

Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen.

Von

ED. WILTHEISS in Halle.

Bei vielen derjenigen Abelschen Integralen, welche sich auf Abelsche Integrale von niedererem Range zurückführen lassen, kann man unmittelbar eine Substitution angeben, welche gewisse Formen der ursprünglichen Integrale ungeändert lässt, obgleich die betreffenden Integrale niedereren Ranges eine entsprechende Substitution nicht gestatten. So bleibt z. B. das Integral

$$\int \frac{(x^{n-2}-x^2) dx}{\sqrt{x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \dots + bx^2 + ax + 1}},$$

dessen Reduction Malet (Journal für Mathematik, Bd. 76, S. 97) und Brioschi (Comptes rendus, t. LXXXV, p. 708) gezeigt haben, bei der Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

ungeändert. Ferner, wenn das Abel'sche Integral vom Range III reducible wird, so kann man die dem Integral zu Grunde liegende Gleichung auf die Form

$$\sqrt{x_1(px_1+qx_2)} + \sqrt{x_2(rx_1+sx_2)} + \sqrt{x_3(x_3+ax_1+bx_2)} = 0$$

bringen (vergl. S. v. Kowalevski, Acta mathematica, t. IV, p. 393); da diese Gleichung bei der Substitution

$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1 : \xi_2 : -(\xi_3 + a\xi_1 + b\xi_2)$$

ungeändert bleibt, so giebt es auch, wie man leicht nachweisen kann, gewisse zugehörige Integrale, welche bei dieser Substitution höchstens ihr Vorzeichen ändern.

Diesen Substitutionen, welche die Integrale ungeändert lassen, entsprechen nun Transformationen der zugehörigen Thetafunctionen, bei welchen die ursprünglichen und die transformirten Parameter der Thetafunctionen einander gleich sind und somit eine sogenannte

complexe Multiplication stattfindet, d. i. eine solche Transformation, welche Frobenius (Journal für Mathematik, Bd. 95, S. 264) eine „principale“ nennt. Dies findet nun allgemein, nicht in einzelnen Fällen allein, statt: Sobald eine Thetafunction durch eine Transformation in eine andere Thetafunction übergeführt wird, die in das Product von Thetafunctionen von weniger Variablen zerfällt, (was ja eine Reduction des zur ursprünglichen Thetafunction gehörigen Integrals auf Integrale niedereren Ranges zur Folge hat), so existirt für diese Thetafunction mindestens *eine* principale Transformation. — Dies nun nachzuweisen, diese Transformationen näher zu untersuchen, und sodann aus denselben die Beziehungen herzuleiten, welche zwischen den Parametern der ursprünglichen Thetafunction bestehen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Die Parameter der Thetafunctionen will ich in bekannter Weise mit $\tau_{\alpha\beta}$, ($\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$) bezeichnen, wo die Indices α und β , wie später auch γ und δ , die Werthe $1, 2, \dots, \varrho$, anzunehmen haben. Wenn nun $\tau'_{\alpha\beta}$ die transformirten Parameter bedeuten, so hängen diese mit den $\tau_{\alpha\beta}$ durch die Gleichungen

$$(1) \quad n_{\varrho+\alpha,\beta} + \sum_{\gamma} n_{\varrho+\alpha,\varrho+\gamma} \tau'_{\beta\gamma} = \sum_{\gamma} n_{\gamma,\delta} \tau_{\alpha\gamma} + \sum_{\gamma,\delta} n_{\gamma,\varrho+\delta} \tau_{\alpha\gamma} \tau'_{\beta\delta}$$

zusammen, wobei das System der ganzen Zahlen $n_{x,\lambda}$ den Bedingungen

$$(2) \quad \sum_x \xi_x \xi_{\lambda} n_{x,\mu} n_{\varrho+x,\varrho+\lambda} = \sum_x \xi_x \xi_{\lambda} n_{\mu,x} n_{\varrho+\lambda,\varrho+x} = \begin{cases} n, & \text{für } \lambda = \mu, \\ 0, & \text{für } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

zu genügen hat, in denen x, λ, μ , wie im folgenden auch ν , die Werthe $1, 2, \dots, 2\varrho$ annehmen, und sodann die Indices modulo 2ϱ auf die Zahlen $1, 2, \dots, 2\varrho$ reducirt werden sollen; ξ_x soll den Werth $+1$ oder -1 bedeuten, je nachdem $x \leq \varrho$ oder $x > \varrho$ ist. Die Zahl n nennt man den Grad der Transformation.

Zugleich mit den Gleichungen (1) bestehen noch die weiteren Gleichungen

$$(3) \quad \omega_{\alpha x} = \sum_{\lambda} n_{x\lambda} \omega'_{\alpha\lambda},$$

in denen die $\omega_{\alpha\beta}$ beliebig sind und nur der Bedingung genügen, dass ihre Determinante von Null verschieden ist, während die $\omega_{\alpha,\varrho+\beta}$ durch die Gleichungen

$$(4) \quad \omega_{\alpha,\varrho+\beta} = \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \tau_{\gamma\beta}$$

bestimmt sind. Die $\omega'_{\alpha x}$, die dann durch die Gleichungen (3) vollkommen bestimmt sind, hängen mit den $\tau'_{\alpha\beta}$ durch Gleichungen zu-

sammen, die den Gleichungen (4) ganz analog gebildet sind. Diese Transformation will ich entsprechend den Coefficienten $n_{\alpha\lambda}$ mit (N) bezeichnen.

Es sei jetzt (N') eine andere Transformation mit den Coefficienten $n'_{\alpha\lambda}$, bei welcher also an Stelle der Gleichungen (3) die Gleichungen

$$(5) \quad \omega'_{\alpha\alpha} = \sum_{\lambda} n'_{\alpha\lambda} \omega''_{\alpha\lambda}$$

treten. Die aus den beiden Transformationen (N) und (N') zusammengesetzte Transformation, d. i. diejenige Transformation, welche ich erhalte, wenn ich zuerst die Transformation (N) und dann die Transformation (N') ausführe, bezeichne ich mit

$$(N)(N') = (M).$$

Und die Coefficienten $m_{\alpha\lambda}$ dieser Transformation findet man bekanntlich dadurch, dass man aus den Gleichungen (5) die Ausdrücke für $\omega'_{\alpha\alpha}$ in die Gleichungen (3) einsetzt:

$$(6) \quad m_{\alpha\lambda} = \sum_{\mu} n_{\alpha\mu} n'_{\mu\lambda}.$$

Ist insbesondere (N') die supplementäre Transformation, die ich mit $(N)^{-1}$ bezeichnen will, d. h. ist

