

## Zur Theorie der Kreisbogenpolygone II.

Von

HANS FALCKENBERG in Braunschweig.

### Kapitel II.\*)

#### Die Überdeckungszahlen.

Unter der Überschlagungszahl einer Seite eines einfach zusammenhängenden Kreisbogenpolygons verstehe ich, wie allgemein üblich, diejenige Zahl, welche angibt, wie viele volle Überschlagungen (beim sphärischen Dreieck Seitenlänge  $2\pi$ ) die betreffende Seite überschreitet.

Die Beziehungen, welche zwischen den Überschlagungszahlen und den Polygonswinkeln bestehen, sind unter dem Namen Ergänzungsrelationen bekannt; sie sind von *Klein*\*\*) entdeckt und für das Dreieck zuerst abgeleitet worden, *Ihlenburg*\*\*\*) gibt sie für das Viereck an, während sie im Kapitel I dieser Untersuchung\*) auch für das Kreisbogen- $n$ -Eck abgeleitet worden sind.

Unter Überdeckungszahl eines Punktes der Kugel, auf die ich ein Polygon aufgelegt denke, verstehe ich diejenige Zahl, die angibt, wie oft der Punkt von dem gegebenen einfach zusammenhängenden Kreisbogenpolygon vollständig überdeckt wird; dabei soll von einer vollständigen Überdeckung dann nicht gesprochen werden, wenn das Polygon nur gerade bis zu dem in Frage stehenden Punkt heranreicht.

Im Falle des Kreisbogendreiecks gibt *Hurwitz*†) diese Zahl an, indem er sie nach einer analytischen Methode berechnet; auf geome-

\*) Die unter dem gleichen Titel erschienene Arbeit, *Math. Annalen* 77, S. 65 ff. ist als Kapitel I bezeichnet. Vgl. auch die dort herangezogene Literatur!

\*\*) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“. *Math. Ann.* 37 (1890) S. 573.

\*\*\*) „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke“. Dissertation Göttingen 1909.

†) „Über die Nullstellen der hypergeom. Reihe“. *Math. Ann.* 64 (1907), S. 617.

trischem Wege gelangt *Van Vleck*\*) zu den Überdeckungszahlen der Eckpunkte und Gegenpunkte (zweiter Schnittpunkt zweier Seitenkreise) des Dreiecks.

Durch eine ganz elementare geometrische Methode im Sinne des von *F. Klein* in seinen autographierten Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Göttingen 1894 und über lineare Differentialgleichungen, Göttingen 1894 aufgestellten Programms, die im speziellen Falle des Kreisbogendreiecks gleichzeitig eine geometrische Deutung und Ableitung der von *Hurwitz* aufgestellten Formeln liefert, soll im folgenden die Überdeckungszahl für jeden beliebigen Punkt bezüglich jedes beliebigen einfach zusammenhängenden Kreisbogenpolygons angegeben werden. Dabei beschränke ich mich zunächst auf die Erörterung der allgemeinsten Fälle — unter Ausschluß pathologischer Spezialfälle —; für das Kreisbogendreieck und -viereck werde ich aber auch die Sonderfälle vollständig durchdiskutieren (vgl. § 6 Ziffer 4 und § 7 Ziffer 6 und 7). Analoge Methoden würden dann für das Kreisbogen- $n$ -Eck ( $n > 4$ ) in jedem einzelnen Sonderfall die gesuchten Zahlen ergeben.

Um den Zusammenhang mit der Theorie der Differentialgleichungen zu geben, sei an folgendes erinnert:

Der Quotient zweier Partikularlösungen einer Differentialgleichung 2. Ordnung mit  $n$  reellen singulären Stellen, reellen Wurzeln der determinierenden Gleichungen und reellen akzessorischen Parametern bildet die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Kreisbogen- $n$ -Eck ab; umgekehrt kann man jedes einfach zusammenhängende Kreisbogen- $n$ -Eck als eine solche Abbildung auffassen.

Eine analytische Bedeutung der Überschlagungs- und Überdeckungszahlen läßt sich aus dieser Auffassung des Kreisbogen- $n$ -Ecks unmittelbar angeben: Sind  $a_i$  und  $a_{i+1}$  zwei benachbarte singuläre Stellen der Differentialgleichung, so ist die Überschlagungszahl der zugehörigen  $n$ -Ecks-Seite gleich der Anzahl der zwischen  $a_i$  und  $a_{i+1}$  liegenden Nullstellen der in  $a_i$  und  $a_{i+1}$  zum größeren Exponenten gehörigen Fundamentallösungen der Differentialgleichung. Die Überdeckungszahl eines Punktes ist die Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden (komplexen) Nullstellen eines bestimmten Zweiges der Lösung der Differentialgleichung\*\*); insbesondere ist die Überdeckungszahl eines Eckpunktes des Kreisbogenpolygons gleich der Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden (komplexen) Nullstellen der zum größeren Exponenten gehörigen Fundamentallösung und die Überdeckungszahl eines Gegenpunktes.

\*) „A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series“. Trans. of the Am. Math. Soc. Vol. 3 (1902), S. 10.

\*\*\*) Vgl. *Hurwitz* l. c. Schlußbemerkung zu § 8, S. 552.

(zweiter Schnittpunkt zweier aufeinanderfolgender Seitenkreise) eines Polygons gleich der Anzahl der in der oberen Halbebene liegenden (komplexen) Nullstellen der zum kleineren Exponenten gehörigen Fundamentallösung.

Die hier kurz formulierte analytische Aufgabe löst Hurwitz, im Falle der Differentialgleichung mit drei singulären Stellen, indem er zunächst die Anzahl der reellen Nullstellen der Fundamentallösungen (Überschlagungszahlen) berechnet und dann aus diesen die Anzahl der komplexen Nullstellen einer beliebigen Lösung ableitet. Diese Methode würde sich, nachdem durch die Ergänzungsrelationen für das  $n$ -Eck wenigstens bis auf gewisse Unbestimmtheiten\*) die Anzahlen der reellen Nullstellen (Überschlagungszahlen) bekannt sind, und man auch die „Übergangssubstitutionen“ als bekannt annehmen darf, ebenso auf Kreisbogen- $n$ -Ecke ausdehnen lassen, wie die hier zu besprechende geometrische und würde, wie man sich leicht überzeugen kann, dieselben Formeln ergeben, die unten in den Gleichungen (8) bis (11) aufgestellt werden.

## § 1.

### Ein Hilfssatz.

In Kapitel I habe ich den Prozeß der „Abtrennung einer sich gerade voll überschlagenden Seite“ eines einfach zusammenhängenden Kreisbogenpolygons eingeführt\*\*), durch den ein einfach zusammenhängendes Kreisbogen-

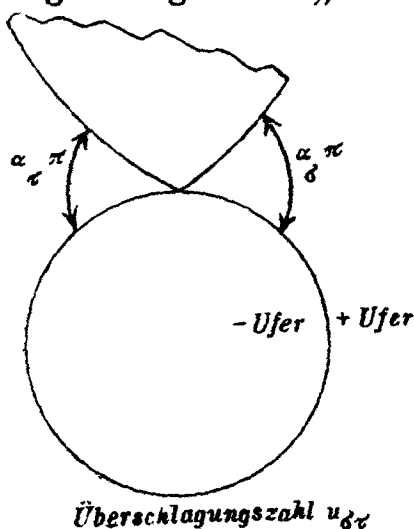


Fig. 1.

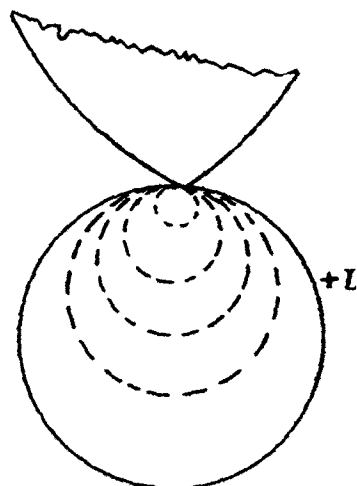
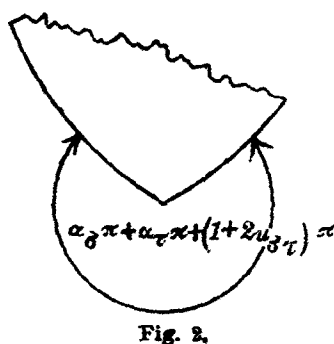


Fig. 3.

$n$ -Eck in ein ebensolches  $(n-1)$ -Eck verwandelt wird. Der Prozeß ist in seinem Effekt durch Figur 1 und Figur 2 dargestellt\*\*\*); Figur 3 läßt erkennen, daß der Prozeß auch kontinuierlich — d. h. als Verzerrungsprozeß — aufgefaßt werden kann; dabei ist jedoch zu beachten, daß im Augenblick

\*) Kapitel I Gleichungen (10).

