

Das Jacobische Kriterium der Variationsrechnung und die Oszillationseigenschaften linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung.

(Zweite Mitteilung.)

Von

R. G. D. RICHARDSON in Providence (U. S. A.).

Einleitung.

Die sich selbst adjungierte Differentialgleichung 2. Ordnung, welche einen Parameter enthält, kann man betrachten als Lagrangesche Gleichung eines Variationsproblems mit einer gewissen quadratischen Nebenbedingung, oder mit der quadratischen und noch dazu gewissen linearen Nebenbedingungen. In einer früheren Mitteilung*) habe ich die Bedingung für das Eintreten des Minimums bei diesem Variationsproblem behandelt; insbesondere habe ich den Zusammenhang zwischen dem Jacobischen Kriterium und den Oszillationseigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung dargelegt.

Den Zusammenhang zwischen den Theorien der Differentialgleichungen, der Integralgleichungen und der Variationsrechnung, den Hilbert entdeckt hat, kann man weiter verfolgen. Wir können m Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche m Parameter enthalten, auch als Lagrangesche Gleichungen eines Variationsproblems mit gewissen Nebenbedingungen betrachten. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, den Zusammenhang zwischen den Oszillationseigenschaften der Lösungen dieser m Lagrangeschen Gleichungen und dem Jacobischen Kriterium nachzuweisen. Da in der früheren Arbeit die Untersuchung ausführlich durchgeführt ist, konnte die Behandlung in dem vorliegenden Problem oft abgekürzt werden. § 1 behandelt den Fall des Variationsproblems, wo eine einzige Lagrangesche Differentialgleichung mehr als einen Parameter enthält, und § 2 den Fall

*) Math. Ann. 68 (1910), S. 279.

wo m Differentialgleichungen m Parameter enthalten. In §§ 3—5 leiten wir die Oszillationseigenschaften aus dem Jacobischen Kriterium her.

Den Grundgedanken dieser Arbeit, den Standpunkt der Variationsrechnung als den der allgemeineren Disziplin zum Ausgangspunkt der Untersuchung zu machen, verdanke ich der Anregung von Herrn Geheimrat Hilbert. Ich fühle mich gedrängt, ihm an dieser Stelle nochmals hierfür meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

§ 1.

Das Problem einer Gleichung mit m Parametern.

In der früheren Mitteilung habe ich folgendes Problem behandelt: Seien $p(x) > 0$, $q(x) \leq 0$ und $k(x)$ analytische Funktionen von x in dem Intervalle $0, 1$; dann ist diejenige stetig differenzierbare Funktion u von x zu bestimmen, die den Randbedingungen

$$(1) \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

genügt und

$$D(u) = \int_0^1 \left\{ p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - q(x) u^2(x) \right\} dx$$

zu einem Minimum macht, während die quadratische Nebenbedingung

$$\int_0^1 k(x) u^2(x) dx = \pm 1$$

erfüllt ist, oder wenn die quadratische und die n linearen Nebenbedingungen

$$\int_0^1 k(x) U_1(x) u(x) dx = 0, \dots, \int_0^1 k(x) U_n(x) u(x) dx = 0$$

erfüllt sind, wo $U_1(x)$ die Lösung des Problems mit der quadratischen Nebenbedingung allein und $U_i(x)$ die Lösung mit der quadratischen und $i - 1$ linearen Nebenbedingungen ist. Mit Hilfe der Hilbertschen Theorie der Integralgleichungen habe ich bewiesen, daß ein Minimum existiert, daß diese Lösung U des Variationsproblems die Lösung der sich selbst adjungierten Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(2) \quad (pu)' + qu + \lambda ku = 0$$

ist, welche einen Parameter enthält, und daß $D(U_1), D(U_2), \dots$ die Minimalwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ haben, wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Eigenwerte der Differentialgleichung (2) sind. Da ein Minimum wirklich existiert, so muß das Jacobische Kriterium erfüllt sein, und wie ich bewiesen habe, verlangt

dieses Kriterium, daß die Lösung $U_i (i=1, 2, \dots)$ dieses Variationsproblems gerade $i-1$ mal in dem Intervalle $0, 1$ oszilliert.

Nun kann man hier ein neues Problem in Betrachtung ziehen. Es sei diejenige den Randbedingungen (1) genügende Funktion u von x zu bestimmen, die $D(u)$ zu einem Minimum macht, während die *zwei quadratischen* Nebenbedingungen

$$(3) \quad \int_0^1 l(x) u^2(x) dx = \pm 1, \quad \int_0^1 r(x) u^2(x) dx = 0^*)$$

erfüllt sind, wobei $l(x)$, $r(x)$ im ganzen Intervalle $0, 1$ analytische Funktionen sind. Die Variationsrechnung lehrt, daß die gesuchte Minimalfunktion die Lagrangesche Gleichung der 2. Ordnung

$$(4) \quad (pu')' + qu + (\lambda l + \mu r)u = 0$$

befriedigt, wo λ , μ Lagrangesche Faktoren sind. Wir verlieren nichts an Allgemeinheit, wenn wir uns auf das positive Zeichen in (3) und auf die Behandlung von Reihen positiver Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots$ beschränken. Die andern Fälle ergeben nichts Neues.

Das allgemeine Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung hat die Form $U = \alpha u_1(x, \lambda, \mu) + \bar{\alpha} u_2(x, \lambda, \mu)$, wo u_1, u_2 zwei nicht in dem ganzen Intervalle $0, 1$ verschwindende linear unabhängige Partikularlösungen der Gleichung (4) und $\alpha, \bar{\alpha}$ Konstanten sind. Zur Festlegung der vier vorkommenden Parameter $\alpha, \bar{\alpha}, \lambda, \mu$ dienen die Bedingungen (1) und (3)**).

Wenn wir unser Variationsproblem dadurch modifizieren, daß wir statt (3) die Nebenbedingung

$$\varphi(1, x) = \int_0^1 (l(x) + x r(x)) u^2(x) dx = 1$$

aufzerlegen, wo x ein festgegebener Parameter ist, so werden wir auf die neue Lagrangesche Gleichung

$$(5) \quad L(u, x) = (pu')' + qu + \lambda(l + xr)u = 0$$

*) Diese letzte Nebenbedingung ist ganz allgemein. Wäre z. B.

$$\int_0^1 r(x) u^2 dx = c \neq 0,$$

so könnte man $r(x) - c l(x) = \bar{r}(x)$ setzen und würde

$$\int_0^1 \bar{r}(x) u^2 dx = 0$$

bekommen.