$$(7) \quad n'_{\alpha\lambda} = \xi_{\alpha} \xi_{\lambda} n_{\rho+\lambda, \rho+\alpha},$$

wo ξ_{α} die oben angegebene Bedeutung hat, so ist bei der Zusammensetzung die Reihenfolge ohne Einfluss:

$$(N)(N)^{-1} = (N)^{-1}(N),$$

und das Resultat der Zusammensetzung ist eine Multiplication mit n ; denn in beiden Fällen wird zu Folge der Gleichungen (2)

$$(8) \quad m_{\alpha\lambda} = 0, \text{ wenn } \lambda \geq \alpha, \quad m_{\alpha\alpha} = n,$$

so dass die Gleichungen zwischen $\omega_{\alpha\alpha}$ und $\omega'_{\alpha\alpha}$ die Form $\omega_{\alpha\alpha} = n \omega'_{\alpha\alpha}$ annehmen.

Ist ferner N eine principale Transformation, d. h. ist $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$, so kann man bekanntlich den $\omega_{\alpha\beta}$ solche Werthe geben, dass

$$(9) \quad \omega_{\alpha\alpha} = \mu_{\alpha} \omega'_{\alpha\alpha}$$

wird. Die Grössen μ_{α} nennt man die Multiplicatoren der bei dieser Transformation stattfindenden complexen Multiplication, und dieselben sind die Wurzeln der Eliminationsresultante der $\omega'_{\alpha\alpha}$ aus den Gleichungen $\mu_{\alpha} \omega'_{\alpha\alpha} = \sum_{\lambda} n_{\alpha\lambda} \omega'_{\alpha\lambda}$, in welche für den Fall einer principalen

Transformation die Gleichungen (3) sich verwandeln. —

Wendet man auf die aus den Grössen $\omega_{\alpha\alpha}$ gebildeten Thetafunctionen, bei welchen die principale Transformation (N) stattfindet,

irgend eine Transformation (H) an, so findet auch für diese transformierten Thetafunctionen eine principale Transformation statt, und zwar ist dieselbe

$$(H)^{-1}(N)(H),$$

und die Multiplicatoren sind

$$h\mu_\alpha,$$

wenn h der Grad der Transformation (H) bedeutet. Bezeichnet man nämlich die durch die Transformation (H) aus den $\omega_{\alpha x}$ entstehenden Grössen mit $\bar{\omega}_{\alpha x}$, so treten durch die Transformation $(H)^{-1}$ an Stelle der $\bar{\omega}_{\alpha x}$ die Grössen $\frac{1}{h}\omega_{\alpha x}$ (siehe (8)), durch die principale Transformation (N) an Stelle der $\omega_{\alpha x}$ die Grössen $\frac{1}{\mu_\alpha}\omega_{\alpha x}$ (vergl. (9)) und endlich durch die Transformation (H) an Stelle der $\omega_{\alpha x}$ wieder die $\bar{\omega}_{\alpha x}$; folglich kommen durch die gesammte Transformation $(H)^{-1}(N)(H)$ die Grössen $\frac{1}{h\mu_\alpha}\bar{\omega}_{\alpha x}$ an Stelle der $\bar{\omega}_{\alpha x}$ zu stehen. Und damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Da eine transformierte Thetafunction durch die supplementäre Transformation wieder in die ursprüngliche zurückgeführt wird, so folgt daraus, dass eine principale Transformation der transformierten Thetafunction auch eine solche der ursprünglichen Thetafunction zur Folge hat. Dies gilt natürlich auch, wenn die transformierte Thetafunction in ein Product von Thetafunctionen mit weniger Variablen zerfällt. Folglich kann man die sämtlichen principalen Transformationen der ursprünglichen Thetafunction herstellen, sobald man diejenigen der zerfallenden Thetafunction kennt: Ist (P) diejenige Transformation, welche eine Thetafunction in eine zerfallende Thetafunction überführt, ist (H) die principale Transformation der zerfallenden Thetafunction, so findet bei der ursprünglichen Thetafunction die principale Transformation

$$(P)(H)(P)^{-1}$$

statt.

Es handelt sich also darum, die Transformation H herzustellen.

Es sei nun

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_\varrho) = \prod_{\sigma=0}^h \vartheta(v_{\sigma+1}, v_{\sigma+2}, \dots, v_{\sigma+1}),$$

wo $v_1 = 1$, $v_{h+1} = \varrho$ sein soll, die in ein Product von Thetafunctionen zerfallende Thetafunction; dann muss bekanntlich in derselben

$$(10) \quad \tau_{ee} = \tau_{ee} = 0$$

sein, wenn

$$c > v_p \text{ und zugleich } e \leq v_p, \text{ für } p = 1, 2, \dots, h.$$

Um die principalen Transformationen dieser Thetafunction zu erhalten, lässt man in der Gleichung (1) $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$ werden, setzt für

die $\tau_{\alpha\beta}$ diese speciellen Werthe (10), und bestimmt unter der Voraussetzung, dass die von Null verschiedenen $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ gegenseitig unabhängig seien, die Coefficienten $n_{x\lambda}$; die erhaltenen Systeme $n_{x\lambda}$ geben dann die principalen Transformationen. Nach der Substitution dieser Werthe für $\tau_{\alpha\beta}$ besteht das System der Gleichungen (1) aus Gruppen von der Form:

$$n_{q+i,j} + \sum_s n_{q+i,q+s} \tau_{js} = \sum_r n_{rj} \tau_{ir} + \sum_{rs} n_{r,q+s} \tau_{ir} \tau_{js},$$

wo

$$v_k < i \leq v_{k+1}, \quad v_l < j \leq v_{l+1}, \quad \text{für } k, l = 0, 1, \dots, h,$$

und die Summation bezüglich r von $v_k + 1$ bis v_{k+1} , bezüglich s von $v_l + 1$ bis v_{l+1} auszuführen ist. Aus diesen Gleichungen erkennt man, dass erstens, wenn k und l verschieden sind, alle in den betreffenden Gleichungen vorkommenden $n_{x\lambda}$ Null sein müssen, denn die τ_{js} und τ_{ir} sind sämmtlich verschieden und sollen gegenseitig unabhängig sein, und dass zweitens, wenn $k = l$ ist, die $n_{x,k}$ auch Null sind mit Ausnahme von $n_{i,i}$ und $n_{q+j,q+j}$, die denselben Werth haben müssen:

