

LO SPOSTAMENTO DEL PERIELIO DI MERCURIO

E LA DEVIAZIONE DEI RAGGI LUMINOSI

secondo la teoria di Einstein.

NOTA DI ATTILIO PALATINI.

Prefazione.

La relatività generale ¹⁾ sorta nel pensiero di Einstein per l'amplificazione geniale del concetto relativistico si è imposta all'attenzione di tutti gli studiosi dopo che ha dimostrato la sua fecondità con la spiegazione dello spostamento secolare del perielio di Mercurio.

Questo risultato fu ottenuto la prima volta da Einstein ²⁾ mediante l'integrazione approssimata delle sue equazioni gravitazionali. Successivamente Schwarzschild ³⁾ e poi Hilbert ⁴⁾ hanno dato di queste equazioni una integrazione rigorosa, nel caso di un campo gravitazionale simmetrico attorno ad un centro, da identificarsi col campo di attrazione solare ⁵⁾.

¹⁾ L'idea direttiva e l'impostazione matematica della relatività generale è richiamata nella Nota di T. Levi Civita, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei V. XXVI, serie 5^a, 1° sem. 1917, pp. 381-391].

²⁾ A. Einstein, *Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*, [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1915, pp. 831-839].

³⁾ K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1916 pp. 189-196].

⁴⁾ H. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik, (Zweite Mitteilung)*, [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1915, seduta del 20 novembre 1915].

⁵⁾ In relazione al presente lavoro vedi pure: W. de Sitter. *On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences*, (First paper),

Noi, nella presente comunicazione, ritorniamo ancora una volta su questo problema, coll'intendimento di esporne la soluzione nel modo più elementare possibile, evitando soprattutto ogni calcolo laborioso.

La natura del nostro problema ci consentirà di non far capo direttamente alle equazioni di Einstein propriamente dette (aventi carattere invariantivo rispetto ad un ds^2 quadridimensionale), bensì ad una loro forma particolare, valida in condizione statiche, assegnata dal Levi-Civita ⁶⁾. Queste nuove equazioni hanno carattere invariantivo rispetto al dl^2 dello spazio ambiente tridimensionale e permettono quindi di seguire lo svolgimento del problema senza abbandonare i concetti e le formule che ci sono abituali, facilitando inoltre l'interpretazione geometrica e meccanica dei vari passaggi.

L'importanza della celebre spiegazione del fenomeno e i raggiunti perfezionamenti di metodo giustifichino la presentazione di questa Nota anche se in essa non compariscono risultati essenzialmente nuovi.

Come sarà specificato in seguito, la risoluzione del problema, che vogliamo trattare, richiede lo studio di questi tre punti principali:

- 1.° — Caratterizzazione della metrica più generale di uno spazio S simmetrico attorno ad un punto (oggetto del § II).
- 2.° — Determinazione completa di questa metrica in base alle equazioni di Einstein (oggetto del § III).
- 3.° — Moto di un punto nello spazio S (oggetto del § IV).

In ordine alla prima questione ci piace rilevare, che essa era già stata esaurientemente risolta dal Levi-Civita ⁷⁾ fino

[*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1916, V. LXXVI, n. 9, pp. 699-728].

J. Droste, *The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of particle in that field* [*Proceedings of the Academy of Sciences at Amsterdam*, 1916, V. XIX, n. 1, pp. 197-215].

⁶⁾ T. Levi-Civita, *Statica einsteiniana*, [*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, V. XXVI, serie 5^a, 1° sem. 1917, pp. 458-470].

⁷⁾ T. Levi-Civita, *Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà*, [*Rendiconti dei Lincei*, V. V°, serie 5^a, 2° sem. 1896, pp. 164-171].

dal 1896, in uno studio sulla dinamica dei sistemi olonomi in relazione ad alcune caratteristiche gruppali.

In fine abbiamo aggiunto un paragrafo diretto ad illustrare, collo stesso criterio di far valere quanto possibile i concetti e i risultati della meccanica classica, un'altra importante conseguenza della nuova teoria di Einstein. Vogliamo alludere all'azione che subisce un raggio di luce in un campo gravitazionale, azione che ha per effetto un incurvamento del raggio.

Nel caso particolarmente interessante di un campo gravitazionale dovuto ad un'unica massa (p. es. campo solare), un noto teorema di equivalenza fra traiettorie dinamiche, permette tosto di riportarsi alle traiettorie iperboliche del problema dei due corpi, con che l'angolo degli asintoti misura senz'altro la deviazione asintotica di un generico raggio.

Se il fenomeno esiste, dalla misura di questo angolo — molto piccolo invero (approssimativamente eguale a $1''.75$) ma pur tuttavia accessibile all'osservazione diretta in condizioni favorevoli (p. es. durante un'eclissi solare ^{*)}) — si attende una nuova conferma della validità delle ipotesi che permisero ad Einstein di innalzare l'edificio della relatività generale.

§ I.

Premesse.

1. — Nella teoria della relatività generale di Einstein, la natura metrica dello spazio viene influenzata dai fenomeni fisici, che vi si svolgono. Le misure dello spazio e del tempo vengono poi conglobate nella forma differenziale quaternaria (non essenzialmente euclidea)

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,j}^3 g_{ij} dx_i dx_j ,$$

^{*)} Sul modo di verificare sperimentalmente il fenomeno cfr. G. Zappa, *Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein*, [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. V. XXVI, Serie 5.^a, 1.^o Sem. 1917, pp. 322-326].

rispetto alla quale le equazioni della meccanica devono avere carattere invariantivo.

La forma differenziale (1) non può esser data naturalmente a priori, ma viene definita, in ogni caso, dalla natura del fenomeno che si studia. I suoi coefficienti g_{ij} (funzioni dei parametri x) sono legati dalle 10 equazioni gravitazionali di Einstein, le quali sono atte a caratterizzare il corrispondente ds^2 .

Se ci limitiamo a studiare i fenomeni fisici in un campo statico, il ds^2 si presenta sotto la forma

$$(2) \quad ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2,$$

dove

$$dl^2 = \sum_{i,k}^3 a_{ik} dx_i dx_k$$

è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ambiente. La funzione V (che deve interpretarsi quale velocità della luce nello spazio fisico) e le a_{ik} vanno ritenute indipendenti dal tempo.

Nel caso statico, le equazioni gravitazionali di Einstein si riducono naturalmente a sette.

Recentemente il Levi-Civita ha assegnato a queste equazioni una forma invariantiva rispetto al dl^2 dello spazio ambiente, equazioni che qui riportiamo dovendo ad esse esplicitamente riferirci ⁹⁾:

$$(I) \quad \mathfrak{R} = \kappa \frac{T_{oo}}{V},$$

$$(II) \quad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_i V}{V} a_{ik} = -\kappa T_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

In queste equazioni: \mathfrak{R} è la curvatura media dello spazio ambiente; le α_{ik} sono i simboli di Ricci ¹⁰⁾; V_{ik} le derivate

⁹⁾ Levi-Civita, *l. c.* (6) p. 464.

¹⁰⁾ I simboli α_{ik} di Ricci sostituiscono con vantaggio i simboli $a_{rs, tu}$ di Riemann nelle varietà a tre dimensioni. La relazione formale è la seguente. Mediante le posizioni

$$\alpha^{(1)k} = a_{i+1 \ i+2, \ k+1 \ k+2} : a$$

seconde covarianti della funzione V ; T_{ik} il tensore energetico; κ la costante di Einstein $8\pi f/c^2$ (f costante di attrazione universale, c velocità della luce nello spazio euclideo).

Dalle (I) e (II) scende l'equazione [(14) della sopra citata Nota di Levi-Civita]

$$(3) \quad \frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{1}{2} \kappa \left(T + \frac{T_{oo}}{V^2} \right),$$

dove T è l'invariante lineare del sistema degli sforzi rispetto al dl^2 dello spazio ambiente.

2. — Avendo di mira lo studio del moto di un pianeta attorno al sole introdurremo le seguenti ipotesi:

a) la massa del pianeta è trascurabile di fronte a quella del sole,

b) il fenomeno è dovuto esclusivamente alla presenza della massa solare, e lo spazio è quindi supposto vuoto da qualsiasi altra massa e non soggetto ad alcuna azione od elettrica o magnetica,

c) l'influenza della massa solare va attenuandosi quando ci si allontana indefinitamente dal sole; all' ∞ lo spazio si può ritenere quindi euclideo.

Lo spazio fisico, che noi dovremo considerare, è dunque influenzato da un'unica massa localizzata in un punto e in ordine al nostro problema dovremo di conseguenza:

1.° — assegnare la natura metrica dello spazio fisico influenzato dall'unica massa concentrata in un suo punto;

2.° — studiare il moto di un punto in quello spazio.

