Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel.

Von

E. Study in Leipzig.

Meine auf zwei- und dreifach ausgedehnte Kegelschnittsysteme bezüglichen Untersuchungen habe ich in die vorstehende Arbeit nicht mit aufgenommen, da es mir bis jetzt nicht gelungen ist, dieselben in ähnlich allgemeiner Weise durchzuführen, wie es bei den vierfach ausgedehnten Systemen, zu deren Behandlung das Bézout'sche Theorem ausreichte, noch möglich war.

Es mögen aber wenigstens einige Bemerkungen hier eine Stelle finden, welche sich auf den Satz von Cremona beziehen, der für die Zusammenstellung eines zweifach- und eines dreifach ausgedehnten Systems dasselbe leistet, was der Chasles'sche Satz für ein- und vierfach ausgedehnte Systeme. Dieser Satz sagt in seiner ursprünglichen Form aus, dass die Zahl der „Kegelschnitte, in welchen sich ein dreifach ausgedehntes System M und ein zweifach ausgedehntes N durchdringen" durch einen dreigliedrigen Ausdruck dargestellt wird, welcher sich aus zwei Reihen von „Charakteristiken" bilinear zusammensetzt, von welchen die erste nur von den Eigenschaften des Systems M, die zweite nur von denen des Systems N abhängt.

Es steht von vorn herein zu vermuthen, dass dieser Satz durch die Einführung des Begriffes der vollständigen Form eine ebenso allgemein giltige Deutung erfahren werde, als wir in Betreff des Chasles'schen Satzes gesehen haben; und in der That verhält es sich so.

Zugleich ergiebt sich eine einfache, bisher, wie es scheint, nicht bemerkte geometrische Deutung des Cremona'schen Satzes, ähnlich der § 9 der vorstehenden Arbeit hinsichtlich des Chasles'schen Satzes angegebenen; und in ihrer Begleitung eine Moduldarstellung der zweifach ausgedehnten Systeme, welche der von Herrn Halphen für die dreifach ausgedehnten Systeme aufgestellten analog ist.

Für den Fall, dass das drei- und das zweifach ausgedehnte System vollständige Durchschnitte von zwei, bezüglich drei vierfach ausgedehnten Systemen sind, ist der Nachweis der ersteren Behauptung als durch die Formel VI des § 9 der vorstehenden Abhandlung bereits erbracht anzusehen, da es natürlich gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge man die fünf vierfach ausgedehnten Systeme, welche in diese Formel eintreten, zum Durchschnitt bringt. Der andere Fall aber, in welchem diese besondere Voraussetzung nicht erfüllt ist, lässt sich auf den ersten zurückführen, da man jede Mannichfaltigkeit M oder N durch Hinzufügung geeigneter Mannichfaltigkeiten gleicher Dimension zu einem vollständigen Durchschnitt ergänzen kann, und hier, was für das Ganze gilt, wie nicht schwer zu sehen, auch für die einzelnen Theile gelten muss.

Die in der Cremona'schen Formel auftretenden Charakteristiken besitzen eine ähnlich einfache geometrische Bedeutung, wie die des Chasles'schen Satzes; und zwar erhält man, wenn man die in § 7 der vorstehenden Arbeit angegebenen Sätze auf Systeme M und N in den einfachen, hier in Betracht kommenden Fällen ausdehnt, den Satz von Cremona in der folgenden Form:

„Sei r die Zahl der Strahlenpaare eines dreifach ausgedehnten Systems M, welche ihren Scheitel in einem gegebenen Punkt haben; s die Zahl der Kegelschnitte desselben, welche ein gegebenes Poldreieck haben; r' die Zahl der Punktepaare desselben, welche auf einer gegebenen Geraden liegen —

ferner n die Zahl der Kegelschnitte eines zweifach ausgedehnten Systems N, welche (als Curven 2. Cl. aufgefasst) *sich auf einen Büschel von Curven 2. O. stützen, oder insbesondere zwei gegebene Gerade berühren; l die Zahl der Kegelschnitte des Systems N, in Bezug auf welche ein gegebener Punkt und eine gegebene Gerade Pol und Polare sind, oder welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren; endlich n' die n dualistisch gegenüberstehende Anzahl.*

