

# Über die Anzahl der Klassen positiver ternärer quadratischer Formen von gegebener Determinante\*).

Von

A. Hurwitz †.

Die Darstellung der Klassenzahl positiver binärer quadratischer Formen, die ich in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> entwickelt habe, läßt sich, wie ich im folgenden zeigen möchte, auf den Fall der ternären Formen ausdehnen. Die analytischen Hilfsmittel, deren es hierzu bedarf, werde ich dabei in etwas allgemeinerer Form darstellen, als es für den vorliegenden Zweck nötig wäre, da sie mir an sich von Interesse zu sein scheinen und in dieser allgemeineren Form auch für die Darstellung der Klassenzahl positiver quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen ausreichen dürften. Die arithmetischen Hilfsmittel liegen im Falle der ternären Formen in der Reduktionstheorie von Selling<sup>2)</sup> vor, im Falle der Formen von beliebig vielen Variablen in den schönen Untersuchungen von Voronoi<sup>3)</sup>.

\*) Die vorliegende Arbeit fand sich unter den nachgelassenen Manuskripten von A. Hurwitz mit der Bemerkung „geschrieben Sept. 1918“. Die Arbeit ist hier un geändert abgedruckt. Die genaue Prüfung des Manuskriptes und die Hinzufügung einiger Fußnoten verdanken wir Herrn A. Speiser in Zürich. Die Redaktion.

1) Über die Darstellung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen, Crelles Journal 129, S. 187—213.

2) E. Selling, Über die binären und ternären quadratischen Formen, Crelles Journal 77, S. 143—229.

3) G. Voronoi: Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, Crelles Journal 133, S. 97—178. Deuxième mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifs, Crelles Journal 134, S. 198—287, und 135, S. 67—181.

## § 1.

## Projektive Integrale.

In der Theorie der vielfachen Integrale ist es zweckmäßig, die Differentiale der Variablen als alternierende Größen im Sinne Grassmanns anzusehen. Es bedeutet dann z. B. das Produkt

$$dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{r-1},$$

wenn  $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$  Funktionen der unabhängigen Variablen  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  bezeichnen, also

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial u_{r-1}} du_{r-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r-1)$$

zu setzen ist, nichts anderes als die Funktionaldeterminante dieser Funktionen multipliziert in  $du_1 du_2 \dots du_{r-1}$ .

Ferner bedeutet das Symbol

$$(1) \quad d\Omega = x_1 dx_2 dx_3 \dots dx_r - x_2 dx_1 dx_3 \dots dx_r + \dots \pm x_r dx_1 dx_2 \dots dx_{r-1},$$

wenn auch  $x_r$  eine Funktion von  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  bezeichnet, das Produkt

$$(2) \quad d\Omega = D(x_1, x_2, \dots, x_r) du_1 du_2 \dots du_{r-1},$$

wobei

$$(3) \quad D(x_1, x_2, \dots, x_r) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{r-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial u_{r-1}} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial u_{r-1}} \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Diese Determinante hat die Eigenschaft, den Faktor  $\varrho$  aufzunehmen, wenn jede der Funktionen  $x_1, x_2, \dots, x_r$  mit  $\varrho$  multipliziert wird. Dies ist evident, wenn  $\varrho$  eine Konstante bedeutet, gilt aber auch noch, wie eine einfache Rechnung zeigt, wenn unter  $\varrho$  eine beliebige Funktion von  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  verstanden wird. Bezeichnet daher  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  eine Funktion der Argumente  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , die homogen vom Grade  $-r$  ist, so daß also

$$(4) \quad f(\varrho x_1, \varrho x_2, \dots, \varrho x_r) = \frac{1}{\varrho^r} f(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

gilt, so wird das Produkt

$$(5) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_r) D(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

nur von den Verhältnissen

$$x_1 : x_2 : \dots : x_r$$

der Funktionen  $x_1, x_2, \dots, x_r$  der Variablen  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  abhängen

nämlich sich überhaupt nicht ändern, wenn diese Funktionen sämtlich mit demselben Faktor  $\varrho$  multipliziert werden. Nimmt man z. B.  $\varrho = \frac{1}{x_1}$ , so stellt sich (5) in der Gestalt

$$(6) \quad f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_r}{x_1}\right) D\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_r}{x_1}\right) \\ = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_r}{x_1}\right) \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) d\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \dots d\left(\frac{x_r}{x_1}\right)}{du_1 du_2 \dots du_{r-1}}$$

dar, wo der zweite Faktor gemäß (3) die Funktionaldeterminante von  $\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_r}{x_1}$  vorstellt.

An diese Eigenschaft des Produktes (5) knüpft sich nun die Definition des „projektiven“ Integrales

$$(7) \quad J = \int_F f(x_1, x_2, \dots, x_r) d\Omega,$$

wobei  $F$  ein  $(r-1)$ -dimensionales Gebiet im projektiven Raume  $R$  von  $r-1$  Dimensionen, dessen einzelne Punkte durch die Verhältnisse  $x_1 : x_2 : \dots : x_r$  festgelegt werden, bezeichnet.

Wir setzen voraus, daß die Linearformen

$$(8) \quad \begin{cases} l &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r \\ l_1 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_r x_r \\ &\vdots \\ l_{r-1} &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \end{cases}$$

eine nicht verschwindende Determinante besitzen und daß  $l$  im Gebiete  $F$  (einschließlich der Begrenzung) nirgends verschwindet. Betrachten wir nun

$$(9) \quad u_1 = \frac{l_1}{l}, \quad u_2 = \frac{l_2}{l}, \quad \dots, \quad u_{r-1} = \frac{l_{r-1}}{l}$$

als Koordinaten in einem Raume von  $r-1$  Dimensionen, so wird in diesem der Punkt  $(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$  ein ganz im Endlichen liegendes Gebiet  $G$  beschreiben, wenn der Punkt  $x_1 : x_2 : \dots : x_r$  alle Lagen im Gebiete  $F$  annimmt. Das Gebiet  $G$  ist ein kollineares Abbild des Gebietes  $F$ . Vermöge (9) können wir die Verhältnisse  $x_1 : x_2 : \dots : x_r$  als Funktionen von  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  darstellen.

Unter dem Integrale (7) wollen wir nun nichts anderes verstehen, als das  $(r-1)$ -fache Integral

$$(10) \quad J = \int_G f(x_1, x_2, \dots, x_r) D(x_1, x_2, \dots, x_r) du_1 du_2 \dots du_{r-1}$$

genommen im Raume  $(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$  über das Gebiet  $G$ .

Der so definierte Wert des Integrals  $J$  ist von der Wahl der Linearformen (8), abgesehen vom Vorzeichen, unabhängig, wie aus folgendem Satze hervorgeht:

*Es möge der Punkt*

$$(11) \quad x_1 : x_2 : \dots : x_r \\ = \varphi_1(v_1, v_2, \dots, v_{r-1}) : \varphi_2(v_1, v_2, \dots, v_{r-1}) : \dots : \varphi_r(v_1, v_2, \dots, v_{r-1})$$

*das Gebiet  $F$  beschreiben, wenn der Punkt  $(v_1, v_2, \dots, v_{r-1})$  im Raume von  $(r-1)$  Dimensionen alle Lagen in einem gewissen Gebiete  $H$  annimmt. Dann wird der Wert des Integrals (7) auch durch*

$$(12) \quad J = \varepsilon \int_H f(x_1, x_2, \dots, x_r) D(x_1, x_2, \dots, x_r) dv_1 dv_2 \dots dv_{r-1} \\ (\varepsilon = +1 \text{ oder } -1)$$

*dargestellt, wobei in letzterem Integrale  $x_1, x_2, \dots, x_r$  bezüglich durch  $\varphi_1(v_1, v_2, \dots, v_{r-1}), \varphi_2(v_1, v_2, \dots, v_{r-1}), \dots, \varphi_r(v_1, v_2, \dots, v_{r-1})$  zu ersetzen sind.*

Nach den hier gemachten Voraussetzungen können wir nämlich  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  als Funktionen von  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$  ansehen und zwar wird der Punkt  $(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$  das Gebiet  $G$  beschreiben, wenn der Punkt  $(v_1, v_2, \dots, v_{r-1})$  alle Lagen im Gebiete  $H$  annimmt. Führen wir daher im Integrale (10) statt der Variablen  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$  die neuen Variablen  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$  ein, so wird (10) in die Gestalt (12) übergehen. Der Faktor  $\varepsilon$  gibt dabei das Vorzeichen der Funktionaldeterminante

$$\frac{du_1 du_2 \dots du_{r-1}}{dv_1 dv_2 \dots dv_{r-1}}$$

an, welche als stetig und von Null verschieden im Gebiete  $H$  vorausgesetzt wird.