(dove si ritengono equivalenti gli indici che differiscono tra loro per multipli di 3 ed α è il discriminante della forma quadratica dl^2) si definisce — per $n = 3$ — un sistema doppio controvariante. Le α_{ik} richiamate nel testo non sono altro che gli elementi del sistema covariante reciproco.

§ II.

**Caratterizzazione della più generale espressione
di un dl^2 simmetrico attorno ad un punto.**

1. — Per assegnare la metrica cercata noi sfrutteremo l'intuizione — debitamente precisandola — che lo spazio fisico risulta simmetrico attorno al punto O , nel quale si suppone localizzata la massa influenzante, il che fornisce una proprietà fondamentale della metrica in questione ¹¹⁾.

Sia S lo spazio fisico perturbato dalla presenza della massa ed S' lo spazio medesimo dal quale la massa sia stata sottratta. S' dovrà ritenersi euclideo: in esso indicheremo con O' il punto O dopo che la massa è stata tolta. Fra i due spazi S ed S' fissiamo la corrispondenza biunivoca, che nasce associando ad ogni punto P di S , il medesimo punto (vorrei dire « materiale » se non si trattasse di spazi privi di materia ponderabile) concepito come appartenente ad S' : nella quale accezione lo chiameremo P' .

I punti di S saranno riferiti ad un sistema di coordinate polari r, θ, φ col centro nel punto O' ed i punti di S al sistema di superficie coordinate, che rimane subordinato dalla suaccennata corrispondenza biunivoca. Come parametro delle famiglie di superficie $r = \text{cost.}$ ci sarà comodo assumere non proprio r , ma una sua conveniente funzione $R(r)$; lasceremo invece inalterati gli altri due parametri θ e φ .

2. — Per la corrispondenza biunivoca considerata segue, che ad ogni trasformazione fatta subire ai punti di S' corri-

¹¹⁾ Per essere precisi conviene aggiungere che, nella determinazione della metrica in questione, richiederemo come si fa ordinariamente in geometria differenziale, che siano soddisfatte, per i coefficienti del ds^2 , le proprietà qualitative necessarie alla validità dei ragionamenti. Con ciò non si esclude a priori che i detti coefficienti possano presentare, in qualche punto dello spazio, talune singolarità (nel senso della teoria delle funzioni), ma si esige soltanto — nel caso specifico — che anche in questi eventuali punti singolari, si possa parlare di geodetiche e di lunghezza (finita) di un arco di linea.

sponde una trasformazione dei punti di S : in particolare alle rotazioni di centro O' corrispondono delle trasformazioni che lasciano fermo O e che hanno carattere di movimento rigido.

Ne segue immediatamente questa importante proprietà: *Alle geodetiche uscenti da O' corrispondono geodetiche uscenti da O .* Infatti, sia g' una geodetica uscente da O' e sia g la linea corrispondente uscente da O . Consideriamo le ∞_1 rotazioni T' che hanno $O'P'$ per asse; ad esse fanno riscontro ∞^1 movimenti rigidi T nello spazio S , i quali lasciano fermi tutti i punti della linea g (e quelli soltanto).

Suppongasì ora che la geodetica OP sia una g^* diversa da g : per l'effetto dei movimenti T la g^* verrebbe ad occupare una semplice infinità di posizioni e segnerebbe sempre le stessa (minima) distanza fra i due punti O e P . Ciò risulta ovviamente dal carattere fondamentale dei movimenti considerati e l'assurdo a cui si giunge è evidente le quante volte si escluda che il punto P si trovi in una posizione singolare. Ne concludiamo dunque che la g è una geodetica. *c. d. d.*

Ai punti di eguale distanza geodetica da O' corrispondono così punti di eguale distanza geodetica da O ed abbiamo così il corollario: *alle sfere di centro O' fanno riscontro sfere di centro O .*

3. — Consideriamo ora una sfera Σ' di centro O' e la corrispondente sfera geodetica Σ di centro O e consideriamo poi la corrispondenza — subordinata da quella spaziale — fra i punti Q' di Σ' e i punti Q di Σ .

La corrispondenza fra Σ' e Σ è conforme.

Infatti, siano $d\sigma'$ e $d\sigma'_0$ due elementi lineari qualunque della sfera Σ' ; $d\sigma$ e $d\sigma_0$ i corrispondenti elementi di Σ .

Suppongasì dapprima che sia $d\sigma'/d\sigma'_0 = 1$. Allora esisterà una rotazione rigida T' di centro O' mediante la quale si potrà sovrapporre l'elemento $d\sigma'_0$ all'elemento $d\sigma'$: alla T' corrisponderà un movimento rigido T , il quale farà sovrapporre all'elemento $d\sigma$ l'elemento $d\sigma_0$. Ne consegue che se $d\sigma/d\sigma'_0 = 1$ è anche $d\sigma/d\sigma_0 = 1$.

Se $d\sigma'/d\sigma'_0 = m$ (con m numero intero) esiste una rotazione T' di centro O' che fa sovrapporre $d\sigma'_0$ alla m -esima

parte dell'elemento $d\sigma'$. Ad essa corrisponderà un movimento rigido T che farà sovrapporre $d\sigma_o$ alla emmesima parte di $d\sigma$, per cui si inferisce che è anche $d\sigma/d\sigma_o = m$.

Infine se $d\sigma'/d\sigma'_o = m/n$ (m/n numero frazionario razionale), oppure se $d\sigma'/d\sigma'_o = \alpha$ (con α numero incommensurabile), mediante ovvi ragionamenti classici si deduce che è pure $d\sigma/d\sigma_o = m/n$, o, rispettivamente, $d\sigma/d\sigma_o = \alpha$.

In ogni caso noi possiamo dunque affermare che

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma'_o} = \frac{d\sigma}{d\sigma_o} ,$$

ossia che il rapporto $d\sigma'/d\sigma$ è indipendente dall'elemento $d\sigma'$ prescelto.

Questa conclusione ci permette appunto di affermare che la corrispondenza tra Σ e Σ' (subordinata da quella spaziale tra S ed S') è una corrispondenza conforme e che il modulo della corrispondenza $d\sigma/d\sigma'$ è indipendente da Q ed è quindi funzione della sola r .

4. — Possiamo dunque porre

$$d\sigma = H(r) d\sigma' ;$$

e poichè notoriamente

$$d\sigma'^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) ,$$

risulterà

$$(4) \quad d\sigma^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) ,$$

avendo posto

$$H^2(r) \cdot r^2 = R^2(r) .$$

Dalla (4) si deduce intanto questa notevole interpretazione geometrica dal parametro R: ¹²⁾ $1/R^2$ è la curvatura (costante)

¹²⁾ cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, [Pisa, E. Spoerri, I I^a edizione, 1902] § 100.

delle sfere degli spazi S con un centro di simmetria (sfere col centro nel centro di simmetria) ¹³⁾.

5. — Se noi ora indichiamo con dg l'elemento lineare di una linea geodetica spiccata da O , il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S risulterà determinato da

$$dl^2 = dg^2 + d\sigma^2 .$$

E poichè dg dipende esclusivamente da R , possiamo porre

$$dg = A(R) dR$$

ed avremo di conseguenza, per la (4),

$$(5) \quad dl^2 = A^2 dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) .$$

La (5) rappresenta la cercata espressione di un dl^2 simmetrico attorno ad un punto.

§ III.

Caratterizzazione del ds^2 del nostro spazio fisico.

1. — L'elemento lineare dello spazio fisico, che ci interessa, sarà determinato dalla (2), completata nel senso che il dl^2 che vi comparisce deve ritenersi dato dalla (5).

Restano naturalmente incognite le funzioni A e V . Circa alla V possiamo aggiungere che essa dipende, per la simmetria dello spazio attorno ad O , dalla sola R . Le espressioni di A e V vanno desunte dalla integrazione delle equazioni gravitazionali

¹³⁾ Schwarzschild nell'assegnare la metrica del nostro spazio fisico introdusse per primo questo parametro R , ma per via puramente formale, senza poi determinarne il significato. E così fece successivamente Hilbert. Qui viene, per la prima volta, rilevato il preciso significato geometrico di R . Si tratta di una curvatura, ossia di un elemento di secondo ordine e ciò rende ragione del vantaggio offerto da questo parametro in confronto di altri (del primo ordine), che pure si potrebbero a priori ritenere convenienti, come la distanza geodetica ovvero il cammino ottico (quest'ultimo effettivamente adottato da Lorentz).

di Einstein. Trattandosi però di un fenomeno in un campo statico, noi potremo con vantaggio usufruire delle equazioni (I) e (II) di Levi-Civita. Nel caso presente — poichè si prescinde da ogni azione che non sia dovuta alla massa solare — sono nulle tutte le T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Dalle (3) segue tosto

$$\Delta_3 V = 0$$

e di conseguenza le (I) e (II) si semplificano come segue:

$$(6) \quad \mathfrak{N} = 0 ,$$

$$(7) \quad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 .$$

La (6) ci fornirà la conoscenza della funzione A e le (7) (assieme alla espressione di A) quella della V .

