Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten.

Von

Robert König in Tübingen.

Einleitung.

Seit Euler und besonders seit Abel haben sich außerordentlich zahlreiche Arbeiten mit dem Problem der Reduktion der Integrale elliptischer, hyperelliptischer und algebraischer Funktionen befaßt und auch Weierstraß behandelt in seiner klassischen Vorlesung über *„Abelsche Transzendenten“* (Ges. Werke, Bd. IV, Berlin 1902, 11. Kap.) dieses Thema.

Den Schlüssel zur Lösung dieser Aufgabe bildet für ihn ein Vertauschungstheorem, das als „Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter für die Differentiale 2. Gattung“ (oder in seiner Integralform für die Integrale 3. Gattung) bekannt und grundlegend ist. Es ist mir nun gelungen, nicht nur auf dem speziellen algebraischen Gebiet, sondern ganz allgemein für eine beliebige Klasse *Riemannscher Transzendenten* (d. h. Funktionen mit vorgegebener Monodromiegruppe), drei unbegrenzte Serien I_{h+1}, II_{h+1}, III_{h+1} $(h = 0, 1, 2, \cdots)$ von Vertauschungstheoremen zu entdecken, von denen das obengenannte sowie der berühmte Vertauschungssatz von Abel und Jacobi für lineare Differentialgleichungen nur ein einziges Glied darstellt, nämlich in obiger Bezeichnungsweise das Theorem III_2.

Dies setzt mich in die Lage, nicht nur das angezeigte Reduktionsproblem für eine beliebige Klasse (K) Riemannscher Transzendenten und ihre Integrale zu lösen (VII. Abschnitt), sondern die ganz allgemeine Frage zu beantworten: Welche Zusammenhänge bestehen überhaupt zwischen den Funktionen und Differentialen einer Klasse (K) und ihrer komplementären $(\breve{K})$? Diese Frage wird gelöst sein, sobald bekannt ist: *welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Elementarfunktionen und Elementardifferentialen von* (K) *und* $(\breve{K})$?

Demgemäß baut sich die Arbeit folgendermaßen auf*):

In einem I. Abschnitt betrachte ich Systeme von n Funktionen ($n \geqq 1$) $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, welche auf n geeignet zerschnittenen Blättern E_i' ($i = 1, 2, \cdots, n$) (s. die Skizze in § 1) eindeutig und bis auf Pole regulär ausgebreitet sind und beim Umlauf um die Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_s$ lineare homogene Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_s$ erfahren. Statt von dem System $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ spreche ich kürzer von „der Funktion y". Alle Funktionen mit denselben Substitutionen A bilden nach Riemann eine Klasse (K); die Klasseneigenschaft besteht darin, daß mit $y, y^{(1)}, y^{(2)}$ auch $y^{(1)} + y^{(2)}$, $R(z) \cdot y$, $\frac{dy}{dz}$ in (K) vorkommt, wenn $R(z)$ eine rationale Funktion ist. Die Funktionen $\breve{y} = (\breve{y}_1, \breve{y}_2, \cdots, \breve{y}_n)$, welche die komplementären Substitutionen $\breve{A} = (\overline{A^{-1}})$ erfahren, bilden die komplementäre Klasse $(\breve{K})$. Außer den Funktionen betrachte ich auch ihre Integrale bzw. die zugehörigen Differentiale $y\,dz$ und $\breve{y}\,dz$. Ich erinnere aus den vorangehenden Arbeiten an die Begriffsbildungen und Sätze, soweit sie für das Folgende nötig sind.

In einem II. Abschnitt werden die einfachsten Funktionen von (K) und zwar sämtliche, aus denen sich jede andere Funktion linear und homogen aufbauen läßt, die „*Elementarfunktionen von* (K)" aufgestellt. Es gehört im allgemeinen zu jeder Stelle von den n Blättern, z. B. $\mathfrak{d}_\delta$, wo δ eine Zahl der Reihe $1, 2, \cdots, n$ ist, eine unbegrenzte Reihe von Elementarfunktionen der Ordnung $h = 1, 2, \cdots$ in inf. $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{d}_\delta)$, welche bei $\mathfrak{d}_\delta$ (d. h. für $z = d$ und $i = \delta$) einen Pol der Ordnung h besitzen; sie sind völlig eindeutig algebraisch charakterisiert und haben bei gewissen, in $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ vereinigten Stellen höchstens Pole bzw. mindestens Nullstellen

---

*) Ihr gehen folgende Arbeiten des Verfassers voran:

I. Grundzüge einer Theorie der Riemannschen Funktionenpaare, [Tübingen, 22. Juli 1915], Math. Ann., Bd. 78 (1917), S. 63—93.

II. Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene, [Berlin, 11. Nov. 1916], Crelles Journal, Bd. 148 (1918), S. 146—182.

III. Die Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten und andere Theoreme [Berlin, 6. Febr. 1917], Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., Bd. 26 (1918), S. 250—274.

IV. Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme [Berlin, 27. Februar 1917], Gött. Nachr. (1917), S. 240—246.

V. Die Elementartheoreme und die Vertauschungstheoreme 1. Ordnung bei den Riemannschen Transzendenten [Berlin, 6. Juni 1917].

VI. Funktionen- und zahlentheoretische Analogieen [Berlin, 27. Juni 1917], Archiv für Math. u. Physik (1918).

VII. Neue Beiträge zur Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten [Berlin, 4. September 1917], Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 1918.

VIII. Die Vertauschungstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten [Berlin, 26. September 1917].

1. Ordnung. Für die Klasse $(\breve{K})$ haben wir die entsprechenden Elementarfunktionen $\underset{\mathfrak{M},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(h)}}(x, b_\beta)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ usw. — Ebenso werden für die Differentiale die einfachsten Bausteine, die „*Elementardifferentiale*“ aufgestellt:

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z_t, b_\beta)}{dz}\frac{dz}{dt} \text{ usw. für } (K), \quad \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x_\tau, \mathfrak{b}_\delta)}{dx}\frac{dx}{d\tau} \text{ usw. für } (\breve{K}).$$

Zu einer tieferen Einsicht und Beherrschung der Klassen (K) und $(\breve{K})$ gelangen wir erst, indem wir in einem III. Abschnitt die *Elementarfunktionen* $(h+1)^{ter}$ *Ordnung von zwei Variabeln* $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z, x)$ bzw. $\underset{\mathfrak{M},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(h+1)}}(x, z)$ einführen. $E_{ik}^{(h+1)}$ ist in Abhängigkeit von dem Argument z für $i = 1, 2, \cdots, n$ eine Funktion der Klasse (K), in Abhängigkeit von dem Parameter x für $k = 1, 2, \cdots, n$ eine Funktion der Klasse $(\breve{K})$ und verhält sich*) für $z = x$ und $i = k$ wie $\frac{1}{(z-x)^{h+1}}$. Bei $\breve{E}_{ki}^{(h+1)}$ ist es umgekehrt. Für $h = 0$ stelle ich $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z, x)$, welches als Verallgemeinerung der Weierstraßschen Grundfunktion**) $H(xy, x'y')$ anzusehen ist, direkt auf, während für $h \geqq 1$ der **Ableitungssatz** I_h lehrt, daß $E_{ik}^{(h+1)}(z, x)$ aus $E_{ik}^{(1)}(z, x)$ durch h-malige Ableitung nach dem Parameter x hervorgeht — Wir beherrschen $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z, x)$ vollständig, wenn wir für alle Stellen die Potenzreihenentwicklung nach dem Argument, nach dem Parameter, nach beiden gleichzeitig kennen. Die Entwicklung von $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$ nach dem Parameter τ wird durch die 1. Reihe von **Entwicklungstheoremen** I_{h+1} gegeben, von denen insbesondere das erste für $h = 0$ besagt, daß als Entwicklungskoeffizienten hierbei sämtliche im II. Abschnitt aufgestellten Elementarfunktionen einer Variabeln entspringen. *Hiermit ist der Zusammenhang zwischen den Elementarfunktionen einer und zweier Variabeln von (K) gegeben; analog für $(\breve{K})$*

Was für die Funktionen gesagt wurde, gilt in entsprechender Weise auch für die Differentiale. Ich stelle die *Elementardifferentiale* $(h+1)^{ter}$ *Ordnung von zwei Variabeln*

$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{F_{ik}^{(h+1)}}(z_t, x_\tau)}{dz}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{d\tau} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x_\tau, z_t)}{dx}\frac{dx}{d\tau}\frac{dz}{dt}$$

für (K) bzw. $(\breve{K})$ auf und der **Ableitungssatz** II_h sowie die 2. Reihe von

*) Es kann hier in der Einleitung nur darauf ankommen, dem Leser den Gedankengang der Arbeit zu vermitteln, nicht eine erschöpfende Beschreibung zu geben.

**) S. Weierstraß, a. a. O. 2. Kap.

Entwicklungstheorem II_{h+1} lehren uns die entsprechenden Zusammenhänge.

In einem IV. Abschnitt wird der *Zusammenhang zwischen allen Elementarfunktionen und -Differentialen von zwei Variabeln und gleicher Ordnung untereinander*, d. i. im wesentlichen der Zusammenhang zwischen (s. § 12)

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z,x) \quad \text{und} \quad \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x,z)}{dx},$$

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z,x) \quad \text{und} \quad \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(h+1)}}(x,z),$$

$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{F_{ik}^{(h+1)}}(z,x)}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x,z)}{dx}$$

gegeben durch die drei Reihen von **Vertauschungstheoremen 1., 2., 3. Art**, I_{h+1}, II_{h+1}, III_{h+1} $(h = 0, 1, 2, \cdots)$ bzw. zwischen den Funktionen und Differentialen, Funktionen und Funktionen, Differentialen und Differentialen. Vert. I_1 sagt insbesondere: es ist

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z,x) = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(1)}}(x,z)}{dx}.$$

Vert. II_1 besitzt ein besonders einfaches Korollar II_1^*; III_2 ein ebensolches III_2^*. *Letzteres gibt im algebraischen Fall die Gleichung von Weierstraß bzw. eine Verallgemeinerung derselben.*)*

Die vorstehenden Theoreme sind Identitäten in zwei Variabeln von der Form $P(t, \tau) = 0$. Indem wir darin den Koeffizienten von t^r bzw. τ^s aufsuchen, gelangen wir in einem V. Abschnitt zu den **Reduktionstheoremen 1., 2., 3. Art:** $\mathrm{I}_{h+1}(t^r)$, $\mathrm{I}_{h+1}(\tau^s)$, $[\mathrm{II}_{h+1}(t^r)]$, $\mathrm{II}_{h+1}(\tau^s)$, $[\mathrm{III}_{h+1}(t^r)]$, $\mathrm{III}_{h+1}(\tau^s)$, welche *sämtliche Zusammenhänge zwischen den Elementarfunktionen und -Differentialen von einer Variabeln* liefern. Von den Theoremen 1. Art sind besonders die der beiden ersten Stufen für $h = 0$ und $h = 1$ bemerkenswert. Von den Theoremen 2. Art lehrt insbesondere II_2 die Zurückführung aller Elementarfunktionen auf eine gewisse endliche Anzahl einfachster unter ihnen und die Ableitung einer Funktion der Klasse. Von den Theoremen 3. Art lehrt ebenso III_2 die Zurückführung aller Elementardifferentiale auf eine gewisse endliche Anzahl einfachster unter ihnen und die Ableitung einer Funktion. Speziell für den *algebraischen* Fall gehen II_2 und III_2 in sehr einfache Korollare II_2^* und III_2^* über, von denen III_2^* die Reduktionsformel von Weierstraß (a. a. O. S. 263) darstellt.

In einem VI. Abschnitt suche ich den Koeffizienten von $t^r\tau^s$ und gelange dadurch zu den **Reziprozitätstheoremen 1., 2., 3. Art** I_{h+1},

---

*) S. Weierstraß a. a. O. S. 254.

II_{k+1}, III_{k+1}, welche die *Zusammenhänge zwischen den Entwicklungkoeffizienten der Elementarfunktionen und -Differentiale* liefern. Das Theorem I_1 besagt insbesondere: Der r^{te} Entwicklungskoeffizient der zur Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarfunktion $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle b_β ist entgegengesetzt gleich dem s^{ten} Entwicklungskoeffizienten des zu b_β gehörigen Elementardifferentials $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{d}_\delta$. Bemerkenswert ist dazu das Korollar I_1^*.

Im VII. Abschnitt nehme ich schließlich eine beliebige Funktion bzw. ein beliebiges Differential von $(\breve{K})$ und zeige, wie die Partialbruchdarstellung desselben durch die Elementardifferentiale der Klasse mit einem Schlage gewonnen werden kann — entsprechend dem Vorgang von Weierstraß für den algebraischen Fall.*) Auf die Elementardifferentiale kann ich jetzt die Reduktionstheoreme des V. Abschnittes in der mannigfachsten Weise zur Anwendung bringen und erhalte damit ebensoviele verschiedene Reduktionsmöglichkeiten für das gegebene Differential. Wende ich speziell auf alle gleichzeitig das Red.-Th. III_2 an, so erhalte ich den **allgemeinen Reduktionssatz für die Differentiale,** welcher die Zurückführung eines beliebigen Differentials auf eine gewisse endliche Anzahl einfachster Elementardifferentiale und die Ableitung einer Funktion lehrt. Seine Integralform klärt uns darüber auf, was durch die Integrale eigentlich *Neues* zu den Funktionen der Klasse hinzutritt. Im *algebraischen* Fall geht der allgemeine Reduktionssatz in die Gleichung von Weierstraß über (a. a. O. S. 263/4) und liefert schließlich, auf logarithmenfreie Integrale angewendet, als letzten Ausfluß die grundlegende Tatsache, daß jedes Abelsche Integral 2. Gattung durch $2p$ Fundamentalintegrale und eine algebraische Funktion dargestellt werden kann.

Hiermit ist die allgemeine systematische Theorie der Riemannschen Transzendenten *ihrem arithmetischen Teile nach* — gegründet ausschließlich auf die Klasseneigenschaft — bis zu einem gewissen Grade abgeschlossen. Es muß dem Leser überlassen bleiben, die überreiche Fülle von einzelnen Sätzen und Resultaten herauszulösen, welche durch Anwendung auf die verschiedensten Gebiete, welche unter den Begriff der Riemannschen Transzendenten fallen, entstehen.**)

*) S. Weierstraß a. a. O. 3. Kap.

**) Für den algebraischen Fall vgl. außer Weierstraß namentlich den Bericht von A. Brill und M. Noether über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit". Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung, Bd. III (1894), VII. Abschnitt: Die Weierstraßsche Richtung. Ferner M. Noether, „Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen", diese Annalen Bd. 37 (1899), S. 417—460.

Mit den allerersten Anfängen meiner Theorie der Riemannschen Funktionensysteme geht eine Theorie der „Riemannschen Formenscharen" von E. Ritter (diese Annalen, Bd. 47 (1897), S. 157—221) parallel. Sie reicht im wesentlichen 1. bis zum I. Anzahltheorem, 2. bis zur Aufstellung und Normierung der Elementarfunktionen 1. Ordnung, 3. bis zum Vertauschungssatz I_1. Weiter reicht diese Theorie der Scharen nicht. Aber gerade in den genannten Stücken sind beide Theorien wesentlich, gedanklich wie methodisch, verschieden.

1a) Das gilt bereits von der allerersten Grundlage, welche das Verhalten der Schar bzw. des Funktionensystems an einer von den a_σ verschiedenen Stelle betrifft. Für eine Theorie der *Systeme* war das *erste Erfordernis* eine *absolute Lossage* von den Begriffen wie „Nebenpunkt, Nullstelle, Unendlichkeitsstelle mit der und der Multiplizität" (s. Ritter, S. 160/1 und S. 164) und ihre *Ersetzung* durch den *scharfen Begriff des Multiplums für Funktionen und Differentiale*, wie ich ihn zuerst gegeben habe. Denn selbst für eine hyperelliptische Funktion ist es nicht gleichgültig, ob sie im 1. Blatt 0^5 wird, im 2. ebenso, oder im 1. 0^1, im 2. 0^9 oder umgekehrt usw. und allemal ist das ein „Nebenpunkt der Multiplizität 9".

1b) In weit höherem Maße gilt das noch für eine Verzweigungsstelle a_σ. Man sehe die ungeheure Kompliziertheit von Zweigen, Exponenten, gewöhnlichen und „modifizierten" und darauf bezüglichen Bedingungen S. 175—177, 187—188! Es hat eine *Hauptaufgabe und Hauptschwierigkeit* für mich gebildet, mich *von all dem zu befreien*, was durch den ebenso neuen wie entscheidenden Schritt mathematischer Freiheit geschehen ist, L beliebig aber fest zu wählen, darauf den Begriff des Multiplums für a zu gründen und dann mit $\left(y, \overset{a}{y}\right)$ und $\left(\breve{y}, \overset{\breve{a}}{y}\right)$ zu operieren.

1c) Infolgedessen erhält das I. Anzahltheorem eine ganz andere, weit schärfere und allgemeinere Aussage.*)

2. Auf *dieser Grundlage* ist eine *Charakterisierung* der Funktionen überhaupt erst *möglich, welche nur das zu einer solchen absolut Nötige* und *sonst nichts Willkürliches enthält.* Ritter braucht für die Normierung der Elementarscharen (§ 13) willkürliche Konstantensysteme, während die Charakterisierung der Elementarfunktionen ausschließlich durch Vorgabe von Punkten geschehen kann — wie im algebraischen Fall. Meine „*Vorbereitungssätze der algebraischen Charakterisierung*"**) enthalten eine absolut neue Aussage.

3. Ritter variiert die feste Unendlichkeitsstelle der eben aufgestellten Elementarschar. Ich *baue* die *Elementarfunktion* $E_{ik}^{(1)}(z, x)$ *von zwei Va-*

*) S. „II", S. 175, Anmerkung.
**) S. „III", § 4.

riabeln aus Funktionen von einer Variabeln *wirklich auf*, untersuche die Potenzreihenentwicklung nach Argument und Parameter nach dem Vorgang von Weierstraß und kenne nicht nur das *Verhalten*, sondern *jeden Entwicklungskoeffizienten an jeder Stelle.* Ebenso für das Elementardifferential $\frac{dF_{ki}^{(1)}(x, z)}{dx}\frac{dx}{d\tau}$. Die Vergleichung liefert Vert.-Th. I_1.

4. Brauche und kann ich *nicht* bei beliebig gegebener Gruppe voraussetzen, daß die Klasse „*transitiv*" ist, d. h. daß die n Funktionen eines Systems Zweige *einer* analytischen Funktion sind (im Gegensatz zu den Scharen Ritters s. S. 197, für welche der engere Standpunkt allerdings ausreicht). In der *Allgemeinheit* wurde das *Problem überhaupt noch nie gestellt* und verlangt prinzipiell neue Methoden.

5. Wird erst durch eine Theorie der *Systeme* der algebraische Fall mit eingeordnet — nie und nimmer durch Scharen, wie schon 1a) lehrt und 2 — so daß zum erstenmal die Lehre der algebraischen Funktionen (und nicht nur die ersten Anfänge, welche sich leicht parallelisieren lassen) als exakter Spezialfall einer höheren Theorie erscheint.*) **)

An der Weiterführung seiner bedeutenden Untersuchungen (wenn eine solche bei der großen Kompliziertheit möglich ist) wurde Ritter durch seinen frühen Tod gehindert. 1., 2., 3. *sind aber erst die Anfänge einer Theorie.* Ihr großer Reichtum *beginnt jenseits* mit *den fundamentalen Entwicklungstheoremen, den Serien von Vertauschungs-, Reduktions-, Reziprozitäts-, Integraltheoremen* usw., von denen mir selbst im algebraischen Gebiet nur ein kleiner Bruchteil bekannt scheint und deren Entdeckung mir nur durch die gänzliche Neuschöpfung der Grundlagen 1., 2., 3., von denen nur das Roheste bei der Kürze erwähnt werden konnte, möglich geworden ist.***)

---

*) S. „II", III. Abschnitt.

**) Den reduktiblen, hier vorläufig ausgeschlossenen Fall behandelt M. Noether: „Über die reduktiblen algebraischen Kurven", Acta math. Bd. 8 (1886), S. 161—192.

***) Die vorstehende Gegenüberstellung mit E. Ritter habe ich nur auf den Wunsch der Redaktion hin verfaßt.

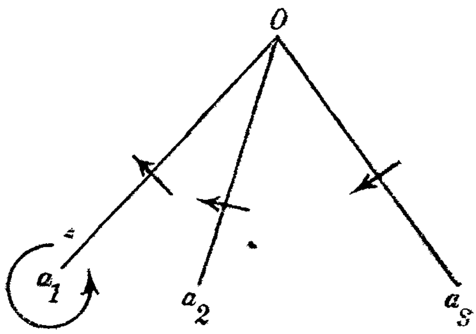
I. Abschnitt.

Vorbemerkungen.

§ 1. Der Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist eine nicht zerfallende Klasse (K) von *Riemannschen Transzendenten* n^{ter} Ordnung und ihre komplementäre $(\breve{K})$. Wegen aller Grundlagen verweise ich auf die obengenannten Arbeiten, insbesondere I.—IV., und erinnere hier nur soviel.

Die komplexe z-Ebene E sei in nebenstehender schematischer Weise zu E' zerschnitten. In E' seien n eindeutige analytische bis auf Pole reguläre Funktionen y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ gegeben, welche bei analytischer Fortsetzung über die von O nach den Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_s$ führenden Schnitte die linearen homogenen Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_s$ mit dem Produkt 1 erfahren: $y_i^* = Ay_i$. Alle derartigen Systeme y_i bilden eine *Klasse* (K). Ich bedecke E mit n kongruenten Exem-



plaren E_i' und denke mir y_i auf E_i' ausgebreitet; die Stelle von E_i' mit dem Spurpunkt $\mathfrak{p}$ $(z = p)$ auf E' bezeichne ich mit $\mathfrak{p}_i'$. Es gehören dann zu jeder Stelle $\mathfrak{p}$ von E' n Funktionselemente $y_i = P_i(t)$, wo t eine Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}$ ist.*) Das gilt auch für die Randstellen von E' mit Ausnahme der Punkte a. Hier lege ich durch eine Substitution L, welche A in die Normalform

$$B = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e_1 &= e^{2i\pi\alpha_1}, \cdots \\ \alpha_1 &= \alpha_1' + i_1\alpha'', \cdots \\ 0 &\leqq \alpha_1' < 1, \cdots \end{aligned}$$

überführt — $B = L^{-1}AL$ — n Funktionselemente

$$(1) \qquad \overset{a}{y}_i = L^{-1}y_i = t^{\alpha_i}P_i(t) \qquad \text{fest.**)}$$

Ich operiere im folgenden mit der Gesamtheit der Funktionselemente $(y_i, \overset{a}{y}_i)$ und spreche der Kürze halber von der „Funktion $(y, \overset{a}{y})$ oder y von (K)" schlechtweg. In völlig analoger Weise werden die „Differen-

*) Ich bediene mich dabei der Weierstraßschen Bezeichnungsweise, wonach $\mathfrak{P}(t)$ bzw. $P(t)$ das Zeichen für eine reguläre bzw. nur endlichviele negative Potenzen enthaltende Potenzreihe ist.

**) Der Einfachheit halber betrachte ich im folgenden nur den Fall *einfacher* Ketten, wo also B obige Form hat.

tiale“ $\left(dJ, d\overset{\alpha}{J}\right) = \left(y\,dz, \overset{\alpha}{y}\,dz\right)$ oder noch kürzer $dJ = y\,dz$ der Klasse (K) erklärt.