Dann ist die Zahl der beiden Systemen gemeinsamen Curven, so lange sie überhaupt endlich ist, gleich:

$$rn' - (r - s + r')\,l + r'n$$
$$\equiv r(n' - l) + sl + r'(n - l).$$

Die Zahlen r, s, $r' - n$, l, n' die wir als *„Charakteristiken“* der Systeme M und N bezeichnen, werden mit den gewöhnlich als Charakteristiken gebrauchten Zahlen durch die Relationen verbunden:

$$\begin{aligned} N\mu^2 &= n' \\ N\mu\nu &= 2l \\ N\nu^2 &= n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M\mu^3 &= s + 3r' \\ M\mu^2\nu &= 2s + 2r' \\ M\mu\nu^2 &= 2s + 2r \\ M\nu^3 &= s + 3r, \end{aligned}$$

aus welch' letzteren die Identität:

$$M\,(2\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 - 2\nu^3) \equiv 0$$

nunmehr in allgemeiner Weise sich ergiebt. Umgekehrt erhält man:

$$s = -\frac{1}{8}\,M\,(2\mu^3 - 3\mu^2\nu - 3\mu\nu^2 + 2\nu^3),$$

$$r = \frac{1}{4}\,M\,(2\nu^3 - \mu\nu^2), \qquad r' = \frac{1}{4}\,M\,(2\mu^3 - \mu^2\nu),$$

Ausdrücke, die im Falle M der vollständige Durchschnitt zweier vierfach ausgedehnter Systeme L_1, L_2 ist (wofür wir $M = L_1 L_2$ schreiben), die folgenden einfachen, auch direct leicht abzuleitenden Relationen ergeben:

$$s - r - r' = 2(\lambda_1 \lambda_2' + \lambda_2 \lambda_1')$$
$$r = \lambda_1 \lambda_2 \qquad r' = \lambda_1' \lambda_2' \text{ *)}.$$

Für zwei- und dreifach ausgedehnte Systeme liefert der Cremona'-sche Satz ähnliche *Moduldarstellungen*, wie wir sie in § 9 hinsichtlich der ein- und vierfach ausgedehnten Systeme kennen lernten.

Führen wir diese ein, so können wir alle in dem Charakteristikenproblem der Kegelschnitte einbegriffenen Fragestellungen durch einen einzigen Satz beantworten.

Wir fügen zu diesem Behufe zu den § 9 benutzten Bezeichnungen noch die folgenden:

Es sollen μ^2, ν^2 resp. die dreifach ausgedehnten Systeme bezeichnen, welche der vollständige Schnitt je zweier Systeme μ und ν sind, $\frac{\mu\nu}{2}$ das System der Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade als Polare eines gegebenen Punktes haben; α soll das Kegelschnittsystem bedeuten, das von allen Punktepaaren einer Geraden, α' dasjenige, welches von allen Strahlenpaaren eines Punktes gebildet wird; endlich sei β das System aller Kegelschnitte, welche ein gegebenes Poldreieck besitzen.

Dann ist mit Bezug auf diese und die § 9 der voranstehenden Arbeit eingeführten Bezeichnungen für vier-, drei-, zwei- und einfach ausgedehnte Kegelschnittsysteme L, M, N, Q:

I.

$$\lambda = L\tau \qquad \lambda' = L\sigma$$
$$(1) \qquad L = \lambda\mu + \lambda'\nu.$$

II.

$$r = M\alpha' \qquad s = M\beta \qquad r' = M\alpha$$
$$(2) \qquad M = r\mu^2 + (s - r - r')\frac{\mu\nu}{2} + r'\nu^2.$$