2. — La (6) esprime che è nulla la curvatura media dello spazio S . Ecco come si può ottenere l'espressione di \mathfrak{N} evitando ogni calcolo materiale.

Sia P un punto qualunque dello spazio S e si consideri la sfera Σ passante per esso. Poichè esistono ∞^3 movimenti rigidi che trasformano Σ in sè medesima, possiamo affermare — teorema dovuto al Ricci ⁴⁾ — che nel punto P le direzioni principali sono date dalla normale e da due qualsivogliano tangenti (ortogonali) a Σ , che passano per lo stesso punto e che le curvature riemanniane principali, di cui coincidono quelle coordinate alle due direzioni tangenziali, conservano lo stesso valore sopra ogni Σ . Indicheremo allora con ω_1 la curvatura riemanniana relativa alla superficie geodetica tangente alla sfera Σ in P ; con ω_2 ed $\omega_3 = \omega_2$ le curvature delle due superficie principali, normali alla precedente e che contengono la direzione della geodetica OP .

⁴⁾ Cfr. G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, [*Mathematische Annalen*, B. 54, 1901, pp. 125-201] § 6.

Per quanto precede possiamo mutare la (6) nella

$$(8) \quad \omega_1 + 2 \omega_2 = 0 .$$

3. — ω_2 si calcola immediatamente in base alla stessa definizione di curvatura secondo Riemann: essa non è altro che la curvatura della superficie (geodetica) luogo di tutte le geodetiche uscenti da P e appartenenti al fascio individuato dalla direzione della geodetica OP e da una qualunque direzione ad essa ortogonale.

Tale superficie geodetica è la $\varphi = \text{cost}$. Infatti è noto che le equazioni differenziali parametriche delle geodetiche (di una varietà di elemento lineare dl) coincidono con le equazioni di Lagrange, provenienti dalla forma differenziale $T = \frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt^2}$.

Ora nel nostro caso

$$T = \frac{1}{2} \left\{ A^2 \dot{R}^2 + R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right\}$$

(il punto sovrapposto indicando derivazione rispetto al parametro t) e quindi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 .$$

Dalla equazione di Lagrange per l'angolo φ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 ,$$

scende così una delle equazioni delle geodetiche sotto la forma

$$R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{cost} .$$

Da questa equazione ne consegue che se le geodetiche uscenti da P toccano inizialmente la superficie $\varphi = \text{cost}$ (con che si ha in P $\dot{\varphi} = 0$), $\dot{\varphi}$ si annulla sempre lungo le geodetiche stesse, le quali perciò appartengono alla detta superficie.

Per ottenere ora la curvatura della superficie $\varphi = \text{cost.}$, basterà determinare la curvatura della forma differenziale binaria

$$A^2 dR^2 + R^2 d\theta^2,$$

che esprime il quadrato dell'elemento lineare della detta superficie.

Otteniamo così ¹⁵⁾

$$(9) \quad \omega_2 = -\frac{1}{AR} \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{A} = -\frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{A} \right)^2.$$

Osservazione. — La proprietà rilevata poc' anzi per le superficie $\varphi = \text{cost.}$ si può enunciare dicendo che queste superficie sono geodetiche per ogni loro punto. Anzi non solo a tali superficie meridiane $\varphi = \text{cost.}$, ma, per la simmetria attorno ad O, la stessa proprietà di esser geodetiche compete a tutte le superficie, che corrispondono a piani euclidei passanti per il centro O'. Ne consegue che gli spazi S simmetrici attorno ad un punto O ammettono ∞^3 superficie geodetiche passanti tutte per O ¹⁶⁾.

4. — Per calcolare ora ω_1 usufuiremo della formula (37) a pagina 373 delle citate *Lezioni* del Bianchi, la quale formula, notando che il K del Bianchi altro non è che la curvatura $1/R^2$ delle sfere di centro O e che il K_0 è il nostro ω_1 , si può presentare sotto la forma

$$(10) \quad \omega_1 = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1 R_2},$$

¹⁵⁾ L. Bianchi, *l. c.* (12), form. (18), p. 93.

¹⁶⁾ Ciò si poteva rilevare anche dall'espressione del loro elemento lineare, il quale rientra, come sarebbe facile constatare, nel tipo generale caratteristico per gli spazi a tre dimensioni, che ammettono delle superficie geodetiche dipendenti da due parametri, assegnato da J. Hadamard [*Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, (*Bulletin de Sciences Mathématiques*, t. XXV, 1901, pp. 37-40)].

essendo R_1 ed R_2 i raggi principali di curvatura delle sfere stesse.

Se indichiamo ¹⁷⁾ con $d\sigma^2$ e χ la prima e la seconda forma fondamentale della sfera Σ passante per P , la curvatura di una linea geodetica di Σ è data dal rapporto $\chi/d\sigma^2$ ¹⁸⁾.

Il dl^2 dello spazio S ha, come sappiamo, la forma geodetica

$$dl^2 = dg^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

con

$$dg = A dR.$$

Il quadrato dell'elemento lineare della sfera Σ è invece

$$d\sigma^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

che rappresenta la prima forma fondamentale.

Si consideri ora la sfera geodetica infinitamente vicina attribuendo a g un incremento infinitesimo $\delta g = \varepsilon$ (con ε costante infinitesima): nel passaggio dalla prima alla seconda il $d\sigma^2$ subisce una variazione $\delta d\sigma^2$ data da

$$\delta d\sigma^2 = 2R\delta R(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \delta R \cdot \frac{2}{R} d\sigma^2;$$

ma

$$A\delta R = \delta g = \varepsilon,$$

per cui

$$\delta d\sigma^2 = \frac{2\varepsilon}{AR} d\sigma^2.$$

D'altra parte, avendo indicato con χ la seconda forma fondamentale, si ha ¹⁹⁾

$$\delta d\sigma^2 = -2\varepsilon\chi$$

¹⁷⁾ Le considerazioni che seguono sono tutte basate sul contenuto del § 164, pag. 357 delle citate *Lezioni* del Bianchi.

¹⁸⁾ L. Bianchi, *l. c.* (12) form. (33*) p. 366.

¹⁹⁾ L. Bianchi, *l. c.*, (12) form. (23), p. 359.

e così dal confronto di questa con la precedente segue tosto

$$\frac{\chi}{d\sigma^2} = -\frac{1}{AR}.$$

Poichè questo rapporto dipende dalla sola R , i raggi principali di curvatura della sfera Σ sono eguali tra loro e si ha quindi

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{A^2 R^2}.$$

La (10) diventa di conseguenza

$$(11) \quad \omega_1 = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{A^2 R^2} = \frac{1}{R^2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{A} \right)^2 \right\}.$$

5. — Sostituendo nella (8) i valori di ω_1 ed ω_2 trovati [formole (11) e (9) rispettivamente] si ha

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{A} \right)^2 = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{A} \right)^2 \right\},$$

da cui integrando e indicando con α una costante di integrazione

$$(12) \quad A^2 = \frac{1}{1 - \alpha/R}.$$

6. — Passiamo ora alla determinazione della funzione V , per la qual cosa ci serviranno, come fu detto, le (7).

Ricordiamo in primo luogo, che quando il $d\ell^2$ dello spazio ambiente è ridotto alla forma

$$d\ell^2 = \sum_i^3 H_i^2 dx_i^2,$$

se le conseguenze principali sono normali, come nel nostro caso, valgono per le α_{ik} del Ricci le forme canoniche

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad ; \quad \alpha_{ii} = \omega_i H_i^2.$$

Per il nostro dt^2 [form. (5)] si avrà:

$$13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ik} = 0 \ (i \neq k) \ ; \quad \alpha_{11} = A^2 \frac{\alpha}{R^3} \ ; \\ \alpha_{22} = -\frac{1}{2} R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{A} \right)^2 \ ; \quad \alpha_{33} = -\frac{1}{2} R \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{A} \right)^2 . \end{array} \right.$$

Per determinare ora l'espressione delle V_{ik} procediamo nel modo seguente.

Si consideri la funzione

$$f = \sum_1^3 V_i \dot{x}_i ,$$

risguardando le x_i come funzioni del parametro t , che verificano le equazioni delle geodetiche.