$$n_{i,i} = n_{q+j,q+j}, \quad v_k < i, j \leq v_{k+1},$$

denn die in den betreffenden Gleichungen vorkommenden τ_{js} und τ_{ir} sind verschieden, bis auf τ_{ij} , das sowohl als Coefficient von $n_{i,i}$ als auch von $n_{q+j,q+j}$ sich findet. Folglich ist allgemein

$$n_{x,\lambda} = 0, \quad \text{für } x \geq \lambda,$$

$n_{x,x} = n_{q+x,q+x} = \mu_f$, wenn $v_f < x \leq v_{f+1}$, für $f = 0, 1, \dots, h$. Aus den Gleichungen (2) folgt sodann, dass $\mu_f^2 = n$, so dass man

$$\mu_f = \varepsilon_f \mu$$

setzen kann, wo μ eine ganze Zahl und

$$\varepsilon_f = +1 \quad \text{oder} \quad -1$$

ist. Hieraus ersieht man, dass diese Transformation zusammengesetzt ist aus einer Multiplication mit μ und der linearen Transformation, bei welcher die Coefficienten die folgenden Werthe haben:

$$\eta_{x,\lambda} = 0, \quad \text{für } x \geq \lambda,$$

$$\eta_{\alpha,\alpha} = \eta_{q+\alpha,q+\alpha} = \varepsilon_f, \quad \text{wenn } v_f < \alpha \leq v_{f+1}, \quad \text{für } f = 0, 1, \dots, h.$$

Da hier die Multiplicationen mit ganzen Zahlen nicht in Betracht kommen, so sind diese linearen Transformationen die gesuchten principalen Transformationen der in ein Product von Thetafunctionen zerfallenden Thetafunction, die wir oben mit (H) bezeichnet haben. Die dabei auftretenden Multiplicatoren sind eben diese Grössen $\eta_{\alpha\alpha} = \varepsilon_f = \pm 1$. — Indem man nun dies Resultat zu den Betrachtungen auf Seite 130 hinzunimmt, kann man das Ergebniss in folgender Weise aussprechen:

tion (K) sind, so sind $\xi_x \xi_\lambda k_{q+\lambda, q+x}$ diejenigen der supplementären Transformation (vergl. (7)), folglich muss hier

$$k_{x, \lambda} = \xi_x \xi_\lambda k_{q+\lambda, q+x}$$

sein, oder:

$$\begin{aligned} k_{\alpha \beta} &= k_{\beta+q, \alpha+q}, \\ k_{\alpha, q+\alpha} &= 0, \quad k_{\alpha, q+\beta} = -k_{\beta, q+\alpha}, \\ k_{q+\alpha, \alpha} &= 0, \quad k_{q+\alpha, \beta} = -k_{q+\beta, \alpha}. \end{aligned}$$

Der Grad der principalen Transformation ist p^2 . Denn bei einer zusammengesetzten Transformation ist der Grad gleich dem Producte der Grade der einzelnen Transformationen, aus denen sie zusammengesetzt ist. — Ist aber insbesondere der Grad von (P), d. i. p , eine gerade Zahl, so kann man die Transformation (K) zerlegen in eine Multiplication mit 2 und eine ebenfalls wieder zu sich supplementären Transformation (K^0) vom Grade $(\frac{1}{2}p)^2$, die wieder eine principale Transformation der Thetafunction ist, und zwar mit den Multiplicatoren $\frac{1}{2} \eta_{\alpha\alpha} p$. Um dies zu zeigen, will ich die Ausdrücke der $k_{x\lambda}$ in den Coefficienten $p_{x\lambda}$ der Transformation (P) angeben, wie sich dieselben aus den Gleichungen (6) mit Hilfe der Bedingungen (2) unmittelbar ergeben: Wenn ich die Annahme mache, dass $\eta_{1,1}, \eta_{2,2}, \dots, \eta_{g,g}$ diejenigen der Multiplicatoren seien, welche gleich +1 sind, während die übrigen $\eta_{g+1, g+1}, \dots, \eta_{q, q}$ den Werth -1 haben, eine Annahme, die ich bekanntlich machen kann, ohne dadurch eine Beschränkung einzuführen, so ist

$$\begin{aligned} (11) \quad k_{x, x} &= p + 2\xi_x \sum_i (p_{q+x, i} p_{x, q+i} - p_{x, i} p_{q+x, q+i}), \\ k_{x, \lambda} &= 2\xi_\lambda \sum_i (p_{q+\lambda, i} p_{x, q+i} - p_{x, i} p_{q+\lambda, q+i}), \quad \text{für } \lambda \geq x, \end{aligned}$$

wo die Summe bezüglich i von $g+1$ bis zu q auszudehnen ist. Ist nun p eine gerade Zahl, so sind die sämtlichen Coefficienten $k_{x\lambda}$ gerade Zahlen, und hieraus folgt, dass die Transformation (K) aus einer Multiplication mit 2 und einer Transformation (K^0) mit den Coefficienten

$$k_{x\lambda}^0 = \frac{1}{2} k_{x\lambda}$$

zusammengesetzt ist. Dass diese Transformation (K^0) eine principale Transformation mit den Multiplicatoren $\frac{1}{2} p \eta_{\alpha\alpha}$ ist, bedarf wohl kaum noch eines besonderen Beweises.

Der Specialfall dieses Satzes für $p = 2$ verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: Wenn durch eine Transformation zweiten Grades eine Thetafunction in eine verfallende Thetafunction übergeführt

wird, so existirt für diese Thetafunction eine principale Transformation, die linear ist, und deren Multiplicatoren die Werthe $+1$ und -1 haben.