\*\*) § 2, S. 69.

\*\*\*) Figur 1 stellt das Polygon vor der Abtrennung, Figur 2 nach der Abtrennung dar.

des Übergangs zum  $(n-1)$ -Eck die Winkelsumme des Polygons um  $(1 + 2u_{\sigma\tau})\pi$  sprunghaft wächst, wenn  $u_{\sigma\tau}$  die Überschlagungszahl der sich voll überschlagenden Seite ist.

Ich führe nun auch den Prozeß der „Anhängung einer sich gerade voll überschlagenden Seite an einen Windungspunkt“ ein, der sich als Umkehrung der Abtrennung darstellen möge; er verwandelt das  $(n-1)$ -Eck in ein  $n$ -Eck und darf ebenfalls als ein kontinuierlicher Prozeß angesprochen werden.

Wie schon in Kapitel I auseinandergesetzt ist\*), kann ich durch kontinuierliche Abänderung und durch Abtrennung sich gerade voll überschlagender Seiten jedes einfach zusammenhängende Kreisbogenpolygon auf ein solches Kreisbogendreieck reduzieren. Da andererseits alle Kreisbogendreiecke untereinander ein Kontinuum\*\*) bilden, so läßt sich folgender Hilfssatz aussprechen:

„Alle einfach zusammenhängenden Kreisbogenpolygone bilden im obigen Sinne ein Kontinuum. Bei der kontinuierlichen Abänderung treten indessen beim Übergang vom  $n$ - zum  $(n-1)$ -Eck und beim Übergang vom  $(n-1)$ - zum  $n$ -Eck bei der Winkelsumme gewisse Unstetigkeiten auf. Und zwar läßt es sich so einrichten, daß die Winkelsumme beim Übergang vom  $n$ -Eck zum  $(n-1)$ -Eck um  $(1 + 2u_{\sigma\tau})\pi$  wächst, beim Übergang vom  $(n-1)$ -Eck zum  $n$ -Eck um denselben Betrag abnimmt, wenn  $u_{\sigma\tau}$  die Überschlagungszahl der abzutrennenden bzw. anzuhängenden Seite ist“.

## § 2.

### Bezeichnungen und Festsetzungen. \*\*\*)

Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes Kreisbogen- $n$ -Eck auf einer Kugel; seine Ecken seien der Reihe nach:

$$A_1, A_2, A_3 \dots A_\lambda, A_\mu \dots A_\rho, A_\sigma, A_\tau \dots A_{n-1}, A_n.^\dagger)$$

Umlaufe ich das  $n$ -Eck in dieser Reihenfolge, so möge das  $n$ -Ecks-Innere zur Linken liegen, so daß ich, wenn ich vom linken „Ufer“ einer Seite zum rechten übergehe, aus dem  $n$ -Eck austrete bzw. zu Punkten mit niedrigerer Überdeckungszahl gelange. Wenn ich dagegen vom rechten zum linken Ufer übergehe, so trete ich in das  $n$ -Eck ein bzw. gelange zu Punkten mit höherer Überdeckungszahl.

\*) § 3 und 4, S. 71 und 76.

\*\*) Vgl. etwa Klein, „Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion“, Leipzig 1906, S. 387.

\*\*\*) Ich bemerke ausdrücklich, daß die hier gewählten Bezeichnungen von den in Kapitel I eingeführten wesentlich abweichen.

†) Dabei ist  $\mu = \lambda + 1$ ;  $\sigma = \rho + 1$ ;  $\tau = \sigma + 1$ .

Die Winkel seien:

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi \dots \alpha_{\lambda}\pi, \alpha_{\mu}\pi \dots \alpha_{\varrho}\pi, \alpha_{\sigma}\pi, \alpha_{\tau}\pi \dots \alpha_{(n-1)}\pi, \alpha_n\pi;$$

die Seiten:

$$s_{12}, s_{23} \dots s_{\lambda\mu} \dots s_{\varrho\sigma}, s_{\sigma\tau} \dots s_{(n-1)n}, s_{n1};$$

die Überschlagungszahlen der Seiten:

$$u_{12}, u_{23} \dots u_{\lambda\mu} \dots u_{\varrho\sigma}, u_{\sigma\tau} \dots u_{(n-1)n}, u_{n1},$$

die Vollkreise, auf denen die Seiten liegen, oder, wie ich sie nenne, die Seitenkreise:

$$s_{12}^0, s_{23}^0 \dots s_{\lambda\mu}^0 \dots s_{\varrho\sigma}^0, s_{\sigma\tau}^0 \dots s_{(n-1)n}^0, s_{n1}^0.$$

Die Punkte eines Seitenkreises teile ich ein in  $J$  (innere)-Punkte und  $A$  (äußere)-Punkte. Die  $J$ -Punkte werden bei einmaliger Durchlaufung der zugehörigen Seite einmal öfter durchlaufen, als die Überschlagungszahl der Seite angibt,  $A$ -Punkte nur so oft, als die Überschlagungszahl angibt.  $J$ -Punkte gehören also stets der Seite selbst an,  $A$ -Punkte nur dann, wenn die Überschlagungszahl größer als 0 ist.

Die Gegenpunkte, d. h. diejenigen Punkte, in denen sich zwei aufeinanderfolgende Seitenkreise zum zweiten Male schneiden, nenne ich

$$A'_1, A'_2, A'_3 \dots A'_\lambda, A'_\mu \dots A'_\varrho, A'_\sigma, A'_\tau \dots A'_{(n-1)}, A'_n.$$

Die Lage eines Punktes  $P$  auf der Kugel gebe ich durch  $n$  Koordinatenwinkel an, die durch Lage und Gestalt des  $n$ -Ecks bedingt sind, ich bezeichne sie:

$$\varphi_{12}\pi, \varphi_{23}\pi \dots \varphi_{\lambda\mu}\pi \dots \varphi_{\varrho\sigma}\pi, \varphi_{\sigma\tau}\pi \dots \varphi_{(n-1)n}\pi, \varphi_{n1}\pi.$$

Dabei ist z. B. der Koordinatenwinkel  $\varphi_{\sigma\tau}\pi$  folgendermaßen festgesetzt:

$\varphi_{\sigma\tau}\pi^*)$  ist derjenige Winkel, den der Seitenkreis  $s_{\sigma\tau}^0$  mit dem Kreis  $A_\sigma A_\tau P$  bildet,

dessen Scheitel erstens in  $A_\tau$  liegt,  
für den zweitens die Ungleichung

$$(1) \quad -1 < \varphi_{\sigma\tau} \leq +1$$

gilt,

der drittens für  $A$ -Punkte des Seitenkreises  $s_{\sigma\tau}^0$  gleich 0 wird,  
der viertens für Punkte auf dem linken Ufer die Gleichung

$$(1a) \quad \begin{cases} \text{sgn } \varphi_{\sigma\tau} = +1^{**}) \\ \text{für Punkte auf dem rechten Ufer die Gleichung} \\ \text{sgn } \varphi_{\sigma\tau} = -1 \end{cases}$$

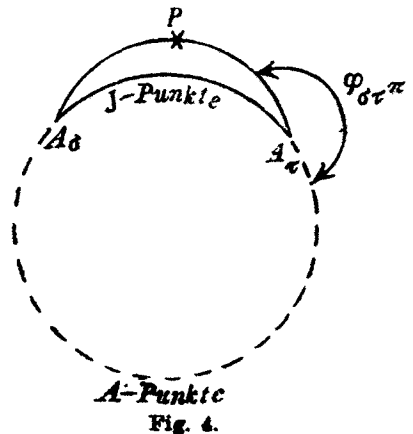
<sup>\*)</sup> D. h.  $\varphi_{\sigma, \sigma+1}\pi$ .

<sup>\*\*)</sup>  $\text{sgn } x = +1$  f.  $x > 0$ ,  
 $\text{sgn } x = -1$  f.  $x < 0$ .

erfüllt — ich nenne daher die Ufer der Seiten auch positives (linkes) und negatives (rechtes) Ufer. (Vgl. Fig. 4!)

Durch diese Festsetzung ist für jeden Punkt  $P$  auf der Kugel mit Ausnahme der Punkte  $A_\sigma$  und  $A_\tau$  ein bestimmter Wert der „Koordinaten“  $\varphi_{\sigma\tau}$  festgelegt, und zwar unabhängig von der *Riemannschen* Fläche; diese Koordinate ändert sich, falls das  $n$ -Eck als fest gedacht ist, und der Punkt  $P$  auf der Kugel wandert, wobei man es stets vermeiden kann, daß der Punkt  $P$  durch eine Ecke geht, stets kontinuierlich, außer wenn  $P$  einen  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{\sigma\tau}^0$  überschreitet; in diesem Falle macht sie einen Sprung um  $\pm 2$ .