**) Man kann leicht zeigen, daß ein Minimum wirklich existiert, und daß der Minimalwert λ_1 ein Eigenwert ist: vergl. einen Artikel des Verfassers Bull. Am. Math. Soc. 17, no. 4.

geführt. Dies Problem beherrschen wir schon vollkommen. Die Lösung $U = U(x, \kappa)$ ist eine in dem Intervalle 0, 1 nicht oszillierende Funktion. Das Minimum $\lambda(\kappa) > 0$ ist eine Funktion von κ und hat, wie ich gezeigt habe*), ein Maximum $\lambda(\bar{\kappa})$, das gleich dem Minimum des Variationsproblems mit den Nebenbedingungen (3) ist. Die Lösung $U(x, \bar{\kappa})$ ist die Lösung des ursprünglichen Problems.

Nun wählen wir κ_1 und κ_2 , zwei festgegebene Werte**) des Parameters κ , und bezeichnen mit λ_1 den ersten Eigenwert der Gleichung $L(u, \kappa_1) = 0$, und mit λ_2 den zweiten Eigenwert der Gleichung $L(u, \kappa_2) = 0$. Wenn wir der gesuchten Funktion $u(x)$ außer der quadratischen Nebenbedingung $\varphi(1, \kappa_2) = 1$ noch die lineare Nebenbedingung

$$\int_0^1 \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r \right\} U_1 u dx = 0$$

auferlegen, wo $U_1 = U(x, \kappa_1)$ ist, so werden wir auf die neue Lagrangesche Gleichung

$$(6) \quad (pu)' + qu + \lambda(l + \kappa_2 r)u + \nu \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r \right\} U_1 = 0$$

geführt. Ist $u_1(x, \lambda_2)$ eine den Randbedingungen genügende, nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Gleichung $L(u, \kappa_2) = 0$, so ist $u_1(x, \lambda_2) + \frac{\nu U_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ eine den Randbedingungen genügende Lösung der inhomogenen Gleichung (6), wie man sich durch Einsetzen überzeugt. Setzen wir

$$\varphi(x, \kappa) = \int_0^x (l + \kappa r) u^2 dx, \quad \psi(x, \kappa) = \int_0^x \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r \right\} U_1 u dx,$$

so können wir in derselben Weise, wie in der ersten Mitteilung, die im vierdimensionalen x, u, φ, ψ Raum vom Anfangspunkt ausstrahlende dreiparametrische Extremalenschar

$$(7) \quad \begin{aligned} u &= U_2(x, \lambda) = \alpha u_1(x, \lambda) + \frac{\nu U_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \varphi(x, \kappa_2) &= \int_0^x (l + \kappa_2 r) \left(\alpha u_1 + \frac{\nu U_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 dx, \\ \psi(x, \kappa_2) &= \int_0^x \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r \right\} \left(\alpha u_1 + \frac{\nu U_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) U_1 dx \end{aligned}$$

*) Bull. Am. Math. Soc., loc. cit.

**) Wir nehmen hier an, daß $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ist; denn ist dies nicht der Fall, so ist das Problem von dem der ersten Mitteilung nicht verschieden.

aufstellen. Auf jeder einzelnen Kurve dieser Schar sind die Lagrangeschen Faktoren $\lambda(x)$ und $\nu(x)$ Konstanten (auf zwei verschiedenen Kurven sind aber die Werte nicht dieselben).

Irgend zwei den Randbedingungen genügende Lösungen $U_1(x)$, $u(x)$ der homogenen Gleichung (5), die zwei verschiedenen Parameterpaaren λ_1, κ_1 ; λ, κ entsprechen, genügen der Bedingung

$$(8) \quad \int_0^1 \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda \kappa}{\lambda_1 - \lambda} \right) r \right\} U_1 u dx = 0.$$

Multiplizieren wir nämlich

$$(pU_1')' + qU_1 + \lambda_1(l + \kappa_1 r)U_1 = 0, \quad (pu')' + qu + \lambda(l + \kappa r)u = 0$$

mit u bzw. $-U_1$, addieren und integrieren, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda) \int_0^1 \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda \kappa}{\lambda_1 - \lambda} \right) r \right\} U_1 u dx &= \int_0^1 (pU_1 u' - pU_1' u)' dx \\ &= [pU_1 u' - pU_1' u]_0^1. \end{aligned}$$

Wegen der Randbedingungen (1) ist daher (8) bewiesen.

Wir können jetzt für die Lösung $u(x) = U_2(x)$ unseres Variationsproblems zeigen, daß $\nu = 0$ ist. Zufolge der letzten Gleichung (7) und (8) haben wir

$$0 = \psi(1, \kappa_2) = \frac{\nu}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^1 \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r \right\} U_1^2 dx = 0.$$

Weil dieses Integral nicht Null ist*), so muß $\nu = 0$ sein**). Wir können durch Stetigkeitsbetrachtungen zeigen, daß die Lösung $u = U_2(x, \kappa_2)$ gerade einmal in dem Intervalle $0, 1$ oszilliert. Für $\kappa = \kappa_1$ haben wir nämlich gezeigt***), daß sie einmal oszilliert. Die Lösung U_2 ist eine kontinuierliche Funktion von κ . Wenn für $\kappa = \kappa_2$ die Lösung nicht gerade einmal oszilliert, so existiert ein Wert κ' zwischen κ_1 und κ_2 so daß $U_2(\kappa')$ und $U_2'(\kappa')$ beide in einem Punkte a ($0 \leq a \leq 1$) Null sind. Die einzige Lösung der Differentialgleichung (5) unter den Randbedingungen $u(a) = 0$,

*) Wenn $\kappa = \kappa_1$ ist, so ist das Integral gleich 1.

**) Wenn $\lambda_2 = \lambda_1$ ist, so ist dieses Verfahren nicht statthaft. In diesem Fall hat die Gleichung (5) wesentlich nur einen Parameter κ , und es kann leicht bewiesen werden, wie es in der ersten Mitteilung geschehen ist, daß die Funktionen U_1, u

statt (8) der Bedingung $\int_0^1 r U_1 u dx = 0$ genügen und daß $\nu = 0$ ist.

***) In diesem Falle haben wir das Problem der ersten Mitteilung.

$u'(a) = 0$ ist aber $u(x) \equiv 0$. Da nun $u(x) \equiv 0$ keine Lösung unseres Variationsproblems ist, muß U_2 einmal oszillieren.

Wenn wir der gesuchten Funktion $u(x)$ außer der quadratischen Nebenbedingung $\varphi(1, u_n) = 1$ mehrere lineare Nebenbedingungen

$$\int_0^1 \left\{ l + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_n x_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) r \right\} U_1 u dx = 0, \dots, \int_0^1 \left\{ l + \left(\frac{\lambda_{n-1} x_{n-1} - \lambda_n x_n}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \right) r \right\} U_{n-1} u dx = 0$$

auferlegen, wo $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ eine Konstante und λ_i der entsprechende i^{te} Eigenwert der Differentialgleichung (5) ist, so ergibt sich, daß auf der gesuchten Kurve alle zu derselben gehörigen Lagrangeschen Faktoren gleich Null sind, und wir erhalten als Lösungen des Variationsproblems die $n-1$ mal oszillierende Funktion U_n , die eine Lösung der Differentialgleichung $L(x, u_n) = 0$ (und auch von (4)) ist.

