

## Der mittlere Beobachtungsfehler.

Von Prof. Dr. W. Veltmann, Poppelsdorf-Bonn.

Wenn eine Anzahl durch Beobachtungen bestimmter Grössen durch eine gleiche Anzahl Gleichungen mit einer geringeren Anzahl gesuchter Grössen verbunden sind, so kann man zu bestimmten Werthen der letzteren, sowie der mittleren Fehler auf zweierlei Weise gelangen. Man kann sich die vorliegende Beobachtungsreihe sehr oft (unendlich oft) mit denselben oder auch mit anderen Werthen der beobachteten Grössen und der Unbekannten wiederholt denken und nun unter Voraussetzung eines bestimmten Fehlergesetzes nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung die sogenannten wahrscheinlichsten Werthe bestimmen. Man kann aber auch lediglich die vorliegende Beobachtungsreihe zu Grunde legen, ohne sich darum zu kümmern, was sich ereignen würde, wenn die Beobachtungen millionenmal wiederholt würden. Man erhält dann die gesuchten Grössen als Mittelgrössen aus Werthen, welche sich aus verschiedenen Combinationen der vorliegenden Gleichungen ergeben.

In ersterer Weise hat Gauss die Werthe der Unbekannten bestimmt. Die Bestimmung derselben als Mittelgrössen, also gleichsam durch Verallgemeinerung des Falles des arithmetischen Mittels, hat zuerst Jacobi ausgeführt in der Abhandlung »De formatione et proprietatibus Determinantium« in Crelle, Journal für Mathematik Bd. 22, 1841. Er combinirt die  $n$  Gleichungen mit  $p$  Unbekannten zu je  $p$  und berechnet aus jeder dieser  $\binom{n}{p}$  Gruppen die Unbekannten. So erhält er für jede der letzteren  $\binom{n}{p}$  Werthe und aus diesen Werthen wird dann nicht das arithmetische Mittel, sondern eine andere Mittelgrösse genommen. Die einzelnen Werthe erscheinen nämlich unter der Form

$$\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \dots$$

und der resultirende Werth der Unbekannten ist jetzt

$$\frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots}{B_1^2 + B_2^2 + \dots}$$

Mit dem Gauss'schen stimmt dieser Werth vollständig überein. Dass es ein Mittelwerth ist aus den einzelnen, sagt Jacobi nicht; es war ihm nicht darum zu thun, die Unbekannten nach einem neuen Verfahren durch Mittelung zu bestimmen, sondern nur zu zeigen, wie die nach Gauss erhaltenen Werthe aus den obigen Einzelwerthen zusammengesetzt sind. Offenbar ist aber die Mittelung als Princip für die directe Berechnung der Unbekannten ebenso geeignet

und berechtigt, wie die gewöhnliche arithmetische Mittelung in dem Falle directer Beobachtung gesuchter Grössen.

Den mittleren Fehler einer Beobachtung als Mittelgrösse zu bestimmen, hat Jacobi nicht versucht. Er zeigt bloss, in welcher Mittelgrössenbeziehung das nach Gauss aus dem ganzen System von Gleichungen bestimmte Gewicht einer Unbekannten zu den Gewichten derselben Unbekannten steht, welche sich aus den einzelnen Combinationen ergeben. Dabei werden nicht die Gewichte selbst, sondern ihre reciproken Werthe, also den mittleren Fehlern der Unbekannten proportionale Grössen in Rechnung gebracht. Zur ursprünglichen Bestimmung des mittleren Fehlers ist diese Beziehung unbrauchbar.

Nach Gauss wird der mittlere Fehler einer Beobachtung in folgender Weise erhalten.

Wir setzen für beispielsweise drei Unbekannte

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 &= f_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 &= f_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + l_n &= f_n \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + l_1 &= \varphi_1 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + l_2 &= \varphi_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_n \xi + b_n \eta + c_n \zeta + l_n &= \varphi_n \end{aligned} \right\} (2)$$

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = [f^2] \quad (3)$$

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2 = [\varphi^2] \quad (4)$$

wo die  $a, b, c$  gegebene Constanten, die  $l$  durch Beobachtung erhaltene Grössen sind.  $x, y, z$  sind vorläufig ganz beliebige Grössen. Setzt man für dieselben die wahren Werthe der Unbekannten, so sind die  $f$  die wahren Fehler, welche, wenn die Beobachtungen genau wären, gleich Null sein würden.  $\xi, \eta, \zeta$  sind diejenigen Werthe, welche  $[\varphi^2]$  zu einem Minimum machen, also die durch die Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Werthe der Unbekannten. Dieselben sind bekanntlich lineare Functionen der  $l$ , also