Es sei nun $\breve{y}_i$ ein System von Funktionen, welches die zu den A komplementären Substitutionen $\breve{A} = (\overline{A^{-1}})$ erfährt: $\breve{y}_i^* = \breve{A}\breve{y}_i$. Es ist dann

$$\breve{B} = \breve{L}^{-1}\breve{A}\breve{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e_1} & & & \\ & \frac{1}{e_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{e_n} \end{pmatrix}; \qquad \begin{aligned} \frac{1}{e_1} &= e^{2i\pi\breve{\alpha}_1}, \cdots \\ \breve{\alpha}_1 &= \breve{\alpha}_1' + i\breve{\alpha}_1'', \cdots \\ 0 &\leqq \breve{\alpha}_1' < 1, \cdots \end{aligned}$$

und

$$(2) \qquad \breve{\alpha} = -\alpha + \varepsilon, \quad \begin{cases} \varepsilon = 0, & \text{wenn } \alpha' = 0, \\ \varepsilon = 1, & \quad „ \quad \alpha' \neq 0. \end{cases}$$

Ich setze

$$(3) \qquad \overset{\breve{\alpha}}{\breve{y}}_i = \breve{L}^{-1}\breve{y}_i = t^{\breve{\alpha}_i} P_i(t)$$

und betrachte neben den „Funktionen $\left(y, \overset{\alpha}{y}\right)$ von (K)“ die „Funktionen $\left(\breve{y}, \overset{\breve{\alpha}}{\breve{y}}\right)$ von $(\breve{K})$“, ebenso neben den „Differentialen $\left(dJ, d\overset{\alpha}{J}\right)$ von (K)“ die „Differentiale $\left(d\breve{J}, d\overset{\breve{\alpha}}{\breve{J}}\right) = \left(\breve{y}\,dz, \overset{\breve{\alpha}}{\breve{y}}\,dz\right)$ von $(\breve{K})$“. Damit ist der Gegenstand der folgenden Untersuchungen genau bezeichnet. Man achte besonders auf folgenden Umstand: Es kann sehr wohl jedes $\breve{A} = A$, also $(\breve{K}) = (K)$ werden und daher jedes System $\breve{y}_i$ gleich einem System y_i sein; trotzdem ist aber nicht $\overset{\breve{\alpha}}{y}_i = \overset{\alpha}{y}_i$ (im allgemeinen wenigstens, wenn nicht $\breve{L} = L$ ist).

§ 2. Der Begriff des Multiplums.

Es handelt sich für die so definierten „Funktionen“ und „Differentiale“ von (K) und $(\breve{K})$ vor allem darum, die Begriffe *Nullstelle und Pol* scharf zu fassen. Das geschieht durch folgende Definition. Es sei $\mathfrak{a}$ Repräsentant einer von den bei $z = a_1, a_2, \cdots, a_s$ gelegenen Stellen, $\mathfrak{b}$ eine beliebige davon verschiedene Stelle von E', λ_i und $\varkappa_i$ beliebige ganze Zahlen; dann heißt das Aggregat von Punkten*) und Exponenten

$$\mathfrak{Q} = \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{b}_1^{\varkappa_1} \cdots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \cdots \mathfrak{b}_n^{\varkappa_n} \cdots \end{cases}$$

ein „Divisor“**) und ich definiere:

---

*) Von gegenüberliegenden Randpunkten soll nur je *einer* vorkommen.

**) In Verallgemeinerung der Bezeichnung von Hensel-Landsberg: Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902, S. 204.

Die Funktion $(y, \overset{a}{y})$ *von* (K) *heißt Multiplum von* $\mathfrak{Q}$, wenn die Entwicklung statt hat

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} \text{bei } \mathfrak{a}: & \dfrac{\overset{a}{y}_i}{t^{\alpha_i}} = t^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(t) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \text{bei } \mathfrak{b}: & y_i = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Ist z. B. $\lambda_1 = +1$ bzw. -1, so sage ich, die Funktion hat bei $\mathfrak{a}_1$ eine Nullstelle bzw. Unendlichkeitsstelle 1. Ordnung usw., ist $\lambda_1 \geqq 0$, so verhält sie sich bei $\mathfrak{a}_1$ „regulär" usw.; ist $(y, \overset{a}{y})$ Multiplum von

$$\mathfrak{Q} = \begin{cases} \mathfrak{a}_1^0 \cdots \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^0 \cdots \end{cases} = 1,$$

so heißt es „überall endlich". τ *sei die Anzahl der linear unabhängigen überall endlichen Funktionen von* (K). Man erkennt, daß τ unabhängig von der Wahl von L, also eine der *Klasse* eigentümliche Zahl ist. Analog ist die Definition für die Funktionen $(\breve{y}, \overset{\breve{a}}{y})$ von $(\breve{K})$ und $\breve{\tau}$ sei die entsprechende Anzahl.

Für die Differentiale gilt folgende Erklärung: *Das Differential* $(dJ, d\overset{a}{J}) = (y\,dz, \overset{a}{y}\,dz)$ *von* (K) *heißt Multiplum von* $\mathfrak{Q}$, wenn die Entwicklung statt hat

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} \text{bei } \mathfrak{a}: & \dfrac{1}{t^{\alpha_i}}\dfrac{d\overset{a}{J}_i}{dt} = t^{\lambda_i - \varepsilon_i}\,\mathfrak{P}_i(t) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \text{bei } \mathfrak{b}: & \dfrac{dJ_i}{dt} = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Bezeichnet man das Aggregat der n unendlich fernen Punkte von E_i' mit

$$\mathfrak{N}_z = \begin{cases} \mathfrak{p}_{\infty 1} \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_{\infty n} \end{cases} = \{\mathfrak{P}_\infty\}$$

und führt den *Verzweigungs-* bzw. *Differentialteiler**)

$$(6) \qquad \mathfrak{Z} = \prod_{(\mathfrak{a})} \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\varepsilon_n} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_z^2}$$

ein, so erkennt man, daß die obige Definition für das Differential gleichbedeutend mit der Aussage ist: der Integrand oder die Funktion $(y, \overset{a}{y})$

*) S. „II" oder „III" oder „IV".

von (K) ist Multiplum von $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{W}^{-1}$. Ist z. B. wieder $\lambda_1 = +1$ bzw. -1, so sage ich, das Differential hat bei a_1 eine Nullstelle bzw. Unendlichkeitsstelle 1. Ordnung usw.; ist $\lambda_1 \geqq 0$, so verhält es sich daselbst „regulär"; (in der Tat ist dann das zugehörige Integral $\int t^{\alpha_1 - \varepsilon_1} \mathfrak{P}_1(t)\, dt$ für $t = 0$ endlich); ist schließlich $\left(dJ, \overset{\alpha}{dJ}\right)$ Multiplum von $\mathfrak{Q} = 1$, heißt es „überall endlich". *σ sei die Anzahl der linear unabhängigen überall endlichen Differentiale von (K).* — Analog ist die Definition für die Differentiale $\left(d\breve{J}, \overset{\breve{\alpha}}{d\breve{J}}\right)$ von $(\breve{K})$ und $\breve{\sigma}$ sei die entsprechende Anzahl. Es besteht alsdann zwischen den Funktionen von (K) und den Differentialen von $(\breve{K})$ die wichtige Anzahlrelation (I. Anzahltheorem)*):

$$\breve{V}_{\mathfrak{Q}'} = U_{\mathfrak{Q}} + p + q - 1. \tag{6a}$$

Hierbei sind $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ zwei beliebige Divisoren der Ordnungen q, q' mit dem Produkt 1; $U_{\mathfrak{Q}}$ die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, $\breve{V}_{\mathfrak{Q}'}$ die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale von $(\breve{K})$, welche Multipla von $\mathfrak{Q}'$ sind. Zwischen den Funktionen von $(\breve{K})$ und Differentialen von (K) besteht analog

$$V_{\mathfrak{Q}'} = \breve{U}_{\mathfrak{Q}} + \breve{p} + q - 1. \tag{6b}$$

Wegen der hieraus für $\mathfrak{Q} = 1$, $q = 0$ folgenden Relationen

$$\breve{\sigma} = \tau + p - 1 \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \breve{\tau} + \breve{p} - 1,$$

wo

$$p = \sum\sum \alpha - n + 1 \quad \text{bzw.} \quad \breve{p} = \sum\sum \breve{\alpha} - n + 1$$

das *Geschlecht* von (K) bzw. $(\breve{K})$ ist, erkennt man, daß auch σ bzw. $\breve{\sigma}$ eine (K) bzw. $(\breve{K})$ eigentümliche Zahl ist. Im allgemeinen ist der Begriff des Multiplums hingegen wesentlich von der getroffenen Wahl von L abhängig.

§ 3. Die Charakterisierungsdivisoren.

Um die einfachsten Funktionen und Differentiale innerhalb (K) und $(\breve{K})$ eindeutig festzulegen, bedarf es der Wahl zweier Divisorenpaare $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ und $\breve{\mathfrak{M}}, \breve{\mathfrak{N}}$ von folgenden Eigenschaften:

Nach dem *Vorbereitungssatz der algebraischen Charakterisierung für die Funktionen***) läßt sich ein Divisor $\mathfrak{N}$ der Ordnung τ

*) S. „II.", S. 175 oder „III.", § 1 oder „IV".
**) S. „III", S. 262.

$$(7)\qquad \mathfrak{N} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{n}^0_{1,1} & \cdots & \mathfrak{n}^0_{\tau,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{n}^1_{1,\nu_1} & \cdots & \mathfrak{n}^1_{\tau,\nu_\tau} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{n}^0_{1,n} & \cdots & \mathfrak{n}^0_{\tau,n} \end{Bmatrix} = \Pi \begin{Bmatrix} \mathfrak{n}^0_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{n}^1_\nu \\ \vdots \\ \mathfrak{n}^0_n \end{Bmatrix}$$

finden, von der Art, daß es keine überall endliche Funktion $(y, \overset{a}{y})$ von (K) gibt, welche Multiplum von $\mathfrak{N}$ ist. Die Stellen $\mathfrak{n}_{1,\nu_1}, \cdots, \mathfrak{n}_{\tau,\nu_\tau}$, wo die ν Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, n$ sind, können und wollen wir als voneinander verschiedene, innere Stellen von E'_s voraussetzen. (Auch ihre Spurpunkte in E' seien verschieden.) Wie man aus dem 1. Anzahltheorem*) erkennt, hat $\mathfrak{N}$ gleichzeitig die Eigenschaft, daß es — außer den $\breve{\sigma}$ überall endlichen Differentialen — kein Differential $\left(d\breve{J}, d\overset{a}{\breve{J}}\right)$ von $(\breve{K})$ gibt, welches Multiplum von $\mathfrak{N}^{-1}$ ist.

Analog läßt sich nach dem *Vorbereitungssatz für die algebraische Charakterisierung für die Differentiale***) ein Divisor $\mathfrak{M}$ der Ordnung $\breve{\sigma}$

$$(8)\qquad \mathfrak{M} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{m}^0_{1,1} & \cdots & \mathfrak{m}^0_{\breve{\sigma},1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{m}^1_{1,\mu_1} & \cdots & \mathfrak{m}^1_{\breve{\sigma},\mu_{\breve{\sigma}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{m}^0_{1,n} & \cdots & \mathfrak{m}^0_{\breve{\sigma},n} \end{Bmatrix} = \Pi \begin{Bmatrix} \mathfrak{m}^0_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{m}^1_\mu \\ \vdots \\ \mathfrak{m}^0_n \end{Bmatrix}$$

finden, von der Art, daß es kein überall endliches Differential $\left(d\breve{J}, d\overset{a}{\breve{J}}\right)$ von $(\breve{K})$ gibt, welches Multiplum von $\mathfrak{M}$ ist. Über die Stellen $\mathfrak{m}_{1,\mu_1}, \cdots$ machen wir die analoge Voraussetzung, überdies seien $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_{\breve{\sigma}} \neq \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_\tau$. $\mathfrak{M}$ hat dann gleichzeitig die Eigenschaft, daß es — außer den überall endlichen Funktionen — keine Funktion $(y, \overset{a}{y})$ von (K) gibt, welche Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1}$ ist.

Wir wählen schließlich ein zweites Paar $\breve{\mathfrak{N}}, \breve{\mathfrak{M}}$ von der Ordnung τ bzw. σ, welches inbezug auf $(\breve{K})$ und (K) die analoge Bedeutung hat und von $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ ganz verschieden sei. Dann können wir uns von den Charakterisierungsdivisoren folgendes schematisches Bild machen:

	Klasse (K)		Klasse $(\breve{K})$	
Funktionen:	$\underbrace{\times\times\cdots\times}^{\mathfrak{M}:\breve{\sigma}}$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\mathfrak{N}:\tau}$	$\underbrace{\times\times\cdots\times}^{\breve{\mathfrak{M}}:\sigma}$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\breve{\mathfrak{N}}:\breve{\tau}}$
Differentiale:	$\underbrace{\times\times\cdots\times}^{\breve{\mathfrak{N}}:\breve{\tau}}$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\breve{\mathfrak{M}}:\sigma}$	$\underbrace{\times\times\cdots\times}^{\mathfrak{N}:\tau}$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\mathfrak{M}:\breve{\sigma}}$

*) S. oben (6a).

**) S. „III.“, S. 264.

Die Kreise deuten an: es gibt keine überall endliche Funktion bzw. kein überall endliches Differential, welches daselbst gleichzeitig verschwindet. Die liegenden Kreuze deuten an: es gibt — außer den eventuell vorhandenen überall endlichen — keine Funktion bzw. kein Differential, welches nur dabei höchstens Pole 1. Ordnung hat.*)

II. Abschnitt.

Die Elementarfunktionen und -Differentiale von einer Variabeln.

§ 4. Die Elementarfunktionen.

Nunmehr können wir die einfachsten Funktionen innerhalb (K) und zwar sämtliche, mittels deren sich jede andere aufbauen läßt, aufstellen und eindeutig algebraisch charakterisieren.

1. Wenn $\tau > 0$, kann für die überall endlichen Funktionen eine Basis

$$\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n}_j,\, \nu_j)}}(z) \quad - j = 1, 2, \cdots, \tau - \quad \text{kürzer} \quad \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z)$$

eindeutig so festgelegt werden, daß

$$(9) \qquad \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_{\nu_\varkappa}^{(\mathfrak{n}_j,\, \nu_j)}}(\mathfrak{n}_\varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varkappa = j \\ 0 & \;\;\text{„} \quad \varkappa \neq j \end{cases} \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots, \tau$$

wird.

2. Ist $\mathfrak{d}_\delta$ eine „gewöhnliche“, d. h. von den in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ vorkommenden Punkten**) verschiedene Stelle, so folgt aus dem 1. Anzahltheorem der Reihe nach die Existenz***) der zu $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung — $h = 1, 2, \cdots$ in inf. —

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{d}_\delta),$$

wobei $\mathfrak{E}^{(h)}$ folgendermaßen eindeutig festgelegt ist: abgesehen von den Stellen $\mathfrak{m}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{d}_\delta$ ist es überall regulär; bei $\mathfrak{M}$ hat es höchstens

*) Wenn $(\breve{K}) = (K)$, kann $\breve{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$ gewählt werden; wir denken uns der Allgemeinheit wegen aber auch dann $\breve{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{N}}$ und $\mathfrak{N}$ voneinander verschieden und überlassen die Spezialisierung der Sätze, insbesondere der Vertauschungs-, Reduktions- und Reziprozitäts-Theoreme, für das Zusammenfallen von $\breve{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{N}}$ mit $\mathfrak{N}$ dem Leser. Ist $\tau = 0$ oder $\breve{\sigma} = 0$, kommt $\mathfrak{N}$ bzw. $\breve{\mathfrak{M}}$ sowie die darauf bezüglichen Elementarfunktionen usw. einfach in Fortfall.

**) In $\{\mathfrak{A}\}$ denken wir uns sämtliche $n \cdot s$ Punkte $\mathfrak{a}_{1j}, \cdots, \mathfrak{a}_{sj}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ zusammengefaßt.

***) Diese Herleitung habe ich ausführlich gegeben in „V“

Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung und bei $\mathfrak{d}_\delta$ die Entwicklung:

(10) $$\overset{d}{z}_t = d + t: \qquad \mathfrak{E}_\delta^{(h)}(\overset{d}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta) = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t).$$

3. Sei $\mathfrak{m}_\mu$ eine von den $\breve{\sigma}$ in $\mathfrak{M}$ vorkommenden Stellen; dann gehört dazu — wie ebenfalls aus dem 1. Anzahltheorem folgt — eine Reihe von Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung — $h = 2, 3, \cdots$ —

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{m}_\mu),$$

wobei $\mathfrak{E}^{(h)}$ folgendermaßen eindeutig festgelegt ist: abgesehen von $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{E}^{(h)}$ überall regulär; bei den von $\mathfrak{m}_\mu$ verschiedenen Stellen von $\mathfrak{M}$ hat es höchstens Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung, und bei $\mathfrak{m}_\mu$ die Entwicklung

(11) $$\overset{m}{z}_t = m + t: \qquad \mathfrak{E}_\mu^{(h)}(\overset{m}{z}_t, \mathfrak{m}_\mu) = \frac{1}{t^h} + \frac{C}{t} + \mathfrak{P}(t); \qquad h = 2, 3, \cdots$$

$\mathfrak{E}^{(1)}(z, \mathfrak{m}_\mu)$ fehlt.

4. Sei $\mathfrak{n}_\nu$ eine von den in $\mathfrak{N}$ vorkommenden Stellen; dann gehört dazu eine Reihe von Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung — $h = 1, 2, \cdots$ —

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{n}_\nu),$$

wobei $\mathfrak{E}^{(h)}$ folgendermaßen charakterisiert ist: abgesehen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{n}_\nu$ ist es überall regulär; bei $\mathfrak{M}$ hat es höchstens Pole 1. Ordnung, bei den von $\mathfrak{n}_\nu$ verschiedenen Stellen von $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung, während bei $\mathfrak{n}_\nu$ die Entwicklung lautet:

(12) $$\overset{n}{z}_t = n + t: \qquad \mathfrak{E}_\nu^{(h)}(\overset{n}{z}_t, \mathfrak{n}_\nu) = \frac{1}{t^h} + t\,\mathfrak{P}(t); \qquad h = 1, 2, \cdots$$

Hier wollen wir die

(13) $$\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(0)}}(z, \mathfrak{n}_\nu)$$

als Elementarfunktionen nullter Ordnung einreihen.

5. Sei $\mathfrak{a}$ eine von den s Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_s$ und $\mathfrak{a}_j$ einer der n bei $\mathfrak{a}$ übereinanderliegenden Punkte; dann gehört dazu eine Reihe von Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung — $h = 1, 2, \cdots$ —

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{a}_j),$$

wobei $\mathfrak{E}^{(h)}$ folgendermaßen charakterisiert ist: abgesehen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{a}_j$ ist es überall regulär, bei $\mathfrak{M}$ hat es höchstens Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung und bei $\mathfrak{a}_j$ eine Entwicklung der Form:

(14) $$\overset{a}{z}_t = a + t: \qquad \frac{1}{t^{\alpha_j}} \overset{a}{\mathfrak{E}}{}_j^{(h)}(\overset{a}{z}_t, \mathfrak{a}_j) = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t); \qquad h = 1, 2, \cdots$$

6 Sei schließlich $\mathfrak{p}_{\infty j}$ eine der n bei $\mathfrak{p}_\infty$ übereinanderliegenden Stellen; dann gehört dazu eine Reihe von Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung — $h = 1, 2, \cdots$ —

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{p}_{\infty j})$$

wobei $\mathfrak{E}^{(h)}$ folgendermaßer charakterisiert ist: abgesehen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{p}_{\infty j}$ ist es überall regulär; bei $\mathfrak{M}$ hat es höchstens Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung und bei $\mathfrak{p}_{\infty j}$ eine Entwicklung der Form:

$$(15) \qquad \overset{\infty}{z}_t = \frac{1}{t}: \qquad \mathfrak{E}_j^{(h)}(\overset{\infty}{z}_t, \mathfrak{p}_{\infty j}) = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t); \qquad h = 1, 2, \cdots.$$

Der *Satz von der Partialbruchzerlegung der Funktionen besagt: Es läßt sich jede Funktion von (K) linear, homogen und eindeutig mittels der zu einer gewöhnlichen Stelle sowie zu $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ gehörigen Elementarfunktionen darstellen.**)

Für die Klasse $(\breve{K})$ haben wir die analogen, eindeutig charakterisierten Elementarfunktionen:**)

1. wenn $\breve{\tau} > 0$ ist, die $\breve{\tau}$ zu den Stellen $\breve{\mathfrak{n}}_\gamma$ von $\breve{\mathfrak{N}}$ gehörigen, überall endlichen Funktionen

$$\underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\varphi}_k^{(\breve{\mathfrak{n}})}}(x), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

2. wenn $\mathfrak{b}_\beta$ eine „gewöhnliche“, d. h. von $\breve{\mathfrak{M}}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stelle ist, die Funktionen

$$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{b}_\beta) \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

3.
$$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(h)}}(x, \breve{\mathfrak{m}}_\mu) \qquad h = 2, 3, \cdots,$$

4.
$$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(h)}}(x, \breve{\mathfrak{n}}_\gamma) \qquad h = 0, 1, 2, \cdots$$

wobei
$$\breve{\mathfrak{E}}^{(0)} = \underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\varphi}_k^{(\breve{\mathfrak{n}})}}(x).$$

5.
$$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{a}_j) \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

wobei $\breve{\mathfrak{E}}^{(h)}$ bei $\mathfrak{a}_j$ folgende Entwicklung hat:

$$(16) \qquad \overset{a}{x}_\tau = a + \tau: \qquad \frac{1}{\tau^{\overset{a}{\alpha}_j}} \overset{a}{\breve{\mathfrak{E}}_j^{(h)}}(\overset{a}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j) = \frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}(\tau),$$

6.
$$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{p}_{\infty j}) \qquad h = 1, 2, \cdots.$$

---

*) S. „III.“, S. 271 und hier, Abschnitt VII.

**) Des Folgenden halber wähle ich hier das Argument x statt z und den Index k statt i.

§ 5. Die Elementardifferentiale.

Für die Klasse $(\breve{K})$ sind das die folgenden:

1. Wenn $\breve{\sigma} > 0$ ist, kann für die überall endlichen Differentiale eine Basis

$$\underset{\mathfrak{M}}{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m}_j,\mu_j)}}(x) \quad - j = 1, 2, \cdots, \breve{\sigma} - \quad \text{kürzer} \quad \underset{\mathfrak{M}}{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x)$$

eindeutig so festgelegt werden, daß — $\varkappa = 1, 2, \cdots, \breve{\sigma}$ —

$$\frac{d\breve{\psi}_{\mu_\varkappa}^{(\mathfrak{m}_j,\mu_j)}\left(\overset{\mathfrak{m}_\varkappa}{x_\tau}\right)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=0} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} \varkappa = j \\ \varkappa \neq j \end{matrix} \tag{17}$$

wird.*)

2. Ist $\mathfrak{d}_\delta$ wieder eine von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stelle, so folgt**) aus dem 1. Anzahltheorem der Reihe nach die Existenz der zu $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementardifferentiale h^{ter} Ordnung — $h = 1, 2, \cdots$ in inf. —

$$\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{d}_\delta)$$

wobei $d\breve{\mathfrak{F}}^{(h)}$ in der Weise eindeutig festgelegt ist: abgesehen von den Stellen $\mathfrak{n}_\nu$ von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{d}_\delta$ ist es überall regulär; bei $\mathfrak{N}$ hat es höchstens Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{M}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung und bei $\mathfrak{d}_\delta$ eine Entwicklung der Form

$$\overset{d}{x}_\tau = d + \tau: \qquad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_\delta^{(h)}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}(\tau). \tag{18}$$

3. Sei $\mathfrak{n}_\nu$ eine von den r in $\mathfrak{N}$ vorkommenden Stellen, dann gehört dazu eine Reihe von Elementardifferentialen h^{ter} Ordnung — $h = 2, 3, \cdots$ —

$$\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{n}_\nu),$$

wobei***) . . . . an der Stelle $\mathfrak{n}_\nu$ die Entwicklung statthat:

$$\overset{n}{x}_\tau = n + \tau: \qquad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_\nu^{(h)}(\overset{n}{x}_\tau, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \frac{\breve{D}}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau); \qquad h = 2, 3, \cdots \tag{19}$$

$d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{n}_\nu)$ fehlt.