Wir haben damit eine Methode angegeben, mit der wir aus den ∞^2 Parameterwerten λ, μ , welche nicht verschwindende, den Randbedingungen genügende Lösungen der Differentialgleichung (4) liefern, Parameterpaare $\lambda_1, \mu_1 = \lambda_1 x_1; \lambda_2, \mu_2 = \lambda_2 x_2; \dots$ auswählen können, und zwar in solcher Weise, daß die entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung nicht oszillierende bzw. einmal oszillierende usw. Funktionen sind. In ähnlicher Weise kann man eine Differentialgleichung mit 3, 4, \dots Parametern behandeln.

§ 2.

Aufstellung des Minimalproblems.

Es seien $p_1(x) > 0, p_2(x) > 0, q_1(x) \leq 0, q_2(x) \leq 0$ vier innerhalb des Intervalles 0, 1 analytische Funktionen von x ; dann wird das Integral

$$D(u, v) = \int_0^1 (p_1 u'^2 + p_2 v'^2 - q_1 u^2 - q_2 v^2) dx$$

gewiß niemals negative Werte erhalten. Es seien nun diejenigen stetig differenzierbaren Funktionen u, v von x zu bestimmen, die den Randbedingungen

$$(9) \quad u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$$

genügen und $D(u, v)$ zu einem Minimum machen, während die quadratischen Nebenbedingungen

$$(10) \quad \int_0^1 \{ l_1(x) u^2 + l_2(x) v^2 \} dx = 1, \quad \int_0^1 \{ r_1(x) u^2 + r_2(x) v^2 \} dx = 0^*)$$

*) Vgl. Fußnote, Seite 216.

erfüllt sind, wobei wir l_1, l_2, r_1, r_2 als vier im ganzen Intervalle mit Einschluß der Randpunkte analytische Funktionen*) von x annehmen wollen. Die Variationsrechnung lehrt, daß die gesuchten Minimalfunktionen die Lagrangeschen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$(11) \quad (p_1 u') + q_1 u + (\lambda l_1 + \mu r_1) u = 0, \quad (p_2 v') + q_2 v + (\lambda l_2 + \mu r_2) v = 0$$

befriedigen. Sind $U(x) = u(x)$, $V(x) = v(x)$ die Lösungen dieses Variationsproblems und $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ die Werte der entsprechenden Parameter, so muß man zwei Fälle unterscheiden: a) Entweder ist $U(x) \equiv 0$ oder $V(x) \equiv 0$, b) keine von beiden Funktionen ist identisch Null. Gewöhnlich hat man den Fall a), und die Lösung ist mit der Lösung des Problems in § 1 unter den Bedingungen (1) und (3) identisch oder mit der Lösung des entsprechenden Problems für $v(x)$. In der Tat ist, wie ich gezeigt habe**), das Minimum des vorliegenden Problems gleich $\bar{\lambda}$ und gleich dem kleineren der zwei Minima der entsprechenden Probleme mit einer einzigen Variablen. Sind die Minima dieser zwei Probleme einander gleich, so tritt der Fall b) ein, und das Minimum $\bar{\lambda}$ ist gleich dem gemeinsamen Wert der beiden Minima.

Wir wollen nun unser Variationsproblem modifizieren, sodaß keine von den beiden Funktionen $u(x), v(x)$ identisch Null wird. Wir verlangen dann, daß die gesuchten Funktionen $u(x), v(x)$ statt der quadratischen Nebenbedingungen (10) der Bedingung

$$(12) \quad \varphi(1, x) = \int_0^1 \{l_1 u^2 + l_2 v^2 + x(r_1 u^2 + r_2 v^2)\} dx = 1$$

genügen, wo x ein festgegebener Parameter ist. Die Lagrangeschen Gleichungen sind jetzt

$$(13) \quad \begin{aligned} L_1(u, x) &= (p_1 u') + q_1 u + \lambda(l_1 + x r_1) u = 0, \\ L_2(v, x) &= (p_2 v') + q_2 v + \lambda(l_2 + x r_2) v = 0. \end{aligned}$$

Wir nehmen in der vorliegenden Arbeit an***), daß der Parameter x so gewählt werden kann, daß die Gleichungen (13) (oder die Gleichungen (11)) nicht identisch verschwindende, den Randbedingungen (9) genügende Lösungen $u(x), v(x)$ haben, und zwar für unendlich viele $\lambda_1, \mu_1 = \lambda_1 x_1; \lambda_2, \mu_2 = \lambda_2 x_2; \dots$. Wenn dies nicht der Fall ist, sind die Resultate trivial und nicht von denen der früheren Mitteilung verschieden. Wir nehmen außerdem an,

*) Offenbar können die beiden Funktionen l_1, l_2 im ganzen Intervalle nicht negativ, die beiden r_1, r_2 im ganzen Intervalle weder positiv noch negativ sein.

**) Bull. Am. Math. Soc., loc. cit.

***) Hilbert, Göttinger Nachr., 1910. Siehe auch die Anmerkung am Ende dieses Artikels.

daß $\lambda_1 \neq \lambda_2, \dots, \mu_1 \neq \mu_2, \dots$ sind. Denn wäre $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots$, oder $\mu_1 = \mu_2 = \dots$, so ist das Problem schon behandelt. Wir können uns hier wie in der früheren Mitteilung auf die Behandlung von positiven Werten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und μ_1, μ_2, \dots beschränken.

Ist $\kappa_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$ der Wert von κ , welcher nicht identisch verschwindende Lösungen des vorliegenden Variationsproblems liefert, und setzen wir

$$(14) \quad \varphi(x, \kappa) = \int_0^x \{ (l_1 + \kappa r_1) u^2 + (l_2 + \kappa r_2) v^2 \} dx,$$

so können wir leicht die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen. Ihre Lösungen liefern die dreiparametrische Extremalenschar*)

$$(15) \quad \begin{aligned} u(x) &= U_1(x) = \alpha u_1(x, \lambda), \quad v(x) = V_1(x) = \beta v_1(x, \lambda), \\ \varphi(x, \kappa_1) &= \int_0^x \{ (l_1 + \kappa_1 r_1) \alpha^2 u_1^2 + (l_2 + \kappa_1 r_2) \beta^2 v_1^2 \} dx, \end{aligned}$$

wenn u_1, v_1 zwei in dem Punkte $x = 0$, aber nicht in dem ganzen Intervalle $0, 1$ verschwindende Partikularlösungen der Gleichungen $L_1(u, \kappa_1) = 0$, $L_2(v, \kappa_2) = 0$ sind. Aus den Endbedingungen $u(1) = v(1) = 0$, $\varphi(1) = 1$ kann man den Parameter λ , aber nicht die Parameter α, β bestimmen. Aus $\varphi(1) = 1$ aber folgt $c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2 = 1$, wo c_1, c_2 zwei gegebene Konstanten sind. Für die Lösung unseres Variationsproblems können wir dies leicht erklären. Multiplizieren wir die Gleichungen (13) mit u resp. v , integrieren und addieren, so bekommen wir wegen (12) und (9)