Per la $\frac{df}{dt}$ (sostituendo ad ogni \dot{x} il valore fornito dalle dette equazioni) si ha allora l'espressione ²⁰⁾

$$(18) \quad \frac{df}{dt} = \sum_1^3 \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k .$$

Prendiamo ora in particolare $x_1 = R$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \varphi$ ed

$$f = V' \dot{R} \ ;$$

si ha ovviamente

$$(15) \quad \frac{df}{dt} = V'' \dot{R}^2 + V' \ddot{R} \ .$$

Dalle equazioni delle geodetiche si può ricavare \ddot{R} espresso per le derivate prime di R , θ , φ : basta scrivere la equazione

²⁰⁾ Questa espressione si ottiene immediatamente dalla form. (2) del cap. V, del l. c. (14), nella quale formula si ponga $X^{(i)} = 0$ e si tenga inoltre conto della espressione che compete alle derivate seconde covarianti di una funzione.

di Lagrange relativa al parametro R , nella quale, come abbiamo notato al n. 3, si ponga $T = \frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt^2}$. Si ottiene immediatamente

$$\ddot{R}' = -\frac{A'}{A} \dot{R}^2 + \frac{R}{A^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

e la (15) diventa di conseguenza

$$\frac{df}{dt} = \left(V'' - \frac{V'A'}{A} \right) \dot{R}^2 + \frac{RV'}{A^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) .$$

Dal confronto di questa espressione con la (14) (siccome l'identità deve sussistere qualunque siano i valori iniziali — e quindi anche generici — delle x e delle \dot{x}) si ha

$$(16) \quad \begin{cases} V_{ik} = 0 \ (i \neq k) \ ; \ V_{11} = V'' - \frac{V'A'}{A} \ ; \\ V_{22} = \frac{RV'}{A^2} \ ; \ V_{33} = \frac{RV'}{A^2} \sin^2 \theta \ . \end{cases}$$

Ed ora tenendo presenti le (13) e (16), prendiamo a considerare le equazioni (7). Si constata, con tutta facilità, che sono identicamente soddisfatte quelle per cui si scelga i diverso da k e che l'equazione per $i = k = 3$ è identica a quella che si ottiene facendo $i = k = 2$. Restano così le due uniche equazioni

$$(17) \quad \alpha \frac{A^2}{R^3} + \frac{1}{V} \left(V'' - \frac{V'A'}{A} \right) = 0 \ ; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{A} \right)^2 = \frac{V'}{VA^3} .$$

Dalla seconda, mediante una quadratura, si ha

$$(18) \quad V^2 = \frac{c^2}{A^2}$$

(con c^2 costante di integrazione) ossia, per la (12),

$$(19) \quad V^2 = c^2 \left(1 - \alpha/R \right) .$$

Con questa espressione di V la prima delle (17) risulta identicamente soddisfatta.

Per l'ipotesi che l'intensità del campo fisico vada attenuandosi all' ∞ , ricordando poi il significato di V , dalla (19) si deduce che c si deve interpretare come la velocità della luce nello spazio euclideo.

7. — In conclusione di quanto precede possiamo affermare che il ds^2 del nostro spazio fisico è

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2 ,$$

con

$$dl^2 = A^2 dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) ,$$

$$A^2 = \frac{1}{1 - \alpha/R} \quad ; \quad V^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{R} \right)$$

ed α costante a priori arbitraria.

Osservazione. — L'espressione ricavata in questo § per il ds^2 di uno spazio simmetrico attorno ad un punto O (e che contiene una sola costante a priori indeterminata) è stata dedotta supponendo che la massa perturbante fosse schematicamente concentrata in O . Ma è facile convincersi che essa è valida, *nello spazio esterno alla massa potenziante*, anche se questa, invece di essere ridotta ad un punto, occupa un campo sferico di centro O , purchè la distribuzione, entro la sfera, soddisfi ancora alle condizioni di simmetria. Infatti l'espressione finale del nostro ds^2 , *in un generico punto esterno alla massa potenziante*, si deduce come necessaria conseguenza delle equazioni differenziali (6) e (7), associando ad esse unicamente condizioni di simmetria e di comportamento all'infinito. La natura del nucleo centrale influirebbe invece essenzialmente sul-

l'espressione del ds^2 nei punti interni, nei quali al posto delle (6) e (7) varrebbero più generalmente le (I) e (II) con le determinazioni delle T_{ik} , che convengono alle speciali condizioni dell'ambiente occupato dalla materia. Se questa si supponesse, in particolare, distribuita a strati concentrici e sottoposta a pressione normale, si dovrebbe ritenere

$$T_{00} = c^2 \mu ; \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = p ,$$

con μ (densità) e p (pressione) funzioni della sola R e

$$T_{ik} = 0 \quad \text{per } i \neq k .$$

§ IV.

Moto di un punto materiale.

1. — Secondo Einstein, le equazioni del moto di un punto materiale in uno spazio fisico, si compendiano nel principio variazionale

$$(20) \quad \delta \int ds = 0 \quad ,$$

qualunque sia il ds^2 quadridimensionale.

Posto $L = \sqrt{V^2 - v^2} \left(v^2 = \frac{dl'}{dt^2} \right)$, la (20) si scrive ²¹⁾

$$\delta \int L dt = 0$$

e mostra che le equazioni differenziali del moto rientrano nel tipo generale di Lagrange. Quando L non dipende esplicita-

²¹⁾ T. Levi-Civita, *l. c.*, (6), § 3, p. 464 e seg.

mente dal tempo t , come accade ogni qualvolta si tratta di fenomeni statici, si ha il noto integrale primo

$$(21) \quad \sum_1^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = V_0, \quad (V_0 \text{ costante})$$

la costante V_0 risultando necessariamente negativa e in valore assoluto maggiore di V per i moti che seguono con velocità $v < V$, che sono i soli che hanno interesse fisico ³⁾.

Sempre nel caso statico, le cose si specificano in modo più espressivo grazie a un teorema, dovuto al Levi-Civita, ³⁾ secondo il quale le traiettorie di un punto materiale coincidono con quelle di un ordinario problema meccanico conservativo, nel quale: la forza viva T^* è

$$T^* = \frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt^{*2}},$$

dove dl^2 è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S e t^* una variabile ausiliaria che funge da tempo; la funzione delle forze (limitandoci a considerare moti nei quali la velocità del punto è minore di V) è

$$W = \frac{c^4}{2} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_0^2} \right);$$

l'energia totale è nulla.

Le equazioni che reggono il moto del punto non sono dunque che le equazioni di Lagrange nelle quali la funzione lagrangiana è

$$L^* = T^* + W,$$

equazioni poi, che si compendiano nel principio variazionale

$$(22) \quad \delta \int \sqrt{2W} \, dl = 0.$$

²³⁾ T. Levi-Civita, *l. c.*, (6), p. 467.

²⁴⁾ T. Levi-Civita. *l. c.*, (6), p. 468.

2. — Prima di procedere dimostriamo che il dl^2 dello spazio ambiente si può presentare sotto la forma

$$dl^2 = H^2 d\ell'^2 ,$$

indicando con $d\ell'$ l'elemento lineare dello spazio euclideo S' (introdotto nel § II) e con H una funzione della sola r (raggio vettore di un punto nello spazio S').

A tal uopo basterà dimostrare che si possono determinare R ed r in modo che

$$A^2 dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = H^2(r) \{ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} ,$$

per la qual cosa basterà che sia

$$(23) \quad H \cdot r = R ,$$

$$H dr = A dR$$

e quindi

$$(24) \quad \frac{dr}{r} = \frac{A dR}{R} .$$

Ora si ricordi che [vedi form. (12) e (18)]

$$A = \frac{c}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/R}} ,$$

per cui, posto

$$(25) \quad \frac{V}{c} = \xi = \sqrt{1 - \alpha/R} ,$$

risulta

$$(26) \quad R = \frac{\alpha}{1 - \xi^2}$$

e, dopo una semplice quadratura, dalla (24)

$$(27) \quad r = \frac{1 + \xi}{1 - \xi} r_o , \quad (r_o \text{ costante}) .$$

Con ciò risulta dimostrato il nostro asserto.

Dalla (23) si ha

$$H = \frac{R}{r} ,$$

ossia, per le (25), (26) e (27) ,

$$(28) \quad H = \frac{\alpha}{r_0} \frac{1}{(1 + \sqrt{V/c})^i} .$$

Dalle (26) e (27) ricaviamo pure che R è esprimibile per la sola r e quindi che W (dipendente soltanto dalla R) si può ritenere funzione della sola r .

Ciò premesso, l'equazione variazionale (22) si può mutare nell'altra

$$\delta \int \sqrt{2W} H dl' = 0 ,$$

dalla quale si deduce, ²⁴⁾ che le traiettorie del punto materiale, nel nostro spazio fisico, coincidono con quelle di un punto mobile nello spazio euclideo, sotto l'azione del potenziale WH^2 (con energia totale nulla).

Da qui l'importante conclusione, che, essendo il potenziale dipendente dalla sola r , il moto è centrale e quindi in particolare piano (in un piano passante pel centro di forza). Questo piano si può evidentemente assumere come piano equatoriale del sistema di coordinate polari θ, φ . Con ciò risulta $\theta = \frac{\pi}{2}$ durante tutto il movimento e ci si trova ricondotti ad un problema con due gradi di libertà.