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n \\ \eta &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n \\ \zeta &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots + \gamma_n l_n \end{aligned} \right\} (5)$$

wo die  $\alpha, \beta, \gamma$  aus den  $a, b, c$ , ohne die  $l$ , zusammengesetzte Ausdrücke sind. Zwischen den Grössen  $a, b, c$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  finden folgende Beziehungen statt

$$\left. \begin{aligned} a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n &= -1 \\ b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots + b_n \beta_n &= -1 \\ c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \dots + c_n \gamma_n &= -1 \end{aligned} \right\} (6)$$

(Ferner noch  $[a \beta] = [b \gamma] = [c \alpha] = 0$ ).

Die Summe der Quadrate der  $q$  lässt sich nun folgender Gleichung gemäss als Function zweiten Grades der  $f$  darstellen.

$$\left. \begin{aligned} q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2 &= f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 \\ &- (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n) (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n) \\ &- (b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_n f_n) (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n) \\ &- (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) (\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \dots + \gamma_n f_n) \end{aligned} \right\} (7)$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Werthe der  $x, y, z$  in Gleichung (1). Aendern sich  $x, y, z$ , so ändern sich auch die  $f$ ; der Werth der Function der  $f$  auf der rechten Seite ändert sich nicht, weil auf der linken die  $q$  sich nicht ändern. Die Gleichung gilt also insbesondere auch dann, wenn für  $x, y, z$  die wahren Werthe der Unbekannten gesetzt werden, wenn also die  $f$  die wahren Fehler sind. Somit hat man dann eine Beziehung zwischen der Quadratensumme der übrig bleibenden Fehler und den wahren Fehlern. Aber diese Beziehung kann unmittelbar zu nichts dienen, da der mittlere wahre Fehler sich daraus nicht ableiten lässt. Damit dies geschehen könne, müssen die Producte von je zwei Fehlern beseitigt werden, was aber in dieser Gleichung allein nicht geschehen kann, sondern wozu es nothwendig

ist, dieselbe mit einer grossen Anzahl ähnlicher Gleichungen zusammen zu nehmen. Man denke sich also die Beobachtungsreihe  $t$ mal, wo  $t$  eine sehr grosse Zahl ist, wiederholt und zwar unter Umständen, welche einen gleichen Grad von Genauigkeit bedingen, also mit denselben Instrumenten, bei gleichem Luftzustande u. s. w. Die Gleichung (7) möge für jede dieser Beobachtungsreihen aufgestellt, sämtliche Gleichungen addirt und die so erhaltene Gleichung durch  $t$  dividirt werden. Die Gleichungen unterscheiden sich nur durch die Werthe der  $l, f$  und  $q$ ; die der  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  sind für alle dieselben. Indem wir für das Aggregat der verschiedenen Werthe einer Grösse, welche zu den verschiedenen Beobachtungsreihen gehören, das Summenzeichen  $\Sigma$  anwenden, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \Sigma [q^2] &= \frac{1}{t} \Sigma [f^2] + \frac{1}{t} \Sigma ((a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n) (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n)) \\ &+ \frac{1}{t} \Sigma ((b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_n f_n) (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n)) \\ &+ \frac{1}{t} \Sigma ((c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) (\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \dots + \gamma_n f_n)) \end{aligned}$$

Die Gleichheit ist nun künftig so zu verstehen, dass die beiden Seiten der Gleichung sich nur um Grössen unterscheiden, welche gegen den Gesamtwert hinreichend klein sind, um vernachlässigt werden zu können. In diesem Sinne können wir dann sagen: Die Producte  $f_1 f_2$  unter einander,