Die Gleichung (12) gibt nun die Darstellung des projektiven Integrals  $J$ , die von der Wahl der Linearformen (8) gänzlich unabhängig ist. Was die Definitionsgleichung (10) angeht, (die auch als spezieller Fall der Gleichung (12) aufgefaßt werden kann), so läßt sich dieselbe in die einfache Form

$$(13) \quad J = \frac{1}{\Delta} \int_G f\left(\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{t}, \dots, \frac{x_r}{t}\right) du_1 du_2 \dots du_{r-1}$$

setzen, wo  $\Delta$  die Determinante der Linearformen (8) bezeichnet. Denn das Determinanten-Multiplikationstheorem ergibt sofort, daß das Produkt der beiden Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{r-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial u_{r-1}} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial u_{r-1}} \end{vmatrix}$$

nachdem in der Determinante  $D$  an Stelle von  $x_1, x_2, \dots, x_r$  bezüglich  $\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{t}, \dots, \frac{x_r}{t}$  gesetzt worden ist, sich wegen der Gleichungen (9) auf den Wert 1 reduziert.

Das Integral  $J$  verhält sich im Sinne des folgenden Satzes invariant gegenüber linearen Transformationen.

*Es seien*

$$(14) \quad \begin{cases} x_1 = s_{11}x'_1 + s_{12}x'_2 + \dots + s_{1r}x'_r \\ x_2 = s_{21}x'_1 + s_{22}x'_2 + \dots + s_{2r}x'_r \\ \vdots \\ x_r = s_{r1}x'_1 + s_{r2}x'_2 + \dots + s_{rr}x'_r \end{cases}$$

die Gleichungen einer Kollineation, vermöge welcher das Gebiet  $F$  des Raumes  $(x_1 : x_2 : \dots : x_r)$  in das Gebiet  $F'$  des Raumes  $(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_r)$  übergeht. Es gilt dann die Gleichung

$$(15) \quad \int_F f(x_1, x_2, \dots, x_r) d\Omega = \pm |s_{ik}| \int_{F'} f(x_1, x_2, \dots, x_r) d\Omega'.$$

Hierbei sind in dem Integrale rechter Hand  $x_1, x_2, \dots, x_r$  vermöge der Gleichungen (14) durch  $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$  auszudrücken und es ist analog zu (1)

$$d\Omega' = x'_1 dx'_2 dx'_3 \dots dx'_r - x'_2 dx'_1 dx'_3 \dots dx'_r + \dots \pm x'_r dx'_1 dx'_2 \dots dx'_{r-1}$$

zu setzen.

Zum Beweise der Gleichung (15) denken wir uns  $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$  als Funktionen der Variablen  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$  so dargestellt, daß der Punkt  $(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_r)$  das Gebiet  $F'$  beschreibt, wenn der Punkt  $(v_1, v_2, \dots, v_{r-1})$  alle Lagen in einem gewissen Gebiete  $H$  annimmt. Vermöge (14) werden dann auch  $x_1, x_2, \dots, x_r$  Funktionen der Variablen  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$ .

Nach dem vorhergehenden Satze wird nun einerseits

$$\int_F f(x_1, x_2, \dots, x_r) d\Omega = \pm \int_H f(x_1, x_2, \dots, x_r) D dv_1 dv_2 \dots dv_{r-1},$$

andererseits:

$$\int_{F'} f(x_1, x_2, \dots, x_r) d\Omega' = \pm \int_H f(x_1, x_2, \dots, x_r) D' dv_1 dv_2 \dots dv_{r-1},$$

wobei  $D$  und  $D'$  die Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \frac{\partial x_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial v_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_{r-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial v_{r-1}} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial v_{r-1}} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_r \\ \frac{\partial x'_1}{\partial v_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial x'_r}{\partial v_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial v_{r-1}} & \frac{\partial x'_2}{\partial v_{r-1}} & \dots & \frac{\partial x'_r}{\partial v_{r-1}} \end{vmatrix}$$

bezeichnen. Vermöge der Gleichungen (14) wird aber

$$D = |s_{ik}| \cdot D',$$

woraus nun die Gleichung (15) hervorgeht.

Ein besonderes Interesse verdient das spezielle projektive Integral, welches der Annahme

$$(16) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_r) = \frac{1}{l^r}$$

entspricht, wobei

$$(17) \quad l = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_r x_r$$

eine Linearform bezeichnet, die im Gebiete  $F$  nirgends Null wird. Den absoluten Wert des betreffenden Integrales

$$(18) \quad J = \int_F \frac{d\Omega}{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r)^r}$$

bezeichne ich als „Volumen des Gebietes  $F$  bezüglich der Linearform  $l$ “. Der Grund hierfür ist dieser:

Führen wir gemäß (9) das Gebiet  $F$  in das kollineare Gebiet  $G$  des Raumes  $(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$  über, so haben wir eine Kollineation ausgeführt, bei welcher der lineare Raum  $l=0$  in das Unendliche des Raumes  $(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$  übergeht. Zugleich wird gemäß Formel (13) das Integral (18) durch

$$(19) \quad J = \frac{1}{\Delta} \int_G du_1, du_2, \dots, du_{r-1}$$

dargestellt. Die den verschiedenen Gebieten  $F$  entsprechenden Integralwerte (18) sind also proportional den Inhalten der ihnen kollinear entsprechenden Gebieten  $G$ .

## § 2.

### Berechnung einiger projektiver Integrale.

Drei Gerade zerlegen die projektive Ebene in vier getrennte Gebiete, vier Ebenen den projektiven Raum von drei Dimensionen in acht Gebiete und allgemein  $r$  lineare Räume

$$(1) \quad \begin{cases} l_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0, \\ l_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_r x_r = 0, \\ \vdots \\ l_r = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = 0, \end{cases}$$

die keinen Punkt gemeinsam haben, den projektiven Raum  $(x_1 : x_2 : \dots : x_r)$  von  $(r-1)$  Dimensionen in  $2^{r-1}$  Gebiete. Denn für einen Punkt  $x_1 : x_2 : \dots : x_r$ , für welchen keine der Linearformen (1) verschwindet, wird jeder der  $r-1$  Quotienten

$$(2) \quad \frac{l_2}{l_1}, \frac{l_3}{l_1}, \dots, \frac{l_r}{l_1}$$

einen positiven oder negativen bestimmten Wert erhalten. Den  $2^{r-1}$  möglichen Vorzeichenkombinationen, die hier vorliegen, entsprechen die erwähnten  $2^{r-1}$  Gebiete.

Man erkennt nun leicht, daß von diesen Gebieten immer ein einziges vorhanden ist, welches mit einem linearen Raume

$$(3) \quad l = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r = 0$$

keinen Punkt gemeinsam hat. Dabei wird vorausgesetzt, daß je  $r$  oder  $r+1$  Räume (1) und (3) keinen Punkt gemein haben oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Unterdeterminanten  $r$ -ten Grades der Matrix

$$(4) \quad \begin{pmatrix} c_1, c_2, \dots, c_r \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \vdots \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \end{pmatrix}$$

sämtlich von Null verschieden sind. In der Tat zeigt die identische Gleichung

$$(5) \quad \begin{vmatrix} l, c_1, c_2, \dots, c_r \\ l_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \vdots \\ l_r, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \end{vmatrix} \equiv \kappa l + \kappa_1 l_1 + \dots + \kappa_r l_r = 0,$$

daß für einen Punkt  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , für welche die Quotienten (2) beziehentlich die Vorzeichen von  $\frac{\alpha_2}{x_1}, \dots, \frac{\alpha_r}{x_1}$  erhalten, unmöglich  $l=0$  werden kann. Denn für einen solchen Punkt ist

$$(6) \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{x_2}{x_1} p_2, \dots, \frac{l_r}{l_1} = \frac{x_r}{x_1} p_r,$$

unter  $p_2, \dots, p_r$  positiver Zahlen verstanden, und es würde aus (5) die Gleichung

$$1 + \frac{x_2}{x_1} \frac{l_2}{l_1} + \dots + \frac{x_r}{x_1} \frac{l_r}{l_1} = 0,$$

oder

$$1 + p_2 + \dots + p_r = 0$$

folgen, die offenbar widersinnig ist.

Das in Rede stehende Gebiet, in welches der Raum  $l = 0$  nicht eindringt, möge mit  $F$  bezeichnet und der Wert des Volumens von  $F$  bezüglich der Linearform  $l$ , also der Wert des Integrals

$$(7) \quad J = \pm \int_F \frac{d\Omega}{(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r)^r} = \pm \int \frac{d\Omega}{l^r}$$

aufgesucht werden.

Durch die Kollineation

$$(8) \quad x'_1 = \kappa_1 l_1, \quad x'_2 = \kappa_2 l_2, \quad \dots, \quad x'_r = \kappa_r l_r$$

gehe das Gebiet  $F$  in das Gebiet  $F'$  des Raumes  $(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_r)$  über.