Mittelst dieses Satzes kann man leicht diejenigen hyperelliptischen Integrale bestimmen, bei welchen die zugehörigen Thetafunctionen durch eine quadratische Transformation in zerfallende Thetafunctionen übergeführt werden. Einer linearen Transformation der Thetafunctionen entspricht nämlich eine lineare gebrochene Substitution der betreffenden Integrale:

$$(12) \quad x = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}.$$

Der supplementären Transformation entspricht diejenige Substitution, die ich erhalte, wenn ich (12) nach ξ auflöse:

$$\xi = \frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}.$$

Sollen nun durch eine quadratische Transformation die Thetafunctionen in ein Product von mehreren Thetafunctionen zerfallen, so müssen beide Substitutionen identisch, also $\alpha = -\delta$ und demnach

$$x = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi - \alpha}$$

sein, und diese Substitutionen müssen ferner die Wurzelgrössen in den Integralen ungeändert lassen. Nun kann man diese Substitution, je nachdem $\gamma = 0$ oder $\gamma \geq 0$ ist, in der Form

$$\left(ax + \frac{1}{2}\beta\right) = -\left(\alpha\xi + \frac{1}{2}\beta\right),$$

oder

$$(\gamma x - \alpha) = \frac{\alpha^2 + \beta\gamma}{\gamma\xi - \alpha}$$

schreiben. Und hieraus erkennt man, dass die Wurzelgrössen in den Integralen durch lineare Substitutionen so umgewandelt werden können, dass sie bei der Substitution

$$x' = -\xi' \quad \text{oder} \quad x' = \frac{x}{\xi}$$

ungeändert bleiben; sie müssen also eine der folgenden Formen haben:

$$(13a) \quad \sqrt{(x-a)(x+a)(x-b)(x+b)\cdots} = \sqrt{R(x^2)},$$

$$(13b) \quad \sqrt{x(x-a)\left(x-\frac{x}{a}\right)(x-b)\left(x-\frac{x}{b}\right)\cdots} = \sqrt{R_1(x)},$$

$$(13c) \quad \sqrt{(x-a)\left(x-\frac{x}{a}\right)(x-b)\left(x-\frac{x}{b}\right)\cdots} = \sqrt{R_2(x)}.$$

Die beiden letzten Wurzelgrössen lassen sich aber durch die Substitution

$$(14) \quad x = \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}}$$

auf die erstere zurückführen.*) Folglich müssen die hyperelliptischen Integrale, bei denen die zugehörigen Thetafunctionen durch eine quadratische Transformation in ein Product von Thetafunctionen von weniger Variablen übergeführt werden, durch eine lineare gebrochene Substitution so umgewandelt werden können, dass die Wurzelgrösse nur das Quadrat der Variablen enthält. — Für Thetafunctionen mit zwei Argumenten ist dies Resultat schon von Königsberger (Journal für Mathematik, Bd. 67, S. 74) ausgesprochen worden, nur hat sich derselbe dabei der Form (13 b) der Wurzelgrösse bedient.

Das oben entwickelte Hauptresultat kann man in folgender Weise umkehren: Ist bei einer Thetafunction eine principale Transformation möglich, bei der die ersten g Multiplicatoren gleich p , die übrigen $q - g$ gleich $-p$ sind, so existiren zwei Thetafunctionen, von denen die eine nur g , die andere $q - g$ Variable enthält, und deren Product rational durch jene Thetafunctionen ausgedrückt werden kann.

Dies kann man dadurch nachweisen, dass man die principale Transformation (K) , oder dieselbe mit einer Multiplication zusammengesetzt, in der Weise $(P)(H)(P)^{-1}$ zerlegt, und dann auf die Thetafunction die Transformation (P) anwendet. Denn die durch (P) transformirte Thetafunction ist rational durch die ursprünglichen Thetafunctionen ausdrückbar, und sie zerfällt in das Product zweier Thetafunctionen, weil für sie (H) eine principale Transformation ist. Für $q = 2$ ist diese Zerlegung leicht ausführbar. Ist nämlich

$$\begin{array}{cccc} k_{11}, & k_{12}, & 0, & k_{14}, \\ k_{21}, & k_{22}, & -k_{14}, & 0, \\ 0, & -k_{41}, & k_{11}, & k_{21}, \\ k_{41}, & 0, & k_{12}, & k_{22}, \end{array}$$

*) Auf Grund dieser Bemerkung ist die Reduction der hyperelliptischen Integrale

$$\int f(x) \frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}} \quad \text{und} \quad \int f_1(x) \frac{dx}{\sqrt{R_2(x)}}$$

in einer wohl einfacheren Weise ausführbar, als dies durch Malet (Journal für Mathematik, Bd. 76, S. 97) und Brioschi (Comptes rendus, t. LXXXV, p. 708) geschehen ist. Durch die Substitution (14) gehen nämlich diese Integrale in

$$\int F(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi^2)}} = \int \{F_1(\xi^2) + \xi F_2(\xi^2)\} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi^2)}}$$

über, und macht man jetzt die Substitution $\xi^2 = x'$, so erhält man

$$\int F_1(x') \frac{dx'}{\sqrt{x' R(x')}} + \int F_2(x') \frac{dx'}{2\sqrt{R(x')}}.$$

Und damit ist die Reduction ausgeführt. Wenn ursprünglich unter den Wurzelzeichen ganze Functionen von dem $2n$ ten, bez. $(2n - 1)$ ten Grade standen, so sind nach der Reduction daselbst nur ganze Functionen von dem n ten, bez. $(n + 1)$ ten Grade zu finden.

worin in Folge der Bedingungsgleichungen (2)

$$k_{11} + k_{22} = 0, \quad k_{ii}^2 + k_{12}k_{21} + k_{14}k_{41} = p^2, \quad \text{für } i = 1, 2$$

das Coefficientensystem der Transformation (K) , und setzt man diese Transformation mit einer Multiplication mit $(2k_{11} \pm p)$ zusammen, so sind, abgesehen von dem Fall, dass gleichzeitig $k_{12}, k_{21}, k_{14}, k_{41}$ Null sind, die Coefficienten der Transformation (P) die folgenden:

$$\begin{array}{cccc} k_{11} \pm p, & k_{12}, & 0, & k_{14}, \\ k_{21}, & k_{22} \mp p, & -k_{14}, & 0, \\ 0, & -k_{41}, & k_{11} \pm p, & k_{21}, \\ k_{41}, & 0, & k_{12}, & k_{22} \mp p. \end{array}$$