$$\begin{aligned} \lambda_1(\kappa_1) &= \lambda_1 \int_0^1 \{ \alpha^2 (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1^2 + \beta^2 (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1^2 \} dx \\ &= \lambda_1 \int_0^1 \{ (l_1 + \kappa_1 r_1) u^2 + (l_2 + \kappa_1 r_2) v^2 \} dx \\ &= - \int_0^1 \{ (p_1 u)' u + q_1 u^2 + (p_2 v)' v + q_2 v^2 \} dx \\ &= \int_0^1 (p_1 u'^2 - q_1 u^2 + p_2 v'^2 - q_2 v^2) dx - [p_1 u u' + p_2 v v']_0^1 = D(u, v). \end{aligned}$$

Der Wert des Minimums ist daher von α oder β allein unabhängig. Wir können $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ oder $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ nehmen und das Minimum $\lambda_1(\kappa_1)$ ändert sich nicht. Wir nehmen hier an, daß $\alpha = \alpha_1 \neq 0, \beta = \beta_1 \neq 0$

*) Vgl. § 3 der ersten Mitteilung.

sind. Wenn $x > x_1$ ist, wird gewöhnlich eine der Funktionen (etwa $u(x)$), die eine Lösung unseres Variationsproblems liefert, identisch verschwinden; und wenn $x < x_1$ die andere. Bezeichnen wir mit $\lambda'(x)$ bzw. $\lambda''(x)$ das Minimum von $D(u, v)$ wenn $u \equiv 0$ bzw. $v \equiv 0$ ist, so ist $\lambda_1(x_1)$ ein Schnittpunkt der Funktionen $\lambda'(x)$, $\lambda''(x)$.

Weil die Lösung des Variationsproblems mit einer Variablen durch cU_1 (c = Konstante) geliefert wird, so ist (§ 1) U_1 eine in dem Intervalle 0, 1 nicht oszillierende Funktion. Also muß auch V_1 (wenn es nicht identisch verschwindet) eine innerhalb des Intervalls 0, 1 nicht verschwindende Funktion sein.

Weil für $x = x_1$ die Lösung unseres Variationsproblems nicht ganz bestimmt ist, so ist das Minimum ein sogenanntes uneigentliches Minimum*). Wir werden in § 3 zeigen, daß der zu dem Punkte $x = 0$ „konjugierte Punkt“ $x = 1$ ist. Daher ist eine besondere Untersuchung der Existenz eines Minimums nötig**).

Wenn man verlangt, daß die gesuchten Funktionen außer der quadratischen Nebenbedingung $\varphi(1, x_2) = 1$ noch die linearen Nebenbedingungen

$$\int_0^1 \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_1 \right\} U_1(x) u(x) dx = 0,$$

$$\int_0^1 \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_2 \right\} V_1(x) v(x) dx = 0$$

befriedigen, so werden wir auf die neuen Lagrangeschen Gleichungen

$$(16) \quad \begin{aligned} (p_1 u)' + q_1 u + \lambda(l_1 + x_2 r_1) u + v_1 \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_1 \right\} U_1 &= 0, \\ (p_2 v)' + q_2 v + \lambda(l_2 + x_2 r_2) v + v_2 \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_2 \right\} V_1 &= 0, \end{aligned}$$

geführt.

Setzt man

$$(17) \quad \begin{aligned} \psi_1(x, x) &= \int_0^x \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_1 \right\} U_1 u dx, \\ \psi_2(x, x) &= \int_0^x \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_2 \right\} V_1 v dx, \end{aligned}$$

*) Stolz, Grundzüge der Differentialrechnung 1, S. 199. Die geodätischen Linien zwischen den Polen einer Kugel sind ein Beispiel eines uneigentlichen Minimums.

**) Daß ein Minimum wirklich existiert, hat der Verfasser gezeigt: Bull. Am. Math. Soc., loc. cit.

so kann man wie früher die Lösungen der fünf Lagrangeschen Gleichungen (16), (14), (17) aufstellen. Sie liefern die vom Anfangspunkt ausstrahlende fünfparametrische Extremalenschar

$$u = \alpha u_1(x, \lambda) + \frac{v_1 U_1}{\lambda_1 - \lambda_0}, \quad v = \beta v_1(x, \lambda) + \frac{v_2 V_1}{\lambda_1 - \lambda_0},$$

$$\varphi(x, x_2) = \int_0^x \left\{ (l_1 + x_2 r_1) \left(\alpha u_1 + \frac{v_1 U_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 + (l_2 + x_2 r_2) \left(\beta v_1 + \frac{v_2 V_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 \right\} dx,$$

$$(18) \quad \psi_1(x, x_2) = \int_0^x \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_1 \right\} \left(\alpha u_1 + \frac{v_1 U_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) U_1 dx,$$

$$\psi_2(x, x_2) = \int_0^x \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_2 \right\} \left(\beta v_1 + \frac{v_2 V_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) V_1 dx,$$

wo u_1, v_1 zwei in dem Punkte $x=0$, aber nicht in dem ganzen Intervalle $0, 1$ verschwindende Partikularlösungen der homogenen Gleichungen $L_1(u, k_2) = 0$, $L_2(u, k_2) = 0$ sind. Man kann wie in § 1 zeigen, daß auf den gesuchten Kurven (aber nicht auf allen Kurven der Schar) $v_1 = v_2 = 0$ ist. Wie in dem Falle der quadratischen Bedingung allein, ist der Parameter λ , aber nicht die Parameter α, β durch die Endbedingungen $u(1) = v(1) = \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0$, $\varphi(1) = 1$ bestimmt. Das Minimum wird durch $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ oder $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ geliefert; wir nehmen an, daß $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ sind.

Verlangen wir, daß die gesuchten Funktionen außer der quadratischen Nebenbedingung $\varphi(x, \kappa_n) = 1$ mehrere lineare Nebenbedingungen

$$(19) \quad \begin{cases} \int_0^1 \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_n x_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) r_1 \right\} U_1 u dx = 0, & \int_0^1 \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_n x_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) r_2 \right\} V_1 v dx = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \int_0^1 \left\{ l_{n-1} + \left(\frac{\lambda_{n-1} x_{n-1} - \lambda_n x_n}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \right) r_{n-1} \right\} U_{n-1} u dx = 0, & \int_0^1 \left\{ l_n + \left(\frac{\lambda_{n-1} x_{n-1} - \lambda_n x_n}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \right) r_n \right\} V_{n-1} v dx = 0, \end{cases}$$

befriedigen, so ergibt sich, daß alle zu denselben gehörigen Lagrange-
schen Faktoren gleich Null sind, und wir erhalten als Lösungen des
Variationsproblems die Lösungen U_n, V_n der Differentialgleichungen

$$L_1(u, x_n) = 0, \quad L_2(v, x_n) = 0,$$

oder der Gleichungen (11).

m lineare Differentialgleichungen mit m Parametern kann man als die Lagrangeschen Gleichungen eines ähnlichen Variationsproblems mit

quadratischen und linearen Nebenbedingungen betrachten. Weil die Behandlung ganz analog wie in dem Falle $m = 2$ ist, werden wir hier und in den folgenden Paragraphen auf diesen Punkt nicht weiter eingehen.