Nach (5) wird dann

$$\kappa l = -(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_r)$$

und daher, zufolge des zweiten Satzes von § 1,

$$(9) \quad J = \pm \kappa^r \Delta \int_{F'} \frac{d\Omega'}{(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_r)^r},$$

unter  $\Delta$  den reziproken Wert der Determinante der Linearformen  $\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2, \dots, \kappa_r l_r$  verstanden, so daß

$$(10) \quad \frac{1}{\Delta} = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_r \kappa$$

wird. Das Gebiet  $F'$  entsteht zufolge (6), wenn

$$\frac{x'_2}{x'_1} = p_2, \dots, \frac{x'_r}{x'_1} = p_r$$

gesetzt wird und  $p_2, \dots, p_r$  alle positiven Werte von 0 bis  $\infty$  durchlaufen. Demnach kommt

$$(11) \quad J = \pm \frac{\kappa^{r-1}}{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_r} \int \frac{dp_2 dp_3 \dots dp_r}{(1 + p_2 + \dots + p_r)^r},$$

wo in dem  $(r-1)$ fachen Integral jede der Variablen  $p_2, p_3, \dots, p_r$  von 0 bis  $\infty$  laufen muß. Der Wert dieses Integrals ergibt sich leicht durch sukzessive Ausführung der Integrationen nach  $p_2, p_3, \dots, p_r$  und man findet so

$$(12) \quad J = \pm \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{\kappa^{r-1}}{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_r}.$$

Dabei bedeuten  $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$  die Unterdeterminanten der Matrix (4), so daß diese Werte durch die in  $u, u_1, u_2, \dots, u_r$  identische Gleichung



$$(13) \quad \begin{vmatrix} u, & c_1, & c_2, & \dots, & c_r \\ u_1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_r \\ \vdots & & & & \\ u_r, & \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_r \end{vmatrix} = \kappa u + \kappa_1 u_1 + \dots + \kappa_r u_r$$

definiert werden können.

Es seien jetzt die linearen Räume (1) durch ihre Durchschnittspunkte gegeben, die wir mit

$$(14) \quad (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

bezeichnen wollen. Wir können dann

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_r \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \dots, & x_r^{(2)} \\ \vdots & & & \\ x_1^{(r)}, & x_2^{(r)}, & \dots, & x_r^{(r)} \end{vmatrix}, \quad l_2 = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots, & x_r^{(1)} \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_r \\ \vdots & & & \\ x_1^{(r)}, & x_2^{(r)}, & \dots, & x_r^{(r)} \end{vmatrix}, \\ \dots, \quad l_r = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots, & x_r^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(r-1)}, & x_2^{(r-1)}, & \dots, & x_r^{(r-1)} \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_r \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

nehmen.

Zur Abkürzung sei ferner

$$(16) \quad \delta = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots, & x_r^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \dots, & x_r^{(2)} \\ \vdots & & & \\ x_1^{(r)}, & x_2^{(r)}, & \dots, & x_r^{(r)} \end{vmatrix}, \quad l(i) = c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \dots + c_r x_r^{(i)} \\ (i = 1, 2, \dots, r)$$

gesetzt. Die Substitution von  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)})$  in die Gleichung (5) liefert

$$(17) \quad \kappa l(i) + \kappa_i \delta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r);$$

ferner ist

$$(18) \quad \kappa \delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_r \\ \vdots & & & \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \dots, & x_r^{(1)} \\ \vdots & & & \\ x_1^{(r)}, & x_2^{(r)}, & \dots, & x_r^{(r)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \delta, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \delta \end{vmatrix} = \delta^r,$$

weil  $\alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)} + \dots + \alpha_r x_r^{(1)} = l_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}) = \delta$  zufolge (15) ist u. s. f. Drücken wir vermöge (17) und (18) die Werte  $\kappa$  und  $\kappa_i$  aus, so ergibt sich aus (12):

Das Volumen desjenigen von den  $r$  linearen Verbindungsräumen der Punkte

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_r^{(2)}) \dots (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_r^{(r)})$$

begrenzten Gebietes  $F$ , welches mit dem linearen Raum

$$l = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r = 0$$

keinen Punkt gemein hat, dies Volumen bezüglich der Linearform  $l$  genommen, hat den Wert

$$(19) \quad J = \pm \int \frac{d\Omega}{l^r} = \pm \frac{1}{(r-1)!} \cdot l(1)l(2)\dots l(r).$$

Die Bedeutung von  $\delta$  und  $l(i)$  erhellt aus (16).

Die Formeln (12) und (19) sind Verallgemeinerungen bekannter Formeln für das Volumen eines Simplex im gewöhnlichen (Euklidischen) Raume von  $(r-1)$  Dimensionen.

Ein weiteres projektives Integral, dessen Wert für unsere Zwecke zu berechnen ist, entsteht folgendermaßen. Wir ordnen jeder quadratischen Form mit reellen Koeffizienten

$$(20) \quad f = f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i,j=1}^{1\dots n} a_{ij} u_i u_j \quad (a_{in} = a_{ni})$$

von  $n$  Variablen  $u_1, u_2, \dots, u_n$  denjenigen Punkt im projektiven Raume von

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Dimensionen zu, dessen Koordinaten zu  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n-1,n}$  proportional sind. Der betreffende Punkt möge der Kürze halber als „Punkt  $f$ “ bezeichnet werden. Jeder Form  $f$  entspricht also ein bestimmter Punkt  $f$ , wobei aber dieser Punkt sich nicht ändert, wenn die Form  $f$  durch die Form  $\varrho f$  ersetzt wird, unter  $\varrho$  eine beliebig gewählte nicht verschwindende reelle Konstante verstanden. Der betrachtete Raum heiße der Raum der quadratischen Formen und derjenige Teil dieses Raumes, dessen Punkte die positiven Formen repräsentieren, werde mit  $F$  bezeichnet. Die Punkte von  $F$  werden durch den Ansatz

$$(21) \quad f = p_1 (u_1 + p_{12} u_2 + p_{13} u_3 + \dots + p_{1n} u_n)^2 + p_2 (u_2 + p_{23} u_3 + \dots + p_{2n} u_n)^2 + \dots + p_n u_n^2$$

geliefert, wobei  $p_1, p_2, \dots, p_n$  alle positiven Werte und  $p_{12}, p_{13}, \dots, p_{n-1,n}$  alle reellen Werte durchlaufen müssen. Dabei liefern zwei Wertsysteme  $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{12}, p_{13}, \dots, p_{n-1,n}$  und  $p'_1, p'_2, \dots, p'_n, p'_{12}, p'_{13}, \dots, p'_{n-1,n}$  dann und nur dann denselben Punkt von  $F$ , wenn

$$p'_1 : p'_2 : \dots : p'_n = p_1 : p_2 : \dots : p_n \text{ und } p'_{in} = p_{in} \quad (i < n, i: n = 1, 2, \dots, n-1)$$

ist. Im Raume der quadratischen Formen betrachten wir nun einen linearen Raum

$$(22) \quad l = \sum_{i, \kappa} c_{i\kappa} a_{i\kappa} = 0 \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n),$$

wobei  $a_{i\kappa}$  die laufenden Koordinaten und  $c_{i\kappa} = c_{\kappa i}$  zunächst  $\frac{n(n+1)}{2}$  beliebige, nur nicht sämtlich verschwindende, reelle Werte bezeichnen. Setzen wir für  $a_{i\kappa}$  die Koeffizienten von  $f$  aus (21), so kommt

$$(23) \quad \sum_{i, \kappa} c_{i\kappa} a_{i\kappa} = p_1 \varphi(1, p_{12}, p_{13}, \dots, p_{1n}) \\ + p_2 \varphi(0, 1, p_{23}, \dots, p_{2n}) + \dots + p_n \varphi(0, 0, \dots, 0, 1),$$

wenn zur Abkürzung

$$(24) \quad \sum_{i, \kappa} c_{i\kappa} u_i u_\kappa = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

gesetzt wird. Wählen wir, was jetzt geschehen soll, die Koeffizienten  $c_{i\kappa}$  so, daß die letztere Form  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$  eine positive Form ist, so wird nach (23) der Wert von  $\sum c_{i\kappa} a_{i\kappa} > 0$  und der lineare Raum (22) hat daher mit dem Gebiete  $F$  keinen Punkt gemein.

Es soll sich nun zunächst um die Berechnung des Volumens von  $F$  bezüglich der Linearform  $l = \sum_{i, \kappa} c_{i\kappa} a_{i\kappa}$  handeln, also um die Berechnung des Integrals

$$(25) \quad J = \pm \int_F \frac{d\Omega}{\left(\sum_{i, \kappa} c_{i\kappa} a_{i\kappa}\right)^m}, \quad m = \frac{n(n+1)}{2}$$

Zu diesem Zwecke bringen wir die positive Form  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$  durch eine unimodulare reelle Substitution

$$(26) \quad u_i = t_{1i} u'_1 + t_{2i} u'_2 + \dots + t_{ni} u'_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

auf die Form

$$(27) \quad \sum_{i, \kappa} c_{i\kappa} u_i u_\kappa = x u_1'^2 + x u_2'^2 + \dots + x u_n'^2.$$

Der Vergleich der Determinanten gibt für  $x^n$  den Wert

$$(28) \quad x^n = \begin{vmatrix} c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n} \\ \vdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn} \end{vmatrix}$$