die Producte  $f_1 f_2$  unter einander, u. s. w., heben sich auf. Wenn positive und negative Fehler in gleicher Grösse und gleicher Anzahl vorkommen, so kann hieran kein Zweifel sein. Man hat also dann die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \Sigma [q^2] &= \frac{1}{t} \Sigma f_1^2 + \frac{1}{t} \Sigma f_2^2 + \dots + \frac{1}{t} \Sigma f_n^2 + \left( a_1 \alpha_1 \Sigma \frac{f_1^2}{t} + a_2 \alpha_2 \Sigma \frac{f_2^2}{t} + \dots + a_n \alpha_n \Sigma \frac{f_n^2}{t} \right) \\ &+ \left( b_1 \beta_1 \Sigma \frac{f_1^2}{t} + b_2 \beta_2 \Sigma \frac{f_2^2}{t} + \dots + b_n \beta_n \Sigma \frac{f_n^2}{t} \right) \\ &+ \left( c_1 \gamma_1 \Sigma \frac{f_1^2}{t} + c_2 \gamma_2 \Sigma \frac{f_2^2}{t} + \dots + c_n \gamma_n \Sigma \frac{f_n^2}{t} \right) \end{aligned}$$

Nun ist aber jede der Summen  $\Sigma$  auf der rechten Seite gleich dem wahren mittleren Fehlerquadrat,  $= F^2$ , also

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \Sigma [q^2] &= n F^2 + (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n) F^2 + (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots + b_n \beta_n) F^2 \\ &+ (c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \dots + c_n \gamma_n) F^2 \end{aligned}$$

mithin nach Gleichung (6)

$$\frac{1}{t} \sum [y^2] = (n-3) F^2$$

$$F^2 = \frac{\frac{1}{t} \sum [y^2]}{n-3}$$

Die Herleitung dieser Gleichung ist durchaus exact. Im Dividenten rechts steht das arithmetische Mittel aus den Werthen der Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler sämtlicher Beobachtungsreihen. Da aber von diesen Beobachtungsreihen nur eine wirklich ausgeführt ist, so ist man genöthigt, die eine Quadratsumme als Durchschnitt von allen zu betrachten, oder was auf dasselbe hinauskommt, anzunehmen, dass die verschiedenen Quadratsummen (in dem oben angegebenen Sinne der Gleichheit) einander gleich sind. Man erhält dann den Gauss'schen Ausdruck für das mittlere Fehlerquadrat bei drei Unbekannten:

$$F^2 = \frac{[y^2]}{n-3}.$$

Demnach ist man also nur so weit berechtigt letzteres als das Maass der durch die obwaltenden Umstände bedingten Genauigkeit zu betrachten, wie weit man berechtigt ist zu obiger Annahme.

Will man bloss aus den vorhandenen wirklichen ohne Rücksicht auf andere mögliche Beobachtungen einen Werth ableiten, der als Fehlermittel, als Maass der durchschnittlichen Genauigkeit dienen kann, so scheint man hierzu nur auf folgende Weise gelangen zu können.

Die gegebenen Gleichungen seien

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= a_{10} + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = 0 \\ f_2 &= a_{20} + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = 0 \\ &\vdots \\ f_n &= a_{n0} + a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m = 0 \end{aligned} \right\} (8)$$

Indem man diese Gleichungen zu je  $m$  combinirt, erhält man  $\binom{n}{m}$  Combinationen. Man löse die Gleichungen auf, welche irgend eine dieser Gruppen bilden und erhält für  $x_1, x_2, \dots, x_m$  Werthe, welche denselben genügen.

$$= a_{g_0} + a_{g_1} \frac{\alpha_{g_1}}{\alpha_{g_0}} + a_{g_2} \frac{\alpha_{g_2}}{\alpha_{g_0}} + \dots + a_{g_m} \frac{\alpha_{g_m}}{\alpha_{g_0}} = \frac{a_{g_0} \alpha_{g_0} + a_{g_1} \alpha_{g_1} + a_{g_2} \alpha_{g_2} + \dots + a_{g_m} \alpha_{g_m}}{\alpha_{g_0}}$$

Da nun

$$D = a_{g_0} \alpha_{g_0} + a_{g_1} \alpha_{g_1} + \dots + a_{g_m} \alpha_{g_m},$$

so ist  $\frac{D}{\alpha_{g_0}}$  der Werth von

$$a_{g_0} + a_{g_1} x_1 + \dots + a_{g_m} x_m$$

d. h. gleich dem wahren Fehler der Gleichung (10), wenn man die eingesetzten Werthe der  $x$  als die wahren Werthe betrachtet.