§ 3.

Das Jacobische Kriterium für den Fall einer Nebenbedingung

$$\int_0^1 \{l_1 u^2 + l_2 v^2 + \kappa_1 (r_1 u^2 + r_2 v^2)\} dx = 1.$$

Weil ein Minimum unseres Variationsproblems (§ 2) mit der quadratischen Nebenbedingung existiert, so müssen unsere Funktionen

$$u(x) = U_1(x) = \alpha_1 u_1(x, \lambda_1), \quad v(x) = V_1(x) = \beta_1 v_1(x, \lambda_1)$$

das Jacobische Kriterium erfüllen. Die Bedeutung dieses Kriteriums werden wir nun untersuchen und beweisen, daß die Funktionen U_1, V_1 in dem Intervalle $0, 1$ nicht oszillieren.

Die Jacobische Bedingung verlangt, geometrisch ausgedrückt, daß durch jeden Punkt einer gewissen Umgebung unserer Extremale eine und nur eine Extremale der vom Anfangspunkt ausgehenden dreiparametrischen Schar (15) geschickt werden kann. Das heißt, für keinen Wert $x (0 < x < 1)$ dürfen die drei Gleichungen

$$u_1(x, \lambda_1) \delta \alpha + \alpha_1 \frac{\partial u_1(x, \lambda_1)}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0, \quad v_1(x, \lambda_1) \delta \beta + \beta_1 \frac{\partial v_1(x, \lambda_1)}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0,$$

$$\left\{ \alpha_1 \int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1^2 dx \right\} \delta \alpha + \left\{ \beta_1 \int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1^2 dx \right\} \delta \beta$$

$$+ \left\{ \alpha_1^2 \int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} dx + \beta_1^2 \int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} dx \right\} \delta \lambda = 0$$

gleichzeitig erfüllt sein, wenn $\lambda_1, \alpha_1, \beta_1$ die Werte der Parameter für die Funktionen $u = U_1, v = V_1$ bedeuten und $\delta \alpha, \delta \beta, \delta \lambda$ unterhalb gewisser Schranken liegende Konstanten sind. Der sogenannte zum Anfangspunkt $x = 0$, „konjugierte Punkt“, wo diese Gleichungen gleichzeitig bestehen, ist eine Nullstelle der Determinante

$$\begin{vmatrix} D_1(x, \lambda_1) & & & \\ u_1(x, \lambda_1) & \alpha_1 \frac{\partial u_1(x, \lambda_1)}{\partial \lambda} & & 0 \\ \alpha_1 \int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1^2 dx & \alpha_1^2 \int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} dx + \beta_1^2 \int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} dx & \beta_1 \int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1^2 dx & \\ 0 & \beta_1 \frac{\partial v_1(x, \lambda_1)}{\partial \lambda} & & v_1(x, \lambda_1) \end{vmatrix}$$

Wegen der Randbedingungen (11) sind $x = 0$, $x = 1$ Nullstellen der Determinante D_1 ; das Jacobische Kriterium verlangt, daß keine innerhalb des Intervalls $0, 1$ liegt. Nun ist

$$D_1(x, \lambda_1) = \alpha_1^2 v_1 \left| \begin{array}{cc} u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \\ \int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1^2 dx & \int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} dx \end{array} \right| \\ + \beta_1^2 u_1 \left| \begin{array}{cc} v_1 & \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \\ \int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1^2 dx & \int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} dx \end{array} \right| \equiv \alpha_1^2 v_1 \Delta_1(u) + \beta_1^2 u_1 \Delta_1(v).$$

Aus den Formeln*) § 5 folgern wir gleich

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{D_1}{u_1 v_1} \right) \equiv \alpha_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta_1(u)}{u_1} \right) + \beta_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta_1(v)}{v_1} \right) \\ = \alpha_1^2 \frac{\left(\int_0^x (l_1 + \kappa_1 r_1) u_1^2 dx \right)^2}{p_1 u_1^2} + \beta_1^2 \frac{\left(\int_0^x (l_2 + \kappa_1 r_2) v_1^2 dx \right)^2}{p_2 v_1^2} \geq 0.$$

Die Funktion $\frac{D_1}{u_1 v_1}$ nimmt also monoton zu und wird unendlich in den Nullstellen von u_1 und v_1 , denn in diesen Punkten sind, wie man leicht zeigen kann (was wir in der früheren Mitteilung getan haben), die Funktionen $\Delta_1(u)$ bzw. $\Delta_1(v)$ stets von Null verschieden. Im Punkte $x = 1$ ist dann $\frac{D_1}{u_1 v_1} = \infty$, obgleich $D_1(x, \lambda_1) = 0$ ist. Im Punkte $x = 0$ hat D_1 eine Nullstelle höherer Ordnung als $u_1 v_1$ (siehe § 7, Mitt. 1) und daher hat $\frac{D_1}{u_1 v_1}$ den Wert Null. Zwischen Null und der ersten Nullstelle von $u_1 v_1$ nimmt $\frac{D_1}{u_1 v_1}$ alle Werte zwischen Null und $+\infty$ an. Zwischen zwei Nullstellen von $u_1 v_1$ nimmt diese Funktion alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an. Weil D_1 in dem ganzen Intervalle $0, 1$ von Null verschieden ist, muß die erste Nullstelle von $u_1 v_1$ in dem Punkte $x = 1$ sein. Daher verlangt das Jacobische Kriterium, daß keine der beiden Funktionen u_1, v_1 oszilliert.

*) Oder aus den Formeln der früheren Mitteilung.

§ 4.

Das Jacobische Kriterium für den Fall der drei Nebenbedingungen

$$\int_0^1 \{ (l_1 + \kappa_2 r_1) u^2 + (l_2 + \kappa_2 r_2) v^2 \} dx = 1, \quad \int_0^1 \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_1 \right\} U_1 u dx = 0,$$

$$\int_0^1 \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_2 \right\} V_1 v dx = 0.$$

In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß unser Variationsproblem (§ 2) eine Lösung $u(x) = U_2(x) = \alpha_2 u_1(x)$, $v(x) = V_2(x) = \beta_2 v_1(x)$ hat. Durch Stetigkeitsbetrachtungen*) kann man zeigen, daß $U_2(x)$, $V_2(x)$ einmal in dem Intervalle 0, 1 oszillierende Funktionen sind. Wir werden aber diese Tatsachen aus dem Jacobischen Kriterium ableiten.