Nunmehr transformieren wir das Integral (25) durch die lineare Substitution

$$(29) \quad a_{i\kappa} = \sum_{\alpha, \beta} a'_{\alpha\beta} t_{\alpha i} t_{\beta \kappa} \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n; \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n),$$

welche die Punkte des Raumes  $a_{11} : a_{12} : \dots : a_{n-1, n}$  eindeutig umkehrbar

auf die Punkte des Raumes  $a'_{11} : a'_{12} : \dots : a'_{n-1,n}$  bezieht. Die Gleichungen (29) können durch die eine, in den Variablen  $u_1, u_2, \dots, u_n$  identische Gleichung

$$(30) \quad \sum_{i,x} a_{ix} u_i u_x = \sum_{\alpha,\beta} a'_{\alpha\beta} (t_{\alpha 1} u_1 + t_{\alpha 2} u_2 + \dots + t_{\alpha n} u_n) (t_{\beta 1} u_1 + t_{\beta 2} u_2 + \dots + t_{\beta n} u_n)$$

ersetzt werden, welche zeigt, daß wenn  $a'_{ix}$  das System der Koeffizienten einer positiven Form vorstellt, das Nämliche von den  $a_{ix}$  gilt. Dem Gebiete  $F$  entspricht daher vermöge der Kollineation (29) dasjenige Gebiet  $F'$  im Raume  $a'_{11} : a'_{12} : \dots : a'_{n-1,n}$ , welches in diesem die Gesamtheit der positiven Formen repräsentiert. Die Determinante der Substitution (29) ist nach bekannten Sätzen eine Potenz der Determinante  $|t_{ix}|$ , also gleich 1. Endlich ergibt sich

$$(31) \quad \sum_{i,x} c_{ix} a_{ix} = \sum_{i,x,\alpha,\beta} c_{ix} a'_{\alpha\beta} t_{\alpha i} t_{\beta x} = \sum_{\alpha,\beta} c'_{\alpha\beta} a'_{\alpha\beta},$$

wenn

$$c'_{\alpha\beta} = \sum_{i,x} c_{ix} t_{\alpha i} t_{\beta x}$$

gesetzt wird. Nach Gleichung (27) wird aber

$$\begin{aligned} \sum c'_{\alpha\beta} u'_\alpha u'_\beta &= \sum c_{ix} (t_{i1} u'_1 + t_{i2} u'_2 + \dots + t_{in} u'_n) (t_{1x} u'_1 + t_{2x} u'_2 + \dots + t_{nx} u'_n) \\ &= x u'^2_1 + x u'^2_2 + \dots = x u'^2_n \end{aligned}$$

und also

$$c'_{11} = c'_{22} = \dots = c'_{nn} = x, \quad c'_{ix} = 0 \quad (i \neq x)$$

so daß (31) in

$$(32) \quad \sum_{i,x} c_{ix} a_{ix} = x (a'_{11} + a'_{22} + \dots + a'_{nn})$$

übergeht. Aus allediesem folgt, daß vermöge der Substitution (29) das Integral  $J$  die Gestalt

$$J = \pm \int_{F'} x^m (a'_{11} + a'_{22} + \dots + a'_{nn})^n$$

annimmt. Hier darf man statt  $a'_{11}, \dots, a'_{n-1,n}$  wieder  $a_{11}, \dots, a_{n-1,n}$  und statt  $F'$  wieder  $F$  schreiben, so daß in Rücksicht auf (28) kommt:

*Das Volumen des Gebietes  $F$  der positiven Formen bezüglich der Linearform*

$$l = \sum_{i,x} c_{ix} a_{ix}$$

ist der absolute Wert von

$$(33) \quad - \frac{C_n}{\frac{n+1}{2}},$$

$$|c_{ix}|^2$$

wo die numerische Konstante  $C_n$  den Wert des Integrals

$$(34) \quad C_n = \int_F \frac{d\Omega}{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{n,n})^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

repräsentiert.

Um dieses Integral zu berechnen, setzen wir

$$(35) \quad \sum_{i,k}^{1,2,\dots,n} a_{ik} u_i u_k = (u_1 + p_{12} u_2 + \dots + p_{1n} u_n)^2 + \sum_{i,k}^{2,\dots,n} b_{ik} u_i u_k,$$

wo die Summe auf der rechten Seite die allgemeinste positive Form von  $(n-1)$  Variablen  $u_2, \dots, u_n$  vorstellt. Wir erhalten, diesem Ansatz (35) entsprechend, das Gebiet  $F$ , wenn in den Gleichungen

$$(36) \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = p_{12}, \dots, a_{1n} = p_{1n}, \quad a_{ik} = p_{1i} p_{1k} + b_{ik} \\ (i, k = 2, \dots, n)$$

$p_{12}, \dots, p_{1n}$  alle reellen Werte und die  $b_{ik}$  alle Koeffizientensysteme der positiven Formen von  $n-1$  Variablen durchlaufen. Da  $a_{11} = 1$  gesetzt ist (was erlaubt ist, da nur die Verhältnisse  $a_{11} : a_{22} : \dots : a_{n-1,n}$  in Frage kommen), wird

$$d\Omega = da_{12} \dots da_{1n} \prod_{i,k}^{2,\dots,n} da_{ik}$$

oder, da gemäß (36)

$$da_{12} = dp_{12}, \dots, da_{1n} = dp_{1n}, \quad da_{ik} = p_{1i} dp_{1k} + p_{1k} dp_{1i} + db_{ik}$$

wird,

$$d\Omega = dp_{12} \dots dp_{1n} \prod_{i,k}^{2,\dots,n} db_{ik},$$

und somit

$$(37) \quad C_n = \int \frac{dp_{12} \dots dp_{1n} \prod_{i,k}^{2,\dots,n} db_{ik}}{(1 + p_{12}^2 + \dots + p_{1n}^2 + b_{22} + \dots + b_{n,n})^m} \quad m = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Integration nach den Variablen  $p_{12}, \dots, p_{1n}$  läßt sich leicht ausführen mit Hilfe der bekannten Gleichung

$$(38) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(A + p_{1n}^2)^m} = \frac{1}{A^{m-\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{\sqrt{\pi}}{A^{m-\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)},$$

in welcher  $A$  eine beliebige positive Konstante bezeichnet. Man findet so

$$(39) \quad C_n = (\sqrt{\pi})^{n-1} \frac{\Gamma\left(m - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \int \frac{H db_{ik}}{(1 + b_{22} + \dots + b_{n,n})^{m - \frac{n-1}{2}}} \\ \left(m - \frac{n-1}{2} = \frac{n^2+1}{2}\right).$$

Das hier auftretende Integral ist nun nicht mehr ein projektives, da es zu erstrecken ist über das Gebiet des  $\frac{(n-1)n}{2}$  dimensionalen Raumes der Punkte  $(b_{32}, b_{33}, \dots, b_{n-2, n-1})$ , welches den positiven Formen  $\sum b_{i\kappa} u_i u_\kappa$  von  $(n-1)$  Variablen entspricht. Um den Wert des Integrals zu bestimmen, betrachten wir allgemeiner das Integral

$$(40) \quad D_n = \int \frac{\prod_{i,\kappa=1,\dots,n}^n da_{i\kappa}}{(1 - a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})^{r + \frac{n(n+1)}{2}}},$$

wo  $r$  einen beliebigen Exponenten bedeutet und das Integrationsgebiet der Teil des  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionalen Raumes ist, welcher den positiven

Formen  $\sum_{i,\kappa=1,\dots,n}^n a_{i\kappa} u_i u_\kappa$  entspricht. Das in (39) auftretende Integral entsteht aus  $D_n$ , wenn wir  $n$  durch  $n-1$  und dann  $r$  durch  $\frac{n+1}{2}$  ersetzen.

Analog zu (35) ersetzen wir jetzt:

$$(41) \quad \sum_{i,\kappa=1,\dots,n}^n a_{i\kappa} u_i u_\kappa = p_1 (u_1 + p_{12} u_2 + \dots + p_{1n} u_n)^2 + \sum_{i,\kappa=2,\dots,n}^n b_{i\kappa} u_i u_\kappa,$$

also

$$a_{11} = p_1, \quad a_{12} = p_1 p_{12}, \dots, a_{1n} = p_1 p_{1n}, \quad a_{i\kappa} = p_1 p_{1i} p_{1\kappa} + b_{i\kappa} \\ (i, \kappa = 2, \dots, n)$$

und

$$da_{11} = dp_1, \quad da_{12} = p_{12} dp_1 + p_1 dp_{12}, \dots, da_{1n} = p_{1n} dp_1 + p_1 dp_{1n}, \\ da_{i\kappa} = d(p_1 p_{1i} p_{1\kappa}) + db_{i\kappa} \quad (i, \kappa = 2, \dots, n).$$

Dadurch geht das Integral  $D_n$  über in

$$(42) \quad D_n = \int \frac{p_1^{n-1} dp_1 dp_{12} \dots dp_{1n} \prod_{i,\kappa=2,\dots,n}^n db_{i\kappa}}{(1 - p_1(1 + p_{12}^2 + \dots + p_{1n}^2) + b_{22} + \dots + b_{nn})^{r + \frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Die Ausführung der Integration nach  $p_1$  ergibt, unter Anwendung der Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{p_1^{n-1} dp_1}{(a p_1 + b)^{\lambda}} = \frac{\Gamma(n) \Gamma(\lambda - n)}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{1}{a^n b^{\lambda-n}}, \quad (\lambda > n)$$

zunächst

$$D_n = \frac{\Gamma(n) \Gamma(\lambda - n)}{\Gamma(\lambda)} \int \frac{dp_{12} \dots dp_{1n} \prod_{i,\kappa=2,\dots,n}^n db_{i\kappa}}{(1 + p_{12}^2 + \dots + p_{1n}^2)^n (1 + b_{22} + \dots + b_{nn})^{\lambda-n}} \\ \left( \lambda = r + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

\*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, 2. Aufl., S. 277.

und darauf die Integration nach  $p_{12}, \dots, p_{1n}$

$$(43) \quad D_n = \frac{\Gamma(n) \Gamma(\lambda - n)}{\Gamma(\lambda)} \cdot (\sqrt{\pi})^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \int \frac{\prod_{i=2}^n db_i}{(1 + b_{12} + \dots + b_{1n})^{2-n}}$$

$$\left(\lambda - n = r + \frac{(n-1)n}{2}\right).$$

Diese Gleichung stellt nun eine Rekursionsformel für das zu berechnende Integral vor, da das Integral rechter Hand aus  $D_n$  dadurch entsteht, daß man  $n$  durch  $n-1$  ersetzt.