Das System der Coefficienten der  $x$  in den Gleich-

Diese Werthe setze man in sämtliche  $n$  Gleichungen ein und bestimme die hieraus hervorgehenden Werthe von  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Nimmt man an, dass die eingesetzten Werthe der  $x$  die wahren Werthe der Unbekannten seien, so sind die  $f$  die wahren Beobachtungsfehler. Das Mittel aus denselben ist also dann der mittlere Fehler für die vorliegende Beobachtungsreihe. Die  $\binom{n}{m}$  Gruppen sind aber gleich berechtigt; man kann also jede derselben mit gleichem Recht zur Bestimmung eines solchen Mittels benutzen. Indem man nun aus allen diesen Mitteln wieder eine Mittelgrösse nimmt, zu welcher alle Gruppen in gleicher Weise beitragen, wird man wohl ein brauchbares Fehlermittel erhalten. Natürlich kann man hier, statt vorher aus einzelnen Gruppen, direct aus allen  $n \cdot \binom{n}{m}$  Fehlern das Mittel nehmen.

Eine der Gruppen sei

$$\left. \begin{aligned} a_{p_0} + a_{p_1} x_1 + \dots + a_{p_m} x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{t_0} + a_{t_1} x_1 + \dots + a_{t_m} x_m &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

Ferner sei irgend eine der  $n$  Gleichungen (8)

$$a_{g_0} + a_{g_1} x_1 + \dots + a_{g_m} x_m = 0 \quad (10)$$

Man bilde die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{p_0} & a_{p_1} & a_{p_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t_0} & a_{t_1} & a_{t_m} \\ a_{g_0} & a_{g_1} & a_{g_m} \end{vmatrix} = D \quad (11)$$

Die in dieser Determinante mit  $a_{g_0}, a_{g_1}, \dots, a_{g_m}$  multiplicirten Unterdeterminanten seien  $\alpha_{g_0}, \alpha_{g_1}, \dots, \alpha_{g_m}$ . Dann genügen den Gleichungen (9) die Werthe

$$x_1 = \frac{\alpha_{g_1}}{\alpha_{g_0}}, \quad x_2 = \frac{\alpha_{g_2}}{\alpha_{g_0}}, \quad \dots, \quad x_m = \frac{\alpha_{g_m}}{\alpha_{g_0}}$$

Dies in die Gleichung (10) eingesetzt, giebt den Fehler dieser Gleichung

ungen (8) wollen wir das Coefficientensystem, diese mit den Absolutgliedern zusammen das Constantensystem nennen. Das oben erhaltene Resultat ist also dann dieses.

Combinirt man die  $n$  Gleichungen zu je  $m$ , löst jede dieser  $\binom{n}{m}$  Gruppen auf, setzt jedes von den erhaltenen  $\binom{n}{m}$  Werthsystemen der  $x$  in sämtliche  $n$  Gleichungen ein, so erhält man die Fehler dieser Gleichungen und zwar sämtlich in der Form: Eine Determinante  $(m+1)^{\text{ten}}$  Grades des Constantensystems dividirt durch eine Determinante

$m^{\text{ten}}$  Grades des Coefficientensystems. Wollte man nun aus den Quadraten dieser Quotienten das arithmetische Mittel nehmen, so würde man zu kaum ausführbaren Rechnungen kommen und ein Resultat erhalten, welches zu der Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler in keiner näheren Beziehung stände. Nimmt man dagegen einen Mittelwerth in ähnlicher Weise, wie ihn Jacobi von den zu den einzelnen Combinationen gehörigen Werthen der Unbekannten gebildet hat, so erhält man eine einfache Beziehung. Eine Uebereinstimmung findet dann auch darin statt, dass die Divisoren in beiden Fällen dieselben sind, nämlich die Determinanten des Coefficientensystems. Man wird also den gesuchten Mittelwerth in der Weise bilden, dass man die Summe der Quadrate der sämtlichen Dividenden durch die Summe der Quadrate der Divisoren der  $n \cdot \binom{n}{m}$  Bruchausdrücke dividirt. Es ist also nur zu bestimmen, welche von 0 verschiedene Dividenden und Divisoren vorhanden sind, gleichviel wie sie zusammen gehören. Als Dividenden erscheinen nothwendig sämtliche Determinanten des Constantensystems und zwar jede  $(m+1)$  mal; denn irgend eine solche Determinante wird erhalten, indem man in irgend eine von  $(m+1)$  Gleichungen die Auflösung der übrigen  $m$  Gleichungen einsetzt. Ausserdem werden noch Dividenden erhalten, die  $= 0$  sind, die nämlich entstehen, indem man in eine von  $m$  Gleichungen die Auflösung dieser  $m$  Gleichungen einsetzt. Als Dividend des gesuchten Mittelwerthes erhält man somit  $(m+1)$  mal die Summe der Quadrate der sämtlichen Determinanten  $(m+1)^{\text{ten}}$  Grades des Constantensystems.