Wir haben in § 2 die fünfparametrische Extremalenschar (18) aufgestellt, in der die Lösung für $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_2$, $\lambda = \lambda_2$, enthalten ist. Das Jacobische Kriterium verlangt, daß die fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta \alpha \{ u_1(x, \lambda_2) \} + \delta v_1 \left\{ \alpha_2 \frac{U_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} + \delta \lambda \left\{ \alpha_2 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right\} &= 0, \\ \delta \lambda \left\{ \beta_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right\} + \delta v_2 \left\{ \beta_2 \frac{V_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} + \delta \beta \{ v_1(x, \lambda_2) \} &= 0, \\ \alpha_2 \delta \alpha I_1(u_1^2) + \frac{\alpha_2 \delta v_1}{\lambda_1 - \lambda_2} I_1(u_1 U_1) + \delta \lambda \left\{ \alpha^2 I_1 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) + \beta^2 I_2 \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) \right\} \\ + \frac{\beta_2 \delta v_2}{\lambda_1 - \lambda_2} I_2(v_1 V_1) + \beta_2 \delta \beta I_2(v_1^2) &= 0, \\ \delta \alpha J_1(u_1 U_1) + \frac{\delta v_1}{\lambda_1 - \lambda_2} J_1(U_1^2) + \delta \lambda \left\{ \alpha_2 J_1 \left(U_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) \right\} &= 0, \\ \delta \lambda \left\{ \beta_2 J_2 \left(V_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) \right\} + \frac{\delta v_2}{\lambda_1 - \lambda_2} J_2(V_1^2) + \delta \beta J_2(v_1 V_1) &= 0, \end{aligned}$$

für keinen Wert von x ($0 < x < 1$) durch fünf konstante Größen $\delta \alpha$, $\delta \beta$, $\delta \lambda$, δv_1 , δv_2 befriedigt werden können. (Der Abkürzung wegen haben wir

$$\begin{aligned} I_1(u_1^2) &= \int_0^x (l_1 + \kappa_2 r_1) u_1^2 dx, \quad I_1(u_1 U_1) = \int_0^x (l_1 + \kappa_2 r_1) u_1 U_1 dx, \dots, \\ I_2 \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) &= \int_0^x (l_2 + \kappa_2 r_2) v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} dx, \dots, \\ J_1(u_1 U_1) &= \int_0^x \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_1 \right\} u_1 U_1 dx, \dots, \\ J_2 \left(V_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) &= \int_0^x \left\{ l_2 + \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_2 \right\} V_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} dx, \dots \end{aligned}$$

*) Vgl. § 1.

gesetzt). Die Jacobische Determinante ist also (nach Weglassung des konstanten Faktors $\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$)

$$\begin{aligned}
 D_2(x, \lambda_2) &= \\
 &= \begin{vmatrix} u_1(x, \lambda_2) & U_1(x) & \alpha_2 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} & 0 & 0 \\ J_1(u_1 U_1) & J_1(U_1^2) & \alpha_2 J_1 \left(U_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) & 0 & 0 \\ \alpha_2 I_1(u_1^2) & \alpha_2 I_1(u_1 U_1) & \alpha_2^2 I_1 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) + \beta_2^2 I_2 \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) & \beta_2 I_2(v_1 V_1) & \beta_2 I_2(v_1^2) \\ 0 & 0 & \beta_2 J_2 \left(V_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) & J_2(V_1^2) & J_2(v_1 V_1) \\ 0 & 0 & \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} & V_1(x) & v_1(x, \lambda_2) \end{vmatrix} \\
 &= \alpha_2^2 \begin{vmatrix} u_1 & U_1 & \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \\ J_1(u_1 U_1) & J_1(U_1^2) & J_1 \left(U_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) \\ I_1(u_1^2) & I_1(u_1 U_1) & I_1 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1 & V_1 \\ J_2(v_1 V_1) & J_2(V_1^2) \end{vmatrix} \\
 &+ \beta_2^2 \begin{vmatrix} v_1 & V_1 & \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \\ J_2(v_1 V_1) & J_2(V_1^2) & J_2 \left(V_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) \\ I_2(v_1^2) & I_2(v_1 V_1) & I_2 \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} \right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & U_1 \\ J_1(u_1 U_1) & J_1(U_1^2) \end{vmatrix} \\
 &\equiv \alpha_2^2 \Delta_2(u) \delta_2(v) + \beta_2^2 \Delta_2(v) \delta_2(u).
 \end{aligned}$$

Wegen der Randbedingungen (11) sind $x=0$, $x=1$ Nullstellen von $\delta_2(u)$ und $\delta_2(v)$, und daher von D_2 ; das Jacobische Kriterium verlangt, daß zwischen 0 und 1 keine Nullstelle liegt. Wie in dem allgemeinen Fall (§ 5) zeigt man, daß $\frac{d}{dx} \left(\frac{D_2}{\delta_2(u) \delta_2(v)} \right) \geq 0$ ist. Ebenso wie in § 7 der ersten Mitteilung kann man zeigen, daß die monoton zunehmende Funktion $\frac{D_2}{\delta_2(u) \delta_2(v)}$ für $x=0$ gleich Null ist. Weil D_2 keine Nullstelle zwischen 0 und 1 hat, kann auch $\delta_2(u) \delta_2(v)$ keine haben. Das heißt $\delta_2(u)$ und $\delta_2(v)$ oszillieren nicht in dem Intervalle. Wie wir später zeigen werden (§ 5), ist $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\delta_2(u)}{u_1} \right\} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p_1 u_1^2} (J_1(u_1 U_1))^2$. Weil $\frac{\delta_2(u)}{u_1}$ monoton ist und $\delta_2(u)$ keine Nullstelle innerhalb der Intervalle 0, 1 hat, kann man leicht wie in der ersten Mitteilung zeigen, daß u_1 gerade einmal innerhalb der Intervalle verschwindet. In gleicher Weise zeigt man, daß v_1 einmal oszilliert.

§ 5.

Hinzunahme mehrerer linearer Nebenbedingungen.