Da nun

$$D_1 = \int_0^\infty \frac{da_{11}}{(1+a_{11})^{r+1}} = \frac{1}{r}$$

ist, so kommt

$$D_n = \frac{\Gamma\left(r + \frac{n(n-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(r + \frac{(n+1)n}{2}\right)} (\sqrt{\pi})^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot D_{n-1}$$

und schließlich

$$D_n = (\sqrt{\pi})^{\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(r)}{\Gamma\left(r + \frac{(n+1)n}{2}\right)}.$$

Unter Benutzung dieses Resultates kommt schließlich nach leichter Rechnung

$$(44) \quad C_n = (\sqrt{\pi})^{\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}.$$

Nach dem Funktionaltheorem der  $\Gamma$ -Funktion ist der Wert von  $C_n$  ein rationales Multiplum einer Potenz von  $\sqrt{\pi}$ .

### § 3.

**Die Reduktion der ternären positiven quadratischen Formen.**

Wir ordnen der ternären quadratischen Form

$$(1) \quad f = f(u_1, u_2, u_3) \\ = a_{11} u_1^2 + a_{22} u_2^2 + a_{33} u_3^2 + 2a_{12} u_1 u_2 + 2a_{23} u_2 u_3 + 2a_{31} u_3 u_1$$

denjenigen Punkt des fünfdimensionalen projektiven Raumes  $R$  zu, dessen Koordinaten

$$(2) \quad a_{11} : a_{22} : a_{33} : a_{12} : a_{23} : a_{31}$$

sind. Der Punkt werde kurz als „Punkt  $f$ “ bezeichnet, und  $F$  sei das Gebiet derjenigen Punkte  $f$ , die den positiven Formen  $f$  entsprechen.

Wir bringen die Form  $f$  auf die Gestalt

$$(3) \quad f = p_{23} u_1^2 + p_{31} u_2^2 + p_{13} u_3^2 + p_{10} (u_2 - u_3)^2 + p_{30} (u_3 - u_1)^2 + p_{90} (u_1 - u_2)^2,$$

so daß

$$(4) \quad \begin{cases} p_{10} = -a_{23}, & p_{20} = -a_{31}, & p_{30} = -a_{13}, & p_{23} = a_{11} + a_{13} + a_{13}, \\ p_{31} = a_{22} + a_{23} + a_{21}, & p_{13} = a_{33} + a_{31} + a_{32} \end{cases}$$

zu setzen ist. Ist nun  $f$  eine positive Form, so heißt sie nach Selling „reduziert“, wenn die Werte  $p_{i\kappa}$  sämtlich nicht-negativ sind. Um diese Definition geometrisch zu formulieren, bemerken wir, daß der Punkt  $f$  ein gewisses Gebiet beschreibt, wenn in dem Ansatz (3) die sechs Koeffizienten  $p_{i\kappa}$  unabhängig voneinander alle nicht-negativen Werte durchlaufen. Dies Gebiet entsteht folgendermaßen: Wir betrachten die sechs Punkte, welche die Formen

$$(5) \quad u_1^2, u_2^2, u_3^2, (u_2 - u_3)^2, (u_3 - u_1)^2, (u_1 - u_2)^2$$

repräsentieren, und verbinden sie zu je fünf durch lineare Räume. Diese sechs Verbindungsräume begrenzen dann das in Rede stehende Gebiet, welches in der Folge als Gebiet  $F_0$  bezeichnet werde. Eine positive Form  $f$  ist demnach reduziert, wenn der Punkt  $f$  dem Gebiete  $F_0$  angehört.

Wir betrachten jetzt ferner eine unimodulare ganzzahlige Substitution

$$(6) \quad (S) \quad \begin{cases} u_1 = s_{11} u'_1 + s_{12} u'_2 + s_{13} u'_3, \\ u_2 = s_{21} u'_1 + s_{22} u'_2 + s_{23} u'_3, \\ u_3 = s_{31} u'_1 + s_{32} u'_2 + s_{33} u'_3, \end{cases}$$

durch welche die Form  $f$  in die äquivalente Form  $fS = f' = \sum_{i,\kappa}^{1,2,3} a'_{i\kappa} u'_i u'_\kappa$  übergehen möge.

Es mögen dann auch die beiden Punkte  $f$  und  $fS$  äquivalent heißen, und Kürze halber möge gesagt werden, der Punkt  $f = (a_{i\kappa})$  gehe vermöge der Substitution  $S$  in  $fS = f' = (a'_{i\kappa})$  über. Da die Zuordnung von  $f'$  zu  $f$  durch die Gleichungen

$$(7) \quad a'_{i\kappa} = \sum_{\alpha,\beta}^{1,2,3} a_{\alpha\beta} s_{\alpha i} s_{\beta \kappa} \quad (i, \kappa = 1, 2, 3)$$

vermittelt wird, so bedeutet dieselbe eine Kollineation des Raumes  $R_3$ . Durchläuft der Punkt  $f$  das Gebiet  $F_0$ , so durchläuft der zugeordnete Punkt  $fS$  ein Gebiet, welches mit  $F_0 S$  bezeichnet werde. Dieses entsteht aus den sechs den Formen (5) zugeordneten Punkten, also aus den Punkten



$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (s_{11} u_1 + s_{12} u_2 + s_{13} u_3)^2, \quad (s_{21} u_1 + s_{22} u_2 + s_{23} u_3)^2, \\ \quad (s_{31} u_1 + s_{32} u_2 + s_{33} u_3)^2, \\ [(s_{21} - s_{31}) u_1 + (s_{22} - s_{32}) u_2 + (s_{23} - s_{33}) u_3]^2, \\ [(s_{31} - s_{11}) u_1 + (s_{32} - s_{12}) u_2 + (s_{33} - s_{13}) u_3]^2, \\ [(s_{11} - s_{21}) u_1 + (s_{12} - s_{22}) u_2 + (s_{13} - s_{23}) u_3]^2, \end{array} \right.$$

genau so, wie das Gebiet  $F_0$  aus den Punkten (5).

Die Sellingsche Reduktionstheorie läßt sich nun, ihrem wesentlichen Inhalte nach, in den Satz zusammenfassen<sup>5)</sup>:

*Durchläuft  $S$  alle unimodularen ganzzahligen Substitutionen, so erhält man ihnen entsprechend unendlich viele Gebiete  $F_0 S$ , welche in ihrer Gesamtheit das Gebiet  $F$  einfach und lückenlos überdecken.*

Dabei ist zu beachten, daß das Gebiet  $F_0$  durch 24 Substitutionen  $S$ , nämlich durch diejenigen, welche die 6 Punkte (5) unter sich vertauschen, in sich übergeht. Infolgedessen entsteht jedes einzelne Gebiet  $F_0 S$ , wenn  $S$  alle Substitutionen (6) durchläuft, genau 24 mal, und in dem vorstehenden Satze sind natürlich nur die voneinander verschiedenen Gebiete  $F_0 S$  gemeint.

#### § 4.

##### Die Fundamentalformel.

Wir betrachten jetzt ein projektives Integral

$$(1) \quad J = \int_G f(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}) d\Omega$$

ausgedehnt über ein Gebiet  $G$  des Raumes  $R_6$ , welches ganz in dem Gebiete  $F$  enthalten ist. Da wir die integrierte Funktion  $f(a_{11}, \dots, a_{31})$  festhalten wollen, können wir den Wert des Integrals kurz durch  $J(G)$  andeuten. Um diesen Wert auch dem Vorzeichen nach festzulegen, denken wir uns ihn gemäß Formel (10) in § 1 berechnet, wobei in dieser Formel natürlich  $x_1, x_2, \dots, x_r$  durch  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31}$  zu ersetzen sind und die Linearformen  $l, l_1, l_2, \dots, l_n$  der letzteren Variablen so gewählt werden, daß der Linearraum  $l=0$  mit dem Gebiete  $F$  und also auch mit  $G$  keinen Punkt gemein hat. Da nun nach dem vorigen Paragraphen die Gebiete  $F_0 S$ , wo  $S$  alle ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 durchläuft, gerade das Gebiet  $F$  24 mal ausfüllen, so besteht die Fundamentalformel

$$(2) \quad \sum_S J(F_0 S) = 24 J(F).$$

<sup>5)</sup> [Vgl. A. Hurwitz: Über die Reduktion der binären quadratischen Formen, *Math. Annalen* 45, S. 85—117. Von der dort am Schluß angekündigten Abhandlung befinden sich einige Bruchstücke im Nachlaß von Hurwitz unter dem Titel: Über die Reduktion der ternären quadratischen Formen. A. S.]