Divisor wird jede Determinante des Coefficientensystems und zwar kommt jede derselben  $n$  mal als Divisor vor, weil die Auflösung von irgend  $m$  Gleichungen in sämtliche  $n$  Gleichungen eingesetzt wird. Der Divisor des gesuchten Mittelwerthes ist somit die  $n$ -fache Summe der Quadrate der Determinanten  $m^{\text{ten}}$  Grades des Coefficientensystems.

Bezeichnet man also die Summe der Quadrate der Determinanten des Constantensystems mit  $[D^2]$ , die entsprechende Summe für das Coefficientensystem mit  $[A^2]$ , so erhält man das mittlere Fehlerquadrat

Poppelsdorf 1897 März 20.

\*) Veltmann, Ausgleichung der Beobachtungsfehler. Marburg 1886. S. 33.

$$F^2 = \frac{(m+1)[D^2]}{n[A^2]}$$

Der Ausdruck  $\frac{[D^2]}{[A^2]}$  ist nun gleich der Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler\*), wenn man den Unbekannten die durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Werthe giebt. Man hat also

$$F^2 = \frac{m+1}{n} (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2)$$

Der Ausdruck für  $F^2$  weicht also von dem Gauss'schen nur durch den Zahlenfactor ab. Wenn  $m$  nur um 1 kleiner ist als  $n$ , so stimmen beide Werthe überein.

Obige Bestimmung des mittleren Fehlers ist der Jacobi'schen Bestimmung der Unbekannten ganz analog. Wenn nun die eine für rationell gehalten wird, so wird man auch die andere als solche gelten lassen müssen. Nun wird aber die letztere thatsächlich allgemein angewandt; denn die Jacobi'schen Werthe der Unbekannten sind nichts anderes als die Gauss'schen, explicite dargestellt. Es wird also wohl gegen obige Herleitung des mittleren Fehlers nichts Wesentliches eingewendet werden können.

Wenn  $n > m+1$ , so ist der obige Werth stets grösser als der Gauss'sche. Und wenn, was ja in der Regel der Fall ist,  $n$  beträchtlich grösser ist als  $m+1$ , so ist auch der Unterschied der beiden Fehlermittel bedeutend, derart, dass das eine ein Mehrfaches des anderen ist. Man möchte nun über diese Verschiedenheit des constanten Factors, während der veränderliche Theil des Ausdrucks genau derselbe bleibt, sich etwas nähere Rechenschaft geben können. Allein hierzu scheint es an jedem Anhaltspunkt zu fehlen. Bekanntlich befindet sich der Mathematiker, sobald er an die Lösung des Problems der Fehlerausgleichung herantritt, auf einem eigenthümlich unsicheren Boden. Schon das auf diesem Gebiet häufig angewandte, in der Mathematik aber sonst nicht gebräuchliche Wort »plausibel« deutet hierauf hin. Nun, was die Plausibilität betrifft, dürfte meine Herleitung und somit auch das Resultat derselben nichts zu wünschen übrig lassen. Vielleicht würde bei häufig wiederholter Anwendung meiner Formel auf praktische Fälle die Erfahrung weitere Aufklärung geben.

Dr. W. Veltmann.

## Comparison of Meridian Circle Observations at Berlin and Mount Hamilton.

By R. H. Tucker.

The publication of the extensive series of observations by Dr. Küstner, in the *Astronomische Nachrichten*, affords an opportunity of comparison with the series lately completed at this observatory.

The comparison presents some features of special interest, in its relation to the system of the *Berliner Jahrbuch*, upon which each series has been based.

Since the Lick Observatory results will soon be

published in full, it does not appear necessary to anticipate their appearance, by printing any part of them here; but the details of the comparison can be given briefly.

The methods of observation and reduction are similar in the two sets. Dr. Küstner has given so clear and exhaustive a discussion of the Berlin observations, that no further reference to the details of his work need be made.

The Declinations determined here are differential, a