4. Zu der Stelle $\mathfrak{m}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ gehört eine Reihe von Elementardifferentialen h^{ter} Ordnung — $h = 1, 2, \cdots$ —,

$$\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{m}_\mu),$$

*) Im algebraischen Fall bei Weierstraß a. a. O. 2. Kap. mit $H(xy)_\alpha \dfrac{dx}{d\tau}$ bezeichnet; vgl. auch Brill-Noether, a. a. O. S. 421.

**) Man sehe die ausführliche Herleitung ebenfalls in „V."

***) Die Ergänzung des zunächst folgenden Textes wie bei 2. überlasse ich dem Leser.

wobei*) . . . . . . bei $\mathfrak{m}_\mu$ die Entwicklung lautet:

$$(20)\qquad \overset{m}{x}_\tau = m + \tau: \qquad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_\mu^{(h)}(\overset{m}{x}_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \tau\,\mathfrak{P}(\tau), \qquad h = 1, 2, \cdots;$$

hier wollen wir

$$(21)\qquad \underset{\mathfrak{M}}{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x) = \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(0)}}(x, \mathfrak{m}_\mu)$$

als Elementardifferential nullter Ordnung hinzunehmen.**)

5. Zu $\mathfrak{a}_j$ gehört die Reihe

$$\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{a}_j) \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

wobei*) . . . . . . an der Stelle $\mathfrak{a}_j$ die Entwicklung stattfindet:***)

$$(22)\qquad \overset{a}{x}_\tau = a + \tau: \qquad \frac{1}{\tau^{\alpha_j}}\,\frac{\overset{\dot{a}}{d\breve{\mathfrak{F}}_j^{(h)}}(\overset{a}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_j}}\left\{\frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}(\tau)\right\}.$$

6. Zu $\mathfrak{p}_{\infty j}$ gehört schließlich

$$\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{p}_{\infty j}), \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

wobei*) . . . . . . für $\mathfrak{p}_{\infty j}$ gilt:

$$(23)\qquad \overset{\infty}{x}_\tau = \frac{1}{\tau}: \qquad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_j^{(h)}(\overset{\infty}{x}_\tau, \mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Der Satz von der Partialbruchzerlegung der Differentiale besagt, *daß sich jedes Differential der Klasse* $(\breve{K})$ *mittels der zu einer gewöhnlichen Stelle sowie zu* $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ *gehörigen Elementardifferentiale linear, homogen und eindeutig mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt.*†)

Für die Klasse (K) sind die analogen, eindeutig charakterisierten Elementardifferentiale:

1. Wenn $\sigma > 0$ ist, die σ zu den Stellen $\breve{\mathfrak{m}}_\mu$ von $\breve{\mathfrak{M}}$ gehörigen, überall endlichen Differentiale

$$\underset{\breve{\mathfrak{M}}}{d\psi_i^{(\breve{\mathfrak{m}})}}(z)$$

2. $$\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{b}_\beta), \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

3. $$\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_\gamma), \qquad h = 2, 3, \cdots,$$

---

*) Die Ergänzung der zunächst folgenden Textes wie bei 2. überlasse ich dem Leser.

**) Im algebraischen Fall entspricht $\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}}(x, \mathfrak{m}_\mu)$ bei Weierstraß a. a. O. S. 252 $H'(xy)_\alpha$; s. auch Brill-Noether a. a. O. S. 427.

***) Man achte auf die unter (5) gegebene Definition des Multiplums.

†) S. VII. Abschnitt, wo dieselbe ausführlich gegeben wird.

$$4. \quad \underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}}), \quad h = 0, 1, 2, \cdots \quad \text{und} \quad d\mathfrak{F}^{(0)} = d\psi_i^{(\breve{\mathfrak{m}})}(z),$$

$$5. \qquad \underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{a}_j), \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

wobei für $\mathfrak{a}_j$ die Entwicklung lautet:

$$(24) \qquad \overset{a}{z}_t = a + t: \quad \frac{1}{t^{\alpha_j}} \frac{d\mathfrak{F}_j^{(h)}(\overset{a}{z}_t, \mathfrak{a}_j)}{dt} = \frac{1}{t^{\varepsilon_j}} \left\{ \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t) \right\},$$

$$6. \qquad \underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{p}_{\infty j}), \qquad h = 1, 2, \cdots.$$

Sämtliche Elementarfunktionen und -Differentiale, deren Existenz aus dem 1. Anzahltheorem folgt, können auch — wenn eine Basis der Klasse gegeben vorliegt — aus dieser durch rein algebraische Operationen wirklich hergestellt werden.

III. Abschnitt.

Die Elementarfunktionen und -Differentiale von zwei Variabeln.

§ 6. Die Elementarfunktion $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h)}}(z, x)$; ihre Charakterisierung und Aufstellung.

Wir gehen jetzt über zur Bildung von Elementarfunktionen der Klasse (K), welche außer von dem Argument z noch von einem variabeln Parameter x abhängen.*)

Es sei

$$(25) \qquad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h)}}(z, x) = \begin{matrix} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{11}^{(h)}}(z, x), & E_{12}, & \cdots, & E_{1n} \\ E_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ E_{n1} & & & E_{nn} \end{matrix} \qquad i, k = 1, 2, \cdots, n$$

eine quadratische Matrix von Funktionen zweier in E' veränderlichen Größen z, x, welche folgende Eigenschaften besitzt:

Bei festem k und x ist die Spalte $E_{ik}^{(h)}(z, x)$ — $i = 1, 2, \cdots, n$ — eine Funktion der Klasse (K); bei festem i und z ist die Zeile $E_{ik}^{(h)}(z, x)$ — $k = 1, 2, \cdots, n$ — eine Funktion der Klasse $(\breve{K})$. In ersterer Eigenschaft betrachtet (für jedes beliebige k und jede beliebige von den Spurpunkten der in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ enthaltenen Punkte verschiedene Stelle x von E') verhalte sich die Funktion von (K)

*) S. „V."

$$\left\{ \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h)}(z,x)},\ \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\overset{a}{E}{}_{ik}^{(h)}(z,x)} \right\}, \qquad \overset{a}{E}{}_i^{(h)}(z) = L^{-1} E_i^{(h)}(z)$$

folgendermaßen: bei $\mathfrak{M}$ hat sie höchstens Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung; sonst ist sie überall regulär außer für $z = x$ und $i = k$, wo sie die Entwicklung hat:

$$(26) \qquad \overset{x}{z}_t = x + t: \quad E_{kk}^{(h)}(\overset{x}{z}_t, x) = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t).$$

Die *Unität* folgt sofort. Wäre $\overline{E}_{ik}^{(h)}(z,x)$ eine zweite derartige Matrix, so folgte für die Differenz

$$\overline{E}_{ik}^{(h)}(z,x) - E_{ik}^{(h)}(z,x) = \sum_{(\varkappa)} C^{(\mathfrak{n})}(k,x) \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}(z)},$$

da es außer den überall endlichen Funktionen $\varphi_i^{(\mathfrak{n})}(z)$ von (K) keine linear unabhängigen gibt, welche Multipla von $\mathfrak{M}^{-1}$ sind; die Koeffizienten hängen von k und x ab. Wegen des Verschwindens bei $\mathfrak{N}$ folgt aber weiter nach (9) $C^{(\mathfrak{n})}(k,x) = 0$ und damit für jedes k und jedes i

$$\overline{E}_{ik}^{(h)}(z,x) - E_{ik}^{(h)}(z,x) = 0.\text{*)}$$

Die *Existenz* beweisen wir zunächst für $h = 1$ durch direkte Aufstellung.

Es sei $\qquad \xi_i^{(1)}(z),\ \xi_i^{(2)}(z),\ \cdots,\ \xi_i^{(n)}(z)$

ein System von n Funktionen der Klasse (K), welche eine Basis für das „Ideal $J(1)$" bilden, d. h. für die Gesamtheit der Funktionen von (K), welche *außer im Unendlichen* Multipla von $\mathfrak{Q} = 1$ sind. Nach dem *zweiten Basissatz* läßt sich ein solches System herstellen.**) Das komplementäre System hierzu

$$\breve{\xi}_k^{(1)}(x),\ \breve{\xi}_k^{(2)}(x),\ \cdots,\ \breve{\xi}_k^{(n)}(x),$$

dessen Zusammenhang mit dem obigen in der Weise gegeben ist:***)

$$(\xi_{rs}) = \xi_r^{(s)}, \quad \breve{\xi}_{rs} = \breve{\xi}_r^{(s)}, \quad (\breve{\xi}_{rs}) = \overline{\{(\xi_{rs})^{-1}\}}, \qquad r,s = 1,2,\cdots,n$$

bildet nach dem *Komplementensatz*†) eine Basis für das „Ideal $J(\mathfrak{Z}^{-1})$", wo $\mathfrak{Z}$ der Verzweigungsteiler von (K) ist (s. 6.).

Ich setze nun

$$\vartheta_{ik}(z,x) = \frac{\xi_i^{(1)}(z)\breve{\xi}_k^{(1)}(x) + \cdots + \xi_i^{(n)}(z)\breve{\xi}_k^{(n)}(x)}{z - x}.$$

Bei $\mathfrak{p}_{\infty j}$ — $j = 1, 2, \cdots, n$ — wird $\vartheta_{jk}(z,x)$ als Funktion von z eine gewisse Entwicklung haben

*) S. Weierstraß, a. a. O. S. 197/8.

**) S. „III.", § 9. oder „VI."

***) S. Hensel-Landsberg, a. a. O. S. 226 ff.

†) S. „III.", S. 171 (Theorem IIa) oder „VI."

$$\overset{\infty}{z}_t = \frac{1}{t}: \qquad \vartheta_{jk}(\overset{\infty}{z}_t, x) = \frac{C^{(j)}_{\Gamma_j}}{t^{\Gamma_j^*}} + \cdots + \frac{C^{(j)}_1}{t} + \mathfrak{P}^{(j)}(t),$$

wobei jedes C die Form hat: $C = \breve{f}_k(x)$. Die eventuell vorhandenen negativen Potenzen kann ich durch Subtraktion der zu $\mathfrak{p}_{\infty j}$ gehörigen Elementarfunktionen $\mathfrak{E}_i^{(1)}(z, \mathfrak{p}_{\infty j}), \cdots$ zum Wegfall bringen und erhalte in

$$\eta_{ik}(z, x) = \vartheta_{ik}(z, x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\gamma_j=1}^{\Gamma_j} \breve{f}_k^{(j, \gamma_j)} \cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma_j)}}(z, \mathfrak{p}_{\infty j})$$

eine Matrix, welche sich als Funktion von z für jedes $\mathfrak{p}_{\infty j}$ regulär verhält und dafür bei $\mathfrak{M}$ höchstens Pole 1. Ordnung bekommen hat. Für eine Stelle $\mathfrak{n}_\nu$ von $\mathfrak{N}$ wird ferner

$$\eta_{\nu k}(\mathfrak{n}, x) = \vartheta_{\nu k}(\mathfrak{n}, x) = \breve{g}_k^{(\mathfrak{n})}(x),$$

wo $\breve{g}_k$ wie $\breve{f}_k$ eine Funktion der Klasse $(\breve{K})$ ist. Bilden wir daher

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z, x) = \eta_{ik}(z, x) - \sum_{(\mathfrak{N})} \breve{g}_k^{(\mathfrak{n})}(x) \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z),$$

so hat dies — für jedes k und x — als Funktion von z bei $\mathfrak{N}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung. Man erkennt, $E_{ik}^{(1)}(z, x)$ hat in der Tat alle durch die Definition geforderten Eigenschaften; nur für die Stelle $z = x$ bleibt das noch zu erweisen. Nun ist ganz allgemein für komplementäre Systeme*)

$$\xi_i^{(1)}(x)\,\breve{\xi}_k^{(1)}(x) + \cdots + \xi_i^{(n)}(x)\,\breve{\xi}_k^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Ist daher $x = x_0$ eine beliebige, von $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stelle von E', $\overset{0}{z}_t = x_0 + t$, k eine beliebige feste Zahl der Reihe $1, 2, \cdots, n$, so wird der Zähler von $\vartheta_{ik}(z, x)$

$$\sum \xi_i^{(1)}(\overset{0}{z}_t)\breve{\xi}_k^{(1)}(x_0) = \mathfrak{P}_i(t)$$

und

$$\mathfrak{P}_i(0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad \text{je nachdem} \quad \begin{matrix} i \neq k \\ i = k \end{matrix} \quad \text{ist.}$$

Daher wird im ersten Fall

$$\vartheta_{ik}(\overset{0}{z}_t, x_0) = \frac{\mathfrak{P}_i(t)}{t} = \mathfrak{P}_i(t),$$

im zweiten Fall
$$\vartheta_{kk}(\overset{0}{z}_t, x_0) - \frac{1}{t} = \frac{\mathfrak{P}_k(t) - 1}{t} = \mathfrak{P}_k(t);$$

---

*) S. Hensel-Landsberg, a. a. O. S. 232.

da $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\nu_j)}}(z, \mathfrak{p}_{\infty j})$ und $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(n)}}(z)$ für $z = x_0$ regulär sind, gilt dasselbe auch für $\eta_{ik}(z, x)$ und $E_{ik}^{(1)}(z, x)$, q. e. d. Ich setze schließlich

$$\overset{a,-}{E}{}_{ik}^{(1)}(z, x) = \frac{\overset{a}{\mathfrak{x}}{}_i^{(1)}(z)\mathfrak{x}_k^{(1)}(x) + \cdots}{z - x} + \cdots, \tag{27}$$

wobei also $\overset{a}{\mathfrak{x}}$, $\overset{a}{\mathfrak{E}}$, $\overset{a}{\varphi}$ an Stelle von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{E}$, φ tritt

$$\overset{-,\dot{a}}{E}{}_{ik}^{(1)}(z, x) = \frac{\mathfrak{x}_i^{(1)}(z)\overset{\dot{a}}{\breve{\mathfrak{x}}}{}_k^{(1)}(x) + \cdots}{z - x} + \cdots, \tag{28}$$

wo $\overset{\dot{a}}{\breve{\mathfrak{x}}}$, $\overset{\dot{a}}{\breve{f}}$, $\overset{\dot{a}}{\breve{g}}$ an Stelle von $\breve{\mathfrak{x}}$, $\breve{f}$, $\breve{g}$ tritt;

$$\overset{a,\dot{a}}{E}{}_{ik}^{(1)}(z, x) = \frac{\overset{a}{\mathfrak{x}}{}_i^{(1)}(z)\overset{\dot{a}}{\breve{\mathfrak{x}}}{}_k^{(1)}(x) + \cdots}{z - x} + \cdots, \tag{29}$$

wobei beides gleichzeitig geschieht.

Hiermit ist „die in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ algebraisch charakterisierte Elementarfunktion“ 1. Ordnung der Klasse (K) mit dem Argument z und dem Parameter x $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z, x)$ aufgestellt. Sie bildet das Analogon der Weierstraßschen Grundfunktion $H(xy, x'y')$ im algebraischen Fall.*)

Auf ganz analoge Weise ist die in bezug auf $\breve{\mathfrak{M}}$, $\breve{\mathfrak{N}}$ algebraisch charakterisierte Elementarfunktion 1. Ordnung der Klasse $(\breve{K})$ mit dem Argument x und dem Parameter z zu bilden: $\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(1)}}(x, z)$. $\overset{\dot{a},-}{\breve{E}}$, $\overset{-,a}{\breve{E}}$, $\overset{\dot{a},a}{\breve{E}}$ haben die analoge Bedeutung.

§ 7. Potenzentwicklung der Elementarfunktion 1. Ordnung.

Man beherrscht $E_{ik}^{(1)}(z, x)$ vollständig, wenn man folgende drei Fragen beantworten kann: A) wie verhält sich $E_{ik}^{(1)}(z_t, x_\tau)$, wenn z_t und x_τ zwei ganz beliebige Funktionselemente darstellen? B) wie lautet die Entwicklung nach dem Parameter τ bei festem i und z? C) wie lautet die Entwicklung nach dem Argument t bei festem k und x? Wir beantworten diese Fragen nach dem Vorgang von Weierstraß**) für

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\ ***).$$

*) S. Weierstraß, a. a. O. 2. und 8. Kapitel.

**) S. a. a. O. S. 76 ff.

***) Der Beweis des Folgenden bildet den Hauptinhalt der Arbeit „V“. Hier gebe ich nur die Resultate.

A) Es möge x_τ zunächst ein Funktionselement darstellen, dessen Mittelpunkt von einer Stelle a verschieden ist. Dann ist, je nachdem z_t ein Funktionselement 1. mit einem davon verschiedenen, 2. mit demselben Mittelpunkt darstellt

$$(30)\quad\begin{cases} 1.\quad E_{ik}^{(1)}(z_t, x_\tau)\dfrac{dx}{d\tau} \quad\text{bzw.}\quad \dfrac{1}{t^{\alpha_i}}\overset{a,-}{E}{}_{ik}^{(1)}(\overset{a}{z}_t, x_\tau) = P(t, \tau), \\[2ex] 2.\quad E_{ik}^{(1)}(z_t, x_\tau)\dfrac{dx_\tau}{d\tau} = \begin{cases} P(t, \tau) & i \neq k, \\ \dfrac{1}{t-\tau} + P(t, \tau) & i = k. \end{cases} \end{cases}$$

Ist hingegen $\overset{a'}{x}$ ein Funktionselement mit dem Mittelpunkt a', dann ist entsprechend den beiden Fällen für 1. und 2. für z_t:

$$1.\qquad \frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_k}}\overset{-,\dot{a}'}{E}_{ik}\Big(z_t, \overset{a'}{x}_\tau\Big)\frac{d\overset{a'}{x}_\tau}{d\tau} \quad\text{bzw.}\quad \frac{1}{t^{\alpha_i}}\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_k}}\overset{a,\dot{a}'}{E}_{ik}\Big(\overset{a}{z}_t, \overset{a'}{x}_\tau\Big)\frac{d\overset{a'}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon'_k}}P(t, \tau),$$

$$2.\qquad \frac{1}{t^{\alpha'_i}}\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_k}}\overset{a',\dot{a}'}{E}_{ik}\Big(\overset{a'}{z}_t, \overset{a'}{x}_\tau\Big)\frac{d\overset{a'}{x}_\tau}{d\tau} = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau^{\varepsilon'_k}}P(t, \tau) & i \neq k, \\[2ex] \dfrac{1}{\tau^{\varepsilon'_k}}\Big(\dfrac{1}{t-\tau} + P(t, \tau)\Big) & i = k. \end{cases}$$

Hieraus folgt*) — bei näherer Untersuchung der in den Reihen $P(t, \tau)$ möglicherweise auftretenden negativen Potenzen von t und τ —

B) der *fundamentale Entwicklungssatz für die Elementarfunktion 1. Ordnung nach dem Parameter*, welcher folgende Gleichungen umfaßt: es ist für die Stelle

$$1.\ (\mathfrak{d}_\delta) : \overset{d}{x}_\tau = d + \tau:\quad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{i\delta}^{(1)}}(z_t, \overset{d}{x}_\tau)\frac{d\overset{d}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{\gamma=1}^{\infty}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma+1)}}(z, \mathfrak{d}_\delta)\,\tau^\gamma,$$

$$\mathfrak{d}_\delta \neq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\},$$

$$2.\ (\mathfrak{m}_\mu) : \overset{m}{x}_\tau = m + \tau:\quad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{i\mu}^{(1)}}(z_t, \overset{m}{x}_\tau)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{\gamma=1}^{\infty}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma+1)}}(z, \mathfrak{m}_\mu)\,\tau^\gamma,$$

Entw. I$_1$:

$$3.\ (\mathfrak{n}_\nu) : \overset{n}{x}_\tau = n + \tau:\quad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{i\nu}^{(1)}}(z_t, \overset{n}{x}_\tau)\frac{d\overset{n}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{\gamma=-1}^{\infty}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma+1)}}(z, \mathfrak{n}_\nu)\,\tau^\gamma,$$

$$4.\ (\mathfrak{a}_j) : \overset{a}{x}_\tau = a + \tau:\quad \frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}_j}}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\overset{-,\dot{a}}{E}{}_{ij}^{(1)}}(z_t, \overset{a}{x}_\tau)\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_j}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma+1)}}(z, \mathfrak{a}_j)\,\tau^\gamma,$$

*) S. die letzte Anm.

5. $(\mathfrak{p}_{\infty j}): \overset{\infty}{x}_\tau = \frac{1}{\tau}$: $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ij}^{(1)}}(z_t, \overset{\infty}{x}_\tau)\frac{d\overset{\infty}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma+1)}}(z, \mathfrak{p}_{\infty j})\tau^\gamma.$

Der Satz — **Entwicklungstheorem I_1** — kann folgendermaßen ausgesprochen werden: *Alle Elementarfunktionen der Klasse* (K) *entspringen — und zwar jede genau einmal — als Entwicklungskoeffizienten der mit* $\frac{dx}{d\tau}$ *multiplizierten Elementarfunktion 1. Ordnung von* (K) *mit dem Argument* z_t *und Parameter* x_τ *nach* τ.

C) Das Verhalten von $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z, x)$ in Abhängigkeit von z ist schon durch die Definition gegeben, wenigstens wenn x eine gewöhnliche Stelle ist. Die genaue Kenntnis der Entwicklung von $E_{ik}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$ nach t erhalte ich — ebenso vollständig wie im vorhergehenden Satz — durch das Vertauschungstheorem I_1. (S. § 13.)

Genau dieselben Überlegungen sind für $\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(1)}}(x, z)$ durchzuführen.

§ 8. Potenzentwicklung der Elementarfunktionen höherer Ordnung.

Es ist zunächst noch die Existenz von $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h)}}(z, x)$ für $h > 1$ nachzuweisen. Bilden wir zu dem Zweck $\frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z, x)$, so leuchtet zunächst ein, daß dieses alle in der Definition von $E_{ik}^{(h)}$ geforderten Eigenschaften hat mit Ausnahme von (26). Wenn aber z_t und x_τ dasselbe Funktionselement mit einem von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedenen Mittelpunkt x_0 darstellen, so ist nach (30)

$$\begin{array}{ll} \text{für} \quad i = k: & \\ x_\tau = x_0 + \tau: & \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{kk}^{(1)}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + P(t, \tau), \end{array}$$

und $P(t, \tau)$ kann keine negativen Potenzen von t enthalten, weil weder $\mathfrak{x}_i^{(1)}(z_t), \cdots$, noch $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\gamma+1)}}(z_t, \mathfrak{p}_{\infty j}), \cdots$, noch $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(n)}}(z_t), \cdots$ solche enthalten.