## § 5.

## Darstellung der Klassenzahl.

Wir spezialisieren zunächst die Fundamentalformel auf den Fall, wo

$$(1) \quad f(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{31}) = \frac{1}{(\sum_{i,k} c_{ik} a_{ik})^3} \\ = \frac{1}{(c_{11} a_{11} + c_{22} a_{22} + c_{33} a_{33} + 2c_{12} a_{12} + 2c_{23} a_{23} + 2c_{31} a_{31})^3}$$

genommen wird, wobei die  $c_{ik}$  so zu wählen sind, daß

$$(2) \quad \varphi(u_1, u_2, u_3) = c_{11} u_1^2 + c_{22} u_2^2 + c_{33} u_3^2 + 2c_{12} u_1 u_2 + 2c_{23} u_2 u_3 + 2c_{31} u_3 u_1$$

eine positive Form ist, deren Determinante mit

$$(3) \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werde. Der Wert von  $J(\mathcal{G})$  stellt dann das Volumen von  $\mathcal{G}$  bezüglich der Linearform  $\sum_{i,k} c_{ik} a_{ik}$  vor. Nach § 2, Formel (38) und (41) wird nun

$$(4) \quad J(F) = \frac{C_2}{D^3} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{240} \cdot \frac{1}{D^2}.$$

Ferner kommt nach (19) in § 2

$$(5) \quad J(F_0 S) = \frac{1}{5!} \cdot l(1) l(2) \dots l(6),$$

wobei die rechter Hand auftretenden Zeichen folgende Bedeutung haben. Die Eckpunkte des Gebietes  $F_0 S$  sind die sechs Punkte (8) in § 3, also die Punkte mit den Koordinaten

$$(6) \quad s_{11}^2, s_{12}^2, s_{13}^2, \quad s_{11} s_{12}, \quad s_{12} s_{13}, \quad s_{13} s_{11}, \quad \text{usw.}$$

Es ist nun  $\delta$  die Determinante 6. Grades gebildet aus diesen Koordinaten, also  $\delta = 1$ .

Ferner ist  $l(i)$  der Wert der Linearform  $\sum_{i,k} c_{ik} a_{ik}$  für den  $i$ -ten Eckpunkt des Gebietes  $F_0 S$ , also

$$(7) \quad \begin{cases} l(1) = \varphi(s_{11}, s_{12}, s_{13}), & l(2) = \varphi(s_{31}, s_{32}, s_{33}), \\ l(3) = \varphi(s_{31}, s_{32}, s_{33}), & l(4) = \varphi(s_{21} - s_{31}, s_{22} - s_{32}, s_{23} - s_{33}), \text{ usw.} \end{cases}$$

Die Werte  $l(i)$  können wir noch in anderer Weise darstellen. Es sei nämlich  $S'$  die transponierte (konjugierte) Substitution zu  $S$  und

$$(8) \quad \varphi S' = \varphi(s_{11} u_1 + s_{21} u_2 + s_{31} u_3, s_{12} u_1 + s_{22} u_2 + s_{32} u_3, s_{13} u_1 + s_{23} u_2 + s_{33} u_3) \\ = C_{11} u_1^2 + C_{22} u_2^2 + C_{33} u_3^2 + 2C_{12} u_1 u_2 + 2C_{23} u_2 u_3 + 2C_{31} u_3 u_1$$

gesetzt.

Für  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  kommt dann  $l(1) = C_{11}$  und analog

$$(9) \quad l(1) = C_{11}, \quad l(2) = C_{22}, \quad l(3) = C_{33}, \quad l(4) = C_{22} + C_{33} - 2C_{23}, \\ l(5) = C_{33} + C_{11} - 2C_{31}, \quad l(6) = C_{11} + C_{22} - 2C_{12}.$$

Nun ist noch zu beachten, daß  $S'$  gleichzeitig mit  $S$  alle ganzzahligen unimodularen Substitutionen durchläuft und folglich  $\varphi S'$  die Klasse der zu  $\varphi$  äquivalenten Formen, wobei die einzelne Form der Klasse ersichtlich  $\mu$ -mal auftreten wird, wenn  $\mu$  angibt, wie viele Substitutionen die Form  $\varphi$  oder irgendeine andere Form der Klasse in sich zuläßt.

Demnach liefert nun die Fundamentalformel die Gleichung

$$(10) \quad \frac{12\pi^2}{D^2} \cdot \frac{1}{\mu} = \sum \frac{1}{C_{11}C_{22}C_{33}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12})(C_{22} + C_{33} - 2C_{23})(C_{33} + C_{11} - 2C_{31})},$$

wobei die Summe auszudehnen ist über die Formen (8) einer Klasse untereinander äquivalenten Formen der Determinante  $D$ . Die Zahl  $\mu$ , welche angibt, wie viele Substitutionen die einzelne Form der betrachteten Klasse in sich zuläßt, ist im allgemeinen gleich 1 und kann überhaupt nur die Werte

$$\mu = 1, 2, 4, 6, 8, 12, 24$$

annehmen. Den reziproken Wert von  $\mu$  nennt Eisenstein die Dichtigkeit der Klasse; ich werde den Wert  $\frac{1}{\mu}$  hier als „Gewicht“ der Klasse bezeichnen.

Es sei jetzt  $D$  speziell eine ganze Zahl und es werde die Gleichung (10) für jede einzelne Klasse von ganzzahligen ternären Formen der Determinante  $D$ , deren Anzahl bekanntlich endlich ist, gebildet und alle so entstehenden Gleichungen addiert.

Es entsteht so, mit Einführung neuer Bezeichnungen, die Gleichung:

$$(11) \quad \frac{12\pi^2}{D^2} H(D) = \sum_{abc} \frac{1}{abc(a+b-2c')(b+c-2a')(c+a-2b')},$$

wobei nun

$$(12) \quad H(D) = \sum_{\mu} \frac{1}{\mu}$$

die Anzahl der Klassen positiver quadratischer ganzzahliger Formen der Determinante  $D$  bedeutet, jede Klasse mit ihrem Gewichte gezählt, und die Summation auf der rechten Seite der Gleichung (11) über die sämtlichen Formen  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ a', b', c' \end{pmatrix}$  auszudehnen ist. Die Summationsbuchstaben  $a, b, c, a', b', c'$  haben also alle Systeme ganzzahliger Werte zu durchlaufen, welche den Bedingungen

$$(13) \quad \begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = D \quad a > 0, \quad ab - c'^2 > 0$$

genügen, die die positiven Formen der Determinante  $D$  charakterisieren.

## § 6.

## Allgemeine Darstellung der Klassenzahl.

Wir wollen nun die Fundamentalformel (2) § 4 auf das Integral

$$(1) \quad J = \int \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \frac{d\Omega}{(\sum c_{ik} a_{ik})^{s+6}}$$

anwenden, wobei  $s$  eine nicht negative Zahl bedeutet. Ist  $G$  das Integrationsgebiet, so möge wiederum  $J(G)$  den Wert des Integrals bezeichnen.

Betrachten wir allgemein das Integral

$$(1') \quad J(G) = \int_G \frac{|a_{ik}|^s d\Omega}{(\sum c_{ik} a_{ik})^{ns+m}} \quad \left(m = \frac{n(n+1)}{2}\right),$$

ausgedehnt über ein Gebiet  $G$  des Raumes  $(a_{11} : a_{22} : \dots : a_{n-1,n})$  von  $(m-1)$  Dimensionen, so können wir, wenn  $G$  mit dem Gebiete  $F$  der positiven Formen zusammenfällt, den Wert des Integrals nach derselben Methode bestimmen, wie es im Falle  $s=0$  im § 2 geschehen ist. Die Substitution (29) daselbst ergibt sofort

$$J(F) = \pm \int_F \frac{|a'_{ik}|^s d\Omega'}{[x(a'_{11} + a'_{22} + \dots + a'_{n,n})]^{ns+m}}$$

und also in Rücksicht auf (28) § 2:

$$(2) \quad J(F) = \frac{c_n}{|c_{ik}|^{s+\frac{n+1}{2}}},$$

wobei die numerische Konstante  $c_n$  durch

$$(3) \quad c_n = \int_F \frac{|a_{ik}|^s d\Omega}{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{n,n})^{ns+m}} \quad \left(m = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

definiert ist. Die Berechnung von  $c_n$  läßt sich auf demselben Wege bewerkstelligen wie die der Konstanten  $C_n$  in § 2. Es ergibt sich so:

$$(4) \quad c_n = (\sqrt{\pi})^{\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma\left(s + \frac{2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(s + \frac{8}{2}\right) \dots \Gamma\left(s + \frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(ns + \frac{n(n+1)}{2}\right)},$$

welcher Wert, wie es sein muß, für  $s=0$  in  $C_n$  übergeht. Andererseits berechnen wir das Integral

$$(5) \quad J = \int \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_r) d\Omega}{(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n)^{s+r}},$$

unter  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  eine homogene ganze Funktion  $r$ -ten Grades verstanden für dasjenige Simplexgebiet mit den Ecken

$$(6) \quad x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

welches mit dem linearen Raume

$$(7) \quad l = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r = 0$$

keinen Punkt gemeinsam hat.