Lassen wir nun den Punkt fest und ändern das  $n$ -Eck kontinuierlich, so erfolgt wieder eine stets kontinuierliche Änderung der Koordinate  $\varphi_{\sigma\tau}$ , außer wenn ein  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{\sigma\tau}^0$  über den Punkt  $P$  hinübergleitet, in diesem Falle tritt wie oben ein Sprung um  $\pm 2$  ein.



Hierbei versagt aber unsere Definition des Winkels  $\varphi_{\sigma\tau}\pi$  in dem einen Fall, daß die Seite  $s_{\sigma\tau}$  sich gerade voll überschlägt, dann sollen an Stelle der Relationen (1) und (1a) folgende treten:

Für Punkte auf dem linken Ufer der sich gerade voll überschlagenden Seite und auf der Seite  $s_{\sigma\tau}$  selbst sei

$$(1b) \quad \begin{cases} \varphi_{\sigma\tau} = +1, \\ \text{für solche auf dem rechten Ufer} \\ \varphi_{\sigma\tau} = -1. \end{cases}$$

Wird bei der kontinuierlichen Abänderung des Polygons nach Erreichung der vollen Überschlagung der Seite  $s_{\sigma\tau}$  noch in derselben Richtung weiter abgeändert, so folgen auf die Werte

$$\varphi_{\sigma\tau} = \pm 1$$

sehr kleine positive oder negative Werte von  $\varphi_{\sigma\tau}$ , so daß bei der kontinuierlichen Verzerrung des  $n$ -Ecks für die Koordinate nicht nur Sprünge um  $\pm 2$ , sondern auch Sprünge um  $\pm 1$  auftreten.

Außer den Koordinatenwinkeln führe ich noch Hilfskoordinatenwinkel\*)

$$\psi_{12}\pi, \psi_{23}\pi \dots \psi_{2\mu}\pi \dots \psi_{\rho\sigma}\pi, \psi_{\sigma\tau}\pi \dots \psi_{(n-1)n}\pi, \psi_{n1}\pi$$

ein, die durch folgende Gleichung definiert sind:

\*) Das sind die in den *Hurwitzschen* Formeln auftretenden Amplituden.

$$(2) \quad \psi_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma\tau} - \operatorname{sgn} \varphi_{\sigma\tau} \frac{1 - (-1)^{u_{\sigma\tau}}}{2};$$

daraus folgt

$$(2a) \quad \operatorname{sgn} \varphi_{\sigma\tau} = (-1)^{u_{\sigma\tau}} \cdot \operatorname{sgn} \psi_{\sigma\tau}.$$

Der oben erwähnte Ausnahmefall spaltet sich hier in zwei Fälle, je nachdem sich die Seite eine ungerade Anzahl Male (Überschlagungszahl gerade) oder eine gerade Anzahl Male (Überschlagungszahl ungerade) voll überschlägt.

Es ist, wenn 1.  $(-1)^{u_{\sigma\tau}} = +1$ ,

für die Punkte der sich gerade voll überschlagenden Seite

$$(2b) \quad \begin{cases} \text{auf dem linken Ufer} & \psi_{\sigma\tau} = +1 \\ \text{auf dem rechten Ufer} & \psi_{\sigma\tau} = -1, \end{cases}$$

wenn 2.  $(-1)^{u_{\sigma\tau}} = -1$ ,

für alle Punkte der Kugel

$$(2b') \quad \psi_{\sigma\tau} = 0.$$

Die „Hilfskoordinaten“  $\psi_{\sigma\tau}$  ändern sich sowohl bei kontinuierlicher Änderung von  $P$ , als auch bei kontinuierlicher Abänderung des  $n$ -Ecks kontinuierlich oder sie springen um den Zahlenwert  $\pm 2$ , Sprünge um andere Werte als 2 sind dagegen ausgeschlossen; das ist der Vorteil, den die Einführung der Hilfskoordinaten bietet, während ihr Nachteil darin liegt, daß die Relationen (1) keine Gültigkeit haben. In der Folge werde ich teils von den Koordinaten, teils von den Hilfskoordinaten Gebrauch machen d. h. mir den Punkt  $P$  bald durch die  $\varphi_{\sigma\tau}$  bald durch die  $\psi_{\sigma\tau}$  gegeben denken.

Da der Punkt  $P$  schon durch zwei Koordinaten bzw. Hilfskoordinaten — etwa  $\varphi_{\rho\sigma}$ ,  $\varphi_{\sigma\tau}$  bzw.  $\psi_{\rho\sigma}$ ,  $\psi_{\sigma\tau}$  — bestimmt ist, so müssen noch  $n-2$  Relationen zwischen den Koordinaten bestehen;  $n-3$  Relationen\*) geben die Lage der übrigen Eckpunkte des  $n$ -Ecks an, die letzte Relation dagegen bringt zum Ausdruck, daß die Kreise

$$A_1 PA_2, A_2 PA_3 \dots A_2 PA_\mu \dots A_\rho PA_\sigma, A_\sigma PA_\tau \dots A_{(\pi-1)} PA_\pi, A_\pi PA_1$$

sämtlich durch einen Punkt gehen. Diese Relation ist jedenfalls bis auf ganze Zahlen unabhängig von der Lage des Punktes  $P$ ; sie wird hier zunächst für das gewöhnliche sphärische Dreieck (sämtliche Überschlagungszahlen 0) aufgestellt.

\*) Diese Relationen entsprechen den Übergangssubstitutionen der Differentialgleichung.

Hier ist (vgl. Fig. 5!)

$$\varphi_{12} = \psi_{12}; \quad \varphi_{23} = \psi_{23}; \quad \varphi_{31} = \psi_{31}.$$

Die Ergänzungswinkel zu den  $\psi\pi$  nenne ich  $\psi^0\pi$ , so daß

$$\psi_{12} = 1 - \psi_{12}^0; \quad \psi_{23} = 1 - \psi_{23}^0; \quad \psi_{31} = 1 - \psi_{31}^0$$

ist.

Die Zweieckswinkel an den Ecken des Dreiecks seien

$$\chi_1\pi, \chi_2\pi, \chi_3\pi.$$

Aus Fig. 5 lassen sich unmittelbar folgende Gleichungen ablesen:

$$2(\psi_{12}^0 + \psi_{23}^0 + \psi_{31}^0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3,$$

$$(3) \quad \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 1,$$

$$\psi_{12} + \psi_{23} + \psi_{31} = \frac{5 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{2}.$$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte, die im Inneren des Dreiecks liegen; lassen wir den Punkt  $P$  aber auf der ganzen Kugel unter Ausschluß der Eckpunkte wandern, so müssen wir um der Gleichung gemäß der Unstetigkeiten der  $\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}$  Allgemeingültigkeit zu verschaffen noch ganze Vielfache von 2 anfügen; sie lautet dann

$$\psi_{12} + \psi_{23} + \psi_{31} = \frac{5 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{2} + 2g_0 \quad (\text{wobei } g_0 \text{ eine ganze Zahl ist})$$

oder

$$(4) \quad \frac{1}{2}(\psi_{12} + \psi_{23} + \psi_{31}) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1}{4} = g \quad (g \text{ ganze Zahl}).$$

Diese Gleichung behält aber auch dann ihre Gültigkeit, wenn wir das Dreieck kontinuierlich ändern; denn auch in diesem Fall treten für die Größen  $\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}$ , wie wir sahen, nur Sprünge um den Zahlenwert  $\pm 2$  auf, so daß wir auf Grund der Tatsache, daß alle Dreiecke ein Kontinuum bilden, sagen können, daß Gleichung (4) für jeden beliebigen Punkt bezüglich jedes beliebigen Dreiecks gilt.

Eine elementare Rechnung, die davon ausgeht, daß bei der im Falle des  $n$ -Ecks der Figur 5 analogen Zeichnung  $(n-2)$  Dreiecke entstehen, zeigt, daß beim  $n$ -Eck an die Stelle der Gleichung (3) die Gleichung

$$(3a) \quad \sum_{p=1}^n \chi_p = n - 2$$

tritt und demgemäß an Stelle von 4 die Gleichung

$$(4a) \quad \frac{1}{2} \sum_{p,q} \psi_{pq} + \frac{\sum_p \alpha_p - (n-2)}{4} = g.$$

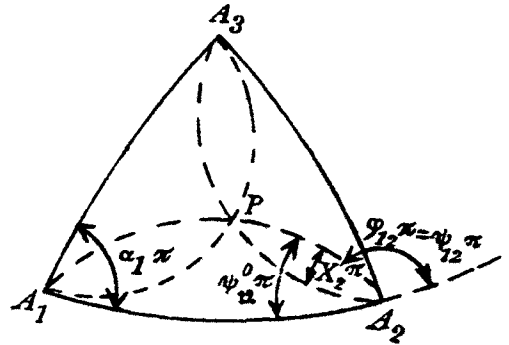


Fig. 5.