Nun ist wegen $\frac{dx_\tau}{d\tau} = 1$

$$(31) \quad \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} E_{kk}^{(1)}(z_t, x_\tau) = \frac{d^{h-1}}{d\tau^{h-1}} E_{kk}^{(1)}(z_t, x_\tau) = (h-1)!\frac{1}{(t-\tau)^h} + \frac{d^{h-1}P(t, \tau)}{d\tau^{h-1}}$$

also für $\tau = 0$:

$$\overset{x_0}{z}_t = x_0 + t: \quad \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} E_{kk}^{(1)}(\overset{x_0}{z}_t, x_0) = \frac{(h-1)!}{t^h} + \mathfrak{P}(t), \qquad \text{mithin}$$

$$E^{(h)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{ik}}(z, x) = \frac{1}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} E^{(1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{ik}}(z, x). \tag{32}$$

Ableitungssatz I_h: *Die Elementarfunktionen höherer Ordnung von (K) mit dem Argument z und dem Parameter x entstehen aus der Elementarfunktion 1. Ordnung durch Differentiation nach dem Parameter x.*

Danach beantworten sich die drei im vorigen Paragraphen gestellten Fragen A), B), C) bezüglich $E^{(h)}_{ik}$ aus den für $E^{(1)}_{ik}$ gegebenen Darstellungen. Des Folgenden wegen wollen wir die Entwicklung von

$$E^{(h+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{ik}}(z, x), \qquad h = 1, 2, \cdots$$

nach dem Parameter τ (B) hier durchführen.

Entwicklungstheorem I_{h+1}:
Es ist für

1. $\mathfrak{d}_\delta : \overset{d}{x}_\tau = d + \tau$: $\quad E^{(h+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{i\delta}}\left(z_t, \overset{d}{x}_\tau\right) = \sum\limits_{\gamma=h}^{\infty}\binom{\gamma}{h}\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{i}}(z, \mathfrak{d}_\delta)\,\tau^{\gamma-h}$,

2. $\mathfrak{m}_\mu : \overset{m}{x}_\tau = m + \tau$: $\quad E^{(h+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{i\mu}}\left(z_t, \overset{m}{x}_\tau\right) = \sum\limits_{\gamma=h}^{\infty}\binom{\gamma}{h}\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{i}}(z, \mathfrak{m}_\mu)\,\tau^{\gamma-h}$,

3. $\mathfrak{n}_\nu : \overset{n}{x}_\tau = n + \tau$: $\quad E^{(h+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{i\nu}}\left(z_t, \overset{n}{x}_\tau\right) = \frac{(-1)^h}{\tau^{h+1}}\,\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}{}^{(\mathfrak{n})}_i(z)$

$$+\sum_{\gamma=h}^{\infty}\binom{\gamma}{h}\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}_{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{i}}(z, \mathfrak{n}_\nu)\,\tau^{\gamma-h}$$

4. $\mathfrak{a}_j : \overset{a}{x}_\tau = a + \tau$: Es ist zunächst (28)

$$\overset{-,\,\overset{\circ}{a}}{E}{}^{(h+1)} = \frac{1}{h!}\frac{d^h}{dx^h}\overset{-,\,\overset{\circ}{a}}{E}{}^{(1)}. \tag{32a}$$

Ferner setze ich zur Abkürzung, wenn β eine beliebige reelle oder komplexe Zahl, r eine natürliche Zahl ist,

$$\begin{bmatrix}\beta\\ r\end{bmatrix} = \binom{\beta}{r}\cdot r! = \beta(\beta-1)\cdots(\beta-r+1), \quad \begin{bmatrix}\beta\\ 0\end{bmatrix} = 1$$

und für $s = 1, 2, \cdots, r$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ r,\,s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ r\end{bmatrix} + \binom{r}{1}\begin{bmatrix}\beta\\ r-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ 1\end{bmatrix} + \cdots + \binom{r}{s}\begin{bmatrix}\beta\\ r-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ s\end{bmatrix},\text{*)}$$

---

*) Diese Definition des Symbols $\begin{bmatrix}\beta\\ r,\,s\end{bmatrix}$ kann auch noch für $s > r$ ausgedehnt werden, indem obenstehende Reihe alsdann mit dem Gliede bzw. dem Faktor $\binom{r}{r+1} = 0$ von selbst abbricht.

für $s = 0$ $\qquad \begin{bmatrix} \beta \\ r,\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}.$

Dann wird wegen $\breve{\alpha}_j = -\alpha_j + \varepsilon_j$

$$(33) \qquad \overset{-,\mathring{a}}{E}{}^{(1)}_{ij}\Big(z_t,\ \overset{a}{x}_\tau\Big) = \tau^{-\alpha_j} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}}{}^{(\gamma+1)}_i(z,\ \mathfrak{a}_j)\,\tau^{\gamma} = \tau^{-\alpha_j}\cdot\mathfrak{P}(\tau),$$

$$\frac{d^h}{dx^h}\overset{-,\mathring{a}}{E}{}^{(1)}_{ij} = \tau^{-\alpha_j-h}\left\{\begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h \end{bmatrix}\mathfrak{P}(\tau) + \binom{h}{1}\begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h-1 \end{bmatrix}\mathfrak{P}^{(1)}(\tau)\cdot\tau + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \binom{h}{h}\begin{bmatrix} -\alpha_j \\ 0 \end{bmatrix}\mathfrak{P}^{(h)}(\tau)\cdot\tau^h\right\}$$

und daher (28), (32 a)

$$(34) \qquad 4. \qquad \frac{1}{\tau^{\alpha_j}}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\overset{-,\mathring{a}}{E}}{}^{(h+1)}_{ij}\Big(z_t,\ \overset{a}{x}_\tau\Big) = \frac{1}{h!}\,\frac{1}{\tau^{h+\varepsilon_j}}\left\{\qquad\right\}.$$

Hierbei ist für $s = 0, 1, 2, \cdots, h$ und nach der Anm. auch für $s > h$:

$$(35) \qquad \left\{\qquad\right\}_{\tau^s} = \begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h,\ s \end{bmatrix}\cdot[\mathfrak{P}(\tau)]_{\tau^s}.$$

5. $\mathfrak{p}_{\infty j} : \overset{\infty}{x}_\tau = \dfrac{1}{\tau}$:

$$(36) \qquad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E}{}^{(h+1)}_{ij}\Big(z_t,\ \overset{\infty}{x}_\tau\Big) = (-1)^{h+1}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{\gamma+2+h-1}{h}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}}{}^{(\gamma+1)}_i(z,\ \mathfrak{p}_{\infty j})\ \tau^{\gamma+2+h}.$$

Den Inhalt der Gleichungen 1., 2., 3., 4., 5. bezeichne ich als **Entwicklungssatz $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe** (Entw. I_{h+1}) *für die Elementarfunktion $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von (K) mit dem Argument z_t und Parameter x_τ nach τ.*

Für das Folgende erweist es sich oft als vorteilhaft, statt $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E}{}^{(h+1)}_{ik}(z,\ x)$ — $h = 0, 1, 2, \cdots$ — die Funktionen

$$(37) \qquad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N};\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\mathsf{E}}{}^{(h+1)}_{ik}(z,\ x) = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E}{}^{(h+1)}_{ik}(z,\ x) + (-1)^{h+1}\sum_{\mathfrak{N}}\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}}{}^{(h+1)}_k(x,\ \mathfrak{n}_\nu)\cdot\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}{}^{(\mathfrak{n})}_i(z)$$

einzuführen. In Abhängigkeit von z hat E dieselben Eigenschaften wie E, nur daß an den Stellen $\mathfrak{n}_\nu$ von $\mathfrak{N}$ $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N};\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\mathsf{E}}{}^{(h+1)}_{\nu k}\Big(\overset{n}{z}_t,\ x\Big)\Big|_{t=0}$ nicht Null, sondern gleich $(-1)^{h+1}\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}}{}^{(h+1)}_k(x,\ \mathfrak{n}_\nu)$ ist.

Statt von der quadratischen Matrix $E^{(h+1)}_{ik}(z,\ x)$ spreche ich hier und im folgenden kurz von „der Elementarfunktion“ $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Klasse (K) mit dem Argument z und Parameter x. $\overset{a,-}{E}{}^{(h+1)}$, $\overset{-,\mathring{a}}{E}{}^{(h+1)}$, $\overset{a,\mathring{a}}{E}{}^{(h+1)}$ sind wie für $h = 0$ zu definieren und schließlich für die Klasse $(\breve{K})$ die analogen Funktionen

$$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}}{}^{(h+1)}_{ki}(x,\ z) \qquad \text{und}$$

$$(38)\qquad \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N};\,\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\breve{\mathsf{E}}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) = \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\breve{E}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) + (-1)^{h+1} \sum_{(\mathfrak{N})} \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h+1)}}(x, \breve{\mathfrak{n}}_{\bar{\nu}}) \underset{\mathfrak{N}}{\breve{\varphi}_h^{(\mathfrak{n})}}(x),$$

sowie die entsprechenden Sätze aufzustellen.

§ 9. Das Elementardifferential $d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x, z)$; Charakterisierung und Aufstellung.

Ich schreite jetzt zur Bildung von Elementardifferentialen der Klasse $(\breve{K})$, welche außer von dem Argument x noch von einem variabeln Parameter z abhängen.

Es sei
$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h)}}(x, z)}{dx} \qquad i, k = 1, 2, \cdots, n$$
eine quadratische Matrix von Funktionen zweier in E' veränderlichen Größen x, z, welche folgende Eigenschaften besitzt: Bei festem i und z ist die Spalte $\frac{d\breve{F}_{ki}^{(h)}}{dx}\,\frac{dx}{d\tau}$ ein Differential der Klasse $(\breve{K})$; bei festem k und und x ist die Zeile $\frac{d\breve{F}_{ki}^{(h)}}{dx}$ eine Funktion der Klasse (K). In ersterer Abhängigkeit betrachtet (für jedes beliebige i und jede beliebige, von Spurpunkten der in $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ enthaltenen Punkte verschiedene Stelle z von E') verhalte sich das Differential von $(\breve{K})$

$$(39)\qquad \left\{\frac{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h)}}(x_\tau, z)}{d\tau},\; \frac{\overbrace{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}_{k_i}^{(h)}}}^{\dot{a},\,-}(\overset{a}{x}_\tau, z)}{d\tau}\right\} - d\breve{F}_k(x) = \breve{L}^{-1}\, d\breve{F}_k(x)$$

folgendermaßen: bei $\mathfrak{N}$ hat es höchstens Pole 1. Ordnung, bei $\mathfrak{M}$ mindestens Nullstellen 1. Ordnung; sonst ist es überall regulär außer für $x = z$ und $k = i$, wo seine Entwicklung lautet:

$$(40)\qquad \overset{z}{x}_\tau = z + \tau:\quad \frac{d\breve{F}_{ii}^{(h)}(\overset{z}{x}_\tau, z)}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}(\tau); \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Die *Unität* folgt analog wie in § 6. Die *Existenz* beweisen wir ebenfalls zunächst für $h = 1$ durch direkte Aufstellung.

Die Funktionen
$$\breve{\xi}_k^{(1)}(x), \cdots, \breve{\xi}_k^{(n)}(x)$$
bildeten eine Basis für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}}\right)$. Setzen wir also

$$\breve{\vartheta}_{ki}(x, z) = \frac{\breve{\xi}_k^{(1)}(x)\,\breve{\xi}_i^{(1)}(z) + \cdots + \breve{\xi}_k^{(n)}(x)\,\breve{\xi}_i^{(n)}(z)}{x - z},$$

so verhält sich das Differential $\breve{\vartheta}_{ki}(x_\tau, z)\frac{dx_\tau}{d\tau}$ im Endlichen bereits überall regulär, wenn $x \neq z$. Im Unendlichen möge es bei $\mathfrak{p}_{\infty j}$ — $j = 1, 2, \cdots, n$ — die Entwicklung haben:

$$\overset{\infty}{x}_\tau = \frac{1}{\tau}: \quad \breve{\vartheta}_{ji}(\overset{\infty}{x}_\tau, z)\frac{d\overset{\infty}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{D^{(j)}_{\Delta_j}}{\tau^{\Delta_j}} + \cdots + \frac{D^{(j)}_1}{\tau} + \mathfrak{P}^{(j)}(\tau),$$

wobei jedes D die Form hat: $D = f_i(z)$. Die eventuell vorhandenen negativen Potenzen von τ bringen wir durch Subtraktion der zu $\mathfrak{p}_{\infty j}$ gehörigen Elementardifferentiale $\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(h)}_k}(x, \mathfrak{p}_{\infty j})$ zum Fortfall und erhalten in

$$\breve{\eta}_{ki}(x, z)\frac{dx}{d\tau} = \breve{\vartheta}_{ki}(x, z)\frac{dx}{d\tau} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{\delta_j=1}^{\Delta_j} f_i^{(j,\delta_j)}(z)\,\frac{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\delta_j)}_k}(x_\tau, \mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}$$

ein Differential von $(\breve{K})$, welches sich für jedes $\mathfrak{p}_{\infty j}$ regulär verhält und dafür bei $\mathfrak{N}$ höchstens Pole 1. Ordnung bekommen hat. Für eine Stelle $\mathfrak{m}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ wird ferner

$$\breve{\eta}_{\mu i}(\overset{m}{x}_\tau, z)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau}_{\tau=0} = \breve{\vartheta}_{\mu i}(\overset{m}{x}_\tau, z)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau}_{\tau=0} = g_i^{(\mathfrak{m})}(z),$$

wo $g_i(z)$ wie $f_i(z)$ Funktionen von (K) sind. Bilden wir daher

$$\frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}_{ki}}(x, z)}{dx}\frac{dx}{d\tau} = \breve{\eta}_{ki}(x, z)\frac{dx}{d\tau} - \sum_{(\mathfrak{M})} g_i^{(\mathfrak{m})}(z)\cdot\frac{\underset{\mathfrak{M}}{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_k}(x)}{dx}\frac{dx}{d\tau},$$

so hat dieses alle in der Definition von $d\breve{F}^{(1)}$ geforderten Eigenschaften, auch für $x = z$, wie man analog wie in § 6 erkennt.

Ich setze

$$(41) \qquad \frac{d\overset{\dot{a},-}{\breve{F}_{ki}}(x, z)}{dx} = \frac{\overset{\dot{a}}{\breve{\xi}}{}^{(1)}_k(x)\,\xi^{(1)}_i(z) + \cdots}{x - z} + \cdots,$$

wo also $\overset{\dot{a}}{\breve{\xi}}$, $d\overset{\dot{a}}{\breve{\mathfrak{F}}}$, $d\overset{\dot{a}}{\breve{\psi}}$ an Stelle von $\breve{\xi}$, $d\breve{\mathfrak{F}}$, $d\breve{\psi}$ tritt;

$$(42) \qquad \frac{d\overset{-,a}{\breve{F}_{ki}}(x, z)}{dx} = \frac{\breve{\xi}^{(1)}_k(x)\,\overset{a}{\xi}{}^{(1)}_i(z) + \cdots}{x - z} + \cdots,$$

wo $\overset{a}{\xi}$, $\overset{a}{f}$, $\overset{a}{g}$ an Stelle von ξ, f, g tritt und schließlich

$$(43) \qquad \frac{d\overset{\dot{a},a}{\breve{F}_{ki}}(x, z)}{dx} = \frac{\overset{\dot{a}}{\breve{\xi}}{}^{(1)}_k(x)\,\overset{a}{\xi}{}^{(1)}_i(z) + \cdots}{x - z} + \cdots,$$

wenn beides gleichzeitig der Fall ist.

Auf entsprechende Weise ist das inbezug auf $\breve{\mathfrak{N}}, \breve{\mathfrak{M}}$ algebraisch charakterisierte Elementardifferential 1. Ordnung der Klasse (K) mit dem Argument z und dem Parameter x zu bilden: $\dfrac{\underset{\breve{\mathfrak{N}}, \breve{\mathfrak{M}}}{d F_{\breve{i} k}^{(1)}}(z, x)}{d z} \dfrac{d z}{d t}$, für welches $\overset{a, -}{dF}$, $\overset{-, \mathring{a}}{dF}$, $\overset{a, \mathring{a}}{dF}$ die analoge Bedeutung haben.

§ 10. Potenzentwicklung des Elementardifferentials 1. Ordnung.

Man beherrscht wiederum $\dfrac{d \breve{F}_{k i}^{(1)}(x_\tau, z)}{d \tau}$ vollständig, wenn man die analogen drei Fragen A), B), C) wie in § 7 beantworten kann.*)

A) Es möge z_t zunächst ein Funktionselement darstellen, dessen Mittelpunkt von einer Stelle a verschieden ist. Dann ist, je nachdem x_τ ein Funktionselement 1. mit einem davon verschiedenen, 2. mit demselben Mittelpunkt darstellt:

$$
(44) \quad \begin{cases}
1. \quad \dfrac{d \breve{F}_{k i}^{(1)}(x_\tau, z_t)}{d \tau} \text{ bzw. } \dfrac{1}{\tau^{\breve{\alpha}'_k}} \dfrac{\overset{\mathring{a}' -}{\breve{d F}}{}_{k i}^{(1)}(\overset{a'}{x}_\tau, z_t)}{d \tau} = P(\tau, t) \text{ bzw. } \dfrac{1}{\tau^{\varepsilon'_h}} P(\tau, t), \\[2ex]
2. \quad \dfrac{d \breve{F}_{k i}^{(1)}(x_\tau, z_t)}{d \tau} = \begin{cases} P(\tau, t) & k \neq i, \\ \dfrac{1}{\tau - t} + P(\tau, t) & k = i. \end{cases}
\end{cases}
$$

Ist hingegen $\overset{a}{z}_t$ ein Funktionselement mit dem Mittelpunkt a, dann ist entsprechend den beiden Fällen für x_τ:

$$
1. \quad \frac{1}{t^{\alpha_i}} \frac{\overset{-, a}{\breve{d F}}{}_{k i}^{(1)}(x_\tau, \overset{a}{z}_t)}{d \tau} \text{ bzw. } \frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}'_k}} \frac{1}{t^{\alpha_i}} \frac{\overset{\mathring{a}', a}{\breve{d F}}{}_{k i}^{(1)}(\overset{a'}{x}_\tau, \overset{a}{z}_t)}{d \tau}
$$

$$
= P(\tau, t) \quad \text{bzw.} \quad = \frac{1}{\tau^{\varepsilon'_h}} \cdot P(\tau, t),
$$

$$
2. \quad \frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_k}} \frac{1}{t^{\alpha_i}} \frac{\overset{\mathring{a}, a}{\breve{d F}}{}_{k i}^{(1)}(\overset{a}{x}_\tau, \overset{a}{z}_t)}{d \tau} = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau^{\varepsilon_k}} P(\tau, t) & k \neq i, \\ \dfrac{1}{\tau^{\varepsilon_k}} \left\{\dfrac{1}{\tau - t} + P(\tau, t)\right\}, & k = i. \end{cases}
$$

Hieraus folgt

B) *der fundamentale Entwicklungssatz für das Elementardifferential 1. Ordnung nach dem Parameter***), welcher folgende Gleichungen umfaßt: es ist für die Stelle:

---

*) Der Inhalt des Folgenden bildet ebenfalls einen Hauptteil von „V“; ich gebe hier nur die Resultate daraus ohne Beweis.

**) Vgl. für den algebraischen Fall Weierstraß, a. a. O. 2. Kap.; Brill-Noether, a. a. O. S. 421/2.

$$1.\ \mathfrak{d}_\delta,\ \overset{d}{z}_t = d + t: \qquad \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}_{k\delta}}(x_\tau, \overset{d}{z}_t)}{d\tau} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_{k}}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau}\cdot t^{\gamma},$$

$$\mathfrak{d}_\delta \neq \mathfrak{N},\ \mathfrak{M},\ \{\mathfrak{A}\},\ \{\mathfrak{P}_\infty\},$$

Entw. II_1:

$$2.\ \mathfrak{n}_\nu,\ \overset{n}{z}_t = n + t: \qquad \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}_{k\nu}}(x_\tau, \overset{n}{z}_t)}{d\tau} = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_{k}}(x_\tau, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau}\cdot t^{\gamma},$$

$$3.\ \mathfrak{m}_\mu,\ \overset{m}{z}_t = m + t: \qquad \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}_{k\mu}}(x_\tau, \overset{m}{z}_t)}{d\tau} = \sum_{\gamma=-1}^{\infty} \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_{k}}(x_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau}\cdot t^{\gamma},$$

$$4.\ \mathfrak{a}_j,\ \overset{a}{z}_t = a + t: \qquad \frac{1}{t^{\mu_j}}\,\frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\overset{-,a}{\breve{F}}{}^{(1)}_{k,j}}(x_\tau, \overset{a}{z}_t)}{d\tau} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_{k}}(x_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau}\cdot t^{\gamma},$$

$$5.\ \mathfrak{p}_{\infty j},\ \overset{\infty}{z}_t = \frac{1}{t}: \qquad \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}_{ki}}(x_\tau, \overset{\infty}{z}_t)}{d\tau} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_{k}}(x_\tau, \mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}\cdot t^{\gamma}.$$

Der Satz — **Entwicklungstheorem II_1** — kann so ausgesprochen werden: *Alle Elementardifferentiale der Klasse $(\breve{K})$ — und zwar jedes genau einmal — entspringen als Entwicklungskoeffizienten des Elementardifferentials 1. Ordnung von $(\breve{K})$ mit dem Argument x_τ und dem Parameter z_t nach t.*

C) Die vollständige Entwicklung nach dem Argument τ folgt später von selbst aus dem Vertauschungssatz I_1 (§ 13). Das Analoge gilt für $\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{dF^{(1)}_{ik}}(z, x)$.

§ 11. Potenzentwicklung der Elementardifferentiale höherer Ordnung.

Zuerst muß noch die Existenz von $\dfrac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(h)}_{ki}}(x, z)}{dx}\,\dfrac{dx}{d\tau}$ für $h > 1$ nachgewiesen werden. Bilden wir zu dem Zweck $\dfrac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}\left(\dfrac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}_{ki}}(x_\tau, z_t)}{dx}\right)$ und bedenken, daß, falls z_t ein Funktionselement mit einem von den Spurpunkten von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedenen Mittelpunkt darstellt, in den Reihen in (44) keine negativen Potenzen von τ vorkommen können, so folgt analog wie in § 8

$$(45) \qquad \frac{d\breve{F}^{(h)}_{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{ki}}(x_\tau, z_t)}{dx}\,\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}\left(\frac{d\breve{F}^{(1)}_{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{ki}}(x_\tau, z_t)}{d\tau}\right).$$

Ableitungssatz II$_h$: *Die Elementardifferentiale höherer Ordnung von $(\breve{K})$ mit dem Argument x und Parameter z entstehen aus demjenigen 1. Ordnung durch Differentiation nach dem Parameter z.**)

Wir beherrschen damit auch für die Elementardifferentiale höherer Ordnung die drei Fragestellungen A), B), C). Des Folgenden wegen gebe ich hier ausführlich die Entwicklung von $d\breve{F}^{(h+1)}_{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{ki}}(x_\tau, z_t)$ nach dem Parameter t (B)**):

Entwicklungstheorem II$_{h+1}$:

1. $\mathfrak{d}_\delta$, $\overset{d}{z}_t = d + t$: $\quad \dfrac{d\breve{F}^{(h+1)}_{k\delta}(x_\tau, \overset{d}{z}_t)}{dx} = \displaystyle\sum_{\gamma=h}^{\infty}\binom{\gamma}{h}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{d}_\delta)}{dx}\,t^{\gamma-h},$

2. $\mathfrak{n}_\nu$, $\overset{n}{z}_t = n + t$: $\quad \dfrac{d\breve{F}^{(h+1)}_{k\nu}(x_\tau, \overset{n}{z}_t)}{dx} = \displaystyle\sum_{\gamma=h}^{\infty}\binom{\gamma}{h}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{n}_\nu)}{dx}\,t^{\gamma-h},$

3. $\mathfrak{m}_\mu$, $\overset{m}{z}_t = m + t$: $\quad \dfrac{d\breve{F}^{(h+1)}_{k\mu}(x_\tau, \overset{m}{z}_t)}{dx} = \dfrac{(-1)^h}{t^{h+1}}\,\dfrac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_k(x)}{dx}$

$$+\sum_{\gamma=h}^{\infty}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{m}_\mu)}{dx}\,t^{\gamma-h},$$

4. $\mathfrak{a}_j$, $\overset{a}{z}_t = a + t$: hier ist

$$\frac{d\overset{\smile,a}{F}{}^{(1)}_{kj}(x_\tau, \overset{a}{z}_t)}{dx} = t^{\alpha_j}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{a}_j)}{dx}\,t^\gamma = t^{\alpha_j}\cdot\breve{\mathfrak{Q}}(t),$$

$$\frac{d^h}{dz^h}\Big(\quad\Big) = t^{\alpha_j-h}\left\{\begin{bmatrix}\alpha_j\\ h\end{bmatrix}\breve{\mathfrak{Q}}(t) + \binom{h}{1}\begin{bmatrix}\alpha_j\\ h-1\end{bmatrix}\breve{\mathfrak{Q}}^{(1)}(t)\cdot t + \cdots + \binom{h}{h}\begin{bmatrix}\alpha_j\\ 0\end{bmatrix}\breve{\mathfrak{Q}}^{(h)}(t)\cdot t^h\right\}$$

und daher

$$(46) \qquad 4. \qquad \frac{1}{t^{\alpha_j}}\,\frac{d\overset{\smile,a}{F}{}^{(\gamma+1)}_{kj}(x_\tau, \overset{a}{z}_t)}{dx} = \frac{1}{h!}\,\frac{1}{t^h}\Big\{\qquad\Big\}.$$

Hierbei ist für $s \geqq 0$:

$$(47) \qquad \Big\{\qquad\Big\}_{t^s} = \begin{bmatrix}\alpha_j\\ h, s\end{bmatrix}\cdot[\breve{\mathfrak{Q}}(t)]_{t^s}.$$

---

*) Vgl. für den algebraischen Fall H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig 1913, S. 116.