Zur Abkürzung sei

$$(8) \quad l_i = c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \dots + c_r x_r^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

gesetzt. Die Substitution

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \frac{x_1^{(1)}}{l_1} + y_2 \frac{x_1^{(2)}}{l_2} + \dots + y_r \frac{x_1^{(r)}}{l_r}, \\ \vdots \\ x_r = y_1 \frac{x_r^{(1)}}{l_1} + y_2 \frac{x_r^{(2)}}{l_2} + \dots + y_r \frac{x_r^{(r)}}{l_r}, \end{cases}$$

durch welche

$$(10) \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r = y_1 + y_2 + \dots + y_r$$

wird, führt das Simplexgebiet in dasjenige des Raumes  $(y_1 : y_2 : \dots : y_r)$  über, welches durch die Ecken  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$  bestimmt, also von den Ebenen  $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_r = 0$  begrenzt wird und welches keinen Punkt mit  $y_1 + y_2 + \dots + y_r = 0$  gemein hat. Dieses Gebiet ist offenbar dadurch charakterisiert, daß für seine Punkte  $\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_r}{y_1}$  positiv sind. Wir erhalten also alle Punkte dieses Gebietes, indem wir  $y_1 = 1$  setzen und  $y_2, \dots, y_r$  alle positiven Werte durchlaufen lassen.

Somit kommt für das Integral (5)

$$(11) \quad J = \Delta \int_{y_i=0}^{\infty} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_r) dy_2 dy_3 \dots dy_r}{(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_r)^{\kappa+r}},$$

wobei  $\Delta$  die Determinante der Substitution (9), also

$$(12) \quad \Delta = \frac{|x_i^{(\kappa)}|}{l_1 l_2 \dots l_r} \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, r)$$

ist, und für  $x_1, x_2, \dots, x_r$  die Ausdrücke (9), nachdem in denselben  $y_1 = 1$  gesetzt ist, einzutragen sind. Die Entwicklung von  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  nach Potenzen von  $y_1, y_2, \dots, y_r$  sei nun

$$(13) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{a_1 + a_2 + \dots + a_r = \kappa} C_{a_1, a_2, \dots, a_r} \frac{y_1^{a_1}}{l_1^{a_1}} \frac{y_2^{a_2}}{l_2^{a_2}} \dots \frac{y_r^{a_r}}{l_r^{a_r}},$$

wobei die Koeffizienten  $C_{a_1, a_2, \dots, a_r}$  noch die  $x^{(n)}$  enthalten. Dann setzt sich das Integral in (11) aus solchen der Form

$$(14) \quad \int_0^{\infty} \frac{y_2^{a_2} \dots y_r^{a_r} dy_2 dy_3 \dots dy_r}{(1 + y_2 + y_3 + \dots + y_r)^{n+r}}$$

zusammen. Die Integrationen sind vermöge der Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{y^p dy}{(a+y)^q} = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q-p+1)}{\Gamma(q)} \frac{1}{a^{q-p+1}}$$

leicht ausführbar, und es ergibt sich so für das Integral (14) der Wert

$$\frac{1}{\Gamma(n+r)} \cdot \Gamma(\alpha_1+1) \cdot \Gamma(\alpha_2+1) \dots \Gamma(\alpha_r+1).$$

Demnach kommt für das Integral (5)

$$(15) \quad J = \frac{\Delta}{\Gamma(n+r)} \sum C_{a_1, a_2, \dots, a_r} \frac{\alpha_1!}{l_1^{a_1}} \frac{\alpha_2!}{l_2^{a_2}} \dots \frac{\alpha_r!}{l_r^{a_r}},$$

wobei  $\Delta$  durch (12) und die Koeffizienten  $C_{a_1, a_2, \dots, a_r}$  durch (13) bestimmt sind.

Im Falle  $n=3$  findet sich nun für das Integral (1) aus (2) und (4):

$$J(F) = (\sqrt{\pi})^3 \frac{\Gamma(s+1) \Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right) \Gamma(s+2)}{\Gamma(3s+6)} \cdot \frac{1}{D^{s+2}},$$

oder, nach leichter Umformung

$$(16) \quad J(F) = \frac{(s+1)! (2s+1)!}{2^{2s+1} (3s+5)!} \cdot \frac{\pi^3}{D^{s+2}},$$

wobei  $D$  die Determinante der ternären Form

$$(17) \quad \varphi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i, \kappa}^{1, 2, 3} c_{i\kappa} u_i u_\kappa$$

bedeutet.

Um für dasselbe Integral (1) den Wert von  $J(F_0 S)$  zu berechnen, müssen wir beachten, daß  $F_0 S$  das Simplexgebiet mit den Punkten (8) in § 3 als Ecken vorstellt, welches mit dem linearen Raume  $\sum_{i, \kappa}^{1, 2, 3} c_{i\kappa} a_{i\kappa} = 0$  keinen Punkt gemein hat. Nach Formel (15) kommt demnach

$$J(F_0 S) = \frac{\Delta}{\Gamma(3s+6)} \sum C_{a_1, a_2, \dots, a_6} \frac{\alpha_1!}{l_1^{a_1}} \frac{\alpha_2!}{l_2^{a_2}} \dots \frac{\alpha_6!}{l_6^{a_6}},$$

wobei  $l_1, l_2, \dots, l_6$  durch die Gleichungen (7) oder (9) in § 5 bestimmt

sind,  $\Delta$  nach (12) den Wert  $\frac{1}{l_1 l_2 \dots l_6}$  besitzt und die Koeffizienten  $C_{a_1, a_2, \dots, a_6}$  folgendermaßen entstehen. Wir setzen in

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{i\kappa} = y_1 a_{i\kappa}^{(1)} + y_2 a_{i\kappa}^{(2)} + \dots + y_6 a_{i\kappa}^{(6)},$$

wo  $a_{i\kappa}^{(1)}, a_{i\kappa}^{(2)}, \dots, a_{i\kappa}^{(6)}$  bzw. die Koordinaten der Punkte (8) in § 3 bedeuten, und entwickeln dann nach Potenzen von  $y_1, y_2, \dots, y_6$ . Diese Entwicklung lautet dann

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{33} \end{vmatrix} = \sum C_{a_1, a_2, \dots, a_6} y_1^{a_1} \dots y_6^{a_6}.$$

Nun wird  $|a_{i\kappa}|$  die Determinante der Form

$$y_1 \sum a_{i\kappa}^{(1)} u_i u_\kappa + \dots + y_6 \sum a_{i\kappa}^{(6)} u_i u_\kappa = y_1 (s_{11} u_1 + s_{12} u_2 + s_{13} u_3)^2 + y_2 (s_{21} u_1 + s_{22} u_2 + s_{23} u_3)^2 + \dots + y_6 ((s_{11} - s_{21}) u_1 + \dots)^2,$$

die der Form

$$y_1 u_1^2 + y_2 u_2^2 + y_3 u_3^2 + y_4 (u_2 - u_3)^2 + y_5 (u_3 - u_1)^2 + y_6 (u_1 - u_2)^2$$

äquivalent ist.

Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 + y_6 + y_6 & -y_6 & -y_6 \\ -y_6 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_4 \\ -y_6 & -y_4 & y_3 + y_4 + y_5 \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung der letzteren Determinante, die mit  $\psi(y_1, y_2, \dots, y_6)$  bezeichnet werde, liefert

$$(18) \quad \psi(y_1, y_2, \dots, y_6) = y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 (y_4 + y_5) + y_2 y_3 (y_5 + y_6) + y_3 y_1 (y_6 + y_4) + (y_1 + y_2 + y_3) \cdot (y_4 y_5 + y_5 y_6 + y_4 y_1).$$

Daher sind die Koeffizienten  $C_{a_1, a_2, \dots, a_6}$  durch die Gleichung

$$(19) \quad [\psi(y_1, y_2, \dots, y_6)]^s = \sum C_{a_1, a_2, \dots, a_6} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_6^{a_6}$$

bestimmt. Demnach kommt schließlich

$$(20) \quad J(F_0 S) = \frac{1}{(5s+5)!} \sum C_{a_1, a_2, \dots, a_6} \frac{\alpha_1!}{C_{11}^{\alpha_1+1}} \cdot \frac{\alpha_2!}{C_{22}^{\alpha_2+1}} \cdot \frac{\alpha_3!}{C_{33}^{\alpha_3+1}} \cdot \frac{\alpha_4!}{(C_{21} + C_{33} - 2C_{23})^{\alpha_4+1}} \cdot \frac{\alpha_5!}{(C_{33} + C_{11} - 2C_{31})^{\alpha_5+1}} \cdot \frac{\alpha_6!}{(C_{11} + C_{22} - 2C_{12})^{\alpha_6+1}}.$$