Zur Abkürzung führe ich noch ein

$$(4b) \quad \frac{n-2 + \sum_p \alpha_p}{2} = q$$

und erhalte:

$$(4c) \quad \frac{1}{2} \sum_{pq} \psi_{pq} + \frac{q - (n-2)}{2} = g.$$

Diese Gleichung bleibt bei Änderung des Punktes  $P$ , wie auch bei kontinuierlicher Abänderung des  $n$ -Ecks erhalten.

Beim Übergang vom  $n$ -Eck zum  $(n-1)$ -Eck (Abtrennung der sich gerade voll überschlagenden Seite  $s_{\sigma\tau}$ ) wächst, wie aus § 1 und den Gleichungen (2b), (2b'), (4b) und (4c) folgt,  $g$  um  $\frac{1}{2} \left( u_{\sigma\tau} + \frac{1 - (-1)^{u_{\sigma\tau}}}{2} \right)$ , beim Übergang vom  $(n-1)$ -Eck zum  $n$ -Eck (Anhängung der sich voll überschlagenden Seite  $s_{\sigma\tau}$ ) nimmt  $g$  um diesen Betrag ab. Da nun aber der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left( u_{\sigma\tau} + \frac{1 - (-1)^{u_{\sigma\tau}}}{2} \right)$$

eine ganze Zahl ist, so bleibt auch in diesem Falle die Gleichung (4c) erhalten und wir dürfen auf Grund des Hilfssatzes des § 1 sagen: Gleichung (4c) gilt für jeden beliebigen Punkt bezüglich jedes beliebigen einfach zusammenhängenden Kreisbogenpolygons.

### § 3.

#### Die Überdeckungszahl im allgemeinsten Fall.

Ich nehme ein Kreisbogenpolygon, dessen Winkel und Überschlagungszahlen ich kenne, als fest gegeben an, lasse einen Punkt  $P$  alle Punkte auf der Kugel mit Ausnahme der Eckpunkte des Polygons durchlaufen, wobei sich die Koordinaten von  $P$  im allgemeinen kontinuierlich ändern und in Sonderfällen Sprünge um zwei machen, und untersuche, wie sich die Überdeckungszahl des Punktes  $P$  bei dieser Durchlaufung ändert.

Es gilt dafür folgende

Regel 1. „Die Überdeckungszahl ändert sich nur sprungweise um ganze Zahlen und zwar nur dann, wenn  $P$  einen Seitenkreis des Polygons überschreitet; überschreitet er einen  $A$ -Punkt eines Seitenkreises, so ändert sich die Überdeckungszahl um die Überschlagungszahl der zum überschrittenen Seitenkreise gehörigen Seite, überschreitet er einen  $J$ -Punkt eines Seitenkreises, so ändert sich die Überdeckungszahl um die um 1 vermehrte Überschlagungs-

zahl der zum überschrittenen Seitenkreise gehörigen Seite; und zwar wächst die Überdeckungszahl oder nimmt ab, je nachdem  $P$  vom rechten zum linken oder vom linken zum rechten Ufer des Seitenkreises übergeht.“

Wie sich die Überdeckungszahl für einen Punkt des Seitenkreises selbst verhält, möge vorläufig außer Betracht bleiben.

Wir suchen eine Funktion der Koordinaten von  $P$ , die sich zunächst, wenn  $P$  den Seitenkreis  $s_{\sigma\tau}^0$  überschreitet, ebenso verhalten soll, wie die Überdeckungszahl, die sich aber an allen anderen Stellen vorläufig noch beliebig verhalten möge; eine solche Funktion ist:

$$\operatorname{sgn} \varphi_{\sigma\tau} \frac{u_{\sigma\tau}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{\sigma\tau},$$

was aus der Definition der Koordinaten des Punktes  $P$  in § 2 unmittelbar folgt.

Die Funktion

$$(5) \quad \Delta = \sum_{pq} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\}$$

ist also eine Funktion, die sich sicherlich, wenn  $P$  irgend einen Seitenkreis überschreitet, — abgesehen von einer eventuellen kontinuierlichen Änderung an dieser Stelle — ebenso verhält, wie die Überdeckungszahl. Um das Verhalten der Funktion  $\Delta$  im Einzelnen zu untersuchen, führe ich die Hilfskoordinaten ein und erhalte aus (2) und (2a):

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{pq} \left\{ (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \left[ \psi_{pq} + (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right] \right\} \\ &= \sum_{pq} \left\{ (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{1}{2} \left( u_{pq} + \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{pq} \right\}, \\ (6) \quad \Delta &= \sum_{pq} (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{1}{2} \left( u_{pq} + \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{pq} \psi_{pq}. \end{aligned}$$

Die erste dieser Summen in (6) setzt sich aus ganzen Zahlen zusammen und ändert sich nur in den bereits oben erledigten Fällen, in denen auch die Überdeckungszahl sich ändern soll. Die zweite Summe ergibt nach (4c)

$$g = \frac{g - (n-2)}{2},$$

ändert sich also bei festgehaltenem Polygon nur dann, wenn  $g$  springt; also nur sprungweise um ganze Zahlen und zwar, wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, gerade dann und nur dann, wenn eine der Größen  $\psi_{\sigma\tau}$  sich um 2 ändert, das ist aber wieder der bereits oben

erledigte Fall. Damit ist gezeigt, daß  $\Delta$ , während der Punkt  $P$  die Kugel durchwandert, gerade diejenigen und nur diejenigen Änderungen erleidet, die auch der Überdeckungszahl von  $P$  zukommen.

Ich mache deshalb für die Überdeckungszahl von  $P$  folgenden Ansatz:

$$(7) \quad \vartheta_0 = \Delta + \frac{e - (n-2)}{2} + k,$$

wobei  $k$  eine ganze Zahl sein soll.

Da das zweite und dritte Glied dieses Ausdrucks für ein festes Polygon unveränderlich sind, so hat  $\vartheta_0$  die Eigenschaft, daß es gerade die und nur die von der Überdeckungszahl geforderten Änderungen erfährt.

Das erste und zweite Glied zusammen ergeben auf Grund von (4c) und (6) eine ganze Zahl, weshalb auch  $\vartheta_0$  eine ganze Zahl ist.

Die ganze Zahl  $k$  muß noch so bestimmt werden, daß  $\vartheta_0$  für irgend einen Punkt in bezug auf das feste Polygon die Überdeckungszahl wirklich angibt; dann gibt die Funktion  $\vartheta_0$  für jeden Punkt auf der Kugel die Überdeckungszahl bezüglich des festen Polygons an. Die Zahl  $k$  ist dabei zunächst noch gewissermaßen eine individuelle Konstante für das einzelne feste Polygon.

Ich will nun die Änderungen untersuchen, die die Zahl  $k$  erleidet, wenn ich das Polygon ändere, und halte zu diesem Zweck den Punkt  $P$  fest, während ich das Polygon einer kontinuierlichen Verzerrung unterziehe, wobei ich es vermeiden will und kann, daß der Punkt  $P$  in eine der Polygonsecken hineinfällt. Bei diesem Prozeß ändern sich die Winkel des Polygons im allgemeinen kontinuierlich — den Ausnahmefall des Übergangs vom  $n$ - zum  $(n-1)$ -Eck bzw. vom  $(n-1)$ - zum  $n$ -Eck untersuche ich gesondert —, die Überschlagungszahlen dagegen bleiben im allgemeinen unverändert und machen an einzelnen Stellen Sprünge um 1, die Koordinaten bzw. Hilfskoordinaten, durch die ich mir den Punkt  $P$  gegeben denke, ändern sich im allgemeinen kontinuierlich und springen in einzelnen Fällen um  $\pm 2$  oder  $\pm 1$  bzw. um  $\pm 2$ .

Wir untersuchen, wie sich einerseits die Überdeckungszahl, anderseits die Zahl  $\vartheta_0$  bei diesen Wandlungen verhält.

Analog der Regel 1 gilt hier für die Überdeckungszahl folgende

Regel 2. „Die Überdeckungszahl ändert sich nur sprunghaft um ganze Zahlen und zwar nur dann, wenn ein Seitenkreis des Polygons über den Punkt  $P$  hinweggleitet; gleitet ein  $A$ -Punkt eines Seitenkreises über den Punkt  $P$ , so ändert sich die Überdeckungszahl um die Überschlagungszahl der zum hinübergleitenden Seitenkreise gehörigen Seite; gleitet ein  $J$ -Punkt eines Seitenkreises über den Punkt  $P$ , so ändert sich die Überdeckungszahl um die um 1 vermehrte Überschlagungszahl der zum hinüber-

gleitenden Seitenkreise gehörigen Seite. Und zwar wächst die Überdeckungszahl oder nimmt ab, je nachdem  $P$  vom rechten zum linken oder vom linken zum rechten Ufer des Seitenkreises übergeht.“

Wie sich die Überdeckungszahl verhält, wenn gerade ein Seitenkreis auf den Punkt  $P$  zu liegen kommt, möge vorläufig außer Betracht bleiben.

