali occorre e basta che sia ( $A, I, \S 11$ )

$$DG = D'E$$

ossia, per le (30),

$$(31) \quad G \frac{\partial}{\partial u} \frac{A}{\sqrt{EG}} = E \frac{\partial}{\partial v} \frac{B}{\sqrt{EG}}.$$

Detto  $EGP$  il valor comune dei due membri, ove  $P$  è una funzione arbitraria di  $u, v$ , possiamo concludere che: *la più generale congruenza che ammette le linee sferiche date  $u, v$  come immagini delle sue superficie principali è individuata dalle coordinate radiali ridotte*

$$(32) \quad X, Y, Z, \quad A = \sqrt{EG} \int EP du, \quad B = \sqrt{EG} \int GP dv,$$

ove  $P(u, v)$  è una funzione arbitraria.

16. Affinchè le linee sferiche ortogonali  $u, v$  sieno le immagini delle rigate medie occorre e basta che sia  $D' = 0$  ( $A, I, \S 9$ ) ossia, per le (30),

$$(33) \quad E \frac{\partial}{\partial v} \frac{A}{E} = -G \frac{\partial}{\partial u} \frac{B}{G}.$$

Detto  $EGP$  il valor comune dei due membri, ne deduciamo che: *le coordinate radiali*

<sup>19)</sup> loc. cit. 5), § 43.

ridotte

$$(34) \quad X, Y, Z, \quad A = E \int G P dv, \quad B = -G \int E P du,$$

ove  $P(u, v)$  è una funzione arbitraria, determinano la più generale congruenza che ammette le linee sferiche date  $u, v$  come immagini delle sue rigate medie.

Le risoluzioni ora ottenute esigono soltanto le quadrature (32) o (34), mentre quelle finora conosciute, dovute rispettivamente al BIANCHI <sup>20)</sup> e al BURGATTI <sup>21)</sup>, esigono la determinazione di coppie di funzioni di  $u, v$  soddisfacenti un'equazione differenziale alle derivate parziali seconde e poi delle quadrature.

### Coordinate radiali ridotte nei complessi.

#### 17. La retta

$$r \equiv (X, Y, Z, x, y, z) \equiv (X, Y, Z, l, m, n)$$

descriva un complesso; perciò supponiamo che  $X, Y, Z$  sieno funzioni di due variabili essenziali <sup>22)</sup>  $u, v$  e che  $x, y, z$  (e quindi  $l, m, n$ ) sieno funzioni di  $u, v$  e di una terza variabile  $w$ .

Come al § 3, possiamo costruire con le funzioni  $X, Y, Z$  la forma (I) e possiamo introdurre le funzioni  $A, B$  di  $u, v, w$  mediante le (6).

Le cinque funzioni

$$(35) \quad X(u, v), \quad Y(u, v), \quad Z(u, v), \quad A(u, v, w), \quad B(u, v, w)$$

si possono assumere come coordinate (*radiali ridotte*) del raggio  $r$  del complesso.

Sussistono integralmente i §§ 4 e 5; sicchè, note le (35), si può costruire il complesso calcolando le coordinate radiali (ordinarie) dei suoi raggi, mediante le (II), o le coordinate di un punto di partenza dei raggi stessi, mediante le (III).

Un complesso è individuato (a meno di un movimento) dalle sue *due forme quadratiche fondamentali* (I) e

$$(VI) \quad -\mu = D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2 + 2 M du dw + 2 N dv dw,$$

ove  $\mu$  è il momento di due raggi infinitamente vicini ( $A, II$ , §§ 3, 5); quindi per introdurre le coordinate (35) nello studio dei complessi basta cercare le espressioni dei coefficienti di (VI) in funzione di esse.

Or le espressioni di questi coefficienti in funzione di  $X, Y, Z, x, y, z$  sono date

<sup>20)</sup> loc. cit. 5), § 145.

<sup>21)</sup> loc. cit. 18).

<sup>22)</sup> escludendo i complessi i cui raggi si appoggiano ad una curva all'infinito.

(A, II, § 3) dalle formole (II) e dalle seguenti

$$(36) \quad \begin{cases} {}_2M = \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{E}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}, \\ {}_2N = \frac{G}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{F}{\Delta} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}; \end{cases}$$

sicchè per ottenere le espressioni volute basta sostituire in queste formole ad  $x, y, z$  i valori (III).

La sostituzione nelle (II) è stata già fatta al § 6 e conduce alle formole (V). Si ha poi dalle (III)

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial B}{\partial w} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial A}{\partial w}, \dots$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{E}{\Delta} \frac{\partial B}{\partial w} - \frac{F}{\Delta} \frac{\partial A}{\partial w}, \\ \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{F}{\Delta} \frac{\partial B}{\partial w} - \frac{G}{\Delta} \frac{\partial A}{\partial w} \end{aligned}$$

e, sostituendo nelle (36),

$$(VII) \quad {}_2M = \frac{\partial A}{\partial w}, \quad {}_2N = \frac{\partial B}{\partial w}.$$

Le (V) e (VII) danno le espressioni richieste dei coefficienti di (VI).

Torino, 22 febbraio 1912.

GUSTAVO SANNIA.