Wir tragen nun die Werte (16) und (20) in die Fundamentalformel (2) § 4 ein. Das Resultat läßt sich dann übersichtlich folgendermaßen formulieren:

*Es durchlaufe*

$$(21) \quad \Phi \equiv a u_1^2 + b u_2^2 + c u_3^2 + 2a' u_2 u_3 + 2b' u_3 u_1 + 2c' u_1 u_2 \equiv \begin{pmatrix} a, b, c \\ a', b', c' \end{pmatrix}$$

die sämtlichen Formen einer Klasse positiver ternärer Formen der Determinante  $D$ . Zur Abkürzung<sup>6)</sup> werde ferner

$$(22) \quad \sum a^{\alpha_1+1} b^{\alpha_2+1} c^{\alpha_3+1} (b+c-2a')^{\alpha_4+1} (c+a-2b')^{\alpha_5+1} (a+b-2c')^{\alpha_6+1} \\ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \end{bmatrix}$$

gesetzt, unter  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  nicht negative Zahlen verstanden. Dann ist:

$$(23) \quad \frac{(s+1)!(2s+1)!}{2^{2s}} \cdot \frac{12\pi^2}{D^{s+2}} \cdot \frac{1}{u} \\ = \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_6!$$

wobei die Koeffizienten  $C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6}$  positive ganze Zahlen bezeichnen, die durch die Gleichung (19) bestimmt sind. Die Zahl  $u$  bedeutet die Anzahl der unimodularen Substitutionen, die die einzelne Form (21) der Klasse in sich besitzt.

Im Falle  $s=0$  reduziert sich die Gleichung (23) auf

$$\frac{12\pi^2}{D^2} \cdot \frac{1}{u} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

in Übereinstimmung mit (10) in § 5.

Von den Summen (22) sind immer gewisse, verschiedenen Systemen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  entsprechende, einander gleich, wie man folgendermaßen erkennt. Wenn die Form  $\Phi$  die sämtlichen Formen einer Klasse durchläuft, so wird auch die Form  $\Phi S$  es tun, unter  $S$  irgendeine unimodulare ganzzahlige Substitution verstanden.

Es ist nun, wenn  $S = \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ \alpha'', \beta'', \gamma'' \end{pmatrix}$  gesetzt wird,

$$\Phi S = \Phi(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, \alpha' u_1 + \beta' u_2 + \gamma' u_3, \alpha'' u_1 + \beta'' u_2 + \gamma'' u_3),$$

und es gehen daher, wenn  $\Phi$  durch  $\Phi S$  ersetzt wird,

$$a = \Phi(1, 0, 0), \quad b = \Phi(0, 1, 0), \quad c = \Phi(0, 0, 1),$$

$$a_1 = \Phi(0, 1, -1) = b + c - 2a', \quad b_1 = \Phi(1, 0, -1), \quad c_1 = \Phi(1, -1, 0)$$

<sup>6)</sup> [Die zweite Abkürzung ist von Hurwitz nachträglich eingefügt worden. A. S.]



über in:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \Phi(\alpha, \alpha', \alpha''), & \bar{b} &= \Phi(\beta, \beta', \beta''), \\ \bar{a}_1 &= \Phi(\beta - \gamma, \beta' - \gamma', \beta'' - \gamma''), & \bar{b}_1 &= \Phi(\gamma - \alpha, \gamma' - \alpha', \gamma'' - \alpha''), \\ \bar{c} &= \Phi(\gamma, \gamma', \gamma''), \\ \bar{c}_1 &= \Phi(\alpha - \beta, \alpha' - \beta', \alpha'' - \beta'').\end{aligned}$$

Sobald also das System

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \\ \beta - \gamma, & \beta' - \gamma', & \beta'' - \gamma'' \\ \gamma - \alpha, & \gamma' - \alpha', & \gamma'' - \alpha'' \\ \alpha - \beta, & \alpha' - \beta', & \alpha'' - \beta'' \end{pmatrix}$$

abgesehen von der Reihenfolge der Horizontalreihen, mit dem System

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0, & 0 \\ 0, & \pm 1, & 0 \\ 0, & 0, & \pm 1 \\ 0, & \pm 1, & \mp 1 \\ \pm 1, & 0, & \mp 1 \\ \pm 1, & \mp 1, & 0 \end{pmatrix}$$

übereinstimmt, werden daher  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{b}_1$ ,  $\bar{c}_1$  eine Permutation von  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  bilden. Es gibt nun 24 Substitutionen  $S$  von dieser Beschaffenheit, nämlich diejenigen, für welche die Kollineation

$$\begin{aligned}u_1 &= \alpha u'_1 + \alpha' u'_2 + \alpha'' u'_3, \\ u_2 &= \beta u'_1 + \beta' u'_2 + \beta'' u'_3, \\ u_3 &= \gamma u'_1 + \gamma' u'_2 + \gamma'' u'_3\end{aligned}$$

die Punkte  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, -1)$ ,  $(1, 0, -1)$ ,  $(1, -1, 0)$  untereinander vertauscht. Diese Punkte sind die sechs Durchschnittspunkte der Geraden

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

und es gibt genau 24 Kollineationen, die diese vier Geraden auf alle möglichen Weisen vertauschen.

Es genügt, diejenigen Kollineationen zu betrachten, die

$$u_1 = 0 \text{ mit } u_4 = 0 \text{ vertauscht, } u_3 = 0, u_2 = 0 \text{ fest läßt,}$$

ferner

$$u_2 = 0 \text{ mit } u_4 = 0 \text{ vertauscht, } u_1 = 0, u_3 = 0 \text{ fest läßt,}$$

endlich

$u_3 = 0$  mit  $u_4 = 0$  vertauscht,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  fest läßt.

Denn aus diesen drei Kollineationen lassen sich alle übrigen zusammensetzen.

Da

$$\begin{aligned}\Phi(u_1, u_2, u_3) &= a u_1^2 + b u_2^2 + c u_3^2 + (b + c - a_1) u_1 u_2 + (c + a - b_1) u_2 u_3 \\ &\quad + (a + b - c_1) u_1 u_3 \\ &= -a u_1 u_4 - b u_2 u_4 - c u_3 u_4 - a_1 u_2 u_3 - b_1 u_3 u_1 - c_1 u_1 u_2,\end{aligned}$$

wobei  $u_4 = -(u_1 + u_2 + u_3)$  zu setzen ist, oder also  $u_4$  durch

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

bestimmt ist, so entsprechen jenen Kollineationen die Vertauschungen

$$(a)(a_1)(bc_1)(cb_1), \quad (b)(b_1)(ca_1)(ac_1), \quad (c)(c_1)(ab_1)(ba_1).$$

Demnach wird z. B.

$$\sum a^{a_1+1} b^{a_2+1} c^{a_3+1} a_1^{a_4+1} b_1^{a_5+1} c_1^{a_6+1} = \sum a^{a_1+1} c_1^{a_2+1} b_1^{a_3+1} a_1^{a_4+1} c^{a_5+1} b^{a_6+1},$$

d. h.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_5 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_6 \end{bmatrix}$$

und ebenso

$$= \begin{bmatrix} \alpha_5 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_6 \end{bmatrix}.$$

Im Falle  $s = 1$ , sind gemäß (19) und (18) die Koeffizienten  $C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}$  sämtlich gleich Null, bis auf die Koeffizienten  $C_{111000}, C_{110100}, \dots$ , die den einzelnen Gliedern von  $\psi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  entsprechen, welche den Wert 1 besitzen.

Es kommen daher in der Summe (23) nur die Summen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

vor, von welchen den vorstehenden Gleichungen für diese Summen

$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$  entsprechend sich 4 auf  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  und die übrigen 12 auf  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  reduzieren. Somit kommt für  $s = 1$

$$(24) \quad \frac{9\pi^3}{D^3} \frac{1}{\mu} = \sum \frac{1}{a^2 b^2 c^2 a_1 b_1 c_1} + 3 \sum \frac{1}{a^2 b^2 c a_1^2 b_1 c_1},$$

wo  $a_1, b_1, c_1$  zur Abkürzung für  $b + c - 2a'$ ,  $c + a - 2b'$ ,  $a + b - 2c'$  stehen und die Summationen über die sämtlichen positiven ternären Formen der Determinante  $D$

$$a u_1^2 + b u_2^2 + c u_3^2 + 2a' u_2 u_3 + \dots$$

die einer bestimmten, übrigens aber beliebig gewählten Formenklasse angehören, zu erstrecken sind.

Durch Summierung über die Klassen ganzzahliger Formen der Determinante  $D$ , kommt

$$\frac{9\pi^2}{D^3} H(D) = \sum \frac{1}{a^2 b^2 c^2 a_1 b_1 c_1} + 3 \sum \frac{1}{a^2 b^2 c a_1^2 b_1 c_1},$$

wo die Summation über alle positiven ganzzahligen Wertsysteme  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  auszudehnen ist, für welche

$au_1^2 + bu_2^2 + cu_3^2 + (b+c-a_1)u_2u_3 + (c+a-b_1)u_3u_1 + (a+b-c_1)u_1u_2$   
eine positive Form der Determinante  $D$  ist.

(Eingegangen am 4. 1. 1922.)