3. — Ritornando ora allo spazio ambiente S , segue da quanto precede, che la traiettoria del punto mobile appartiene tutta alla superficie $\theta = \frac{\pi}{2}$ (corrispondente al piano equatoriale dello spazio S') passante per il centro di attrazione O .

²⁴⁾ Cfr. per es., P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle* [Paris, Gauthier-Villars, III^e edit. 1909] V. I^o, n. 487.

Abbiamo per tal modo (indicando d'ora in poi col punto sovrapposto derivate rispetto a t^*).

$$T^* = \frac{1}{2} \left(A^2 \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

e di conseguenza

$$L^* = \frac{1}{2} \left(A^2 \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{c^4}{2} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_o^2} \right) .$$

Essendo A e V funzioni della sola R , si ha $\frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = 0$ e quindi dalla equazione di Lagrange per φ

$$\frac{d}{dt^*} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = 0 ,$$

si ottiene

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}} = C , \quad (C \text{ costante})$$

ossia

$$(29) \quad R^2 \dot{\varphi} = C .$$

Questo integrale, nella nuova teoria, corrisponde all'integrale delle aree: nel seguente n. 5 vedremo quale ne sia l'interpretazione geometrica.

Per ora aggiungiamo alla (29) l'integrale delle forze vive, che sussiste per ogni sistema lagrangiano, ricordando che deve ritenersi nulla l'energia totale

$$(30) \quad \frac{1}{2} \left(A^2 \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{c^4}{2} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_o^2} \right) = 0 .$$

4. — Prima di procedere apriamo una breve parentesi per determinare la relazione che corre tra il tempo vero t e il parametro ausiliario t^* , o, più precisamente, tra i differenziali delle due variabili.

L'espressione di dt è la seguente ²⁵⁾

$$dt = \frac{dl}{V} \left(1 - \frac{V^2}{V_o^2} \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

L'espressione di dt^* può esser desunta dall'integrale delle forze vive (30), il quale può scriversi sotto la forma

$$\frac{dl^2}{dt^{*2}} = \frac{c^4}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{V_o^2} \right) ,$$

da cui

$$dt^* = \frac{dl}{c^2} V \left(1 - \frac{V^2}{V_o^2} \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Dal confronto di queste due espressioni, ricordando [cfr. formula (18)] che

$$A^2 = \frac{c^2}{V^2} ,$$

segue la relazione cercata

$$(31) \quad dt = A^2 dt^* .$$

5. — Vogliamo ora vedere come si interpreta l'integrale (29). Questo integrale, attesa la relazione (31) testè determinata, assume l'aspetto

$$(32) \quad \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C ,$$

dove abbiamo posto

$$\rho^2 = A^2 R^2 .$$

²⁵⁾ T. Levi-Civita, *l. c.*, (6) § 3°, p. 467.

Sebbene si conosca il significato dell'invariante $-\frac{1}{AR}$ nello spazio S [cfr. n. 4 del § III], gioverà dedurne il significato invariante rispetto alla varietà a due dimensioni $\theta = \frac{\pi}{2}$, che è, come sappiamo [§ III, n. 3], geodetica rispetto ad ogni suo punto e nella quale è tutta contenuta la traiettoria del punto mobile.

È noto ²⁶⁾ che se è data una varietà V_2 di elemento lineare

$$E du^2 + G dv^2,$$

la curvatura geodetica per le linee $u = cost.$ è data dalla espressione

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Se il quadrato dell'elemento lineare della V_2 è della forma

$$(33) \quad A' dR^2 + R^2 d\varphi^2,$$

ne segue, che, per le linee $R = cost.$, si ha la curvatura geodetica $-\frac{1}{AR}$.

Poichè la (33) è la determinazione metrica della superficie $\theta = \frac{\pi}{2}$, se ne inferisce che $\varphi = -AR$ si deve interpretare come raggio di curvatura dei circoli $R = cost.$ appartenenti alla detta superficie.

Ritornando alla (32), ne concludiamo che *durante il moto si mantiene costante il prodotto della velocità angolare del mobile per il quadrato del raggio di curvatura dei circoli $R = cost.$*

Osservazione. — L'integrale delle aree in un moto piano nello spazio euclideo si può ovviamente interpretare sotto una delle tre forme seguenti:

²⁶⁾ L. Bianchi, *l. c.*, (12), § 84.

1. — Il raggio vettore che va dal centro di attrazione al punto mobile descrive aree proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.

2. — Durante il moto, si mantiene costante il prodotto della velocità angolare per il quadrato del raggio vettore.

3. — Durante il moto, si conserva costante il prodotto della velocità angolare per il quadrato del raggio di curvatura del circolo $r = \text{cost.}$ appartenente al piano del moto.

Nella nuova meccanica di Einstein, il principio di proporzionalità tra aree e tempi non si conserva e l'integrale, corrispondente a quello delle aree, ammette invece un'unica interpretazione e precisamente quella corrispondente alla terza forma sopra enunciata ²⁷⁾).

6. — Nella metrica dello spazio fisico entra, come abbiamo visto, una costante α , che a priori deve ritenersi arbitraria. Vediamo ora di fissarne il valore.

Possiamo, in primo luogo, precisarne il comportamento qualitativo.

La relatività generale trova la sua base nel postulato fondamentale, che la metrica dello spazio ambiente risenta una influenza da parte dei fenomeni fisici, che vi si svolgono. Tale influenza, pur non essendo nulla, deve ritenersi, in base alle nostre intuizioni, molto piccola, il che importa a ritenere il ds^2 dello spazio quadridimensionale, quale conviene all'ipotesi fisica di una massa (schematicamente) concentrata in O, molto

²⁷⁾ (Ci permetta il lettore di richiamare la sua attenzione sulla interpretazione geometrica dell'integrale (29) [o (32)]. Egli noterà che tale interpretazione è invariante di fronte alla varietà nella quale si svolge il fenomeno.

Di regola sono soltanto le interpretazioni intrinseche che hanno effettivo interesse. Altre, puramente convenzionali, dipendenti dalla scelta dei parametri di riferimento, possono bensì essere suggerite da semplificazioni formali, ma danno facilmente luogo ad equivoci, ed è quindi preferibile evitarle. Questo, in sostanza, fu già notato da Hilbert [*l. c.*, (4) p. 10 dell'estratto] e ulteriormente, in una nota critica, da E.B. Wilson [*Generalized co-ordinates, relativity, and gravitation*, (*The Astrophysical Journal*, V. XLV, n 4, May 1917, pp. 244-253)].

prossimo alla forma euclidea propria della meccanica relativistica $c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, almeno a distanza sufficientemente grande da O . L'espressione effettiva di tale ds^2 , già assegnata fin dal § III, n. 7, mostra che per $\alpha = 0$, esso si riduce rigorosamente alla forma euclidea. Siccome questa costante α interviene nei coefficienti (A e V) pel tramite del rapporto α/R , così siamo tratti a ritenere molto piccola questa frazione.

Poichè poi

$$dg = A dR = \frac{dR}{\sqrt{1 - \alpha/R}},$$

per $\alpha = 0$ il parametro R relativo ad un punto P di S , si riduce alla distanza geodetica di P da O . In prima approssimazione potremo quindi, per l'ipotesi sopra specificata, ritenere R molto vicino a tale distanza geodetica.

La restrizione qualitativa che sia piccolo il rapporto α/R equivale pertanto all'essere rilevante, *rispetto ad* α , la distanza geodetica da O .

Con tale ipotesi i punti della sfera geodetica $R = \alpha$, che risultano singolari per il ds^2 (il coefficiente $A = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/R}}$ vi diviene infinito e il coefficiente $V = c \sqrt{1 - \alpha/R}$ zero, di ordine $\frac{1}{2}$) cadono manifestamente fuori della regione da considerare. Converrà anzi limitarci a *valori così grandi di R , che rispetto ad essi* (o, se si vuole, alle corrispondenti distanze geodetiche) *la sfera singolare si possa tranquillamente confondere collo stesso punto O .*

A questo patto diviene effettivamente legittimo riguardare la metrica trovata come rispondente alle circostanze fisiche da cui si parte, nella traduzione delle quali già si assimila ad O tutto un intorno di O .

Vuol dire che, facendo una qualsiasi applicazione concreta, dovremo a posteriori assicurarci che α/R risulta effettivamente assai piccolo in tutto il campo a cui ci si riferisce.

Premesso tutto ciò in linea concettuale, rimane senz'altro inteso, nei riguardi numerici, che α/R va trattato come una

frazione così piccola, che il suo quadrato riesca assolutamente inapprezzabile.