Gleichung (5) zeigt, daß  $\Delta$  in den in Regel 2 angegebenen Fällen gerade die für die Überdeckungszahl geforderten Sprünge macht.

$\Delta$  ändert sich aber scheinbar auch (Gleichung (5)), wenn eine Überschlagungszahl sich ändert; in diesem Falle springt aber die zugehörige Koordinate  $\varphi$ , die ebenfalls in (5) auftritt, wie aus Gleichung (1b) folgt, von  $\pm 1$  auf 0 und macht mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert genau den entgegengesetzten Sprung wie die halbe Überschlagungszahl, so daß  $\Delta$  unverändert bleibt.

Es bleibt noch der Übergang vom  $n$ - zum  $(n-1)$ -Eck und umgekehrt. Im ersten Fall fällt in Gleichung (6) ein Glied von der Form

$$(-1)^{u_{\sigma\tau}} \operatorname{sgn} \psi_{\sigma\tau} \frac{1}{2} \left( u_{\sigma\tau} + \frac{1 - (-1)^{u_{\sigma\tau}}}{2} \right)$$

weg, wobei zu beachten ist, daß im Augenblick des Übergangs zum  $(n-1)$ -Eck für jeden Punkt

$$\operatorname{sgn} \varphi_{\sigma\tau} = +1$$

und infolgedessen nach (2a) auch

$$(-1)^{u_{\sigma\tau}} \operatorname{sgn} \psi_{\sigma\tau} = +1 \quad (\text{vgl. Fig. 1 u. 3, S. 236})$$

ist; andererseits wächst aber nach der Bemerkung im Schlußabsatz von § 2 die in Gleichung (6) für  $\Delta$  vorkommende ganze Zahl

$$g = \frac{1}{2\pi} \sum_{pq} \psi_{pq} + \frac{q - (n-2)}{2} \quad (\text{vgl. (4c)!})$$

gerade auch um den Betrag

$$\frac{1}{2} \left( u_{\sigma\tau} + \frac{1 - (-1)^{u_{\sigma\tau}}}{2} \right),$$

woraus folgt, daß  $\vartheta_0$  in Gleichung (7) sich bei diesem Prozeß nicht ändert.

Das nämliche gilt umgekehrt beim Übergang vom  $(n-1)$ - zum  $n$ -Eck. Da sich auch die Überdeckungszahl im Augenblick der Abtrennung für keinen Punkt ändert, so bleibt die ganze Zahl  $k$  bei diesem Prozeß erhalten.

Die Zahl  $k$  ändert sich also bei kontinuierlicher Abänderung des Polygons nicht und  $\vartheta_0$  stellt für jeden beliebigen nicht auf einem

Seitenkreise liegenden Punkt bezüglich jedes beliebigen Kreisbogenpolygons die Überdeckungszahl dar, sofern wir nur die ganze Zahl  $k$  so bestimmen, daß  $\vartheta_0$  für irgend einen bestimmten Punkt bezüglich irgend eines bestimmten Polygons die Überdeckungszahl wirklich darstellt.

Der Schwerpunkt eines gewöhnlichen geradlinigen gleichseitigen Dreiecks wird von diesem Dreieck gerade einmal überdeckt (Überdeckungszahl 1), wir erhalten aus (5) und (7):

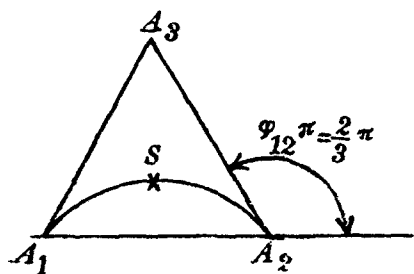


Fig. 6.

$$1 = \frac{1}{2}(\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31}) + \frac{e-1}{2} + k$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{12} &= \varphi_{23} = \varphi_{31} = \frac{2}{3} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \text{ (vgl. Fig. 6)}$$

$$\frac{e-1}{2} = 0$$

(7a)

$$k = 0,$$

womit  $k$  für alle Punkte bezüglich jedes Polygons bestimmt ist.

Gleichung (5), (7) und (7a) ergeben für die Überdeckungszahl  $\vartheta^n$  jedes beliebigen nicht auf einem Seitenkreis liegenden Punktes bezüglich jedes beliebigen einfach zusammenhängenden  $n$ -Ecks:

$$(8) \quad \vartheta^n = \sum_{pq} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \cdot \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} + \frac{e - (n-2)}{2}.$$

Gleichung (6), (7) und (7a) ergeben für dieselbe Zahl:

$$(8a) \quad \vartheta^n = \sum_{pq} \left\{ (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{1}{2} \left[ u_{pq} + \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right] + \frac{1}{2} \psi_{pq} \right\} + \frac{e - (n-2)}{2}.$$

#### § 4.

##### Die Überdeckungszahl für Punkte eines Seitenkreises.

Der Punkt  $P$ , dessen Überdeckungszahl gesucht wird, liege auf einem Seitenkreise — etwa auf  $s_{\alpha\tau}^0$  —, nicht aber noch auf einem zweiten; es ist die Überdeckungszahl dieses Punktes zu berechnen.

Wenn sich beim Überschreiten des Punktes  $P$  die Überdeckungszahl nicht ändert, so ist die Überdeckungszahl von  $P$  gleich derjenigen der in der Nähe liegenden Punkte, die nicht auf dem Seitenkreise liegen; ändert sich aber die Überdeckungszahl beim Überschreiten von  $P$ , so zerfallen die in der Nähe von  $P$  nicht auf dem Seitenkreise liegenden Punkte in zwei Gruppen: die eine umfaßt diejenigen Punkte, die auf dem

linken Ufer des Seitenkreises liegen und eine höhere Überdeckungszahl haben, die andere diejenigen, die auf dem rechten Ufer des Seitenkreises liegen und eine niedrigere Überdeckungszahl haben. Nach der Definition der Überdeckungszahl in der Einleitung ist die Überdeckungszahl von  $P$  gleich der kleineren von beiden in der Nähe von  $P$  vorkommenden Überdeckungszahlen, also gleich derjenigen der auf dem rechten Ufer des Seitenkreises in der Nähe von  $P$  liegenden Punkte.

Ich muß also in Gleichung (8), um zur Überdeckungszahl eines auf dem Seitenkreis  $s_{\sigma\tau}^0$  liegenden Punktes zu gelangen, auf alle Fälle

$$\operatorname{sgn} \varphi_{\sigma\tau} = -1$$

setzen, dann aber noch unterscheiden, ob  $P$  ein  $A$ - oder  $J$ -Punkt des Seitenkreises ist.

Im ersten Falle ist

$$\varphi_{\sigma\tau} = 0,$$

im letzten  $\varphi_{\sigma\tau}$  statt gleich  $+1$

$$\varphi_{\sigma\tau} = -1$$

zu setzen und ich erhalte für  $A$ -Punkte aus (8)

$$\vartheta_{\sigma\tau;A}^n = -\frac{u_{\sigma\tau}}{2} + \sum_{pq}^{(\sigma\tau)} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} + \frac{e - (n-2)}{2}, *$$

für  $J$ -Punkte

$$\vartheta_{\sigma\tau;J}^n = -\frac{u_{\sigma\tau} + 1}{2} + \sum_{pq}^{(\sigma\tau)} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} + \frac{e - (n-2)}{2},$$

oder für alle Punkte

$$(9) \quad \vartheta_{\sigma\tau}^n = -\frac{u_{\sigma\tau} + \varepsilon_{\sigma\tau}}{2} + \sum_{pq}^{(\sigma\tau)} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} + \frac{e - (n-2)}{2},$$

wobei  $\varepsilon_{\sigma\tau}$  gleich 0 oder  $+1$  zu setzen ist, je nachdem  $P$  ein  $A$ - oder  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{\sigma\tau}^0$  ist.