Ist aber $\varrho > 2$, so wird eine derartige Zerlegung von (K) sehr umständlich. Wohl aber kann man den obigen Satz leicht beweisen, wenn man die Eigenschaften der Thetafunctionen zu Hilfe nimmt. Es bedeute $\Theta(u_1, u_2, \dots, u_\varrho)$ eine derjenigen Thetafunctionen, welche bis auf einen hinzutretenden Exponentialfactor ungeändert bleibt, wenn man $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ gleichzeitig um $2\omega_{1,x}, 2\omega_{2,x}, \dots, 2\omega_{\varrho,x}$ vermehrt. Wenn dann $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\varrho$ die Multiplicatoren bei einer principalen Transformation sind, so ist in Folge dieser Transformation $\Theta(\mu_1 u_1, \mu_2 u_2, \dots, \mu_\varrho u_\varrho)$ eine rationale Function derselben Thetafunctionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$. Setzt man nun in dem Additionstheorem der Thetafunctionen, d. i. in der Darstellung von

$$\Theta(v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_\varrho + w_\varrho) \Theta(v_1 - w_1, v_2 - w_2, \dots, v_\varrho - w_\varrho)$$

durch Thetafunctionen mit den Argumenten $v_1, v_2, \dots, v_\varrho$ bez. $w_1, w_2, \dots, w_\varrho$, die Werthe $pu_1, pu_2, \dots, pu_\varrho$ an Stelle von $v_1, v_2, \dots, v_\varrho$ und die Werthe $pu_1, pu_2, \dots, pu_g, -pu_{g+1}, -pu_{g+2}, \dots, -pu_\varrho$ an Stelle von $w_1, w_2, \dots, w_\varrho$, so erhält man

$$\Theta(2pu_1, 2pu_2, \dots, 2pu_g, 0, 0, \dots, 0) \Theta(0, 0, \dots, 0, 2pu_{g+1}, 2pu_{g+2}, \dots, 2pu_\varrho)$$

rational ausgedrückt durch Thetafunctionen mit den Argumenten $pu_1, pu_2, \dots, pu_\varrho$, bez. $pu_1, pu_2, \dots, pu_g, -pu_{g+1}, -pu_{g+2}, \dots, -pu_\varrho$. Diese Thetafunctionen aber kann man, die ersteren, weil eine gewöhnliche Multiplication vorliegt, die anderen, weil p und $-p$ die Multiplicatoren einer principalen Transformation sind, durch Thetafunctionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ ausdrücken. Mithin ist

$$\Theta(2pu_1, 2pu_2, \dots, 2pu_g, 0, 0, \dots, 0) \Theta(0, 0, \dots, 0, 2pu_{g+1}, 2pu_{g+2}, \dots, 2pu_\varrho)$$

eine rationale Function von Thetafunctionen mit den Argumenten $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$. — Nun ist aber $\Theta(2pu_1, 2pu_2, \dots, 2pu_g, 0, 0, \dots, 0)$ eine Thetafunction von g Argumenten: $\bar{\Theta}(u_1, u_2, \dots, u_g)$, denn diese Function $\Theta(2pu_1, \dots)$ bleibt bis auf einen hinzutretenden Exponentialfactor ungeändert, wenn man die g Argumente u_1, u_2, \dots, u_g um

$2\omega_{1,x}, 2\omega_{2,x}, \dots, 2\omega_{g,x}$ vermehrt. Dasselbe gilt auch von der andern Thetafunction: es ist

$$\Theta(0, 0, \dots, 0, 2p u_{g+1}, 2p u_{g+2}, \dots, 2p u_g) = \bar{\Theta}(u_{g+1}, u_{g+2}, \dots, u_g).$$

Folglich ist

$$\bar{\Theta}(u_1, u_2, \dots, u_g) \bar{\Theta}(u_{g+1}, u_{g+2}, \dots, u_g)$$

gleich einer rationalen Function der ursprünglichen Thetafunctionen. Und damit ist obiger Satz bewiesen. —

Wenn eine Thetafunction nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen mit weniger Variablen zerfällt, so ist dies auch bei allen Thetafunctionen der Fall, die aus jener durch lineare Transformationen abgeleitet werden; mithin bestehen auch für alle diese Thetafunctionen principale Transformationen von dieser besondern Form (K), und alle diese Transformationen werden nach den Bemerkungen auf Seite 130 gegenseitig in der Weise:

$$(K') = (L) (K) (L)^{-1}$$

aus einander abgeleitet, wo (L) eine lineare Transformation bedeutet. Ich will nun eine möglichst einfache dieser Transformationen (K') herstellen, d. h. eine solche, in der möglichst viele der Coefficienten Null sind.

Zu dem Zwecke bringe ich die Transformation (P) durch das von Kronecker (Monatsberichte der Berliner Academie 1866, S. 608) angegebene Verfahren auf die Normalform, d. h. ich zerlege (P) in der Weise

$$(P) = (L') (P_1),$$

wo (L') eine lineare Transformation bedeutet, und in (P_1) die Coefficienten

$$p_{q+\alpha, \beta} = 0, \quad p_{i,j} = 0, \quad p_{q+j, q+i} = 0, \quad \text{wenn } 0 < i < j \leq g.$$

Für die aus der ursprünglichen Thetafunction mittelst der Transformation (L') hergeleiteten Thetafunction gilt nach den obigen Bemerkungen die principale Transformation

$$\begin{aligned} (K_1) &= (L')^{-1} (K) (L') = (L')^{-1} (P) (H) (P)^{-1} (L') \\ &= (L')^{-1} (L') (P_1) (H) (P_1)^{-1} (L')^{-1} (L') = (P_1) (H) (P_1)^{-1}, \end{aligned}$$

und in dieser ist, wie man aus den Gleichungen (11) mit Hilfe der Gleichungen (2) findet:

$$k_{\alpha, \alpha} = k_{q+\alpha, q+\alpha} = \begin{cases} p, & \text{für } \alpha \leq g, \\ -p, & \text{für } \alpha > g, \end{cases}$$

und ausserdem können von Null verschieden sein nur die Glieder:

$$k_{\sigma, \alpha} = k_{q+\alpha, q+\sigma}, \quad k_{\sigma, q+\sigma} = -k_{\sigma, q+\sigma},$$

wenn $\sigma > g$, $\tau \leq g$, $c < \sigma$ ist. Für $q = 2$, $g = 2$ hat demnach das Coefficientensystem folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccc}
 p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{17} & -k_{18}, \\
 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{27} & -k_{28}, \\
 k_{31} & k_{32} & -p & 0 & k_{35} & k_{36} & 0 & -k_{38}, \\
 k_{41} & k_{42} & 0 & -p & k_{45} & k_{46} & k_{47} & 0, \\
 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & k_{57} & k_{58}, \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & k_{67} & k_{68}, \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p & 0, \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p.
 \end{array}$$

Im folgenden will ich die keine Beschränkung enthaltende Annahme machen, dass

$$g \geq q - g;$$

ausserdem will ich überall $k_{\sigma, \tau}$ an Stelle von $k_{q+\tau, q+\sigma}$, ferner $-k_{\sigma, q+c}$ (wo $c < \sigma$) an Stelle von $k_{c, q+\sigma}$ setzen, und dann, wo ich $k_{\sigma, \tau}$ oder $k_{\sigma, q+c}$ schreibe, die beiden Glieder des Coefficientensystems verstehen, wo dieser Buchstabe steht.