7. — Ora applichiamo al nostro caso un'osservazione generale del Levi-Civita ²⁶⁾ concernente i ds^2 prossimi alla forma euclidea (il divario essendo di primo ordine). L'osservazione è, che se

$$V = c(1 + \gamma) ,$$

con γ quantità di prim'ordine, il moto einsteiniano definito dall'equazione variazionale (20), si identifica, in prima approssimazione, con il moto di un punto materiale (nello spazio euclideo e secondo le leggi della dinamica ordinaria) sotto l'azione di una forza conservativa di potenziale unitario $-c^2\gamma$.

Poichè $\frac{fM}{R}$ [f costante di attrazione universale ed M massa solare] è la forma di potenziale newtoniano, che competerebbe al moto del nostro punto ricondotto allo schema ordinario, così, nel suaccennato ordine di approssimazione, dovremo ritenere

$$-c^2\gamma = \frac{fM}{R} .$$

Ora da [form. (19)]

$$V = c \sqrt{1 - \alpha/R} ,$$

ricordando che α/R va trattato come quantità di primo ordine, apparisce che V si può presentare sotto la forma

$$V = c \left(1 - \frac{\alpha}{2R} \right) ,$$

da cui risulta che, nel nostro caso,

$$\gamma = - \frac{\alpha}{2R} .$$

²⁶⁾ T. Levi-Civita, *l. c.*, (6), § 4°, n. 1.

Confrontando le due espressioni di γ , si ottiene per la costante α l'espressione

$$(34) \quad \alpha = \frac{2fM}{c^2}.$$

8. — Possiamo ancora aggiungere, che la singolarità $R = \alpha$ cade a circa 3 km. dal centro del sole. Infatti si indichi con d la distanza media sole terra e con v la velocità di traslazione della terra. Poichè $\frac{fM}{d} = v^2$ risulterà

$$\alpha = 2 \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot d.$$

Ma all'incirca è $v = 30 \text{ km./sec.}$; $c = 30 \times 10^6 \text{ km./sec.}$; $d = 15 \times 10^7 \text{ km.}$ e quindi

$$\alpha = 2 \times 10^{-8} \times 15 \times 10^7 \text{ km.} = 3 \text{ km.} \quad c. d. d.$$

Ed ora ci sarà facile provare che, avendo di mira lo studio del moto dei pianeti attorno al sole, sono soddisfatte le condizioni qualitative richieste per il rapporto α/R [cfr. n. 6], per cui si dovranno ritenere senz'altro soddisfatte le riserve specificate intorno al campo fisico nel quale deve svolgersi il fenomeno. Infatti, consideriamo pure il pianeta più vicino al sole, cioè Mercurio: poichè la distanza media di esso dal sole risulta eguale a circa $0,38 \times d$, il rapporto α/R si aggira intorno al valore $3/0,38 \times 15 \times 10^7$ (all'ingrosso 5×10^{-8}). Il quadrato di questo valore è davvero inapprezzabile.

9. — Apriamo ora una parentesi per determinare l'energia E del punto mobile e precisamente dimostriamo che essa non è altro che il primo membro dell'integrale (21) moltiplicato per $-c$ e che si ha quindi

$$E = -c \left\{ \sum_1^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right\} = -c V_0,$$

con che si viene a precisare il significato della costante V_0 .

A tal uopo ricordiamo, in primo luogo, che

$$(35) \quad -c \left\{ \sum_1^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right\}$$

è l'espressione che conviene, nello schema relativistico elementare, all'energia, per unità di massa, di un sistema la cui funzione lagrangiana è $L = \sqrt{c^2 - v^2}$. Per riconoscerlo sotto la forma abituale basta notare che dipendendo L dalle \dot{x}_i soltanto pel tramite di v ,

$$\sum_1^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = v \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{-v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

per cui l'espressione (35) si riduce a

$$\frac{c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

che si assume effettivamente come l'energia del sistema suddetto ²⁹).

Ora nella relatività generale la funzione lagrangiana non è proprio $\sqrt{c^2 - v^2}$, bensì $\sqrt{V^2 - v^2}$ (che alla prima forma si riduce in prima approssimazione). Tuttavia durante il moto si ha ancora

$$-c \left\{ \sum_1^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right\} = -c V_0 = \text{cost.}$$

ed è naturale quindi estendere l'interpretazione di questo integrale al caso generale, ritenendo così il primo membro (che conserva valore costante durante tutto il movimento) quale espressione dell'energia per unità di massa di un sistema nella relatività generale. c. d. d.

²⁹) Cfr. M. Laue, *Das Relativitätsprinzip*, [Braunschweig, Vieweg, II Aufl., 1913] § 28, p. 184.

10. — Ricordiamo ancora che dalla meccanica relativistica e dai fenomeni di radioattività si è indotti a ritenere come parte integrante, anzi proponderante, dell'energia di un sistema qualsiasi, quella che è, per così dire, immagazzinata nella materia, e che ammonta a c^2 per ogni unità di massa. Perciò, pel nostro punto, l'energia (unitaria) non intrinseca — quella cioè che deriva dal moto e dalla presenza del campo — che pure si conserva durante il movimento, vale

$$-c V_o - c^2 .$$

Ciò premesso, si ricordi che nell'ordinaria meccanica newtoniana, per un punto di massa 1, attratto da una centro di massa M , il quale descriva un'orbita ellittica, l'energia totale (cinetica e potenziale) vale

$$- \frac{fM}{2R_o} ,$$

essendo R_o il semiasse maggiore dell'orbita.

Ne viene che, introducendo una costante R_o mediante la posizione

$$(36) \quad -c V_o - c^2 = - \frac{fM}{2R_o} ,$$

R_o caratterizza le dimensioni di un'ipotetica orbita ellittica per cui [con $fM = c^2 \alpha / 2$ a norma della (34)] il moto kepleriano risulta *isoenergetico* al moto einsteiniano.

11. — Veniamo ora alla determinazione della equazione della traiettoria descritta dal mobile.

Si ponga

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{R_o} ,$$

o, ciò che è lo stesso, per la (34),

$$\varepsilon = \frac{2fM}{R_o c^2} .$$

Per questa posizione dalla (36) si trae

$$(37) \quad \frac{c^2}{V_o^2} = \left(1 - \varepsilon/4\right)^{-2} .$$

Si consideri ora \dot{R} come funzione del parametro t^* per il tramite dell'angolo φ ; poichè è

$$\dot{R} = \frac{dR}{d\varphi} \dot{\varphi} ,$$

la (30) [a norma anche delle (18) e (37)] diventa

$$\left\{ A^2 \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 + R^2 \right\} \dot{\varphi}^2 = c^2 \left\{ A^2 - \left(1 - \varepsilon/4\right)^{-2} \right\} .$$

Questa equazione poi, per la (29) e la nuova posizione

$$\frac{R_o}{R} = u ,$$

si può mettere sotto la forma

$$(38) \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \psi(u) ,$$

con

$$(39) \quad \psi(u) = -u^2 (1 - \varepsilon u) + \frac{R_o^2 c^2}{G^2} \left\{ 1 - \frac{1 - \varepsilon u}{(1 - \varepsilon/4)^2} \right\} .$$

La (38) è l'equazione cercata.

12. — Si noti ora che $\psi(u)$ è un polinomio di 3° grado in u , nel quale il coefficiente di u^3 è ε . Se si indicano allora con u_o , u_1 , \bar{u} le tre radici di $\psi(u)$ si avrà

$$(40) \quad \psi(u) = \varepsilon (\bar{u} - u) (u - u_o) (u_1 - u)$$

e se si suppone che il valore iniziale di u sia compreso tra le due radici u_0 ed u_1 (con che queste radici corrispondono alla minima e massima distanza a cui giunge il pianeta dal sole), l'angolo apsidale è dato notoriamente dall'integrale ³⁰⁾

$$(41) \quad \Omega = \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}} .$$

13. — Ed ora fra tutti i moti kepleriani isoenergetici (l'energia totale essendo $-\frac{fM}{2R_0}$) al moto einsteiniano [confronta n. 10] prendiamo a considerare quello per cui la costante delle aree risulta eguale a C . L'equazione della corrispondente traiettoria ellittica è allora notoriamente ³¹⁾

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \psi_0(u) ,$$

con

$$(42) \quad \psi_0(u) = -u^2 + \frac{fR_0M}{C^2}(2u-1) ,$$

od anche, essendo ³²⁾

$$(43) \quad \frac{fR_0M}{C^2} = \frac{1}{1-e^2} ,$$

(e eccentricità dell'ipotetica orbita ellittica),

$$(44) \quad \psi_0(u) = -u^2 + \frac{1}{1-e^2}(2u-1) .$$

³⁰⁾ Cfr. per es. L. Lecornu, *Cours de mécanique*, [Paris, Gauthier-Villars, 1914] T. I, n. 236, p. 303.

³¹⁾ F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, [Paris, Gauthier-Villars, 1889] T. I, p. 98.