**) Der Kürze halber lasse ich im folgenden die Angabe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ überall weg.

5. $\mathfrak{p}_{\infty j}, \; \overset{\infty}{z}_t = \frac{1}{t}$:

$$(48) \qquad \frac{d\breve{F}_{kj}^{(h+1)}(x_\tau, \overset{\infty}{z}_t)}{dx} = (-1)^h \sum_{\gamma=1}^{\infty} \binom{\gamma+h-1}{h} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\gamma+1)}(x, \mathfrak{p}_{\infty j})}{dx} t^{\gamma+h}.$$

Den Inhalt der Gleichungen bezeichne ich als **Entwicklungssatz $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe** (Entw.-S. II_{h+1}) *für die Elementardifferentiale von* $(\breve{K})$ *mit Argument* x *und Parameter* z.

Ebenso wie bei den Funktionen ist es hier vorteilhaft, statt

$$\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) \qquad h = 0, 1, 2, \cdots$$

die Differentiale

$$(49) \qquad \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M};\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\breve{\mathsf{F}}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) = \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) + (-1)^{h+1} \sum_{(\mathfrak{M})} \underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\breve{\mathfrak{F}}_i^{(h+1)}}(z, \mathfrak{m}_\mu) \cdot \underset{\mathfrak{M}}{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x)$$

einzuführen, welche in Abhängigkeit von dem Argument x dieselben Eigenschaften wie die $d\breve{F}^{(h+1)}$ haben, nur daß an den Stellen $\mathfrak{m}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ $\left.\frac{d\breve{\mathsf{F}}_{\mu i}^{(h+1)}(\overset{\mathfrak{m}}{x}_\tau, z_t)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$ nicht Null, sondern gleich $(-1)^{h+1} \frac{\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\breve{\mathfrak{F}}_i^{(h+1)}}(z, \mathfrak{m}_\mu)}{dz}$ wird.

Für die Klasse (K) sind die analogen Differentiale

$$\frac{\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{dF_{ik}^{(h+1)}}(z_t, x_\tau)}{dz} \frac{dz}{dt} \qquad h = 0, 1, 2, \cdots$$

und

$$\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}};\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\mathsf{F}_{ik}^{(h+1)}}(z_t, x_\tau)$$

nebst den entsprechenden Sätzen aufzustellen.

Für $h = 1$ stellt $\frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M};\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\breve{\mathsf{F}}_k^{(2)}}(x, z)}{dx}$ die Verallgemeinerung der Weierstraßschen Funktion $G(xy, x'y')$ im algebraischen Fall dar.*)

---

*) S. Weierstraß a. a. O. S. 269 ff. oder Brill-Noether, a. a. O. S. 427 $\frac{\underset{\mathfrak{M}}{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x)}{dx}$ entsprechen bei Weierstraß die Funktionen $H(xy)_\alpha$; $\frac{\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{d\breve{\mathfrak{F}}_i^{(2)}}(z, \mathfrak{m}_\mu)}{dz}$ die Funktionen $H'(xy)_\alpha$; überdies wird da $\breve{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$ gewählt. Vgl. hierzu die Anmerkung am Schluß von § 3.

IV. Abschnitt.

Die Vertauschungstheoreme.

§ 12. Zusammenhang zwischen den Elementar-Funktionen und -Differentialen von zwei Variabeln.

Wir wollen nunmehr alle Zusammenhänge zwischen den aufgestellten

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(h+1)}_{ik}}(z,x), \quad \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}^{(h+1)}_{ki}}(x,z), \quad \frac{\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{dF^{(h+1)}_{ik}(z,x)}}{dz}\,\frac{dz}{dt}, \quad \frac{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(h+1)}_{ki}(x,z)}}{dx}\,\frac{dx}{d\tau}$$

zu erforschen trachten. Von vornherein sind folgende 4 Arten möglich:

I. $$E - \frac{d\breve{F}}{dx}$$

II. $$E - \breve{E}$$

III. $$\frac{dF}{dz} - \frac{d\breve{F}}{dx}$$

IV. $$E - \frac{dF}{dz}.$$

Dazu kämen noch die Relationen zwischen den komplementären Größen $\breve{\mathrm{I}}$, $\breve{\mathrm{II}} = \mathrm{II}$, $\breve{\mathrm{III}} = \mathrm{III}$, $\breve{\mathrm{IV}}$, die aber formal nichts Neues liefern. Auch IV können wir weglassen, da es durch Verbindung von I mit III oder von II mit $\breve{\mathrm{I}}$ entsteht, so daß wir im wesentlichen folgende drei Typen übrig behalten:

den Zusammenhang zwischen

I. den Funktionen von (K) und Differentialen von $(\breve{K})$,

II. den Funktionen von (K) und Funktionen von $(\breve{K})$,

III. den Differentialen von (K) und Differentialen von $(\breve{K})$.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß II und III ihren Ausdruck finden in Gleichungen, welche bei gleichzeitiger Vertauschung von Argument und Parameter, i und k, sowie aller Größen mit ihren komplementären ungeändert bleiben und daher den Namen Vertauschungstheorem verdienen. Bezeichnen wir der Gleichförmigkeit halber die Beziehungen I auch als solche, so erhalten wir, den verschiedenen Ordnungen der Elementar-Funktionen und -Differentiale entsprechend, die unendlichen Serien von Vertauschungssätzen. Der gemeinsame Quell, aus dem sie alle entspringen, ist der Gedanke: Man betrachte die in I—III links stehenden Größen in Abhängigkeit von dem Parameter und mache als solche eine Partialbruchdarstellung von ihnen.

§ 13. Das Vertauschungstheorem 1. Stufe zwischen Funktionen und Differentialen.

$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{ik}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$ ist in Abhängigkeit von x ein Differential von $(\breve{K})$, von z eine Funktion von (K). In ersterer Eigenschaft besitzt es, wie ein Blick auf die Gleichungen 1.—5. des Entw.-S. I_1 (§ 7) lehrt, genau die in der Definition von $\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}^{(1)}_{ki}}(x, z)}{d\tau}$ § 9 geforderten Eigenschaften, bis auf die Stelle $x = z$, wo es sich nach (30) verhält wie

$$\begin{cases} P(0, \tau) = \mathfrak{P}(\tau) & k \neq i \\ -\frac{1}{\tau} + P(0, \tau) = -\frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau), & k = i \end{cases}$$

da für ein von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ bzw. deren Spurpunkten verschiedenes z die Reihen $P(t, \tau)$ in (30) keine negativen Potenzen von τ enthalten können. Mithin folgt:

Vert. I_1:
$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{ik}}(z, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}^{(1)}_{ki}}(x_\tau, z)}{d\tau}.$$

Diese Gleichung gilt zunächst unter der Voraussetzung, die ihrer Ableitung zugrunde lag, d. h. für jedes beliebige i und jede beliebige, von den Spurpunkten von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stelle z von E' (s. § 9). Da sie aber eine Identität in z (und x) darstellt, gilt sie, so lange beide Seiten einen Sinn behalten, d. h. auch noch für die ausgeschlossenen Stellen.*) Dabei tritt übrigens, wenn $\overset{a}{x}_\tau$ ein Funktionselement mit dem Mittelpunkt a vorstellt und $h = j$ ist, die Gleichung

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_j}}\overset{-,\breve{a}}{E^{(1)}_{ij}}(z, \overset{a}{x}_\tau)\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} = -\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_j}}\frac{d\overset{\breve{a},-}{\breve{F}^{(1)}_{ji}}(\overset{a}{x}_\tau, z)}{d\tau}$$

an Stelle der obigen usw. für $z_t = \overset{a}{z}_t$ oder beides zusammen.

Wären wir davon ausgegangen, $\frac{d\breve{F}^{(1)}_{ki}(x_\tau, z)}{d\tau}$ in Abhängigkeit von z zu betrachten, so wären wir auf Grund von Entw.-S. II_1 und der Definition von $E^{(1)}_{ik}$ in § 6 zu derselben Gleichung gelangt.

Aus Vert. I_1 bzw. der damit äquivalenten Gleichung

$$E^{(1)}_{ik}(z, x) = -\frac{d\breve{F}^{(1)}_{ki}(x, z)}{dx} \tag{50}$$

*) Das letztere gilt auch für alle andern Vertauschungstheoreme, wo ich es jedoch der Kürze halber eigens zu erwähnen unterlasse.

können nun durch Differentiation nach z oder x beliebig viele neue Identitäten gewonnen werden. Besonders wichtig sind die folgenden

$$(51)\qquad E_{ik}^{(h+1)}(z,x) = \frac{1}{h!}\frac{d^h}{dx^h}E_{ik}^{(1)}(z,x) = -\frac{1}{h!}\frac{d^h}{dx^h}\left(\frac{d\breve{F}_{ki}^{(1)}(x,z)}{dx}\right).$$

Damit beherrscht man auf Grund von Entw.-S. II_1 die Entwicklung von $E_{ik}^{(h+1)}(z_t, x)$ — $h = 0, 1, 2, \cdots$ — nach dem Argument t vollständig und die oben § 8 für die Elementarfunktionen offen gelassene Frage C) ist damit erledigt.

$$(52)\qquad \frac{d\breve{F}_{ki}^{(h+1)}(x_\tau, z)}{d\tau} = \frac{1}{h!}\frac{d^h}{dz^h}\left(\frac{d\breve{F}_{ki}^{(1)}(x_\tau, z)}{d\tau}\right) = -\frac{1}{h!}\frac{d^h}{dz^h}\left(E_{ik}^{(1)}(z, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\right).$$

Damit beherrscht man auf Grund von Entw.-S. I_1 die Entwicklung von $\frac{d\breve{F}_{ki}^{(h+1)}(x_\tau, z)}{d\tau}$ — $h = 0, 1, 2 \cdots$ — nach dem Argument τ vollständig und die oben § 11 für die Elementardifferentiale offen gelassene Frage C) ist damit beantwortet.

Bedeuten r, s zwei beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots$, so ist allgemein:

$$(53)\qquad r!\frac{d^s}{dz^s}\left[E_{ik}^{(r+1)}(z,x)\right] = -s!\frac{d^r}{dx^r}\left[\frac{d\breve{F}_{ki}^{(s+1)}(x,z)}{dx}\right].$$

§ 14. Das Vertauschungstheorem $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe zwischen Funktionen und Differentialen.

Wir studieren jetzt $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z,x)\frac{dx}{d\tau}$ in Abhängigkeit von x. Als solcher ist der Ausdruck ein Differential der Klasse $(\breve{K})$. z sei zunächst wieder eine gewöhnliche, von den Spurpunkten von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stelle. Pole von $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z,x)\frac{dx}{d\tau}$ können, wie ein Blick auf die Gleichungen lehrt, liegen 1. bei $x = z$ und $k = i$, 2. bei $\mathfrak{N}$, 3. bei $\{\mathfrak{A}\}$.

1. Bei $x = z$ und $k = i$ ist nach (31) für $t = 0$:

$$E_{ii}^{(h+1)}(z,x)\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{(-\tau)^{h+1}} + \mathfrak{P}(\tau),$$

also bleibt daselbst die Differenz

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z,x)\frac{dx}{d\tau} - (-1)^{h+1}\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x_\tau, z)}{d\tau} = A$$

regulär. 2. Bei einer Stelle $\mathfrak{n}_\nu$ von $\mathfrak{N}$ ist nach Entw. I_{h+1}, 3.

$$E_{i\nu}^{(h+1)}(z, \overset{n}{x_\tau}) = \frac{(-1)^h}{\tau^{h+1}} \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) \cdots + \mathfrak{P}(\tau),$$

also hat die Differenz

$$A - (-1)^h \sum_{(\mathfrak{N})} \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) \cdot \frac{d \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h+1)}}(x_\tau, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau} = B$$

bei $\mathfrak{N}$ höchstens nur mehr Pole 1. Ordnung. 3. Bei $\mathfrak{a}_j$ ist schließlich nach Entw. I_{h+1}, 4.

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_j}} \overset{-,\breve{a}}{E}{}_{ij}^{(h+1)}(z, \overset{a}{x_\tau}) \frac{d\overset{a}{x}}{d\tau} = \frac{1}{h!} \frac{1}{\tau^{\varepsilon_j}} \cdot \frac{1}{\tau^h} \left\{ \quad \right\},$$

wobei $\left\{ \quad \right\}_{\tau^s} = \begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h, s \end{bmatrix} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z, \mathfrak{a}_j)$ $\qquad s = 0, 1, 2, \cdots, h$

ist (33, 35); mithin bleibt die Differenz

$$B - \frac{1}{h!} \sum_{(\mathfrak{A})} \sum_{j=1}^{n} \left[\begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h, 0 \end{bmatrix} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j) \frac{d \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{a}_j)}{d\tau} + \cdots \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h, h-1 \end{bmatrix} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{a}_j) \frac{d \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}}(x_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau} \right] = C$$

bei allen Stellen von $\{\mathfrak{A}\}$ regulär. C ist also ein Differential von $(\breve{K})$, welches höchstens bei $\mathfrak{N}$ Pole 1. Ordnung hat, d. h. es ist

$$C = \sum_{(\mathfrak{M})} f_i^{(\mathfrak{m})}(z) \cdot \frac{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{d\tau}.$$

Nun geht die Gleichung für eine Stelle $\mathfrak{m}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ über in (17)

$$C = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h+1)}}(z, \mathfrak{m}_\mu) = f_i^{(\mathfrak{m})}(z) \cdot 1.$$

Mithin besteht die Identität:

Vertauschungstheorem I_{h+1}:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z, x) \frac{dx}{d\tau} + (-1)^h \frac{d \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{F_{ki}^{(h+1)}}(x_\tau, z)}{d\tau}$$

$$- (-1)^h \sum_{(\mathfrak{N})} \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) \cdot \frac{d \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h+1)}}(x, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau} - \sum_{(\mathfrak{M})} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h+1)}}(z, \mathfrak{m}_\mu) \cdot \frac{d \underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x)}{d\tau}$$

$$- \frac{1}{h!} \sum_{(\mathfrak{A})} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[\begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h, 0 \end{bmatrix} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j) \frac{d \underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x, \mathfrak{a}_j)}{d\tau} + \cdots \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdots + \begin{bmatrix} -\alpha_j \\ h, h-1 \end{bmatrix} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z, \mathfrak{a}_j) \frac{d \breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{a}_j)}{d\tau} \right] \right\} = 0.$$

Die Beschränkung, daß z eine gewöhnliche Stelle ist, können wir jetzt fallen lassen. Die Identität in z und x besteht, solange die vorkommenden Ausdrücke ihren Sinn behalten; wir bezeichnen sie als **Vertauschungstheorem $(h+1)^{ter}$ Stufe** $(h = 1, 2, \cdots)$ **zwischen den Funktionen von (K) und den Differentialen von $(\breve{K})$.**

Aus dieser Gleichung können durch Differentiation nach z oder x ebenfalls unbegrenzt viele neue hergeleitet werden. Analog wäre *Vert.* $\breve{I}_{h+1}$ aufzustellen.

§ 15. Die Vertauschungstheoreme 2. Art für die Funktionen von (K) und $(\breve{K})$.

Betrachten wir wieder $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{ik}}(z, x)$ als Funktion von x, als welche es der Klasse $(\breve{K})$ angehört und sei z zunächst von den Spurpunkten von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\breve{\mathfrak{M}}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschieden. Dann ist zunächst für $x = z$ und $k = i$

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{ik}}(z, x) + \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}^{(1)}_{ki}}(x, z) = A$$

regulär. Bei $\mathfrak{M}$ ist E und $\breve{E}$ regulär; bei $\breve{\mathfrak{M}}$ ist E regulär, während $\breve{E}$ dort höchstens Pole 1. Ordnung hat; bei $\mathfrak{N}$ ist $\breve{E}$ regulär, während sich dort E verhält wie (Entw.-S. I_1 . 3)

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{i\nu}}(z, \overset{n}{x_\tau}) = \underset{\mathfrak{N}}{\varphi^{(\mathfrak{n})}_{i}}(z) \cdot \frac{1}{\tau} + \cdots .$$

Also ist
$$A - \sum_{(\mathfrak{N})} \underset{\mathfrak{N}}{\varphi^{(\mathfrak{n})}_{i}}(z) \cdot \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(1)}_{k}}(x, \mathfrak{n}_\nu) = B$$

bei $\mathfrak{N}$ regulär. Bei $\mathfrak{a}_j$ ist $\breve{E}$, d. h. $\frac{1}{\tau^{\breve{a}_j}} \overbrace{\breve{E}}^{\breve{a},-}_{ji}(\overset{a}{x_\tau}, z)$ regulär, während E, d. h.

$$\frac{1}{\tau^{\breve{a}_j}} \overset{-,\breve{a}}{E}_{ij}(z, \overset{a}{x_\tau}) = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_j}} \left\{ \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(1)}_{i}}(z, \mathfrak{a}_j) \cdot \frac{1}{\tau} + \cdots \right\}$$

dort einen Pol 1. Ordnung hat, wenn $\varepsilon_j \neq 0$ ist (Entw.-S. I_1, 4.). Daher ist

$$B - \sum_{\{\mathfrak{A}\}} \sum_{j=1;\ \varepsilon_j \neq 0}^{n} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(1)}_{i}}(z, \mathfrak{a}_j) \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(1)}_{k}}(x, \mathfrak{a}_j) = C$$

daselbst regulär und hat alles in allem sonst höchstens bei $\breve{\mathfrak{M}}$ Pole 1. Ordnung; mithin folgt

$$C = \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})} f^{(\breve{\mathfrak{n}})}_{i}(z) \cdot \underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\varphi}^{(\breve{\mathfrak{n}})}_{k}}(x)$$

und da für $\breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}}$ $C = \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}}) = f_i^{(\breve{\mathfrak{n}})}(z) \cdot 1$ wird (§ 9), gilt schließlich die Identität:

Vertauschungstheorem II_1:

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z, x) + \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(1)}}(x, z) - \sum_{(\mathfrak{N})} \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) \cdot \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(1)}}(x, \mathfrak{n}_\nu) - \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})} \underset{(\breve{\mathfrak{N}})}{\breve{\varphi}_k^{(\breve{\mathfrak{n}})}}(x) \cdot \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}})$$

$$- \sum_{\{\mathfrak{A}\}} \sum_{j=1;\; \varepsilon_j \neq 0}^{n} \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j) \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(1)}}(x, \mathfrak{a}_j) = 0.$$

Wir können diese Gleichung mit Hilfe der in (37), (38) eingeführten Funktionen kurz so schreiben:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N};\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\mathsf{E}_{ik}^{(1)}}(z, x) + \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}};\,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\breve{\mathsf{E}}_{ki}^{(1)}}(x, z) - \sum_{\{\mathfrak{A}\}} \sum_{j=1;\; \varepsilon_j \neq 0}^{n} \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j) \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(1)}}(x, \mathfrak{a}_j) = 0.$$

*Diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn man darin z mit x, i mit k, sowie alle anderen darin vorkommenden Ausdrücke mit ihren komplementären vertauscht.**) Wir bezeichnen sie daher als **Vertauschungstheorem 1. Stufe für die Funktionen von (K) und $(\breve{K})$.** (Vert. II_1.)

Wenn alle $\varepsilon_j = 0$ sind, erhält man als wichtiges **Korollar:**

Vertauschungstheorem II_1^*:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N};\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\mathsf{E}_{ik}^{(1)}}(z, x) + \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}};\,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\breve{\mathsf{E}}_{ki}^{(1)}}(x, z) = 0.$$

Ganz analog erhält man das *Vertauschungstheorem 2. Stufe für die Funktionen* von (K) und $(\breve{K})$, welches so lautet:

Vertauschungstheorem II_2:

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(2)}}(z, x) - \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(2)}}(x, z) + \sum_{(\mathfrak{N})} \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(2)}}(x, \mathfrak{n}_\nu) \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) - \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})} \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}}) \cdot \underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\varphi}_k^{(\breve{\mathfrak{n}})}}(x)$$

$$- \sum_{\{\mathfrak{A}\}} \left\{ \sum_{j=1;\; \varepsilon_j = 0}^{n} - \alpha_j \cdot \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(1)}}(x, \mathfrak{a}_j) \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j) \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1,\; \varepsilon_j \neq 0}^{n} (-\alpha_j + 1) \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(1)}}(x, \mathfrak{a}_j) \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \mathfrak{a}_j) - \alpha_j \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(2)}}(x, \mathfrak{a}_j) \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j) \right\} = 0$$

oder kürzer $$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N};\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\mathsf{E}_{ik}^{(2)}}(z, x) - \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}};\,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\breve{\mathsf{E}}_{ki}^{(2)}}(x, z) - \sum_{\{\mathfrak{A}\}} \left\{ \quad \right\} = 0.$$

---

*) Diese kurze *Ausdrucksweise* ist cum grano salis zu verstehen; sie soll nichts anderes besagen als eben der *Inhalt der Gleichung* Vert. II_1. Dieselbe Bemerkung gilt überall im folgenden auch.