Eine weitere Vereinfachung der principalen Transformation (K') erhalte ich dadurch, dass ich für die mit (K) in der Form $(L_q)(K)$ $(L_q)^{-1}$ zusammensetzenden Transformationen (L_q) die folgenden Transformationen nehme:

$$(L_1): \omega_{\alpha, x} = \omega'_{\alpha, x}, \text{ ausgenommen } \omega_{\alpha, i} = \omega'_{\alpha, i} \pm \omega'_{\alpha, q+i}, \text{ wo } 0 < i \leq g;$$

$$(L_2): \omega_{\alpha, x} = \omega'_{\alpha, x}, \text{ ausgenommen } \omega_{\alpha, q+i} = \omega'_{q+i} \pm \omega'_{\alpha, i}, \text{ wo } 0 < i \leq g;$$

$$(L_3): \omega_{\alpha, x} = \omega'_{\alpha, x}, \text{ ausgenommen } \omega_{\alpha, i} = \omega'_{\alpha, i} \pm \omega'_{\alpha, j}, \omega_{\alpha, q+j} \\ = \omega'_{\alpha, q+j} \mp \omega'_{\alpha, q+i} \text{ wo } 0 < i, j \leq g;$$

$$(L_4): \omega_{\alpha, x} = \omega'_{\alpha, x}, \text{ ausgenommen } \omega_{\alpha, r} = \omega'_{\alpha, r} \pm \omega'_{\alpha, i}, \omega_{\alpha, q+i} = \omega'_{\alpha, q+i} \\ \mp \omega'_{\alpha, q+r}, \text{ wo } 0 < i \leq g < r \leq q;$$

$$(L_5): \omega_{\alpha, x} = \omega'_{\alpha, x}, \text{ ausgenommen } \omega_{\alpha, i} = \omega'_{\alpha, i} \pm \omega'_{\alpha, q+r}, \omega_{\alpha, r} = \omega'_{\alpha, r} \\ \mp \omega'_{\alpha, q+i}, \text{ wo } 0 < i \leq g < r \leq q;$$

$$(L_6): \omega_{\alpha, x} = \omega'_{\alpha, x}, \text{ ausgenommen } \omega_{\alpha, r} = \omega'_{\alpha, r} \pm \omega'_{\alpha, s}, \omega_{\alpha, q+s} = \omega'_{\alpha, q+s} \\ \mp \omega'_{\alpha, q+r}, \text{ wo } 0 < r, s \leq q.$$

Denn dadurch treten in (K') bei der Transformation (L_1) :

$$\begin{array}{l}
 k_{c, q+i} \pm k_{c, i} \quad \text{an Stelle von } k_{c, q+i}; \\
 \text{bei } (L_2): k_{c, i} \pm k_{c, q+i} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad k_{c, i} \\
 \text{bei } (L_3): \left\{ \begin{array}{l} k_{c, j} \pm k_{c, i} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad k_{c, j}, \\ k_{c, q+i} \mp k_{c, q+j} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad k_{c, q+i}; \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{bei } (L_4): & \left\{ \begin{array}{lll} k_{r, e+c} \mp k_{i, e+c} & \text{an Stelle von } k_{r, e+c}, & c \geq r, \\ k_{r, i} \mp 2p & \text{,, , , ,} & k_{r, i}; \end{array} \right\} \\ \text{bei } (L_5): & \left\{ \begin{array}{lll} k_{c, e+r} \mp k_{c, i} & \text{,, , ,} & k_{c, e+r}, \quad c \geq r, \\ k_{r, e+i} \mp 2p & \text{,, , ,} & k_{r, e+i}; \end{array} \right\} \\ \text{bei } (I_6): & \left\{ \begin{array}{lll} k_{r, f} \mp k_{s, f} & \text{,, , ,} & k_{r, f}, \text{ für } f=1, 2, \dots, g, \\ k_{r, e+c} \mp k_{s, e+c} & \text{,, , ,} & k_{r, e+c}, \text{ für } e=1, 2, \dots, r-1, \\ & & r+1, \dots, g. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dabei hat c die Werthe $g + 1, g + 2, \dots, q$ zu durchlaufen, und $k_{\alpha, q+\beta}$ ist durch $-k_{\beta, q+\alpha}$ zu ersetzen, wenn $\alpha < \beta$.

Wenn nun durch diese, und auch andere Transformationen erreicht werden kann, dass die Zahlen, die, abgesehen von $k_{cc} = -p$, in der c -ten Zeile stehen:

(14) $k_{\alpha, 1}, k_{\alpha, 2}, \dots, k_{\alpha, g}, k_{\alpha, g+1}, k_{\alpha, g+2}, \dots, k_{\alpha, g+\alpha-1}, k_{\alpha+1, g+\alpha}, k_{\alpha+2, g+\alpha}, \dots, k_{g, g+\alpha}$, für $c = g+1, g+2, \dots, \gamma$, und selbstverständlich, die mit ihnen in Folge von $k_{\alpha, g+\beta} = -k_{\beta, g+\alpha}$, $k_{\alpha, \beta} = k_{g+\alpha, g+\beta}$ gleichwerthigen Coefficienten, noch Null werden, so soll dies schon als ausgeführt betrachtet werden, und es sollen also ausser den Zahlen $k_{x, x} = \pm p$ nur noch die Zahlen (14) für $c = \gamma+1, \gamma+2, \dots, \varrho$ von Null verschieden sein. Indem ich alsdann abwechselnd die Transformationen (L_1) und (L_2) für (L_g) nehme, und zwar zuerst für $i=1$, dann für $i=2, 3, \dots, g$, kann ich durch das bekannte kettenbruchartige Verfahren nach einander

$$(15) \quad k_{y+1, \varrho+1}, k_{y+1, \varrho+2}, \dots, k_{y+1, \varrho+g},$$

und damit zugleich auch die gleichwerthigen Coefficienten $k_{e, e+\gamma+1}$, (was ich im folgenden nicht immer besonders hervorheben werde), zum Verschwinden bringen; hierauf mache ich dadurch, dass ich für (L_q) die Transformation (L_3) nehme, und zwar, indem ich abwechselnd i und j zuerst die Werthe 1 und 2, dann 2 und 3, u. s. w. gebe, auch noch