Aus (8a) würden wir erhalten

$$(9a) \quad \vartheta_{\sigma\tau}^n = -\frac{u_{\sigma\tau} + \varepsilon_{\sigma\tau}}{2} + \sum_{pq}^{(\sigma\tau)} \left\{ (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{1}{2} \left[ u_{pq} + \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right] + \frac{1}{2} \psi_{pq} \right\} + \frac{e - (n-2)}{2}$$

Für die Überdeckungszahlen des Schnittpunktes zweier Seitenkreise — etwa  $s_{\lambda\mu}^0$  und  $s_{\sigma\tau}^0$  — erhalten wir, falls dieser Schnittpunkt kein Eckpunkt des Polygons ist und falls nicht noch ein

\*) Das Zeichen  $\sum_p^{(\eta)}$  soll bedeuten, daß die Summe über alle  $f_p$  zu erstrecken ist mit Ausnahme von  $f_\eta$ .

dritter Seitenkreis durch diesen Punkt hindurchgeht, gleichviel ob die beiden Seitenkreise zwei aufeinander folgende sind oder nicht, durch wiederholte Anwendung der obigen Schlußweise als Überdeckungszahl:

$$(10) \quad \vartheta_{\lambda\mu; \sigma\tau}^* = - \frac{u_{\lambda\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu}}{2} - \frac{u_{\sigma\tau} + \varepsilon_{\sigma\tau}}{2} + \sum_{pq}^{(\lambda\mu; \sigma\tau)} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} + e^{-\frac{(n-2)}{2}},$$

oder

$$(10a) \quad \vartheta_{\lambda\mu; \sigma\tau}^* = - \frac{u_{\lambda\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu}}{2} - \frac{u_{\sigma\tau} + \varepsilon_{\sigma\tau}}{2} + \sum_{pq}^{(\lambda\mu, \sigma\tau)} \left\{ (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \frac{1}{2} \left[ u_{pq} + \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right] + \frac{1}{2} \psi_{pq} \right\} + e^{-\frac{(n-2)}{2}},$$

wobei  $\varepsilon_{\lambda\mu}$  bzw.  $\varepsilon_{\sigma\tau}$  die Werte 0 oder +1 annehmen, je nachdem der Punkt  $P$  ein  $A$ - oder  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{\lambda\mu}^0$  bzw.  $s_{\sigma\tau}^0$  ist.

Treten pathologische Fälle ein, in denen mehr als zwei Seitenkreise durch einen Punkt gehen, so läßt sich die Überdeckungszahl für diesen Punkt, falls wir annehmen, daß er kein Eckpunkt des Polygons ist, in analoger Weise durch wiederholte Anwendung des gleichen Schlusses angeben.

Die §§ 6 und 7 geben Gelegenheit auch diese anormalen Fälle beim Dreieck und Viereck vollständig durchzudiskutieren.

## § 5.

### Überdeckungszahl der Eckpunkte eines Polygons.

Der Polygonseckpunkt  $A_\sigma$ , ein Schnittpunkt der Seitenkreise  $s_{\rho\sigma}^0$  und  $s_{\sigma\tau}^0$ ; durch den aber, wie wir vorläufig annehmen, kein weiterer Seitenkreis hindurchgehen möge, wird von dem Polygon höchstens

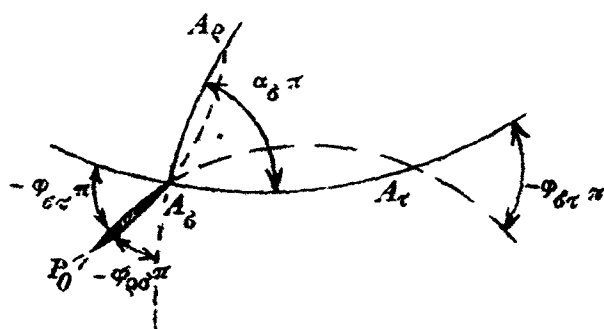


Fig. 7.

so oft überdeckt, wie ein Punkt  $P_0$  in der Nähe des Punktes  $A_\sigma$ , der auf dem rechten Ufer des Seitenkreises  $s_{\rho\sigma}^0$  und auch auf dem rechten Ufer des Seitenkreises  $s_{\sigma\tau}^0$  liegt, für den also sowohl  $\operatorname{sgn} \varphi_{\rho\sigma}$  als auch  $\operatorname{sgn} \varphi_{\sigma\tau}$  gleich  $-1$  ist (vgl. Fig. 7). Ist  $A_\sigma$  noch ein Wendungspunkt, so ist von der Über-

deckungszahl von  $P_0$ , die wir mit  $\vartheta_{P_0}^n$  bezeichnen wollen, noch die Anzahl der Windungen

$$E\left(\frac{\alpha_\sigma}{2}\right)^*)$$

abzuziehen um zur Überdeckungszahl von  $A_\sigma$  zu gelangen (vgl. die Definition der Überdeckungszahl!).

Wir erhalten für die Überdeckungszahl von  $A_\sigma$

$$\vartheta_{A_\sigma}^n = \vartheta_{P_0}^n - E\left(\frac{\alpha_\sigma}{2}\right)$$

oder, wenn wir aus (8) den Wert von  $\vartheta_{P_0}^n$  einführen

$$\begin{aligned} \vartheta_{A_\sigma}^n = & -\frac{u_{\varrho\sigma}}{2} - \frac{u_{\sigma\tau}}{2} + \frac{1}{2}(\varphi_{\varrho\sigma} + \varphi_{\sigma\tau}) + \sum_{pq}^{(\varrho\sigma; \sigma\tau)} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} \\ & + \frac{\varrho - (n-2)}{2} - E\left(\frac{\alpha_\sigma}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei die Koordinaten von  $P_0$  genommen werden müssen.

Um nun die Koordinaten von  $A_\sigma$  selbst in die Formel einführen zu können, lasse ich  $P_0$  immer weiter nach  $A_\sigma$  hineinrücken; schließlich werden die Werte von  $\varphi_{\varrho\sigma}$  und  $\varphi_{\sigma\tau}$  unbestimmt, während die übrigen Koordinaten sich den bestimmten Koordinaten von  $A_\sigma$  nähern; wie aus Figur 7 ersichtlich nähert sich aber dann der Ausdruck

$$-\varphi_{\varrho\sigma} - \varphi_{\sigma\tau}$$

dem Werte  $\alpha_\sigma$  bzw., wenn  $A_\sigma$  ein Windungspunkt ist, dem Werte

$$\alpha_\sigma - 2E\left(\frac{\alpha_\sigma}{2}\right),$$

da das schraffierte Dreieck in Figur 7 immer kleiner und kleiner wird.

Lassen wir also  $P_0$  nahe genug an  $A_\sigma$  heranwandern, so dürfen wir

$$\frac{1}{2}(\varphi_{\varrho\sigma} + \varphi_{\sigma\tau}) = E\left(\frac{\alpha_\sigma}{2}\right) - \frac{\alpha_\sigma}{2}$$

setzen und an Stelle der übrigen Koordinaten von  $P_0$  diejenigen von  $A_\sigma$  schreiben, so daß wir für die Überdeckungszahl eines Eckpunktes — etwa  $A_\sigma$  — erhalten:

$$(11) \quad \vartheta_{A_\sigma}^n = -\frac{u_{\varrho\sigma}}{2} - \frac{u_{\sigma\tau}}{2} + \sum_{pq}^{(\varrho\sigma; \sigma\tau)} \left\{ \operatorname{sgn} \varphi_{pq} \frac{u_{pq}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{pq} \right\} + \frac{\varrho - \alpha_\sigma - (n-2)}{2}$$

oder

$$\begin{aligned} (11a) \quad \vartheta_{A_\sigma}^n = & -\frac{u_{\varrho\sigma}}{2} - \frac{u_{\sigma\tau}}{2} \\ & + \sum_{pq}^{(\varrho\sigma; \sigma\tau)} \left\{ (-1)^{u_{pq}} \operatorname{sgn} \psi_{pq} \cdot \frac{1}{2} \left[ u_{pq} + \frac{1 - (-1)^{u_{pq}}}{2} \right] + \frac{1}{2} \psi_{pq} \right\} + \frac{\varrho - \alpha_\sigma - (n-2)}{2}, \end{aligned}$$

wobei die Koordinaten bzw. Hilfskoordinaten von  $A_\sigma$  einzusetzen sind.

\*)  $E(x)$  = größte ganze Zahl unter  $x$  für  $x > 1$ .

$E(x) = 0$  für  $x < 1$ .



Pathologische Fälle, in denen der Eckpunkt  $A_\sigma$  noch auf einem dritten Seitenkreise liegt, lassen sich in analoger Weise durch wiederholte Anwendung der Schlüsse dieses und des vorangehenden Paragraphen erledigen.

Die beiden folgenden Paragraphen geben Gelegenheit auch diese anormalen Fälle beim Dreieck und Viereck vollständig durchzudiskutieren.