Diese Gleichung, bzw. die linke Seite derselben bleibt bis auf das Vorzeichen ungeändert, wenn man darin obige Vertauschung vornimmt; denn es ist für $\varepsilon_j = 0: -\breve{\alpha}_j = +\alpha_j$ und für

$$\varepsilon_j = 1: (-\breve{\alpha}_j + 1) = \alpha_j, \quad -\breve{\alpha}_j = -(-\alpha_j + 1).$$

Das allgemeine Vertauschungstheorem $(h+1)^{ter}$ Stufe — $h = 1, 2, \cdots$ — lautet schließlich:

Vertauschungstheorem II_{h+1}:

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N};\,\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\mathsf{E}^{(h+1)}_{ik}(z, x)} + (-1)^h \underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}};\,\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\breve{\mathsf{E}}^{(h+1)}_{k,i}(x, z)}$$

$$-\frac{1}{h!}\sum_{\mathfrak{A}}\Bigg\{\sum_{j=1;\ \varepsilon_j=0}^{n}\Bigg[\begin{bmatrix}-\alpha_j\\ h,0\end{bmatrix}\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(1)}_i(z, \mathfrak{a}_j)}\,\underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(h)}_k(x, \mathfrak{a}_j)} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{bmatrix}-\alpha_j\\ h,h-1\end{bmatrix}\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(h)}_i(z, \mathfrak{a}_j)}\,\underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(1)}_k(x, \mathfrak{a}_j)}\Bigg]$$

$$+\sum_{j=1,\ \varepsilon_j=1}^{n}\Bigg[\begin{bmatrix}-\alpha_j\\ h,0\end{bmatrix}\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(1)}_i(z, \mathfrak{a}_j)}\,\underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(h+1)}_k(x, \mathfrak{a}_j)} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{bmatrix}-\alpha_j\\ h,h\end{bmatrix}\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(h+1)}_i(z, \mathfrak{a}_j)}\,\underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(1)}_k(x, \mathfrak{a}_j)}\Bigg]\Bigg\} = 0.$$

Man erkennt: die linke Seite vorstehender Gleichung bleibt bis auf den Faktor $(-1)^h$ ungeändert, wenn man darin z mit x, i mit k und alle sonstigen Größen mit ihren komplementären vertauscht. Denn die Symbole $\begin{bmatrix}\beta\\ r,s\end{bmatrix}$, wo β eine beliebige reelle oder komplexe Zahl, r eine natürliche Zahl $1, 2, \cdots$ ist, haben die Eigenschaft, daß

$$\text{(54a)}\quad \begin{bmatrix}\beta\\ r,0\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta-1\\ r,r\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta\\ r,1\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta-1\\ r,r-1\end{bmatrix}, \cdots,$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ r,r-2\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta-1\\ r,2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta\\ r,r-1\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta-1\\ r,1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ r,r\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta-1\\ r,0\end{bmatrix};$$

$$\text{(54b)}\quad \begin{bmatrix}\beta\\ r,0\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta\\ r,r-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta\\ r,1\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta\\ r,r-2\end{bmatrix}, \cdots,$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ r,r-2\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta\\ r,1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta\\ r,r-1\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta\\ r,0\end{bmatrix};$$

$$\text{(54c)}\quad \begin{bmatrix}\beta\\ r,0\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta+1\\ r,r-2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta\\ r,1\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta\\ r,r-3\end{bmatrix}, \cdots,$$

$$\begin{bmatrix}\beta\\ r,r-2\end{bmatrix} = (-1)^r\begin{bmatrix}-\beta+1\\ r,0\end{bmatrix}.$$

Für $r = h$ und $\beta = -\alpha_j$ wird im Fall $\varepsilon_j = 0: -\beta = \alpha_j = -\breve{\alpha}_j$, im Fall

$$\varepsilon_j = 1: -\beta - 1 = \alpha_j - 1 = -\breve{\alpha}_j.$$

§ 16. Die Vertauschungstheoreme 3. Art für die Differentiale von (K) und $(\breve{K})$.

Wir betrachten jetzt $\dfrac{d\breve{F}^{(1)}_{ki}(x,z)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{dx}\,\dfrac{dz}{dt}\,\dfrac{dx}{d\tau}$ in Abhängigkeit von dem Parameter z. Als solches ist es ein Differential der Klasse (K). Es besitzt — wenn wir x zunächst wieder auf gewöhnliche, von den Spurpunkten von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $\breve{\mathfrak{M}}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stellen beschränken — Pole höchstens für $z = x$ und $i = k$, $\mathfrak{M}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$. Bei der ersteren Stelle verhält es sich wie $-\dfrac{dF^{(1)}_{ik}(z,x)_{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}}{dz}\,\dfrac{dx}{d\tau}\,\dfrac{dz}{dt}$; durch Subtraktion dieses Gliedes schaffen wir den Pol fort. Indem man weiter ganz wie in § 15 verfährt, kommt man unter Benutzung von Entw.-S. II_1, § 10 zu der Gleichung:

Vertauschungstheorem III_1:

$$\frac{dF^{(1)}_{ik}(z,x)_{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}}{dz}+\frac{d\breve{F}^{(1)}_{ki}(x,z)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{dx}$$

$$-\sum_{(\breve{\mathfrak{M}})}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{k}(x,\breve{\mathfrak{m}}_\mu)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{dx}\,\frac{d\psi^{(\breve{\mathfrak{m}})}_{i}(z)_{\breve{\mathfrak{M}}}}{dz}-\sum_{(\mathfrak{M})}\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}_{i}(z,\mathfrak{m}_\mu)_{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}}{dz}\,\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_{k}(x)_{\mathfrak{M}}}{dx}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{k}(x,\mathfrak{p}_{\infty j})_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{dx}\,\frac{d\mathfrak{F}^{(2)}_{i}(z,\mathfrak{p}_{\infty j})_{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}}{dz}+\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(2)}_{k}(x,\mathfrak{p}_{\infty j})_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{dx}\,\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}_{i}(z,\mathfrak{p}_{\infty j})_{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}}{dz}\right]=0.$$

Hierin ist der Kürze halber der Faktor $\dfrac{dz}{dt}\,\dfrac{dx}{d\tau}$ unterdrückt und daher $\dfrac{d\breve{\mathfrak{F}}}{dx}$ statt $\dfrac{d\breve{\mathfrak{F}}}{d\tau}$, $\dfrac{d\psi}{dz}$ statt $\dfrac{d\psi}{dt}$ usw. geschrieben. Unter Einführung der Bezeichnung (49) lautet diese bei gleichzeitiger Vertauschung von z und x, i und k, sowie aller sonstigen Größen mit ihren komplementären invariante Gleichung

$$\frac{d\mathsf{F}^{(1)}_{ik}(z,x)_{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}};\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{dz}+\frac{d\breve{\mathsf{F}}^{(1)}_{ki}(x,z)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M};\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}}{dx}+\sum_{(\mathfrak{P}_\infty)}[\quad]=0.$$

Sie ist das Vertauschungstheorem 1. Stufe für die Differentiale von (K) *und* $(\breve{K})$. **Dasselbe 2. Stufe lautet:**

Vertauschungstheorem III_2:

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M}}{F^{(2)}_{ik}}(z,x)}{dz} - \frac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M}{\breve F^{(2)}_{ki}}(x,z)}{dx}$$

$$+\sum_{(\breve{\mathfrak M})} \frac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M}{\breve{\mathfrak F}^{(2)}_k}(x,\breve{\mathfrak m}_\mu)}{dx}\,\frac{d\underset{\breve{\mathfrak M}}{\psi_i^{(\breve{\mathfrak m})}}(z)}{dz} - \sum_{(\mathfrak M)} \frac{d\underset{\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M}}{\mathfrak F^{(2)}_i}(z,\mathfrak m_\mu)}{dz}\,\frac{d\underset{\mathfrak M}{\breve\psi_k^{(\mathfrak m)}}(x)}{dx}$$

$$+\sum_{(\mathfrak A)}\left\{\sum_{j=1;\,\varepsilon_j=0}^{n} \alpha_j\, \frac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M}{\breve{\mathfrak F}^{(1)}_k}(z,\mathfrak a_j)}{dx}\,\frac{d\underset{\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M}}{\mathfrak F^{(1)}_i}(z,\mathfrak a_j)}{dz}\right\}=0$$

oder bei Einführung der Bezeichnung (49) kürzer:

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M};\,\mathfrak N,\mathfrak M}{\mathsf F^{(2)}_{ik}}(z,x)}{dz} - \frac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M;\,\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M}}{\breve{\mathsf F}^{(2)}_{ki}}(x,z)}{dx}$$

$$+\sum_{(\mathfrak A)}\left\{\sum_{j=1;\,\varepsilon_j=0}^{n} \alpha_j\, \frac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M}{\breve{\mathfrak F}^{(1)}_k}(x,\mathfrak a_j)}{dx}\,\frac{d\underset{\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M}}{\mathfrak F^{(1)}_i}(z,\mathfrak a_j)}{dz}\right\}=0.$$

Ein besonders einfacher und wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn bei sämtlichen Stellen $\mathfrak a$ kein rein imaginärer Exponent $\alpha_j = i\alpha_j''\,(\alpha_j''\neq 0)$, $(j=1,2,\cdots,n)$ vorkommt, in welchem Falle alle $\varepsilon_j\neq 0$ sind oder $\varepsilon_j=0$ und $\alpha_j=\breve\alpha_j=0$ ist. Alsdann fällt die Summe über $(\mathfrak A)$ fort und man hat das Korollar:

Vertauschungstheorem $\mathrm{III}_2{}^*$:

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M};\,\mathfrak N,\mathfrak M}{\mathsf F^{(2)}_{ik}}(z,x)}{dz} - \frac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M;\,\breve{\mathfrak N},\breve{\mathfrak M}}{\breve{\mathsf F}^{(2)}_{ki}}(x,z)}{dz}=0.$$

Die Voraussetzung dieses Falles liegt insbesondere dann vor, wenn (K) gleich einer Klasse *algebraischer* Funktionen ist und dann stellt $\mathrm{III}_2{}^*$ *die berühmte Gleichung von Weierstraß bzw. eine Verallgemeinerung derselben dar.**)

Das allgemeine Vertauschungstheorem $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe — $h=1,2,\cdots$ — erhält man schließlich, wenn man von dem Differential $\dfrac{d\underset{\mathfrak N,\mathfrak M}{\breve F^{(h+1)}_{ki}}(x,z)}{dx}\,\dfrac{dx}{d\tau}\,\dfrac{dz}{dt}$ ausgeht und es in seiner Abhängigkeit von t betrachtet, wofür die Entwicklungen des § 11 gelten:

*) S. Weierstraß, a. a. O. S. 234; Hensel-Landsberg, a. a. O. S. 593 4; H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig 1913, S. 112; Brill-Noether, a. a. O. S. 427.

Vertauschungstheorem III_{h+1}:

$$\frac{d\,\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}};\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\mathsf{F}^{(h+1)}_{ik}(z,x)}}{dz} + (-1)^h \frac{d\,\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M};\,\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{\breve{\mathsf{F}}^{(h+1)}_{ki}(x,z)}}{dx}$$

$$-\frac{1}{h!}(-1)^h \sum_{(\mathfrak{A})} \left\{ \sum_{j=1;\,\varepsilon_j=0}^{n} \left[\begin{bmatrix} \alpha_j \\ h,\,0 \end{bmatrix} \frac{d\,\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x,\mathfrak{a}_j)}}{dx}\, \frac{d\,\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}^{(h)}_i(z,\mathfrak{a}_j)}}{dz} + \cdots \right.\right.$$

$$\left. \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_j \\ h,\,h-1 \end{bmatrix} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(h)}_k}{dx}\, \frac{d\mathfrak{F}^{(1)}_i}{dz} \right]$$

$$+\sum_{j=1;\,\varepsilon_j\neq 0}^{n} \left[\begin{bmatrix} \alpha_j \\ h,\,0 \end{bmatrix} \frac{d\,\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x,\mathfrak{a}_j)}}{dx}\, \frac{d\,\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}^{(h-1)}_i(z,\mathfrak{a}_j)}}{dz} + \cdots \right.$$

$$\left.\left. \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_j \\ h,\,h-2 \end{bmatrix} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(h-1)}_k}{dx}\, \frac{d\mathfrak{F}^{(1)}_i}{dz} \right] \right\} = 0.$$

Man erkennt wieder, diese Gleichung bleibt bei Vertauschung aller Größen mit ihren komplementären sowie von z und x, i und k bis auf den Faktor $(-1)^h$ ungeändert; man sehe (54) die Eigenschaft der Symbole $\begin{bmatrix} \beta \\ r,\,s \end{bmatrix}$ für $r = h$ und $\beta = \alpha_j$, wobei im Fall $\varepsilon_j = 0$: $-\beta = -\alpha_j = \breve{\alpha}_j$, im Fall $\varepsilon_j = 1$: $-\beta + 1 = -\alpha_j + 1 = \breve{\alpha}_j$ wird.

V. Abschnitt.

Die Reduktionstheoreme.

§ 17. Die Reduktionstheoreme 1. Art.

Die drei Arten von Vertauschungstheoremen I_{h+1}, II_{h+1}, III_{h+1} geben uns sämtliche Zusammenhänge zwischen den Elementarfunktionen und -Differentialen von zwei Variabeln (s. § 12). Sie haben, wenn $z \neq x$ oder $z = x$ und $i \neq k$ ist, die Form identischer Gleichungen

$$P(t,\tau) = 0.$$

Wir wollen darin den Koeffizienten von t^r, von τ^s und von $t^r\tau^s$ aufsuchen. Die beiden ersteren geben uns Gleichungen, welche wir — ihrem Charakter gemäß — als Reduktionstheoreme bezeichnen: je nachdem sie aus I, II, III hervorgehen, unterscheiden wir sie als Reduktionstheoreme 1., 2., 3. Art. (Der Koeffizient von $t^r\tau^s$ liefert uns die Reziprozitätstheoreme 1., 2., 3. Art, welche wir jedoch erst in einem nächsten Abschnitt behandeln.) *Wir erhalten auf diese Weise systematisch alle Zusammenhänge zwischen den Elementarfunktionen und -Differentialen von einer Variabeln.*

Aus I_1 folgt zunächst, wenn wir darin den Koeffizienten von τ^s aufsuchen:

Reduktionstheorem $I_1(\tau^s)$:

1. für eine gewöhnliche Stelle $\mathfrak{d}_\delta$: $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z, \mathfrak{d}_\delta) = -\left[\dfrac{d\breve{F}^{(1)}_{\delta i}\!\left(\overset{d}{x}_\tau, z\right)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{d\tau}\right]_{\tau^s}$

$$s = 0, 1, 2, \cdots,$$

2. für $\mathfrak{m}_\mu$: $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z, \mathfrak{m}_\mu) = -\left[\dfrac{d\breve{F}^{(1)}_{\mu i}\!\left(\overset{m}{x}_\tau, z\right)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{d\tau}\right]_{\tau^{-s}}, \qquad s = 1, 2, 3, \cdots,$

3. für $\mathfrak{n}_\nu$: $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z, \mathfrak{n}_\nu) = -\left[\dfrac{d\breve{F}^{(1)}_{\nu i}\!\left(\overset{n}{x}_\tau, z\right)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{d\tau}\right]_{\tau^{-s}}, \qquad s = -1, 0, 1, 2, \cdots,$

4. für $\mathfrak{a}_j$: $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z, \mathfrak{a}_j) = -\left[\dfrac{\tau^{\varepsilon_j}}{\tau^{\breve{\alpha}_j}}\dfrac{d\overset{\breve{\alpha}_j-}{\breve{F}^{(1)}_{ji}}\!\left(\overset{a}{x}_\tau, z\right)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{d\tau}\right]_{\tau^{-s}}, \qquad s = 0, 1, 2, \cdots,$

5. für $\mathfrak{p}_{\infty j}$: $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z, y_{\infty j}) = -\left[\dfrac{d\breve{F}^{(1)}_{ji}\!\left(\overset{\infty}{x}_\tau, z\right)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{d\tau}\right]_{\tau^s}, \qquad s = 0, 1, 2, \cdots.$

Red. $I_1(\tau^s)$: Reduktionstheorem 1. Art 1. Stufe für Funktionen: *Sämtliche in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ algebraisch charakterisierte Elementarfunktionen von (K) entspringen als Entwicklungskoeffizienten des mit negativem Vorzeichen versehenen Elementardifferentials 1. Ordnung von $(\breve{K})$ mit dem Argument x_τ und dem Parameter z nach dem Argument τ.*

Dieser Satz bildet das Gegenstück zu dem Entwicklungssatz I_1 von § 10, wonach alle $\mathfrak{E}$ als Entwicklungskoeffizienten von $E^{(1)}\dfrac{dx}{d\tau}$ nach dem *Parameter* entspringen.

Analog erhalten wir, wenn wir in I_1 den Koeffizienten von t^r aufsuchen:

Red. $I_1(t^r)$: Reduktionstheorem 1. Art 1. Stufe für die Differentiale: *Sämtliche, in bezug auf $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ algebraisch charakterisierten Elementardifferentiale von $(\breve{K})$ entspringen als Entwicklungskoeffizienten der mit negativem Vorzeichen versehenen und mit $\dfrac{dx}{d\tau}$ multiplizierten Elementarfunktion 1. Ordnung von (K) mit dem Argument z_t und Parameter x_τ nach dem Argument t.*

Gehen wir allgemein von Vert. I_{h+1}' — $h = 1, 2, \cdots$ — aus und bedenken wir, daß nach Entw.-S. I_{h+1}, 1 für eine Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ $\left(\overset{d}{x}_\tau = d + \tau\right)$

$$\left[\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_i^{(h+1)}}(z, \overset{d}{x_\tau})\frac{dx}{d\tau}\right]_{\tau^s} = \binom{h+s}{h} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h+1+s)}}(z, \mathfrak{d}_\delta)$$

und nach Abl. II_h

$$\left[\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{\delta i}^{(h+1)}}(\overset{d}{x_\tau}, z)}{d\tau}\right]_{\tau^s}$$

gleich der h^{ten} Ableitung einer Funktion von (K) ist, so folgt*)

Red. $\mathrm{I}_{h+1}(\tau^s)$: Reduktionstheorem 1. Art $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe für die Funktionen: *Sämtliche, zur Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarfunktionen der Ordnungen $h+1+s$ — $s=0, 1, 2, \cdots$ — lassen sich linear, homogen und mit konstanten Koeffizienten ausdrücken durch die τ überall endlichen Funktionen, die $\breve{\sigma}$ zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Elementarfunktionen der Ordnung $h+1$ und die $ns\cdot h$ zu sämtlichen Stellen $\mathfrak{a}$ gehörigen Elementarfunktionen der Ordnungen $1, 2, \cdots, h$ sowie durch die h^{te} Ableitung einer Funktion von (K).***)

Besonders einfach und bemerkenswert wird der Satz für $h=1$.

Red. $\mathrm{I}_{h+1}(t^r)$ oder das Reduktionstheorem 1. Art $(h+1)^{ter}$ Stufe für die Differentiale zu formulieren, das analog lautet, überlassen wir dem Leser. Speziell für $h=1$ lehrt uns der Satz bzw. seine Integralform: *Sämtliche, zur beliebigen (gewöhnlichen) Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarintegrale von (K)* $\displaystyle\int \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2+r)}}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau}\, d\tau$ — $r=0, 1, 2, \cdots$ — *lassen sich darstellen durch die $\breve{\sigma}$ überall endlichen Integrale, die τ zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Elementarintegrale* $\displaystyle\int \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}}(x, \mathfrak{u}_\nu)}{d\tau}\, d\tau$*, die ns zu sämtlichen $\mathfrak{a}_j$ gehörenden Elementarintegrale* $\displaystyle\int \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}}(x_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau}\, d\tau$ *und eine Funktion der Klasse.*

§ 18. Die Reduktionstheoreme 2. Art.

Suchen wir jetzt in Vert. II_1 den Koeffizienten von τ^s — $s=0, 1, 2, \cdots$ — an der gewöhnlichen Stelle $\mathfrak{d}_\delta$, so kommt:

*) Ich begnüge mich hier, das Theorem für eine gewöhnliche, von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stelle auszusprechen.

**) Daß hier wie sonst τ einmal als Zeichen für die Anzahl der linear unabhängigen überall endlichen Funktionen steht, das andere Mal für eine Ortsuniformisierende; ebenso daß s, das die Anzahl der Verzweigungspunkte $\mathfrak{a}$ bezeichnet, noch anders gebraucht wird, kann wohl zu keiner Verwechslung führen.

Reduktionstheorem $\mathrm{II}_1(\tau^s)$:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(s+1)}}(z,\mathfrak{d}_\delta) = -\left[\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{\delta i}^{(1)}}(\overset{d}{x}_\tau, z)\right]_{\tau^s} + \sum_{(\mathfrak{N})}\left[\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_\delta^{(1)}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{n}_\nu)\right]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z)$$

$$+\sum_{(\breve{\mathfrak{N}})}\left[\underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\varphi}_\delta^{(\breve{\mathfrak{n}})}}(\overset{d}{x}_\tau)\right]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}})$$

$$-\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1,\,\varepsilon_j\neq 0}^{n}\left[\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_\delta^{(1)}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j)\right]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j)$$

oder in Worten: Reduktionstheorem 2. Art 1. Stufe für die Funktionen: *Sämtliche, zur beliebigen (gewöhnlichen) Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarfunktionen von (K) lassen sich ausdrücken durch die τ überall endlichen Funktionen, die $\breve{\tau}$ zu $\breve{\mathfrak{N}}$ gehörigen Elementarfunktionen 1. Ordnung, die A_1 zu sämtlichen $\mathfrak{a}_j$ mit $\varepsilon_j \neq 0$ gehörigen Elementarfunktionen 1. Ordnung sowie durch die Entwicklungskoeffizienten von $\breve{E}^{(1)}(x, z)$ nach dem Argument τ.*

Hierbei ist

$$(55)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = ns = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_0 = \text{Anzahl der Stellen } \mathfrak{a}_j \text{ mit } \varepsilon_j = 0:\ \mathfrak{a}_j^{(0)}, \\ \mathsf{A}_1 = \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad \varepsilon_j = 1:\ \mathfrak{a}_j^{(1)}, \end{cases}$$

Red. $\mathrm{II}_1(t^r)$ gibt dasselbe für die $\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_k^{(r+1)}}(x, \mathfrak{b}_\beta)$.

Gehen wir jetzt zu Vert. II_2 und bedenken, daß $\breve{E}_{ki}^{(2)}(x, z) = \frac{d}{dz}\breve{E}_{ki}^{(1)}(x, z)$ ist. Wir wollen jetzt den Koeffizienten von τ^s für alle Stellen der Ebene untersuchen.

1. Sei $\mathfrak{d}_\delta \neq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\}$; dann folgt für $s = 0, 1, 2, \cdots$

$$(56)\qquad (s+1)\,\mathfrak{E}_i^{(2+s)}(z, \mathfrak{d}_\delta) = \left[\frac{d}{dz}\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{\delta i}^{(1)}}(\overset{d}{x}_\tau, z)\right]_{\tau^s}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{N})}\left[\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_\delta^{(2)}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{n}_\nu)\right]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) + \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})}\left[\underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\varphi}_\delta^{(\breve{\mathfrak{n}})}}(\overset{d}{x}_\tau)\right]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}})$$

$$-\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1,\,\varepsilon_j=0}^{n} -\alpha_j\left[\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}_\delta^{(1)}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j)\right]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j)$$

$$-\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1,\,\varepsilon_j=1}^{n}(-\alpha_j+1)\Big[\qquad\Big]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \mathfrak{a}_j) - \alpha_j\Big[\qquad\Big]_{\tau^s}\cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j).$$

Es können also für beliebiges $\mathfrak{d}_\delta$ alle Elementarfunktionen

$$\mathfrak{E}_i^{(2)}(z, \mathfrak{d}_\delta),\ \mathfrak{E}_i^{(3)}(z, \mathfrak{d}_\delta), \cdots$$

ausgedrückt werden durch die

$$(57)\quad \begin{cases} \tau \text{ zu } \mathfrak{N} \text{ gehörigen Funktionen } \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(0)}}(z, \mathfrak{n}_\nu) = \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) \\ \breve{\tau} \text{ „ } \breve{\mathfrak{N}} \text{ „ „ } \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}}) \\ \mathsf{A}_0 \text{ „ } \mathfrak{a}_j^{(0)} \text{ „ „ } \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j^{(0)}) \\ 2\mathsf{A}_1 \text{ „ } \mathfrak{a}_j^{(1)} \text{ „ „ } \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j^{(1)}) \text{ und } \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \mathfrak{a}_j^{(1)}), \end{cases}$$

sowie durch die Ableitung einer Funktion der Klasse.