Die Hinzufügung der linearen Nebenbedingungen (19) bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten und liefert nichts prinzipiell Neues. Das Bildungsgesetz für die siebenreihige Determinante D_3 und die $(2n+1)$ -reihige D_n ist leicht aus dem für D_1 und D_2 ersichtlich. Dividieren wir D_n durch das Produkt von zwei gewissen n reihigen Determinanten $\delta_n(u)$, $\delta_n(v)$ die nur u bzw. v enthalten, so haben wir

$$(20) \quad \frac{D_n}{\delta_n(u) \delta_n(v)} = \alpha_n^2 \frac{\Delta_n(u)}{\delta_n(u)} + \beta_n^2 \frac{\Delta_n(v)}{\delta_n(v)},$$

wo $\Delta_n(u)$ und $\Delta_n(v)$ $n+1$ reihige Determinanten von u bzw. v allein sind, die $\delta_n(u)$ bzw. $\delta_n(v)$ als Unterdeterminanten enthalten. Nun muß die Funktion $\frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta_n(u)}{\delta_n(u)} \right)$ untersucht werden. Wesentlich sind

$$\Delta_n(u) = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & \cdots & U_{n-1} & \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \\ J_1(U_1 U_0) & J_1(U_1^2) & \cdots & J_1(U_1 U_{n-1}) & J_1 \left(U_1 \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ J_1(U_{n-1} U_0) & J_1(U_{n-1} U_1) & \cdots & J_1(U_{n-1}^2) & J_1 \left(U_{n-1} \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) \\ I_1(U_0^2) & I_1^*(U_0 U_1) & \cdots & I_1(U_0 U_{n-1}) & I_1 \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) \end{vmatrix}$$

und

$$\delta_n(u) = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & \cdots & U_{n-1} \\ J_1(U_1 U_0) & J_1(U_1^2) & \cdots & J_1(U_1 U_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ J_1(U_{n-1} U_0) & J_1(U_{n-1} U_1) & \cdots & J_1(U_{n-1}^2) \end{vmatrix}$$

wo

$$U_0 = u_1, \quad J_1(U_i U_j) = \int_0^x \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_i x_i - \lambda_j x_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) r_1 \right\} U_i U_j dx,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n),$$

$$J_1 \left(U_i \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) = \int_0^x \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda_i x_i - \lambda_0 x_0}{\lambda_i - \lambda_0} \right) r_1 \right\} U_i \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} dx, \quad I_1(U_0 U_i) = \int_0^x (l_1 + x_0 r_1) U_0 U_i dx$$

usw.

gesetzt sind.

Wenn man die erste Gleichung (13) nach λ differenziert, so bekommt man (weil $u = U_0$ ist) die Relation

$$(21) \quad \left(p_1 \frac{\partial U_0'}{\partial \lambda} \right) + q_1 \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + \lambda (l_1 + x r_1) \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} + (l_1 + x r_1) U_0 = 0.$$

Multiplizieren wir (13) und (21) mit $\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$ bzw. $-U_0$, addieren und integrieren, so bekommen wir

$$(22) \quad \frac{I_1(U_0^2)}{p_1} \equiv \frac{1}{p_1} \int_0^x (l_1 + \kappa r_1) U_0^2 dx = U_0' \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} - U_0 \frac{\partial U_0'}{\partial \lambda}.$$

Zwei den Parameterwerten λ, λ_i entsprechenden Lösungen $U(x), U_i(x)$ der Differentialgleichung (11), $(p_1 u') + q_1 u + (\lambda l + \mu r)u = 0$ ($\mu = \kappa \lambda$) mit der Anfangsbedingung $U(0) = 0$ bzw. $U_i(0) = 0$ genügen der Identität

$$(23) \quad UU_i' - U'U_i = \frac{\lambda - \lambda_i}{p_1} \int_0^x \left\{ l_1 + \left(\frac{\lambda \kappa - \lambda_i \kappa_i}{\lambda - \lambda_i} \right) r_1 \right\} UU_i dx \equiv \frac{\lambda - \lambda_i}{p_1} J_1(UU_i) \\ \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{p_1} J_1(UU_i) + \frac{\lambda_0 - \lambda_i}{p_1} J_1(U_iU_i),$$

was man in derselben Weise wie bei der Gleichung (8) beweist. Aus (23) folgt durch Differentiation für den Fall $U = U_0$

$$(24) \quad \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} U_i' - \frac{\partial U_0'}{\partial \lambda} U_i = \frac{\lambda_0 - \lambda_i}{p_1} J_1 \left(U_i \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{p_1} I_1(U_0 U_i).$$

Aus (22), (23) und (24) folgt dann

$$\Delta_n(u) \delta'_n(u) - \Delta'_n(u) \delta_n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A_i \mathfrak{U}_j \left\{ \frac{\lambda_i - \lambda_0}{p_1} J_1(U_i U_j) + \frac{\lambda_0 - \lambda_j}{p_1} J_1(U_j U_i) \right\} \\ + \sum_{j=0}^{n-1} A_n \mathfrak{U}_j \left\{ \frac{\lambda_0 - \lambda_j}{p_1} J_1 \left(U_j \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{p_1} I_1(U_0 U_j) \right\} \\ = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{\lambda_i - \lambda_0}{p_1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{U}_j J_1(U_i U_j) \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_0 - \lambda_j}{p_1} \mathfrak{U}_j \left[\sum_{i=0}^{n-1} A_i J_1(U_j U_i) + A_n J_1 \left(U_j \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) \right] \\ + \frac{A_n}{p_1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{U}_j I_1(U_0 U_j),$$

wo $A_0, A_1, \dots, A_n; \mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_{n-1}$ die zur ersten Zeile von $\Delta_n(u)$ bzw. $\delta_n(u)$ gehörigen Unterdeterminanten sind. Weil aber

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{U}_j J_1(U_i U_j) = 0 \quad (i=1, \dots, n-1), \\ \sum_{i=0}^{n-1} A_i J_1(U_j U_i) + A_n J_1 \left(U_j \frac{\partial U_0}{\partial \lambda} \right) = 0 \quad (j=1, \dots, n-1),$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{A}_j I_1(U_0 U_j) = -A_n$$

sind, ist

$$[\Delta_n \delta'_n - \Delta'_n \delta_n] = -\frac{(A_n)^2}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\Delta_n(u)}{\delta_n(u)} \right\} = \frac{1}{p_1} \frac{(A_n)^2}{(\delta_n(u))^2}.$$

Ebenso ist

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\Delta_n(v)}{\delta_n(v)} \right\} = \frac{(B_n)^2}{p_2 (\delta_n(v))^2},$$

wo B_n eine gewisse Unterdeterminante von $\Delta_n(v)$ ist. Dann sieht man aus (20), daß

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{D_n}{\delta_n(u) \delta_n(v)} \right) = \frac{\alpha_n^2 (A_n)^2}{p_1 (\delta_n(u))^2} + \frac{\beta_n^2 (B_n)^2}{p_2 (\delta_n(v))^2} \geq 0$$

ist. Wie in § 7 der früheren Mitteilung zeigt man, daß

$$\left(\frac{\Delta_n(u)}{\delta_n(u)} \right)_{x=0} = \left(\frac{\Delta_n(v)}{\delta_n(v)} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{und daher} \quad \left(\frac{D_n}{\delta_n(u) \delta_n(v)} \right)_{x=0} = 0$$

ist. Das Jacobische Kriterium verlangt, daß die Funktion D_n zwischen $x=0$ und $x=1$ keine Nullstelle hat. Es läßt sich wie früher (§ 4) leicht zeigen, daß $\delta_n(u) \delta_n(v)$ keine hat. Daher oszillieren $\delta_n(u)$ und $\delta_n(v)$ nicht in dem Intervalle.