## § 6.

### Das Kreisbogendreieck.

1. Überdeckungszahl eines Punktes, der auf keinem der drei Seitenkreise liegt aus (8) bzw. (8a):

$$(12) \quad \vartheta^5 = \operatorname{sgn} \varphi_{12} \frac{u_{12}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{31} \frac{u_{31}}{2} + \frac{\varphi_{12}}{2} + \frac{\varphi_{23}}{2} + \frac{\varphi_{31}}{2} + \frac{e-1}{2}$$

$$(12a) \quad \vartheta^3 = (-1)^{u_{12}} \operatorname{sgn} \psi_{12} \frac{1}{2} \left( u_{12} + \frac{1 - (-1)^{u_{12}}}{2} \right) \\ + (-1)^{u_{23}} \operatorname{sgn} \psi_{23} \frac{1}{2} \left( u_{23} + \frac{1 - (-1)^{u_{23}}}{2} \right) \\ + (-1)^{u_{31}} \operatorname{sgn} \psi_{31} \frac{1}{2} \left( u_{31} + \frac{1 - (-1)^{u_{31}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{12} + \frac{1}{2} \psi_{23} + \frac{1}{2} \psi_{31} + \frac{e-1}{2}$$

2. Überdeckungszahl eines auf einem Seitenkreise — etwa  $s_{12}^0$  — liegenden Punktes, der nicht auf einem der beiden anderen Seitenkreise liegt, aus (9) bzw. (9a)

$$(13) \quad \vartheta_{12}^3 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{31} \frac{u_{31}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{23} + \frac{1}{2} \varphi_{31} + \frac{e-1}{2}$$

$$(13a) \quad \vartheta_{12}^3 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} + (-1)^{u_{23}} \operatorname{sgn} \psi_{23} \frac{1}{2} \left( u_{23} + \frac{1 - (-1)^{u_{23}}}{2} \right) \\ + (-1)^{u_{31}} \operatorname{sgn} \psi_{31} \frac{1}{2} \left( u_{31} + \frac{1 - (-1)^{u_{31}}}{2} \right) \\ + \frac{1}{2} \psi_{23} + \frac{1}{2} \psi_{31} + \frac{e-1}{2},$$

wobei  $\varepsilon_{12}$  den Wert 0 oder +1 annimmt, je nachdem der zu untersuchende Punkt  $A$ - oder  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{12}^0$  ist.

3. Überdeckungszahl eines Gegenpunktes — etwa  $A_1'$  —, wenn dieser nicht auch auf dem Seitenkreise  $s_{23}^0$  liegt, aus (10) und (10a)

$$(14) \quad \vartheta_{(12; 31)}^3 = \vartheta_{A_1'}^3 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{31} + \varepsilon_{31}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{23} + \frac{e-1}{2}$$

$$(14a) \quad \vartheta_{(12; 31)}^3 = \vartheta_{A_1'}^3 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{31} + \varepsilon_{31}}{2} \\ + (-1)^{u_{23}} \operatorname{sgn} \psi_{23} \frac{1}{2} \left( u_{23} + \frac{1 - (-1)^{u_{23}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{23} + \frac{e-1}{2},$$

wobei  $\varepsilon_{12}$  bzw.  $\varepsilon_{31}$  die Werte 0 oder  $+1$  annehmen, je nachdem  $A_1'$  ein  $A$ - oder  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{12}^0$  bzw.  $s_{31}^0$  ist.

4. Überdeckungszahl eines Eckpunktes — etwa  $A_1$  —, wenn dieser nicht auch auf dem Seitenkreise  $s_{23}^0$  liegt, aus (11) und (11a):

$$(15) \quad \vartheta_{A_1}^5 = -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{31}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{23} + \frac{e-1}{2}$$

$$(15a) \quad \vartheta_{A_1}^5 = -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{31}}{2} + (-1)^{u_{23}} \operatorname{sgn} \psi_{23} \cdot \frac{1}{2} \left( u_{23} + \frac{1 - (-1)^{u_{23}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{23} + \frac{e-1}{2}.$$

5. Es wäre noch der bisher ausgeschlossene Fall zu untersuchen, daß alle drei Seitenkreise durch einen Punkt gehen und die Überdeckungszahl dieses Punktes zu bestimmen. Von den sechs ausgezeichneten Punkten (drei Eckpunkte und drei Gegenpunkte) fallen hier je drei zusammen und wir unterscheiden folgende Spezialfälle:

a) Drei Eckpunkte fallen zusammen; der Fall ist trivial.

b) Zwei Eckpunkte und ein Gegenpunkt — etwa  $A_1, A_2$  und  $A_3'$  — fallen zusammen. Analytisch würde sich der Fall durch die Gleichung

$$(16) \quad \frac{\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}{2} = \text{positive ganze Zahl}$$

ausdrücken; die Überdeckungszahl ergibt aus (14), (15) und (4b):

$$(17) \quad \vartheta_{(A_1=A_2=A_3')}^5 = -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{23}}{2} - \frac{u_{31}}{2} + \frac{\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1}{4}.$$

Aus den Ergänzungsrelationen\*) ergibt sich unter Anwendung der hier eingeführten Bezeichnungsweise:

$$u_{12} = E \left( \frac{\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}{2} \right),$$

wofür wir auf Grund von (16) auch schreiben können:

$$(18) \quad \frac{u_{12}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}{2} - 1 \right) = \frac{\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1}{4}.$$

Aus den bekannten Sätzen für Kreisbogendreiecke folgt ferner:

$$u_{23} = u_{31} = 0$$

und man erhält

$$(19) \quad \vartheta_{(A_1=A_2=A_3')}^5 = 0.$$

Das Resultat ist unmittelbar evident; denn der Punkt  $A_1 = A_2 = A_3'$  kann durch Windungen um  $A_3$  nicht überdeckt werden, weil er auf der  $A_3$  gegenüber liegenden Seite liegt; Windungen um  $A_1$  und  $A_2$  können ihn erst recht nicht überdecken, weil er hierfür Windungspunkt ist.

\*) Vgl. Kapitel I S. 7, Gleichungen (6).

c) Ein Eckpunkt und zwei Gegenpunkte — etwa  $A_1, A_2'$  und  $A_3'$  — fallen zusammen; analytisch ausgedrückt:

$$(20) \quad \frac{-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}{2} = \text{positive ganze Zahl}$$

$$\vartheta_{(A_1=A_2'=A_3')}^3 = -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{31}}{2} - \frac{u_{23} + \varepsilon_{23}}{2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - 1}{4}.$$

Aus den Ergänzungsrelationen und aus (20) folgt:

$$u_{23} = 0,$$

so daß wir als Resultat erhalten:

$$(21) \quad \vartheta_{(A_1=A_2'=A_3')}^3 = -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{31}}{2} - \frac{\varepsilon_{23}}{2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - 1}{4},$$

wobei  $\varepsilon_{23}$  gleich 0 oder +1 ist, je nachdem der Punkt  $A_1 = A_2' = A_3'$  A-Punkt oder J-Punkt des Seitenkreises  $s_{23}^0$  ist.

d) Die drei Gegenpunkte  $A_1', A_2', A_3'$  fallen zusammen, analytisch ausgedrückt:

$$(22) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1}{2} = \varrho = \text{positive ganze Zahl},$$

$$(23) \quad \vartheta_{(A_1'=A_2'=A_3')}^3 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{23} + \varepsilon_{23}}{2} - \frac{u_{31} + \varepsilon_{31}}{2} + \frac{\varrho - 1}{2},$$

wobei die  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$  bzw.  $\varepsilon_{31}$  die Werte 0 oder 1 annehmen, je nachdem der Punkt  $A_1' = A_2' = A_3'$  ein A- oder J-Punkt des Seitenkreises  $s_{12}^0, s_{23}^0$  bzw.  $s_{31}^0$  ist. —

Die in diesem Paragraphen angegebenen Zahlen sind identisch mit den von *Hurwitz* in der oben zitierten Abhandlung für die Anzahl der komplexen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion gefundenen, ihre Ableitung genügt der dort von *Hurwitz* formulierten Aufgabe\*) seine Zahlen durch Betrachtungen zu bestätigen, die der Analysis situs angehören. Aber noch mehr: Die Gleichungen (12a), (13a), (14a) und (15a) interpretieren geradezu die Formeln des § 8 der *Hurwitzschen* Abhandlung geometrisch; denn einerseits bedeuten die dort vorkommenden Anzahlen der reellen Nullstellen Überschlagungszahlen bzw. um 1 vermehrte Überschlagungszahlen, andererseits die dort vorkommenden Amplitudenausdrücke unsere Hilfskoordinatenwinkel, und so bot der Versuch die *Hurwitzschen* Formeln geometrisch zu deuten den Anstoß zur vorliegenden allgemeineren Untersuchung.

Die Spezialfälle unter Ziffer 3. und 4. hat zuerst *Van Fleck* (l. c.)

\*) l. c. § 8, Schlußbemerkung. S. 552.

mit Hilfe anderer geometrischer Überlegungen untersucht und Resultate in geschlossener Form angegeben.)\*

Die Sonderfälle der Ziffer 5. sind, wie *Hurwitz* zeigt,\*\*) gerade diejenigen, in denen sich Fundamentallösungen der Differentialgleichung durch Multiplikation mit Potenzen gewisser linearer Faktoren in eine eindeutige Funktion der Veränderlichen verwandeln lassen. Er benutzt diese Eigenschaft zur Bestimmung der gesuchten Zahlen.

*Schafheitlin*\*\*\*) geht bei seiner Bestimmung der Anzahl der Nullstellen der hypergeometrischen Funktion von diesen Spezialfällen aus.