2. Bei $\mathfrak{m}_\mu$ folgt dasselbe für $s = 0, 1, 2, \cdots$ oder für

$$\mathfrak{E}_i^{(2)}(z, \mathfrak{m}_\mu),\quad \mathfrak{E}_i^{(3)}(z, \mathfrak{m}_\mu), \cdots.$$

3. Bei $\mathfrak{n}_\nu$ ist die niedrigste vorkommende Potenz $\frac{1}{\tau^2}$ und zwar ist — wenn wir nur die Glieder mit negativen Potenzen hinsetzen —

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{\tau^2} \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) - \cdots \\ + \left[\mathfrak{E}_\nu^{(2)}(\overset{n}{x_\tau}, \mathfrak{n}_\nu)\right]_{\tau^2} \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) - \cdots = 0, \end{cases}$$

was sich gerade weghebt. Es folgt weiter für $s = 0, 1, 2, \cdots$ dasselbe für

$$\mathfrak{E}_i^{(2)}(z, \mathfrak{n}_\nu),\quad \mathfrak{E}_i^{(3)}(z, \mathfrak{n}_\nu), \cdots.$$

4[(0)]. Sei $\mathfrak{a}'_{j'}$ zunächst eine von den Stellen $\mathfrak{a}_j^{(0)}$; dann folgt (s. Ent.-S. I_2, 4. und (33), (35))

$$\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_{j'}}} \overset{-,\dot{\alpha}'}{E_{ij'}^{(2)}}(z, \overset{\alpha'}{x_\tau}) = \frac{1}{\tau}\left\{\begin{bmatrix} -\alpha'_{j'} \\ 1, 0 \end{bmatrix} \mathfrak{E}_i^{(1)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) + \begin{bmatrix} -\alpha'_{j'} \\ 1, 1 \end{bmatrix} \mathfrak{E}_i^{(2)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) \cdot \tau + \cdots\right\},$$

die eine negative Potenz $\frac{1}{\tau}$ hebt sich gegen das Folgende weg und zwar gegen den Term

$$+ \alpha'_{j'}\left[\mathfrak{E}_{j'}^{(1)}(\overset{\alpha'}{x_\tau}, \mathfrak{a}'_{j'})\right]_{\tau^{-1}} \cdot \mathfrak{E}_i^{(1)}(z, \mathfrak{a}'_{j'})$$

und es folgt für $s = 0, 1, 2 \cdots$

$$(58)\quad \begin{bmatrix} -\alpha'_{j'} \\ 1, s+1 \end{bmatrix}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} \mathfrak{E}_i^{(2+s)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) = \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_{j'}}} \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\overset{\overbrace{\dot{\alpha}',-}}{E_{j'i}^{(1)}}}(\overset{\alpha'}{x_\tau}, z)\right]_{\tau^s}$$

$$- \sum_{(\mathfrak{N})} \left[\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_{j'}}} \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\overset{\dot{\alpha}'}{\mathfrak{E}_{j'}}}(\overset{\alpha'}{x_\tau}, \mathfrak{n}_\nu)\right]_{\tau^s} \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) + \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})} \left[\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}'_{j'}}} \underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\overset{\dot{\alpha}'}{\varphi_{j'}^{(\breve{\mathfrak{n}})}}}(\overset{\alpha'}{x_\tau})\right]_{\tau^s} \cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}})$$

$$+ \sum_{(\mathfrak{A})} \{\quad\}.$$

4(1). Sei jetzt $\mathfrak{a}'_{j'}$ eine von den Stellen $\mathfrak{a}_j^{(1)}$; dann ist daselbst nach Ent.-S. I_2, 4. und (33), (35)

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}'_{j'}}}\overset{-,\breve{\alpha}'}{E}{}^{(2)}_{ij'}(z, \overset{\alpha'}{x_\tau}) = \frac{1}{\tau^2}\left\{\begin{bmatrix}-\alpha'_{j'}\\1,0\end{bmatrix}\mathfrak{E}_i^{(1)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) + \begin{bmatrix}-\alpha'_{j'}\\1,1\end{bmatrix}\mathfrak{E}_i^{(2)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) + \begin{bmatrix}-\alpha'_{j'}\\1,2\end{bmatrix}\mathfrak{E}_i^{(3)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) + \cdots\right\}.$$

Die beiden negativen Potenzen $\frac{1}{\tau^2}$ und $\frac{1}{\tau}$ heben sich gegen das Folgende weg und zwar gegen die Glieder

$$+\alpha'_{j'}\cdot\left[\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}'_{j'}}}\overset{\breve{\alpha}'}{\breve{\mathfrak{E}}}{}^{(2)}_{j'}(\overset{\alpha'}{x_\tau}, \mathfrak{a}'_{j'})\right]_{\tau^{-2}}\cdot\mathfrak{E}_i^{(1)}(z, \mathfrak{a}'_{j'})$$

und
$$-(-\alpha'_{j'}+1)\left[\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}'_{j'}}}\overset{\breve{\alpha}'}{\breve{\mathfrak{E}}}{}^{(1)}_{j'}(\overset{\alpha'}{x_\tau}, \mathfrak{a}'_{j'})\right]_{\tau^{-1}}\cdot\mathfrak{E}_i^{(2)}(z, \mathfrak{a}'_{j'}),$$

da
$$\begin{bmatrix}-\alpha'_{j'}\\1,0\end{bmatrix} = -\alpha'_{j'},\quad \begin{bmatrix}-\alpha'_{j'}\\1,1\end{bmatrix} = (-\alpha'_{j'}+1)$$

ist und es folgt für $s = 0, 1, 2, \cdots$

$$\begin{bmatrix}-\alpha'_{j'}\\1,s+2\end{bmatrix}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(3+s)}}(z, \mathfrak{a}'_{j'}) = \left[\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}'_{j'}}}\frac{d}{dz}\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\overset{\breve{\alpha}',-}{E}{}^{(1)}_{j',i}}(\overset{\alpha'}{x_\tau}, z)\right]_{\tau^s} - \sum_{(\mathfrak{N})} + \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})} + \sum_{(\mathfrak{A})}\{\quad\}. \tag{59}$$

5. Betrachten wir schließlich eine Stelle $\mathfrak{p}_{\infty j}$, so folgt aus Ent.-S. I_2, 5. für $s = 0, 1, 2, \cdots$

$$(2+s)\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1+s)}}(z, \mathfrak{p}_{\infty j}) = \left[\frac{d}{dz}\underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}{}^{(1)}_{ji}}(\overset{\infty}{x_\tau}, z)\right]_{\tau^{3+s}} - \sum_{(\mathfrak{N})}[\quad]_{\tau^{3+s}}\cdot\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n})}}(z) + \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})}[\quad]_{\tau^{3+s}}\cdot\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}}) + \sum_{(\mathfrak{A})}\{\quad\}. \tag{60}$$

Zusammenfassend können wir **Red. II$_2$(τ^s)**, d. h. das *Reduktionstheorem 2. Art 2. Stufe für die Funktionen von* (K) so aussprechen: *Abgesehen von* $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{d}_\delta)$, $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{n}_\nu)$ — $\mathfrak{d}_\delta \neq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\}$ — *lassen sich alle Elementarfunktionen von* (K) *durch die* $\tau + \breve{\tau} + \mathsf{A}_0 + 2\mathsf{A}_1$ *in* (57) *bezeichneten Funktionen sowie durch die Ableitung einer Funktion der Klasse darstellen.*

Speziell für eine *algebraische Klasse*, woselbst $\tau = \breve{\tau} = 1$ und mit $\varepsilon_{\mathfrak{z}}$ auch α_j gleich Null ist, gilt das Korollar:

Reduktionstheorem II$_2^*$ (τ^s): *Abgesehen von*

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{d}_\delta),\ \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{n}_\nu),\ \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j^{(0)})$$

lassen sich alle Elementarfunktionen mittels einer Konstanten, der Funktion $\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}})$, *den* $\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z, \mathfrak{a}_j^{(1)})$, $\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(2)}}(z, \mathfrak{a}_j^{(1)})$ *sowie der Ableitung einer Funktion darstellen.**)

Red. II$_2$ (t^r) gibt das Analoge für die Funktionen von $(\breve{K})$.

Die Aufstellung und Formulierung von II$_{h+1}$ (τ^s) und II$_{h+3}$ (t^r) überlassen wir der Kürze halber dem Leser. Hierin tritt die h^{te} Ableitung einer Funktion ein.

§ 19. Die Reduktionstheoreme 3. Art.

Suchen wir in Vert. III$_1$ den Koeffizienten von t^r — $r = 0, 1, 2, \cdots$ — an der gewöhnlichen Stelle $\mathfrak{d}_\delta$, so kommt:

Reduktionstheorem III$_1$ (t^r):

$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(r+1)}}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{dx} = -\left[\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\,\breve{\mathfrak{M}}}{F_{\delta k}^{(1)}}(\overset{d}{z}_t, x)}{dt}\right]_{t^r}$$

$$+\sum_{(\mathfrak{M})}\left[\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\,\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}_\delta^{(1)}}(\overset{d}{z}_t, \mathfrak{m}_\mu)}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x)}{dx}+\sum_{(\breve{\mathfrak{M}})}\left[\frac{d\underset{(\breve{\mathfrak{M}})}{\psi_\delta^{(\breve{\mathfrak{m}})}}(\overset{d}{z}_t)}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}}(x, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{dx}$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\,\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}_\delta^{(2)}}(\overset{d}{z}_t, \mathfrak{p}_{\infty j})}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}}(x, \mathfrak{p}_{\infty j})}{dx}+\left[\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\,\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}_\delta^{(1)}}(\overset{d}{z}_t, \mathfrak{p}_{\infty j})}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}}(x, \mathfrak{p}_{\infty j})}{dx}\right\}$$

oder in Worten Reduktionstheorem 3. Art 1. Stufe für die Differentiale: *Sämtliche zur beliebigen (gewöhnlichen) Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementardifferentiale von $(\breve{K})$ lassen sich ausdrücken durch die $\breve{\sigma}$ überall endlichen Differentiale, die σ zu $\breve{\mathfrak{M}}$ gehörigen Elementardifferentiale 1. Ordnung, die $2n$ zu $\mathfrak{p}_{\infty j}$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) gehörigen Elementardifferentiale 1. und 2. Ordnung, sowie durch die Entwicklungskoeffizienten von* $\dfrac{dF^{(1)}(z_t, x)}{dt}$ *nach dem Argument t.*

Analog ist Red. III$_1$ (τ^s).

*) $\mathfrak{N}$ besteht hierbei aus einer einzigen, beliebig zu wählenden Stelle; $\mathfrak{M}$ aus $\breve{\sigma} = p$ Stellen, für welche kein überall endliches Differential verschwindet und welche von $\{\mathfrak{A}\}$ und $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschieden sind.

Wir schreiten jetzt zu Vert. III_2, erinnern uns, daß

$$\frac{dF_{ik}^{(2)}(z,x)}{dz} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF_{ik}^{(1)}(z,x)}{dz}\right)$$

war und untersuchen den Koeffizienten von t^r für alle Stellen der Ebene.

1. Sei wieder $\mathfrak{d}_\delta \neq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\}$; dann folgt für $s = 0, 1, 2, \cdots$

$$(r+1)\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(2+r)}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dF_{\delta k\,\mathfrak{N},\breve{\mathfrak{M}}}^{(1)}(\overset{d}{z}_t, x)}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{d\tau}\right]_{t^r}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{M})}\left[\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{\delta\,\mathfrak{N},\breve{\mathfrak{M}}}^{(2)}(\overset{d}{z}_t, \mathfrak{m}_\mu)}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\breve{\psi}_{k\,\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{d\tau} + \sum_{(\breve{\mathfrak{M}})}\left[\frac{d\psi_{\delta\,\breve{\mathfrak{M}}}^{(\breve{\mathfrak{m}})}(\overset{d}{z}_t)}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(2)}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau}$$

$$+\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1;\ \varepsilon_j=0}^{a}\alpha_j\left[\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{\delta\,\mathfrak{N},\breve{\mathfrak{M}}}^{(1)}(\overset{d}{z}_t, \mathfrak{a}_j)}{dt}\right]_{t^r}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau}$$

Es können also für beliebiges $\mathfrak{d}_\delta$ alle Elementardifferentiale

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau}, \quad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(3)}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau}, \quad \cdots$$

ausgedrückt werden durch die

$$(61)\quad \begin{cases} \breve{\sigma} \text{ zu } \mathfrak{M} \text{ gehörigen Differentiale } \dfrac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(0)}(x_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau} = \dfrac{d\breve{\psi}_{k\,\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{d\tau} \\[2ex] \sigma \text{ ,, } \breve{\mathfrak{M}} \text{ ,, ,, } \dfrac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(2)}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau} \\[2ex] A_0 \text{ ,, } \mathfrak{a}_j^{(0)} \text{ ,, ,, } \dfrac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}_j^{(0)})}{d\tau} \end{cases}$$

sowie durch die mit $\frac{dx}{d\tau}$ multiplizierte

Ableitung einer Funktion der Klasse.

2. Bei $\mathfrak{n}_\nu$ folgt dasselbe für $r = 0, 1, 2, \cdots$ oder für die Differentiale

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}(x_\tau, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau}, \quad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(3)}(x_\tau, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau}, \quad \cdots$$

3. Bei $\mathfrak{m}_\mu$ hebt sich wieder die eine vorkommende negative Potenz $\frac{1}{t^2}$ (analog wie bei Funktionen unter 3.) weg und es folgt für $r = 0, 1, 2, \cdots$ dasselbe für die Differentiale

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}(x_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau}, \quad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(3)}(x_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau}, \quad \cdots$$

$4^{(0)}$. Sei $\mathfrak{a}'_{j'}$ zunächst ebenfalls wieder eine von den Stellen $\mathfrak{a}_j^{(0)}$; dann folgt (46)

$$(62) \quad \frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\overset{\smile,\,a'}{F}_{kj'}(x_\tau, \overset{a'}{z}_t)}{d\tau} = \frac{1}{t}\left\{\begin{bmatrix}\alpha'_{j'}\\ 1, 0\end{bmatrix}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}'_{j'})}{d\tau} + \cdots \begin{bmatrix}\alpha'_{j'}\\ 1, r\end{bmatrix}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(r+1)}(x_\tau, \mathfrak{a}'_{j'})}{d\tau} t^r + \cdots\right\}.$$

Die eine hier vorkommende negative Potenz $\frac{1}{t}$ hebt sich in Vert. III_2 gegen das Folgende weg und zwar gegen den Term

$$\alpha'_{j'} \cdot \left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\mathfrak{F}_{j'}^{(1)}(\overset{a'}{z}_t, \mathfrak{a}'_{j'})}{dt}\right]_{t^{-1}} \cdot \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}'_{j'})}{d\tau}$$

und es folgt für $r = 0, 1, 2, \cdots$

$$\begin{bmatrix}\alpha'_{j'}\\ 1, r+1\end{bmatrix} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(2+r)}(x_\tau, \mathfrak{a}'_{j'})}{d\tau} = \left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d}{dx}\left(\frac{d\overset{a',\,-}{F}{}^{(1)}_{j'k\,\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}(\overset{a'}{z}_t, x_\tau)}{dt}\right)\frac{dx}{d\tau}\right]_{t^r}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{M})}\left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\overset{a'}{\mathfrak{F}}{}_{j'}^{(2)}(\overset{a'}{z}_t, \mathfrak{m}_\mu)}{dt}\right]_{t^r} \cdot \frac{d\breve{\psi}_{k\,\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{d\tau} + \sum_{(\breve{\mathfrak{M}})}\left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\overset{a'}{\psi}{}_{j'}^{(\breve{\mathfrak{m}})}(\overset{a'}{z}_t)}{dt}\right]_{t^r} \cdot \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(2)}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_\mu)}{d\tau}$$

$$+\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1;\ \varepsilon_j=0}^{n} \alpha_j \left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\overset{a'}{\mathfrak{F}}{}_{j'}^{(1)}(\overset{a'}{z}_t, \mathfrak{a}_j)}{dt}\right]_{t^r} \cdot \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau}.$$

$4^{(1)}$. Sei jetzt $\mathfrak{a}'_{j'}$ eine von den Stellen $\mathfrak{a}_j^{(1)}$, also $\varepsilon'_{j'} = 1$; dann besteht daselbst wieder die Gleichung (62), während alle in Vert. III_2 auftretenden Differentiale von (K), z. B. $\frac{d\psi_i(z_t)}{dt}$ eine Entwicklung der Form haben*)

$$\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\overset{a'}{\psi}_{j'}(\overset{a'}{z}_t)}{dt} = \frac{1}{t^{\varepsilon'_{j'}}} \mathfrak{P}(t) = \frac{1}{t}\mathfrak{P}(t).$$

Setzen wir also

$$\left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}} \frac{d\overset{a'}{\psi}_{j'}(\overset{a'}{z}_t)}{dt}\right]_{t^r} = [\mathfrak{P}(t)]_{t^r}$$

und analog für die anderen, so folgt also für $r = 0, 1, 2, \cdots$

---

*) Man erinnere sich der Definition des Multiplums (5).

$$\begin{bmatrix}\alpha'_{j'}\\ 1,r\end{bmatrix}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1+r)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\mathfrak{a}'_{j'})}{d\tau}=\left[\frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}}\frac{d}{dx}\left(\frac{dF^{(1)}_{j'k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}\binom{\alpha',-}{z_t^{\alpha'},x_\tau}}{dt}\right)\frac{dx}{d\tau}\right]'_{tr}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{M})}[\quad]'_{tr}\cdot\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_{k\,\mathfrak{M}}(x_\tau)}{d\tau}+\sum_{(\breve{\mathfrak{M}})}[\quad]'_{tr}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(2)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\breve{\mathfrak{m}}_\mu)}{d\tau}$$

$$+\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1;\ \varepsilon_j=0}^{n}\alpha_j[\quad]'_{tr}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\mathfrak{a}_j)}{d\tau}.$$

5. Für $\mathfrak{p}_{\infty j}$ ist schließlich (48) $\left(z=\frac{1}{t}\right)$

$$\frac{dF^{(2)}_{ki}(x_\tau,z_t)}{d\tau}\frac{dz}{dt}=\sum_{\delta=1}^{\infty}\gamma\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\delta+1)}_{k}(x_\tau,\mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}\cdot t^{\delta-1},$$

also folgt für $r=0,1,2,\cdots$

$$(r+1)\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(2+r)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}=\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dF^{(1)}_{jk\,\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}(z_t^{\infty},x_\tau)}{dt}\right)\frac{dx}{d\tau}\right]_{tr}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{M})}[\quad]_{tr}\cdot\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_{k\,\mathfrak{M}}(x_\tau)}{d\tau}+\sum_{(\breve{\mathfrak{M}})}\qquad+\sum_{(\mathfrak{A})}\sum_{j=1;\ \varepsilon_j=0}^{n}$$

Zusammenfassend können wir also Red. III_2 (t^r), d. h. **das Reduktionstheorem 3. Art 2. Stufe für die Differentiale von** $(\breve{K})$ so aussprechen: *Abgesehen von*

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\mathfrak{d}_\delta)}{d\tau},\quad\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\mathfrak{m}_\mu)}{d\tau},\quad\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{k\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x_\tau,\mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}\ -\ \mathfrak{d}_\delta+\mathfrak{M},\mathfrak{N},\{\mathfrak{A}\},\{\mathfrak{P}_\infty\}\ -$$

lassen sich alle Elementardifferentiale von $(\breve{K})$ *durch die* $\breve{\sigma}+\sigma+\mathsf{A}_0$ *in* (61) *bezeichneten Differentiale sowie durch die* $\left(\textit{mit } \frac{dx}{d\tau} \textit{ multiplizierte}\right)$ *Ableitung einer Funktion von* $(\breve{K})$ *ausdrücken.*

Speziell für eine *algebraische Klasse**) $(\breve{K})=(K)$, woselbst $\breve{\sigma}=\sigma=p$ und mit ε_j auch α_j gleich Null ist, gilt das Korollar: Abgesehen von

Reduktionstheorem III_2*:

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x_\tau,\mathfrak{d}_\delta)}{d\tau},\quad\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x_\tau,\mathfrak{m}_\mu)}{d\tau},\quad\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x_\tau,\mathfrak{a}_j^{(0)})}{d\tau},\quad\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x,\mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}$$

---

*) Vgl. Hensel-Landsberg, a. a. O. 22. Vorlesung.

lassen sich alle Elementardifferentiale mit Hilfe der p überall endlichen, der p zu $\breve{\mathfrak{M}}$ gehörigen Elementardifferentiale 2. Ordnung und der Ableitung einer Funktion darstellen.

Analog lautet Red. $\mathrm{III}_2(\tau^s)$ für (K). Die Aufstellung und Formulierung von $\mathrm{III}'_{h+1}(t^r)$ bzw. $\mathrm{III}_{h+1}(\tau^s)$ überlassen wir wieder der Kürze halber dem Leser und bemerken nur, daß hier die h^{te} Ableitung einer Funktion eintritt.

VI. Abschnitt.

Die Reziprozitätstheoreme.

§ 20. Die Reziprozitätsgesetze 1. Art.

Wir untersuchen jetzt den Koeffizienten von $t^r\tau^s$ in den Vertauschungstheoremen und erhalten damit 3 Arten von Sätzen, die wir ihres eigenartigen Charakters wegen als Reziprozitätstheoreme bezeichnen.

Vert. I_1 lautete:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{ik}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}^{(1)}_{ki}}(x_\tau, z_t)}{d\tau}. \tag{63}$$

Sind $\mathfrak{b}_\beta$, $\mathfrak{d}_\delta$ zunächst zwei voneinander verschiedene, gewöhnliche Stellen, z_t bzw. x_τ ein Element mit dem Mittelpunkt b bzw. d, so folgt, wenn man die beiden Entwicklungssätze heranzieht, unmittelbar für $r, s = 0, 1, 2, \cdots$:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(s+1)}_\beta}(\overset{b}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^r} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(r+1)}_\delta}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{b}_\beta)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}.$$

Wir halten nun $\mathfrak{d}_\delta$ fest, nehmen statt $\mathfrak{b}_\beta$ aber auch der Reihe nach eine von den Stellen von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$.