$$(16) \quad k_{\gamma+1,2}, k_{\gamma+1,3}, \dots, k_{\gamma+1,g}$$

zu Null, so dass in der $(\gamma+1)$ ten Zeile nur die Glieder

$$k_{\gamma+1,1}, k_{\gamma+1,\gamma+1} = -p, k_{\gamma+2,0+\gamma+1}, k_{\gamma+3,0+\gamma+1}, \dots, k_{0,0+\gamma+1}$$

von Null verschieden sind. — Jetzt wiederholt man diese Operation: mittelst der Transformationen (L_1) und (L_2) für $i = 2, 3, \dots, g$ bringt man $k_{y+2, q+2}, k_{y+2, q+3}, \dots, k_{y+2, q+g}$, dann mittelst der Transformation (L_3) noch $k_{y+2, 3}, k_{y+2, 4}, \dots, k_{y+2, g}$ zum Verschwinden. Und so fährt man fort, bis endlich, abgesehen von $k_{xx} = \pm 1$, von Null verschieden nur noch sind:

$$\left. \begin{array}{l} k_{e,1}, k_{e,2}, \dots, k_{e,c-\gamma}, \text{ für } c = \gamma + 1, \gamma + 2, \dots, \varrho, \\ k_{e,\varrho+1}, k_{e,\varrho+2}, \dots, k_{e,\varrho+c-\gamma-1} \\ k_{e,\varrho+c-1}, k_{e+1,\varrho+c-1}, \dots, k_{\varrho,\varrho+c-1} \end{array} \right\} \text{ für } e = \gamma + 2, \gamma + 3, \dots, \varrho,$$

und die damit gleichwerthigen Coefficienten, wie dies aus $k_{\alpha,\beta} = k_{\varrho+\beta,\varrho+\alpha}$, $k_{\alpha,\varrho+\beta} = -k_{\beta,\varrho+\alpha}$ folgt. Für $\varrho = 6$, $g = \gamma = 3$ haben $(g+1)$ te, $(g+2)$ te, ϱ te Zeile, wenn ich nur a_2 , b_2 , c_2 an Stelle von $k_{g+1,2}$, $k_{g+2,2}$, $k_{\varrho,2}$ setze, jetzt die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{10} & -c_{10}, \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & -p & 0 & b_7 & 0 & 0 & b_{10} & 0 & -c_{11}, \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & -p & c_7 & c_8 & 0 & c_{10} & c_{11} & 0. \end{array}$$

Die Gleichungen (2) zwischen den Coefficienten der Transformation reduciren sich hier auf

$$(17) \quad \sum_u k_{r,u} k_{s,\varrho+u} - \sum_v k_{s,v} k_{r,\varrho+v} - 2p k_{s,\varrho+r} = 0, \quad \gamma < r < s \leq \varrho,$$

wo die Summation über u von 1 bis $r-\gamma$, über v von 1 bis $r-\gamma-1$ auszuführen ist. Unter diesen Gleichungen befinden sich insbesondere die Gleichungen

$$k_{\gamma+1,r} k_{s,\varrho+1} - 2p k_{s,\varrho+\gamma+1} = 0, \quad \text{für } s = \gamma+2, \dots, \varrho,$$

und aus diesen geht hervor, dass $k_{\gamma+1,1}$ nicht Null sein kann, denn sonst würden auch $k_{\gamma+2,\varrho+\gamma+1}$, $k_{\gamma+3,\varrho+\gamma+1}$, \dots , $k_{\varrho,\varrho+\gamma+1}$ Null sein, und dies ist ein Widerspruch damit, dass die Coefficienten (14) für $c = \gamma+1$ nicht verschwinden sollen.

Die weitere Reduction werde ich nur für den Fall ausführen, dass p eine ungerade Primzahl ist. Dies geschieht in folgender Weise: Es kann $k_{\gamma+1,1}$ nicht durch p theilbar sein, denn sonst könnte man diese Zahl, da sie gerade ist, durch mehrmalige Wiederholung der Transformation (L_4) für $r = \gamma+1$, $i = 1$ zu Null machen, was, wie eben gezeigt, ausgeschlossen ist. Dann folgt aber aus den eben schon einmal angeführten, in dem System (17) enthaltenen Gleichungen

$$(18) \quad k_{\gamma+1,1} k_{s,\varrho+1} - 2p k_{s,\varrho+\gamma+1} = 0,$$

dass $k_{\gamma+2,\varrho+1}$, $k_{\gamma+3,\varrho+1}$, \dots , $k_{\varrho,\varrho+1}$ durch p theilbar sind. Durch mehrmalige Anwendung der Transformation (L_5) für $i = 1$, $r = \gamma+2$, dann $\gamma+3$, \dots , ϱ , indem man berücksichtigt, dass die $k_{s,2}$ gerade Zahlen sind, macht man

$$(19) \quad k_{\gamma+2,\varrho+1}, k_{\gamma+3,\varrho+1}, \dots, k_{\varrho,\varrho+1},$$

und damit auch, wie aus (18) folgt

$$(20) \quad k_{\gamma+2,\varrho+\gamma+1}, k_{\gamma+3,\varrho+\gamma+1}, \dots, k_{\varrho,\varrho+\gamma+1}$$

zu Null. — Nun wiederholt man diese Operation: Es kann $k_{\gamma+2,2}$ nicht durch p theilbar sein, sonst könnte man erst diese Zahl mittelst der Transformation (L_4) , und dann die Zahl $k_{\gamma+1,1}$ mittelst der Transformation (L_5) zu Null machen, was ausgeschlossen ist. Unter den Gleichungen (17) sind nun auch die folgenden enthalten:

$$k_{\gamma+2,1} k_{s,\varrho+1} + k_{\gamma+2,2} k_{s,\varrho+2} - k_{s,1} k_{\gamma+2,\varrho+1} - 2p k_{s,\varrho+\gamma+2} = 0, \quad \text{für } s = \gamma+3, \dots, \varrho,$$

und wenn man darauf Rücksicht nimmt, dass die Zahlen $k_{s, q+1}$ und $k_{\gamma+2, q+1}$ zu Null gemacht sind, so erkennt man hieraus, dass $k_{s, q+2}$ durch p theilbar ist. Und jetzt kann man wieder mit Hilfe der Transformation (L_5)

$$k_{\gamma+3, q+2}, k_{\gamma+4, q+2}, \dots, k_{q, q+2},$$

und damit zugleich auch

$$k_{\gamma+3, q+\gamma+2}^*, k_{\gamma+4, q+\gamma+2}, \dots, k_{q, q+\gamma+2}$$

zum Verschwinden bringen. Und so fährt man fort, bis, abgesehen von $p_{xx} = \pm p$, nur noch von Null verschieden die folgenden Zahlen sind:

$$k_{c,1}, k_{c,2}, \dots, k_{c, c-\gamma}, \text{ für } c = \gamma + 1, \gamma + 2, \dots, q,$$

d. i. also diejenigen $k_{\alpha\beta}$, bei denen $\alpha \geq \beta + \gamma$. Selbstverständlich sind von den Coefficienten diejenigen, welche zu Folge von $k_{q+\alpha, q+\beta} = k_{\beta, \alpha}$ mit diesen dieselben Werthe haben, auch von Null verschieden. — Damit ist die Reduction ausgeführt.