Schon früher hatte *Hilbert*†) diese Zahlen in ganz anderer Weise berechnet.

\*) *Hurwitz* (l. c. § 8, Satz 9 und 8, S. 552 und 550) bringt nach einer vereinfachenden elementaren Rechnung die Gleichungen (14a) und (15a) auf folgende Form, die ich in der hier eingeführten Bezeichnungsweise angebe:

$$\begin{aligned} \vartheta_{A_1}^3 = & -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{31}}{2} + \frac{1}{2} \left( E(\varrho) - \frac{1}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} (-1)^{E(\varrho) + E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right)} \\ & \cdot \left( E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & \frac{1}{2} \left( 1 - (-1)^{E(\alpha_1) + E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right)} \right) \\ \varepsilon_{31} = & \frac{1}{2} \left( 1 - (-1)^{E(\alpha_1) + E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right)} \right), \\ \vartheta_{A_1}^7 = & -\frac{u_{12}}{2} - \frac{u_{31}}{2} + \frac{1}{2} (-1)^{E\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1}{2}\right)} \\ & \cdot \left( E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) \left( E\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 + 1}{2}\right) \right) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

\*\*) l. c. § 5, S. 533.

\*\*\*) „Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion“. Sitzungsberichte der Berl. math. Gesellschaft, 7. Jahrgang 1908.

†) „Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe“, Crelles Journal Bd. 103, S. 337.

## § 7.

**Das Kreisbogenviereck.**

1. Der Punkt  $P$ , dessen Überdeckungszahl wir suchen, liegt auf keinem der Seitenkreise; aus (8) folgt:

$$(24) \quad \vartheta^4 = \operatorname{sgn} \varphi_{12} \frac{u_{12}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{34} \frac{u_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} \\ + \frac{1}{2} (\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{34} + \varphi_{41}) + \frac{e-2}{2}.$$

2. Der Punkt  $P$  liegt auf einem und nur einem Seitenkreise — etwa auf  $s_{12}^0$  —; aus (9) folgt:

$$(25) \quad \vartheta_{12}^4 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{34} \frac{u_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} \\ + \frac{1}{2} (\varphi_{23} + \varphi_{34} + \varphi_{41}) + \frac{e-2}{2}.$$

3. Der Punkt  $P$  liegt auf zwei und nur zwei (gegenüberliegenden) Seitenkreisen — etwa auf  $s_{12}^0$  und  $s_{34}^0$  —; aus (10) folgt:

$$(26) \quad \vartheta_{(12, 34)}^4 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{34} + \varepsilon_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{23} \frac{u_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} \\ + \frac{1}{2} (\varphi_{23} + \varphi_{41}) + \frac{e-2}{2}.$$

4. Der Punkt  $P$  liegt auf zwei und nur zwei (aufeinanderfolgenden) Seitenkreisen — etwa auf  $s_{12}^0$  und  $s_{23}^0$  — und ist ein Gegenpunkt —  $A_2'$  — des Vierecks; aus (10) folgt:

$$(27) \quad \vartheta_{A_2'}^4 = -\frac{u_{12} + \varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{23} + \varepsilon_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{34} \frac{u_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} \\ + \frac{1}{2} (\varphi_{34} + \varphi_{41}) + \frac{e-2}{2}.$$

5. Der Punkt  $P$  liegt auf zwei und nur zwei (aufeinanderfolgenden) Seitenkreisen — etwa auf  $s_{12}^0$  und  $s_{23}^0$  — und ist ein Eckpunkt —  $A_2$  — des Vierecks; aus (11) folgt:

$$(28) \quad \vartheta_{A_2}^4 = -\frac{u_{12} + u_{23}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{34} \frac{u_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} \\ + \frac{1}{2} (\varphi_{34} + \varphi_{41}) + \frac{e - \alpha_2 - 2}{2}.$$

6. Der Punkt  $P$  liegt auf drei und nur drei Seitenkreisen — etwa auf  $s_{12}^0$ ,  $s_{23}^0$  und  $s_{34}^0$  —. Von den zwölf ausgezeichneten Punkten (vier Eckpunkte, vier Gegenpunkte und je zwei Schnittpunkte gegenüberliegender

Seiten) fallen drei zusammen; von diesen ist einer stets ein Schnittpunkt gegenüberliegender Seiten; bezüglich der zwei anderen sind drei Fälle denkbar:

a) Zwei Eckpunkte —  $A_2$  und  $A_3$  — fallen zusammen:

$$(29) \quad \vartheta_{A_2=A_3}^4 = -\frac{u_{12}+u_{23}+u_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{41} + \frac{e - \alpha_2 - \alpha_3 - 2}{2}.$$

b) Ein Eckpunkt und ein Gegenpunkt — etwa  $A_2$  und  $A_3'$  — fallen zusammen:

$$(30) \quad \vartheta_{A_2=A_3'}^4 = -\frac{u_{12}+u_{23}}{2} - \frac{u_{34}+\varepsilon_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} + \frac{1}{2} \varphi_{41} + \frac{e - \alpha_2 - 2}{2}.$$

c) Zwei Gegenpunkte —  $A_2'$  und  $A_3'$  — fallen zusammen:

$$(31) \quad \vartheta_{A_2'=A_3'}^4 = -\frac{u_{12}+\varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{23}+\varepsilon_{23}}{2} - \frac{u_{34}+\varepsilon_{34}}{2} + \operatorname{sgn} \varphi_{41} \frac{u_{41}}{2} + \frac{e - 2}{2}.$$

7. Der Punkt  $P$  liegt auf allen vier Seitenkreisen. Von den zwölf ausgezeichneten Punkten fallen sechs zusammen, von diesen sind zwei stets Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten ( $s_{12}^0$  mit  $s_{34}^0$  und  $s_{23}^0$  mit  $s_{41}^0$ ). Bezüglich der vier anderen sind sechs Fälle denkbar:

a) Die vier Eckpunkte fallen zusammen; der Fall ist trivial.

b) Drei Eckpunkte und ein Gegenpunkt — etwa  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4'$  — fallen zusammen:

$$(32) \quad \vartheta_{A_1=A_2=A_3=A_4'}^4 = -\frac{u_{12}+u_{23}+u_{34}+u_{41}}{2} + \frac{e - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2}{2}.$$

c) Zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte und zwei Gegenpunkte — etwa  $A_1, A_2, A_3'$  und  $A_4'$  — fallen zusammen:

$$(33) \quad \vartheta_{A_1=A_2=A_3'=A_4'}^4 = -\frac{u_{12}+u_{23}+u_{34}}{2} - \frac{u_{41}+\varepsilon_{41}}{2} + \frac{e - \alpha_1 - \alpha_2 - 2}{2}.$$

d) Zwei gegenüberliegende Eckpunkte und zwei Gegenpunkte — etwa  $A_1, A_2', A_3$  und  $A_4'$  — fallen zusammen:

$$(34) \quad \vartheta_{A_1=A_2'=A_3=A_4'}^4 = -\frac{u_{12}+u_{23}+u_{34}+u_{41}}{2} + \frac{e - \alpha_1 - \alpha_3 - 2}{2}.$$

e) Ein Eckpunkt und drei Gegenpunkte — etwa  $A_1, A_2', A_3'$  und  $A_4'$  — fallen zusammen:

$$(35) \quad \vartheta_{A_1=A_2'=A_3'=A_4'}^4 = -\frac{u_{12}+u_{41}}{2} - \frac{u_{23}+\varepsilon_{23}}{2} - \frac{u_{34}+\varepsilon_{34}}{2} + \frac{e - \alpha_1 - 2}{2}.$$

f) Die vier Gegenpunkte fallen zusammen:

$$(36) \quad \vartheta_{A_1'=A_2'=A_3'=A_4'}^4 = -\frac{u_{12}+\varepsilon_{12}}{2} - \frac{u_{23}+\varepsilon_{23}}{2} - \frac{u_{34}+\varepsilon_{34}}{2} - \frac{u_{41}+\varepsilon_{41}}{2} + \frac{e - 2}{2}$$

In sämtlichen Gleichungen dieses Paragraphen sind die  $\varepsilon_{\sigma\tau}$  gleich 0 oder +1 zu setzen, je nachdem der betreffende Punkt, dessen Überdeckungszahl bestimmt wird,  $A$ - oder  $J$ -Punkt des Seitenkreises  $s_{\sigma\tau}^0$  ist.

Ich bemerke noch, daß die Fälle 7. nur eintreten können, wenn eine der Gleichungen

$$\pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \pm \alpha_4 = \text{ganze Zahl}$$

erfüllt ist; und zwar gilt

für b)  $\frac{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}{2} = g,$

für c)  $\frac{-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = g,$

für d)  $\frac{-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}{2} = g,$

für e)  $\frac{-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = g,$

für f)  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = g,$

wobei  $g$  eine ganze Zahl bedeutet.