³²⁾ *L. c.* (31) p. 99. — Rimandiamo alla Meccanica celeste del Tisserand, perchè le formule vi sono riportate proprio sotto l'aspetto materiale a cui noi ci riferiamo. Sostanzialmente si potrebbero però trovare in qualunque trattato di meccanica razionale, per es. in quelli italiani di Burgatti, Maggi, Marcolongo.

Mostriamo ora che per $\varepsilon = 0$ il polinomio $\psi(u)$ si riduce a $\psi_0(u)$, ossia che il moto einsteiniano si riduce a quell'ipotetico moto kepleriano prima considerato. A tal uopo basta scrivere la (39), tenendo presente il significato di ε , sotto la forma

$$(45) \quad \psi(u) = -u^3(1 - \varepsilon u) + \frac{fR_0 M}{G^2} \frac{2}{\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{1 - \varepsilon u}{(1 - \varepsilon/4)^2} \right\}.$$

Per $\varepsilon = 0$, applicando al secondo addendo del secondo membro la regola dell'Hôpital, si trova immediatamente

$$[\psi(u)]_{\varepsilon=0} = \psi_0(u).$$

Da ciò si deduce che, in prima approssimazione, l'orbita einsteiniana coincide con l'orbita kepleriana ausiliaria. Gli elementi dell'una differiranno quindi dagli elementi dell'altra solo per quantità infinitesime. In particolare R_0 si potrà interpretare come semiasse maggiore di quell'orbita planetaria. Il numero $\varepsilon = \alpha/R_0$ risulterà per tal modo piccolissimo ed anzi tale da poterne trascurare i quadrati [cfr. n. 8].

14. — Dalle deduzioni del n. precedente risulta pure che le due radici del polinomio $\psi_0(u)$, che caratterizzano — come è noto — la distanza afelia e perielia del pianeta ipotetico, dovranno ritenersi assai prossime alle due del polinomio $\psi(u)$, che, nel n. 12, abbiamo chiamato u_0 ed u_1 .

Il detto polinomio $\psi(u)$ è di 3° grado ed ammette una terza radice \bar{u} . Tenendo presente la circostanza che $\psi(u)$, per $\varepsilon = 0$, si riduce al polinomio di secondo grado $\psi_0(u)$, è facile discriminare questa terza radice. Basta pensare che $\psi_0(u)$ si può riguardare come un polinomio di 3° grado in cui il coefficiente di u^3 è zero, e come tale dotato di tre radici di cui una infinita. La \bar{u} rappresenta pertanto quella delle radici di $\psi(u)$ che diventa infinita per $\varepsilon = 0$. Le altre due devono manifestamente rimanere finite per ragioni di continuità.

Posto $\varepsilon u = z$, l'equazione $\psi(u) = 0$ [dove $\psi(u)$ è dato dalla (45)] diventa

$$(46) \quad z^3 - z + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left\{ 1 - \frac{1 - z}{(1 - \varepsilon/4)^2} \right\} = 0,$$

che per $\varepsilon = 0$ ammette la radice semplice $z = 1$ e la radice doppia $z = 0$. Ne segue, per il teorema generale delle funzioni implicite, che la (46) è atta a definire univocamente, come funzione regolare di ε , quella radice \bar{z} che si riduce all'unità per $\varepsilon = 0$. In base alla posizione $\varepsilon u = z$, sarà senz'altro $\frac{\bar{z}}{\varepsilon}$ la cercata radice \bar{u} .

Dacchè \bar{z} è funzione olomorfa di ε , eguale ad 1 per $\varepsilon = 0$, si può sviluppare secondo le potenze di ε . Trascurando ε^2 , si ha semplicemente

$$\bar{z} = 1 + \varepsilon \zeta$$

e, sostituendo nella (46), si ricava per il coefficiente ζ l'espressione

$$\zeta = -\frac{2}{1 - e^2}.$$

Otteniamo così, per la radice \bar{u} , il valore approssimato

$$(47) \quad \varepsilon \bar{u} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1 - e^2}.$$

15. — Determiniamo ora l'espressione dello spostamento $\delta \omega$ del perielio di un pianeta. Partiamo, a tal uopo, dall'integrale (41), che dà l'angolo apsidale e poniamo

$$(48) \quad u = \frac{u_1 + u_0}{2} - \frac{u_1 - u_0}{2} \cos v.$$

Da qui

$$(u - u_0)(u_1 - u) = \frac{1}{4}(u_1 - u_0)^2 \sin^2 v,$$

$$du = \frac{1}{2}(u_0 - u_1) \sin v \, dv$$

e quindi

$$\frac{du}{\sqrt{(u - u_0)(u_1 - u)}} = dv.$$

Mediante questa sostituzione la (41) diventa

$$\Omega = \int_0^{\pi} \frac{d\nu}{\sqrt{\varepsilon(\bar{u} - u)}} \quad ,$$

avendo tenuto conto della (40).

Prendendo ora per \bar{u} il valore approssimato (47) si ha

$$\Omega = \int_0^{\pi} \frac{d\nu}{\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{1-e^2} - \varepsilon u}}$$

e trascurando ancora le potenze di ε superiori alla prima,

$$\Omega = \int_0^{\pi} d\nu \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{1-e^2} + \frac{\varepsilon}{2} u \right\} \quad ,$$

e quindi, in base alla (48),

$$\Omega = \pi \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{1-e^2} + \frac{\varepsilon}{2} (u_1 + u_0) \right\} \quad .$$

Poichè la semisomma $\frac{1}{2} (u_1 + u_0)$ è moltiplicata per ε , nell'ordine d'approssimazione in cui ci siamo messi, potremo ad essa sostituire il valore che le compete nel caso newtoniano, cioè $\frac{1}{1-e^2}$, come risulta dalla espressione (44) di $\psi_0(u)$. Si ha in tal modo

$$\Omega = \pi \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{1-e^2} \right) \quad .$$

Ed ora lo spostamento del perielio del pianeta ad ogni giro completo sarà misurato da

$$\delta \tilde{\omega} = 2(\Omega - \pi) = 3\pi \frac{\varepsilon}{1 - e} .$$

16. — Determiniamo il valore numerico di $\delta \tilde{\omega}$ per Mercurio, supponendo che l'orbita descritta dal pianeta sia tale che si possa trascurare il quadrato della sua eccentricità. Volendo esprimere lo spostamento in secondi di angolo bisognerà moltiplicare $\delta \tilde{\omega}$ per il noto numero $\frac{6^4 \times 10^3}{2\pi}$ (numero dei secondi contenuti nell'arco di lunghezza eguale al raggio) ed avremo così

$$\delta \tilde{\omega}'' = \frac{3}{2} \times 6^4 \times 10^3 \varepsilon .$$

Ora $\varepsilon = \alpha/R_o$; ma

$$\alpha = 3 \text{ km. (cfr. n. 8) ed } R_o = 0,38 \times 15 \times 10^7 \text{ km.,}$$

quindi

$$\delta \tilde{\omega}'' = \frac{3 \times 6^4 \times 10^3 \times 3}{2 \times 38 \times 15 \times 10^5} .$$

Eseguendo i calcoli si trova che $\delta \tilde{\omega}''$ è poco più di un decimo di secondo (per ogni rivoluzione); e poichè Mercurio in un secolo compie circa 420 giri attorno al sole, ne segue, per questo pianeta, il celebre spostamento secolare di circa 42 secondi.

§ V.

Altro modo di dedurre lo spostamento del perielio di un pianeta.

Vogliamo ancora ottenere lo spostamento del perielio di un pianeta nell'ipotesi che l'orbita descritta sia molto prossima ad

un'orbita circolare, applicando la seguente formula, che dà l'angolo apsidale ³³⁾

$$(49) \quad \Omega = \frac{\pi}{\sqrt{3 + \frac{R_0 \Phi'(R_0)}{\Phi(R_0)}}} ,$$

nella quale: $\Phi(R)$ è la forza centrale che sollecita il punto mobile ed R_0 il raggio dell'orbita.

L'espressione desunta per questa via per lo spostamento $\delta \bar{\omega}$ non deve naturalmente differire da quella ottenuta precedentemente, nella quale si ponga eguale a zero l'eccentricità ϵ .

Per trovare l'espressione che deve attribuirsi a $\Phi(R)$ perchè il punto mobile descriva l'orbita einsteiniana, basta confrontare la (38), che qui ripetiamo sotto la forma

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 (1 - \epsilon u) = \frac{f R_0 M}{C} \frac{2}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{1 - \epsilon u}{(1 - \epsilon/4)^2} \right\} ,$$

con l'equazione della traiettoria che proviene dalla teoria newtoniana ³⁴⁾

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u = \frac{R_0^3}{C^2} 2 \int \frac{F(u) du}{u^2} + \text{cost.} ,$$

nell'ipotesi che il mobile sia sollecitato da una forza centrale avente per componente radiale $\Phi(R) = \Phi\left(\frac{R_0}{u}\right) = F(u)$.