Die Coefficientensysteme, in denen $\gamma > g$ ist, unterscheiden sich von denjenigen, in welchen $\gamma = g$, nur dadurch, dass in ersteren noch mehr Coefficienten Null sind, wie in dem letzteren; also kann man allgemein sagen: *in dem reducirten System können, abgesehen von $k_{xx} = \pm p$, von Null verschieden sein nur die Coefficienten*

$$k_{\alpha, \beta} = k_{q+\beta, q+\alpha},$$

wenn $\alpha > \beta + g$ oder $\beta > \alpha + g$.

Dem also reducirten System der Coefficienten $k_{\alpha\beta}$ der principalen Transformation (K) will ich noch dadurch eine andere Form geben, dass ich es mit der Transformation (\bar{L}), bei welcher

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha, i} &= \omega'_{\alpha, i}, & \omega_{\alpha, q+i} &= \omega'_{\alpha, q+i}, \\ \omega_{\alpha, r} &= \omega'_{\alpha, q+r}, & \omega_{\alpha, q+r} &= -\omega'_{\alpha, r}, \end{aligned}$$

wo $i = 1, 2, \dots, g$ und $r = g + 1, g + 2, \dots, q$ ist, in der bekannten Weise (\bar{L}) (K) (\bar{L})⁻¹ verbinde. Die Gleichungen des Systems (K):

$$\omega_{\alpha, i} = p \omega'_{\alpha, i}, \quad \omega_{\alpha, q+i} = p \omega'_{\alpha, q+i} + \sum_r k_{q+i, q+r} \omega'_{\alpha, q+r},$$

$$\omega_{\alpha, r} = \sum_i k_{r, i} \omega'_{\alpha, i} - p \omega'_{\alpha, r}, \quad \omega_{\alpha, q+r} = -p \omega'_{\alpha, q+r},$$

wo i die Werthe $1, 2, \dots, g$ und r die Werthe $g + 1, g + 2, \dots, q$ anzunehmen hat und $k_{r, i} = k_{q+i, q+r} = 0$ ist, wenn $r < i + g$, gehen dadurch über in

$$\omega_{\alpha, i} = p \omega'_{\alpha, i}, \quad \omega_{\alpha, q+i} = - \sum_r k_{q+i, q+r} \omega'_{\alpha, r} + p \omega'_{\alpha, q+i},$$

$$\omega_{\alpha, r} = -p \omega'_{\alpha, r}, \quad \omega_{\alpha, q+r} = \sum_i k_{r, i} \omega'_{\alpha, i} - p \omega'_{\alpha, q+r}.$$

Und hieraus erkennt man, dass in dem neuen System von den Coefficienten $\bar{k}_{x,x}$ nur die folgenden: $\bar{k}_{x,x} = \pm p$ und $\bar{k}_{q+i,r} = -\bar{k}_{q+r,i} = k_{q+i,q+r} = k_{r,i}$ für $r \geq i + g$ von Null verschieden sein können.

Das Resultat, zu dem wir gekommen sind, kann ich jetzt in der folgenden Weise aussprechen: Wenn eine Thetafunction durch eine Transformation (P), deren Grad p eine ungerade Primzahl ist, in ein Product von Thetafunctionen von weniger Variablen zerfällt, so kann die ursprüngliche Thetafunction durch eine lineare Transformation so umgeändert werden, dass für dieselbe eine principale Transformation besteht, bei welcher

$$k_{\alpha,\alpha} = k_{q+\alpha,q+\alpha} = \begin{cases} p, & \text{für } \alpha \leq g, \\ -p, & \text{für } \alpha > g, \end{cases}$$

und die übrigen Coefficienten $k_{x,\lambda}$ Null sind, mit Ausnahme von

$$k_{\alpha+q,\beta} = -k_{q+\beta,\alpha}, \quad \text{für } \alpha \geq \beta + g \text{ oder } \beta \geq \alpha + g,$$

welches gerade Zahlen sind. g und $q - g$, wobei $g \geq q - g$, sind die Anzahl der Variablen der Thetafunctionen, in welche die ursprüngliche Thetafunction bei der Transformation zerfällt. — Die Werthe der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ für diese Thetafunction erhält man aus den Gleichungen (1), indem man in denselben $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}$ setzt und für $n_{x,\lambda}$ diese speciellen Werthe der $k_{x,\lambda}$ substituirt: man findet, dass $\tau_{\alpha\beta}$ beliebig ist, wenn zugleich

$$\alpha \text{ u. } \beta \leq g, \quad \text{oder} \quad \alpha \text{ u. } \beta > g$$

und, wenn $\alpha > g \geq \beta$ ist, dass

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha < g + \beta, \\ \frac{k_{q+\alpha,\beta}}{2p} = \frac{l_{\alpha\beta}}{p}, & \text{wenn } \alpha \geq g + \beta, \end{cases}$$

wobei $l_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} k_{q+\alpha,\beta}$ ganze Zahlen sind.

Die Transformation (P), durch welche die Thetafunction zum Zerfallen gebracht wird, hat, wie man sich leicht überzeugt, das Coefficientensystem

$$p_{\alpha\alpha} = p, \quad p_{q+\alpha,q+\alpha} = 1, \quad p_{x,\lambda} = k_{x,\lambda},$$

wo $k_{x,\lambda}$ diese ganz speciellen Coefficienten des reducirten Systems sind.

Für $g = q - 1$, für den Fall also, dass eine Thetafunction nur eine Variable enthält, ist dieser Satz durch Königsberger (Journal für Mathematik, Bd. 67, S. 74) als von Weierstrass herrührend, mitgetheilt. Vergl. auch Aufsätze von S. v. Kowalevski (Acta mathematica, t. IV, p. 393), Picard (Comptes rendus, t. XCII, p. 506, t. XCIII, p. 696).

Halle, im Januar 1885.