Ist $\delta_{n-1}(u)$ die Unterdeterminante von $\delta_n(u)$

$$\delta_{n-1}(u) = \begin{vmatrix} U_0 & \cdots & U_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ J_1(U_{n-2} U_0) & \cdots & J_1(U_{n-2}^2) \end{vmatrix},$$

so kann man in ähnlicher Weise zeigen, daß

$$\begin{aligned} \delta_n(u) \delta'_{n-1}(u) - \delta'_n(u) \delta_{n-1}(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \mathfrak{A}_i a_j \left\{ \frac{\lambda_i - \lambda_0}{p_1} J_1(U_i U_j) + \frac{\lambda_0 - \lambda_j}{p_1} J_1(U_j U_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \mathfrak{A}_i \frac{\lambda_i - \lambda_0}{p_1} \sum_{j=0}^{n-2} a_j J_1(U_i U_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\lambda_0 - \lambda_j}{p_j} a_j \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{A}_i J_1(U_j U_i) \\ &\quad + \mathfrak{A}_{n-1} \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_0}{p_1} \sum_{j=0}^{n-2} a_j J_1(U_{n-1} U_j) = -\frac{\lambda_{n-1} - \lambda_0}{p_1} \mathfrak{A}_{n-1}^2, \end{aligned}$$

wo a_0, a_1, \dots, a_{n-2} die zur ersten Zeile von $\delta_{n-1}(u)$ gehörigen Kofaktoren sind. Damit ist $\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_n(u)}{\delta_{n-1}(u)} \right) = \frac{(\lambda_0 - \lambda_{n-1}) \mathfrak{A}_{n-1}^2}{p_1 (\delta_{n-1}(u))^2}$. Weil $\frac{\delta_n(u)}{\delta_{n-1}(u)}$ monoton ist und $\delta_n(u)$ keine Nullstelle innerhalb der Intervalle 0, 1 hat, es läßt

sich wie in der ersten Mitteilung zeigen, daß $\delta_{n-1}(u)$ gerade einmal innerhalb der Intervalle verschwindet.

Fahren wir in gleicher Weise fort, so muß die Unterdeterminante von $\delta_{n-1}(u)$

$$\delta_{n-2}(u) = \begin{vmatrix} U_0 & \cdots & U_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ J_1(U_{n-3}U_0) & \cdots & J_1(U_{n-3}^2) \end{vmatrix}$$

gerade zweimal in dem Intervalle 0, 1 oszillieren, δ_{n-3} gerade dreimal und endlich $U_0 = u_1$ gerade $n - 1$ mal oszillieren. In derselben Weise zeigt man, daß v_1 gerade $n - 1$ mal in dem Intervalle oszilliert.

Die oben erhaltenen Resultate kann man verallgemeinern, und den Fall von m Differentialgleichungen mit m Parametern behandeln.

Haupttheorem. *Das Jacobische Kriterium der Variationsrechnung besagt, daß die Lösungsfunktionen $u_i(x) = U_1^{(i)}(x) \not\equiv 0$, ($i = 1, 2, \dots, m$) des Minimalproblems (§ 2)*

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m (p_i u_i'^2 - q_i u_i^2) dx = \text{Min}, \quad \{p_i(x) > 0, q_i(x) \leq 0, u_i(0) = u_i(1) = 0\},$$

mit der quadratischen Nebenbedingung

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m (l_i + \alpha_1 r_i + \cdots + \sigma_1 t_i) u_i^2 dx = 0$$

(wo l_i, r_i, \dots, t_i m^2 gegebene Funktionen sind) in dem Intervalle 0, 1 nicht oszillieren, daß die Lösungen $u_i(x) = U_2^{(i)}(x) \not\equiv 0$ desselben Problems mit der quadratischen Nebenbedingung

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m (l_i + \alpha_2 r_i + \cdots + \sigma_2 t_i) u_i^2 dx = 0,$$

und den m linearen Nebenbedingungen

$$\int_0^1 \left\{ l_i + \left(\frac{\lambda_1 \alpha_1 - \lambda_2 \alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) r_i + \cdots + \left(\frac{\lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 \sigma_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) t_i \right\} u_i U_1^{(i)} dx = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

einmal in dem Intervalle oszillieren, und daß im allgemeinen die Lösungen

$$u_i(x) = U_{n+1}^{(i)}(x) \not\equiv 0$$

des Problems mit der quadratischen Nebenbedingung

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m (l_i + \alpha_n r_i + \cdots + \sigma_n t_i) u_i^2 dx = 0$$

und den m linearen Nebenbedingungen

$$\int_0^1 \left\{ l_i + \left(\frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_{n+1}} \right) r_i + \dots + \left(\frac{\lambda_1 \sigma_1 - \lambda_{n+1} \sigma_{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_{n+1}} \right) t_i \right\} u_i U_1^{(i)} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

.

$$\int_0^1 \left\{ l_i + \left(\frac{\lambda_n x_n - \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} \right) r_i + \dots + \left(\frac{\lambda_n \sigma_n - \lambda_{n+1} \sigma_{n+1}}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} \right) t_i \right\} u_i U_n^{(i)} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

gerade n mal in dem Intervalle oszillieren.

Dezember 1910.

Anmerkung, Juli 1911. Das Problem der Existenz zweier den Randbedingungen (9) genügenden Lösungen $u(x)$, $v(x)$ der Gleichungen (13) die n_1 bzw. n_2 mal oszillieren ist viel untersucht worden. Es ist von Klein aufgestellt worden und die Resultate wurden von Bôcher und neuerdings (Göttinger Nachrichten, 1910) von Hilbert und Yoshikawa ergänzt. Seit die vorliegende Arbeit geschrieben wurde, ist es dem Verfasser gelungen notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen dieses sogenannten Kleinschen Oszillationstheorems zu gewinnen. Diese Arbeit wird bald in den Transactions of the American Mathematical Society erscheinen. Das entsprechende Variationsproblem in diesem Fall ist, diejenigen Funktionen $u(x)$, $v(x)$ zu bestimmen, welche den Bedingungen (9), (12) und n_1 bzw. n_2 linearen Nebenbedingungen der Gestalt (19) genügen und ein Minimum des Integrals $D(uv)$ liefern. Es läßt sich leicht zeigen, wie es in der vorliegenden Arbeit geschehen ist, daß das Jacobische Kriterium auch in diesem Falle verlangt, daß die Funktionen $u(x)$, $v(x)$, n_1 bzw. n_2 mal in dem Intervalle oszillieren.