Perchè le due equazioni scritte coincidano bisogna che sia

$$F(u) = \frac{3}{2} \frac{\epsilon C^2}{R_0^3} u^4 + \frac{fM}{R_0 (1 - \epsilon/4)^2} u^2$$

e quindi

$$\Phi(R) = \frac{3}{2} \frac{\epsilon C^2 R_0}{R^4} + \frac{fM}{(1 - \epsilon/4)^2 R^2} .$$

³³⁾ Cfr. H. Lamb, *Dynamics*, [Cambridge, at the University Press, 1914] n. 88, form. (1).

³⁴⁾ F. Tisserand, *l. c.*, (31) p. 44.

Da qui

$$\frac{R_o \Phi'(R)}{\Phi(R_o)} = -4 \frac{3\varepsilon(1 - \varepsilon/4)^2 C' + fM R_o}{3\varepsilon(1 - \varepsilon/4)^2 C' + 2fM R_o} .$$

Ma per orbite circolari $fM R_o = C^2$, per cui, trascurando in pari tempo le potenze di ε superiori alla prima,

$$\frac{R_o \Phi'(R_o)}{\Phi(R_o)} = -4 \frac{3\varepsilon + 1}{3\varepsilon + 2} .$$

Di conseguenza per l'angolo apsidale Ω [form. (49)] l'espressione

$$\Omega = \frac{\pi}{\sqrt{3 - 4 \frac{3\varepsilon + 1}{3\varepsilon + 2}}} = \pi \sqrt{\frac{2 - 3\varepsilon}{2 + 3\varepsilon}}$$

e mediante lo sviluppo binomiale, con la solita approssimazione,

$$\Omega = \pi \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2} \right) ,$$

da cui per lo spostamento del perielio l'espressione

$$\delta \tilde{\omega} = 3\pi\varepsilon .$$

§ VI.

Andamento dei raggi luminosi in un campo gravitazionale.

1. — Mentre nell'ordinario spazio euclideo la velocità della luce (nel vuoto) si ritiene costante e le traiettorie luminose sono in conformità rettilinee, in un campo gravitazionale velocità e traiettorie vengono modificate per l'influenza del campo.

Denotando sempre con ds^2 l'elemento lineare dello spazio quadridimensionale che congloba spazio e tempo, nella teoria di Einstein la propagazione della luce è determinata dall'equazione

$$ds = 0 ,$$

assieme al principio di Fermat, compendiato nella formola

$$\delta \int dt = 0 .$$

In un campo statico, il ds^2 è della forma (2) ed apparisce quindi che la velocità della luce è in tal caso

$$V = \frac{dl}{dt} .$$

Se poniamo poi

$$dl = H d\mathcal{V} ,$$

con $d\mathcal{V}$ euclideo, il principio di Fermat è espresso dall'equazione variazionale

$$\delta \int \frac{\sqrt{8} r_o c^2}{\alpha} \frac{H}{V} d\mathcal{V} = 0 ,$$

avendo introdotto l'inessenziale fattore costante $\sqrt{8} r_o c^2 / \alpha$ per una ragione che apparirà in seguito.

Questa equazione ci permette di affermare ³³⁾, che i raggi luminosi coincidono con le traiettorie di un punto materiale, nell'ordinario spazio euclideo, sotto l'azione del potenziale unitario.

$$U^* = \frac{4 r_o^2 c^4}{\alpha^2} \frac{H^2}{V^2} ,$$

con energia totale nulla.

2. — Nel campo di attrazione di un'unica massa M concentrata in un punto, essendo il dl^2 molto prossimo alla forma euclidea, si può ritenere [cfr. § IV n. 7]

$$V = c (1 + \gamma) ,$$

con γ quantità di primo ordine.

³³⁾ Cfr. *l. c.* (24).

D'altra parte H ha, in questo caso, l'espressione (28) o, se vogliamo, per la precedente,

$$H = \frac{\alpha}{r_0} \frac{1}{(2 + \gamma)^2} .$$

Trascurando i quadrati di γ , potremo quindi ritenere

$$\frac{H^2}{V^2} = \frac{\alpha^2}{16 r_0^2 c^2} (1 - 4\gamma)$$

e di conseguenza

$$U^* = -c^2\gamma + \frac{1}{4}c^2 .$$

Ne segue, per quanto ora abbiamo detto, che il principio che determina la forma dei raggi luminosi in un campo gravitazionale occupato da un'unica massa, si può enunciare come segue: *Le traiettorie luminose coincidono, in prima approssimazione, con quelle di un punto materiale, nell'ordinario spazio euclideo, sotto l'azione del potenziale unitario*

$$U = -c^2\gamma$$

e con energia totale

$$E = \frac{1}{4}c^2 .$$

Poichè va ritenuto [cfr. § IV n. 7]

$$-c^2\gamma = \frac{fM}{R} ,$$

il potenziale U ha la forma che le compete nell'ordinaria teoria newtoniana e siccome poi l'energia totale E è essenzialmente positiva, ne concludiamo che la luce, in un campo gravitazionale con un unico centro di attrazione, percorre una traiettoria che nella nostra rappresentazione euclidea ha per immagine un ramo di iperbole, il cui fuoco (intendiamo quello interno al ramo) è occupato dalla massa M .

Si noti che per essere E grandissimo (rispetto ad U) si può già affermare che la curvatura dell'iperbole è piccolissima e che quindi l'andamento dei raggi luminosi è poco discosto da quello rettilineo.

3. — Il campo gravitazionale sia ora quello del sole e si supponga che sulla terra si possa osservare la luce proveniente da una stella. Il raggio luminoso avrà la forma di una iperbole; la luce invece sembrerà provenire all'osservatore terrestre secondo la tangente a questa iperbole e in conseguenza di ciò la stella, che emana la luce, apparirà situata in un punto diverso da quello realmente occupato.

La stella subisce così uno spostamento angolare apparente misurato dall'angolo formato dalla suddetta tangente e dal raggio terra-stella.

Praticamente si può ritenere infinita la distanza tra la stella e il sole e tra questo e la terra, per cui lo spostamento angolare apparente risulterà misurato dall'angolo esterno dei due asintoti dell'iperbole percorsa dalla luce.

Questo, a rigore, nell'ausiliario spazio euclideo a cui si riferiscono le precedenti considerazioni, il quale sta in rappresentazione conforme con lo spazio fisico. Tuttavia il risultato finale, cioè la misura della deviazione angolare che ci interessa, si riporta inalterata nello spazio fisico attesa la proprietà fondamentale delle rappresentazioni conformi.

Indicheremo con 2β l'angolo interno e con 2δ l'angolo esterno di questi due asintoti: si avrà manifestamente

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \beta \quad .$$

Cerchiamo ora di determinare l'angolo δ , introducendo la minima distanza d del centro del sole dalla traiettoria luminosa: per l'applicazione che ci interessa d coincide ovviamente con il raggio della corona solare.

Se a è il semiasse trasverso della traiettoria iperbolica, è notoriamente ³⁶⁾

$$a = \frac{fM}{2E}$$

e nel caso nostro, essendo $E = \frac{1}{4} c^2$,

$$a = \frac{2fM}{c^2},$$

od anche per la (34)

$$a = \alpha.$$

Ora d altro non è che la distanza tra un vertice dell'iperbole e il fuoco corrispondente, per cui, indicando con e l'eccentricità dell'iperbole ³⁷⁾

$$d = a(e - 1)$$

e da qui e dalla precedente

$$\frac{1}{e} = \frac{\alpha}{\alpha + d}$$

Essendo d'altra parte ³⁸⁾

$$e = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{1}{\sin \delta},$$

risulta immediatamente

$$\sin \delta = \frac{\alpha}{\alpha + d}.$$

³⁶⁾ Cfr. *l. c.*, (31).

³⁷⁾ Cfr. p. es. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Analitica* [Pisa, Enrico Spoerri, 1915], p. 395 form. (12) per $x' = a$.

³⁸⁾ L. Bianchi, *l. c.*, (37), p. 391.

Poichè α è eguale a circa 3 km. [cfr. § IV, n. 8], mentre d , arrotondando le cifre, è eguale a $7 \times 10^8 \text{ km.}$, il rapporto α/d si può considerare come quantità di primo ordine e si ha così per lo spostamento totale $\Delta = 2\delta$ l'espressione approssimata

$$\Delta = \frac{2\alpha}{d} .$$

Esprimendo Δ in secondi, si ha

$$\Delta'' = \frac{2 \times 3}{7 \times 10^8} \times \frac{6^4 \times 10^8}{2\pi}$$

cioè approssimativamente

$$\Delta'' = 1.75 .$$