*) Eine besonders symmetrische Form nimmt der Satz von Cremona an, wenn man für r, s, r' neue Charakteristiken einführt, die durch die Gleichungen:

$$b = r + r' \qquad a = s - r \qquad a' = s - r'$$

definirt sind, und von welchen die letzteren die Zahlen der Punktepaare, bezüglich Strahlenpaare des Systems M darstellen, welche einen festen Punkt, bezüglich eine feste Gerade enthalten. Es wird alsdann, wenn man noch s_1 für $\frac{1}{2}(a + b + a')$, und σ_1 für $\frac{1}{2}(n + l + n')$ schreibt,

$$MN = (s_1 - a)\,n' + (s_1 - b)\,l + (s_1 - a')\,n$$
$$\equiv a(\sigma_1 - n') + b(\sigma_1 - l) + a'(\sigma_1 - n).$$

III.

$$n = N\nu^2 \qquad l = N\frac{\mu\nu}{2} \qquad n' = N\mu^2$$

$$N = (n-l)\,\alpha + l\beta + (n'-l)\,\alpha'. \tag{3}$$

IV.

$$q = Q\nu \qquad q' = Q\mu$$

$$Q = q\sigma + q'\tau \tag{4}$$

Um nun die Zahl der Curven zu bestimmen, in denen sich irgend welche, in den Dimensionen passend gewählte Kegelschnittsysteme durchdringen, multiplicire man die durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) *gegebenen Moduln derselben mit einander, und ersetze dann die Producte der* μ, ν, α, β, σ, τ *bezüglich durch die Werthe:*

$$\begin{array}{lll}
\mu^5 = 1 & \mu^4\nu = 2 & \mu^3\nu^2 = 4 \\
\mu^2\nu^3 = 4 & \mu\nu^4 = 2 & \nu^5 = 1 \\
\alpha\mu^2 = 0 & \alpha\mu\nu = 0 & \alpha\nu^2 = 1 \\
\beta\mu^2 = 1 & \beta\frac{\mu\nu}{2} = 1 & \beta\nu^2 = 1 \\
\alpha'\mu^2 = 1 & \alpha'\mu\nu = 0 & \alpha'\nu^2 = 0
\end{array}$$

$$\sigma\mu = \tau\nu = 0 \qquad \sigma\nu = \tau\mu = 1.$$

Hinsichtlich der *Beweglichkeit der Lösungen* ist mit Bezug auf die Cremona'sche Formel Aehnliches zu sagen, wie bei dem Chasles'schen Satze. Es haben innerhalb des zweifach ausgedehnten Systems die Lösungen im Allgemeinen die Maximalbeweglichkeit 2; nämlich immer dann, wenn das dreifach ausgedehnte System nicht ∞^2 oder das zweifach ausgedehnte nicht ∞^1 ausgeartete Curven der dritten Art enthält, und in noch zwei weiteren unschwer anzugebenden Fällen, wo diese Vorkommnisse wirklich zugleich auftreten. In den übrigen Fällen findet eine Verringerung der Beweglichkeit einzelner Lösungen von 2 auf 1 statt.*)

*) Eine Theorie, welche etwa zwei Systeme von Curven 2. *Ordnung* einander gegenüberstellte, und nun, ohne durch die Begriffe der „vollständigen Form" und der „wirklichen Lösung" hindurchzugehen, direct die Zahl der *beweglichen* Curven 2. O. anzugeben suchte, die beiden Systemen gemeinsam sind, dürfte nicht unterlassen, hervorzuheben, dass der Cremona'sche Satz da, wo er im Sinne einer solchen Theorie richtig ist (nämlich bei Ausschluss der im Texte angedeuteten Fälle), *nicht* schlechthin die Zahl der *beweglichen* Schnittcurven angiebt, sondern die Zahl derjenigen, welche die *Maximalbeweglichkeit* 2 haben. Denn es giebt noch (scheinbare) Lösungen, deren Beweglichkeit 1 ist, und die in der Cremona'schen Formel nicht mitgezählt sind.

Leipzig, im Juli 1885.