Für $\mathfrak{m}_\mu$ ergibt sich für $r = -1, 0, 1, 2, \cdots$; $s = 0, 1, 2, \cdots$

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(s+1)}_\mu}(\overset{m}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^r} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(r+1)}_\delta}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}$$

und speziell für $r = -1$ (21)

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(s+1)}_\mu}(\overset{m}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^{-1}} = -\frac{d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}^{(m)}_\delta}(\overset{d}{x}_\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}.$$

Für $\mathfrak{n}_\nu$ und für $r = 1, 2, \cdots$; $s = 0, 1, 2, \cdots$ folgt

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(s+1)}_\nu}(\overset{m}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^r} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(r+1)}_\delta}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}.$$

Für $\mathfrak{a}_j$ haben wir statt von (63) auszugehen von der Gleichung

$$\frac{1}{t^{\alpha_j}} \overset{a,-}{\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E}}{}^{(1)}_{jk}(\overset{a}{z}_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = -\frac{1}{t^{\alpha_j}} \frac{d\overset{\smile,a}{\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{F}}{}^{(1)}_{kj}(x_\tau, \overset{a}{z}_\tau)}{d\tau}$$

und erhalten aus dem Entwicklungssatz I_1 4. für $r, s = 0, 1, 2, \cdots$

$$\frac{1}{t^{\alpha_j}} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\overset{a}{\mathfrak{E}}}{}^{(s+1)}_j(\overset{a}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^r} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}}{}^{(r+1)}_\delta(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}$$

für $\mathfrak{p}_{\infty j}$ und $r, s = 0, 1, 2, \cdots$ schließlich

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}}{}^{(s+1)}_j(\overset{\infty}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^r} = -\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}}{}^{(s+1)}_\delta(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{p}_{\infty j})}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}.$$

Nun können wir auch für $\mathfrak{d}_\delta$ der Reihe eine von den Stellen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\}$ nehmen und erhalten damit das **Reziprozitätstheorem 1. Art 1. Stufe:**

Reziprozitätstheorem I_1:

*Der r^{te} Entwicklungskoeffizient der zur Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarfunktion $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{b}_\beta$ ist entgegengesetzt gleich dem s^{ten} Entwicklungskoeffizienten des zu $\mathfrak{b}_\beta$ gehörigen Elementardifferentials $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{d}_\delta$. $\mathfrak{b}_\beta$ und $\mathfrak{d}_\delta$ sind dabei zwei beliebige, voneinander verschiedene Stellen; r, s beliebige daselbst überhaupt mögliche Zahlen.**)

Die Koeffizienten der festen Unendlichkeitsstellen $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ für die Elementarfunktionen bzw. Elementardifferentiale werden insbesondere durch folgendes Korollar gegeben:

Reziprozitätstheorem I_1^*:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}}{}^{(s+1)}_\mu(\overset{m}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\Big|_{t^{-1}} = -\frac{d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}}{}^{(\mathrm{m})}_\delta(\overset{d}{x}_\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^s}^{**)}, \qquad \mathfrak{d} \neq \mathfrak{a}$$

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}}{}^{(s+1)}_\mu(\overset{m}{z}_t, \mathfrak{a}_j)\Big|_{t^{-1}} = -\left[\tau^{\varepsilon_j}\cdot\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}_j}}\frac{d\underset{\mathfrak{M}}{\overset{\grave{a}}{\psi}}{}_j(\overset{a}{x}_\tau)}{d\tau}\right]_{\tau^s}.$$

$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}}{}^{(s+1)}_\nu(\overset{n}{x}_\tau, \mathfrak{b}_\beta)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^{-1}} = -\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}{}^{(\mathrm{n})}_\beta(\overset{b}{z}_t)\Big|_{t^r}^{**)}, \qquad \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$$

$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}}{}^{(r+1)}_\nu(\overset{n}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j)}{d\tau}\Bigg|_{\tau^{-1}} = \left[\frac{1}{t^{\alpha_j}}\underset{\mathfrak{N}}{\overset{a}{\varphi}}{}^{(\mathrm{n})}_j(\overset{a}{z}_t)\right]_{t^r}.$$

---

*) Für die Stellen $\mathfrak{a}_j$ ist das *sinngemäß* zu verstehen. S. I_1^*.

**) Die Gleichungen gelten auch noch, wenn $\mathfrak{d}_\delta$ mit $\mathfrak{m}_\mu$ bzw. $\mathfrak{b}_\beta$ mit $\mathfrak{n}_\nu$ zusammenfällt, wie aus dem Residuensatz (64), (68) direkt gefolgert werden kann.

Analog folgen aus I_{h+1} $(h = 1, 2, \cdots)$ die *Reziprozitätstheoreme 1. Art höherer Stufe*, deren Aufstellung wir der Kürze halber dem Leser überlassen.

§ 21. Die Reziprozitätsgesetze 2. und 3. Art.

Indem man in II_{h+1} den Koeffizienten von $t^r\tau^s$ aufsucht, gelangt man zu Sätzen, welche den Zusammenhang geben zwischen den Entwicklungskoeffizienten der zu $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementarfunktionen von (K) an der Stelle $\mathfrak{b}_\beta$ und denjenigen der zu $\mathfrak{b}_\beta$ gehörigen Elementarfunktionen von $(\breve{K})$ an der Stelle $\mathfrak{d}_\delta$.

Ich beschränke mich darauf, Rez. II_1 anzugeben unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{b}_\beta$, $\mathfrak{d}_\delta$ zwei voneinander und von $\mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{N}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedene Stellen sind.

Reziprozitätstheorem II_1:

$$\left.\mathfrak{E}^{(s+1)}_{\beta\,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(\overset{b}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)\right|_{t^r} + \left.\breve{\mathfrak{E}}^{(r+1)}_{\delta\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{b}_\beta)\right|_{\tau^s}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{N})} \left.\varphi^{(\mathfrak{n})}_{\beta\,\mathfrak{N}}(\overset{b}{z}_t)\right|_{t^r} \cdot \left.\breve{\mathfrak{E}}^{(1)}_{\delta\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{n}_\nu)\right|_{\tau^s} - \sum_{(\breve{\mathfrak{N}})} \left.\mathfrak{E}^{(1)}_{\beta\,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(\overset{b}{z}_t, \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}})\right|_{t^r} \cdot \left.\breve{\varphi}^{(\breve{\mathfrak{n}})}_{\delta\,\breve{\mathfrak{N}}}(\overset{d}{x}_\tau)\right|_{\tau^s}$$

$$-\sum_{(\mathfrak{A})} \sum_{j=1;\ \varepsilon_j \neq 0}^{n} \left.\mathfrak{E}^{(1)}_{\beta\,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(\overset{b}{z}_t, \mathfrak{a}_j)\right|_{t^r} \cdot \left.\breve{\mathfrak{E}}^{(1)}_{\delta\,\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{a}_j)\right|_{\tau^s} = 0.$$

Indem man schließlich in III_{h+1} den Koeffizienten von $t^r\tau^s$ bildet, gelangt man zu Sätzen, welche den Zusammenhang geben zwischen den Entwicklungskoeffizienten der zu $\mathfrak{b}_\beta$ gehörigen Elementardifferentiale von $(\breve{K})$ an der Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ und denjenigen der zu $\mathfrak{d}_\delta$ gehörigen Elementardifferentiale von (K) an der Stelle $\mathfrak{b}_\beta$. Ich beschränke mich auch hier darauf, das *Reziprozitätsgesetz 3. Art 1. Stufe* anzugeben, unter derselben Voraussetzung über $\mathfrak{b}_\beta$ und $\mathfrak{d}_\delta$:

Reziprozitätsgesetz III_1:

$$\left.\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(r+1)}_{\delta\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{b}_\beta)}{d\tau}\right|_{\tau^s} + \left.\frac{d\mathfrak{F}^{(s+1)}_{\beta\,\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}(\overset{b}{z}_t, \mathfrak{d}_\delta)}{dt}\right|_{t^r}$$

$$-\sum_{(\breve{\mathfrak{M}})} \left.\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{\delta\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(\overset{d}{x}_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau}\right|_{\tau^s} \cdot \left.\frac{d\psi^{(\breve{\mathfrak{m}})}_{\beta\,\breve{\mathfrak{M}}}(\overset{b}{z}_t)}{dt}\right|_{t^r} - \sum_{(\mathfrak{M})} \left.\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_{\delta\,\mathfrak{M}}(\overset{d}{x}_\tau)}{d\tau}\right|_{\tau^s} \cdot \left.\frac{d\mathfrak{F}^{(1)}_{\beta\,\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}(\overset{b}{z}_t, \mathfrak{m}_\mu)}{dt}\right|_{t^r}$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left.\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_{\delta\,\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(\overset{d}{x}_\tau, \mathfrak{p}_{\infty_j})}{d\tau}\right|_{\tau^s} \cdot \left.\frac{d\mathfrak{F}^{(2)}_{\beta\,\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}(\overset{b}{z}_t, \mathfrak{p}_{\infty_j})}{dt}\right|_{t^r} + \left.\phantom{\frac{d}{d\tau}}\right|_{\tau^s} \cdot \left.\phantom{\frac{d}{dt}}\right|_{t^r} \right\} = 0.$$

Mit Rez. I_{h+1}, II_{h+1}, III_{h+1} sind alle Zusammenhänge zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Elementarfunktionen und -Differentiale von (K) und $(\breve{K})$ bekannt.

VII. Abschnitt.

Die allgemeine Reduktion der Funktionen und Differentiale.

§ 22. Die Partialbruchdarstellung eines beliebigen Differentials von $(\breve{K})$.

Es sei $\frac{d\breve{G}_j(\zeta_t)}{dt} = \breve{g}_j(\zeta)\frac{d\zeta}{dt}$ ein beliebiges Differential der Klasse $(\breve{K})$. Seine Unendlichkeitsstellen samt den zugehörigen Entwicklungen seien die folgenden:

1. Eine gewisse Anzahl gewöhnlicher, d. h. von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{P}_\infty\}$ verschiedener Stellen $\mathfrak{d}_\delta$:

$$\overset{d}{\zeta}_t = d + t : \frac{d\breve{G}_\delta(\overset{d}{\zeta}_t)}{dt} = \frac{D^{(d_\delta)}_{A_{d_\delta}}}{t^{A_{d_\delta}}} + \cdots + \frac{D^{(d_\delta)}_1}{t} + D^{(d_\delta)}_0 + \cdots.$$

2. Gewisse von den Stellen von $\mathfrak{M}$; setze ich $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cdot \mathfrak{M}''$, so mögen bei $\mathfrak{M}'$ Pole gelegen sein, bei $\mathfrak{M}''$ nicht:

$$\overset{m'}{\zeta}_t = m' + t : \frac{d\breve{G}_{\mu'}(\overset{m'}{\zeta}_t)}{dt} = \frac{D^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}_{A_{\mathfrak{m}'_{\mu'}}}}{t^{A_{\mathfrak{m}'_{\mu'}}}} + \cdots + \frac{D^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}_1}{t} + D^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}_0 + \cdots.$$

3. Gewisse von den Stellen von $\mathfrak{N}$; setze ich $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{N}''$, so mögen wieder bei $\mathfrak{N}'$ Pole gelegen sein, bei $\mathfrak{N}''$ nicht:

$$\overset{n'}{\zeta}_t = n' + t : \frac{d\breve{G}_{\nu'}(\overset{n'}{\zeta}_t)}{dt} = \frac{D^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})}_{A_{\mathfrak{n}'_{\nu'}}}}{t^{A_{\mathfrak{n}'_{\nu'}}}} + \cdots + \frac{D^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})}_0}{t} + D^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})}_0 + \cdots.$$

4. Gewisse von den Stellen von $\{\mathfrak{A}\}$; und zwar, wenn die Gesamtheit der ns Stellen $(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ ist, mögen bei den in $\mathfrak{A}'$ enthaltenen Stellen $\mathfrak{a}'_{j'}$ Pole liegen, bei $\mathfrak{A}''$ nicht:

$$\overset{a'}{\zeta}_t = a' + t : \frac{1}{t^{\alpha'_{j'}}}\frac{d\breve{G}_{j'}(\overset{a'}{\zeta}_t)}{dt} = \frac{1}{t^{\varepsilon'_{j'}}}\left\{\frac{D^{(a'_{j'})}_{A_{a'_{j'}}}}{t^{A_{a'_{j'}}}} + \cdots + \frac{D^{(a'_{j'})}_1}{t} + D^{(a'_{j'})}_0 + \cdots\right\}.$$

5. Gewisse von den n Stellen $\mathfrak{p}_{\infty_j}$, nämlich $\mathfrak{p}_{\infty_{j'}}$:

$$\overset{\infty}{\zeta}_t = \frac{1}{t} : \frac{d\breve{G}_{j'}(\overset{\infty}{\zeta}_t)}{dt} = \frac{D^{(\infty_{j'})}_{A_{\infty_{j'}}}}{t^{A_{\infty_{j'}}}} + \cdots + \frac{D^{(\infty_{j'})}_1}{t} + D^{(\infty_{j'})}_0 + \cdots.$$

Hiermit ist die denkbar allgemeinste Annahme gemacht. Nach dem „*Residuensatz für die Differentiale*" genügen die Koeffizienten D τ linearen Relationen.*) Es ist nämlich, wenn $f_i(\zeta)$ eine beliebige Funktion von (K) ist

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\zeta)\cdot\breve{g}_j(\zeta)\frac{d\zeta}{dt}=\sum_{j=1}^{n} \overset{a}{f_j}(\zeta)\cdot\overset{\mathring{a}}{\breve{g}_j}(\zeta)\frac{d\zeta}{dt}$$

ein rationales Differential und daher seine Residuumsumme gleich Null. Wählt man insbesondere für f die τ überall endlichen Funktionen $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_j^{(\mathfrak{n})}}(\zeta)$, so gibt das die τ Relationen

$$\sum\sum_{j=1}^{n}\left[\underset{\mathfrak{N}}{\varphi_j^{(\mathfrak{n})}}(\zeta_t)\cdot\breve{g}_j(\zeta_t)\frac{d\zeta_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=0, \tag{64}$$

wo die erste Summe über alle Unendlichkeitsstellen von $\frac{d\breve{G}}{dt}$ zu erstrecken ist. Wählt man für f_j dagegen $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{jk}^{(1)}}(\zeta_t, x)$, so ist aus dem gleichen Grunde

$$\sum\sum_{j=1}^{n}\left[\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{jk}^{(1)}}(\zeta_t, x)\cdot\breve{g}_j(\zeta_t)\frac{d\zeta_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=0. \tag{65}$$

Diese Gleichung liefert in expliziter Form mit einem Schlage die Partialbruchzerlegung von $\breve{g}_k(x)$ und damit $\breve{g}_k(x)\frac{dx}{d\tau}$ mittels der Elementardifferentiale von $(\breve{K})$.

Das soll zunächst gezeigt werden; wir untersuchen der Reihe nach die Stellen, wo $[\quad]_{t^{-1}} \neq 0$ ausfallen kann.

a) Für $\overset{x}{\zeta_t} = x + t$ und $j = k$ ist, wenn wir zunächst unter x_k eine gewöhnliche, von allen τ_j verschiedene Stelle verstehen

$$E_{kk}^{(1)}(\overset{x}{\zeta_t}, x)=\frac{1}{t}+\mathfrak{P}(t),$$

$$\breve{g}_k(\zeta_t)=\breve{g}_k(x)+\left.\frac{d\breve{g}_k(\zeta_t)}{d\zeta}\right|_{t=0}\cdot t+\cdots,$$

also $[\quad]_{t^{-1}}=\breve{g}_k(x)$.

b) für $\mathfrak{d}_\delta$ ist

$$E_{\delta k}^{(1)}(\overset{d}{\zeta_t}, x)=-\frac{d\breve{F}_{k\delta}^{(1)}(x, \overset{d}{\zeta_t})}{dx}=-\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\gamma+1)}(x,\mathfrak{d}_\delta)}{dx}t^\gamma,$$

also nach 1.

$$[\;\cdot\;]_{t^{-1}}=-D_1^{(d_\delta)}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x,\mathfrak{d}_\delta)}{dx}-\sum_{\lambda=2}^{A_{d_\delta}}D_\lambda^{(d_\delta)}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x,\mathfrak{d}_\delta)}{dx}.$$

---

*) S. „III", § 5.

c) für $\mathfrak{m}_\mu$ ist allgemein

$$\overset{m}{E}{}^{(1)}_{\mu k}(\zeta_t, x) = -\frac{d\breve{F}^{(1)}_{k\mu}(x, \overset{m}{\zeta_t})}{dx} = -\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_k(x)}{dx}\cdot\frac{1}{t} + \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{m}_\mu)}{dx}\cdot t^\gamma,$$

also für $\mathfrak{m}''_{\mu''}$, wenn daselbst

$$\breve{g}_{\mu''}(\overset{m''}{\zeta_t}) = \breve{g}_{\mu''}(\mathfrak{m}'') + \frac{d\breve{g}}{d\zeta}_{t=0}\cdot t + \cdots = D_0^{(\mathfrak{m}''_{\mu''})} + \cdots$$

gesetzt wird $\qquad \Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = -D_0^{(\mathfrak{m}''_{\mu''})}\cdot\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m}'')}_k(x)}{dx}; \qquad$ für $\mathfrak{m}'_{\mu'}$ dagegen

$$\Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = -D_0^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}\cdot\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m}')}(x)}{dx} - D_1^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x, \mathfrak{m}'_{\mu'})}{dx} - \sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{m}'_{\mu'}}} D_\lambda^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\lambda)}_k(x, \mathfrak{m}'_{\mu'})}{dx},$$

also für alle Stellen $\mathfrak{m}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ zusammengenommen:

$$\sum_{(\mathfrak{M})}\Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = -\sum_{(\mathfrak{M})} D_0^{(\mathfrak{m}_\mu)}\cdot\frac{d\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_k(x)}{dx} - \sum_{(\mathfrak{M}')} D_1^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x, \mathfrak{m}'_{\mu'})}{dx}$$
$$- \sum_{(\mathfrak{M}')}\sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{m}'_{\mu'}}} D_\lambda^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\lambda)}_k(x, \mathfrak{m}'_{\mu'})}{dx},$$

d) für $\mathfrak{n}_\nu$ ist allgemein

$$\overset{n'}{E}{}^{(1)}_{\nu' k}(\zeta_t, x) = -\frac{d\breve{F}^{(1)}_{k\nu'}(x, \overset{n'}{\zeta_t})}{dx} = -\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{n}_\nu)}{dx}\, t^\gamma,$$

also bei $\mathfrak{n}''_{\nu''}$: $\qquad \Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = 0.$

bei $\mathfrak{n}'_{\nu'}$: $\qquad \Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = -D_1^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})}\cdot 0 - \sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{n}'_{\nu'}}} D_\lambda^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})}\cdot\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\lambda)}_k(x, \mathfrak{n}'_{\nu'})}{dx},$

e) bei $\mathfrak{a}_j$ ist allgemein

$$\frac{1}{t^{\alpha_j}}\overset{a,-}{E}{}^{(1)}_{jk}(\overset{a}{\zeta_t}, x) = -\frac{1}{t^{\alpha_j}}\frac{d\overset{-,a}{\breve{F}}{}^{(1)}_{kj}(x, \overset{a}{\zeta_t})}{dx} = -\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_k(x, \mathfrak{a}_j)}{dx}\, t^\gamma,$$

also für $\mathfrak{a}'_{j'}$: $\qquad \overset{a,-}{E}{}^{(1)}_{j'k}(\overset{a'}{\zeta_t}, x) = -t^{\alpha'_{j'}}\sum_{\gamma=0}^{\infty},$

$$\frac{d\overset{\breve{a}'}{G}_{j'}(\overset{a'}{\zeta_t})}{dt} = t^{-\alpha'_{j'}}\Big\{\quad\Big\}, \qquad \text{da } \breve{\alpha} = -\alpha + \varepsilon \text{ ist;}$$

mithin $\qquad \Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = -D_1^{(\mathfrak{a}'_{j'})}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k(x, \mathfrak{a}'_{j'})}{dx} - \sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{a}'_{j'}}} D_\lambda^{(\mathfrak{a}'_{j'})}\frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\lambda)}_k(x, \mathfrak{a}'_{j'})}{dx}.$

f) bei $\mathfrak{p}_{\infty j}$

$$E_{jk}^{(1)}(\overset{\infty}{\zeta}_t, x) = -\frac{d\overset{\infty}{F}{}_{kj}^{(1)}(x, \overset{\infty}{\zeta}_t)}{dx} = -\sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\gamma+1)}(x, \mathfrak{p}_{\infty j})}{dx} t^\gamma,$$

also für $\mathfrak{p}_{\infty j'}$

$$[\quad]_{t^{-1}} = -D_1^{(\infty_{j'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{p}_{\infty j'})}{dx} - \sum_{\lambda=2}^{A_{\infty j'}} D_\lambda^{(\infty_{j'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x, \mathfrak{p}_{\infty j'})}{dx}.$$

Wenn wir alles zusammenfassen, erhalten wir also die

Partialbruchdarstellung:

$$(66)\quad \breve{g}_k(x) = \sum_{(\mathfrak{D})} D_1^{(d_\delta)} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{d}_\delta)}{dx} + \sum_{(\mathfrak{D})} \sum_{\lambda=2}^{A_{d_\delta}} D_\lambda^{(d_\delta)} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x, \mathfrak{d}_\delta)}{dx}$$

$$+ \sum_{(\mathfrak{M})} D_0^{(\mathfrak{m}_\mu)} \frac{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(x)}{dx} + \sum_{(\mathfrak{M}')} D_1^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{m}'_{\mu'})}{dx} + \sum_{(\mathfrak{M}')} \sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{m}'_{\mu'}}} D_\lambda^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x, \mathfrak{m}'_{\mu'})}{dx}$$

$$+ \sum_{(\mathfrak{N}')} \sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{n}'_{\nu'}}} D_\lambda^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x, \mathfrak{n}'_{\nu'})}{dx}$$

$$+ \sum_{(\mathfrak{A}')} D_1^{(a'_{j'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{a}'_{j'})}{dx} + \sum_{(\mathfrak{A}')} \sum_{\lambda=2}^{A_{a'_{j'}}} D_\lambda^{(a'_{j'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x, \mathfrak{a}'_{j'})}{dx}$$

$$+ \sum_{(\mathfrak{p}_{\infty j'})} D_1^{(\infty_{j'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{p}_{\infty j'})}{dx} + \sum_{(\mathfrak{p}_{\infty j'})} \sum_{\lambda=2}^{A_{\infty j'}} D_\lambda^{(\infty_{j'})} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x, \mathfrak{p}_{\infty j'})}{dx}$$

oder kürzer, wenn wir $\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x, \mathfrak{n}'_{\nu'})}{dx} = 0$ setzen:

$$(67)\quad \frac{d\breve{G}_k(x)}{dx} \frac{dx}{d\tau} = \sum_{(\mathfrak{M})} D_0^{(\mathfrak{m}_\mu)} \frac{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{d\tau} + \sum D_1^{(\mathfrak{p}_\pi)} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{p}_\pi)}{d\tau}$$

$$+ \sum \sum_{\lambda=2}^{A_{\mathfrak{p}_\pi}} D_\lambda^{(\mathfrak{p}_\pi)} \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(\lambda)}(x_\tau, \mathfrak{p}_\pi)}{d\tau},$$

wo die $\sum$ über alle Unendlichkeitsstellen $\mathfrak{p}_\pi$ von $\frac{d\breve{G}_k(x)}{d\tau}$ zu erstrecken ist. Aus der ausführlichen Gestalt (66) erkennt man, daß man in der Tat die gesuchte Partialbruchdarstellung vor sich hat; denn die einzelnen Zeilen stellen gerade die in 1. bis 5. gegebene Entwicklung dar, wenn man an die Normierung der $\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k}{d\tau}$ denkt ((17)—(23)). Nur daß für die Stellen von $\mathfrak{N}$ auch der richtige Koeffizient D_1 kommt, bleibt zu überlegen; das folgt aber aus dem Residuumsatz (64). Nimmt man hierin ein $\varphi_j^{(\mathfrak{n}'')}$, so folgt mit Hilfe von Rez. I_1^* gerade, daß für $\mathfrak{n}''_{\nu''}$ in (66) $\Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = 0$ wird, nimmt man dagegen ein $\varphi_j^{(\mathfrak{n}')}$, so folgt ebenso, daß für $\mathfrak{n}'_{\nu'}$ in (66) $\Big[\quad\Big]_{t^{-1}} = D_1^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})}$ wird, wie es sein soll.

§ 23. Die Reduktion eines beliebigen Differentials.

Indem man auf die in (66) auftretenden Elementardifferentiale die Reduktionstheoreme des V. Abschnittes in dieser oder jener Weise zur Anwendung bringt, kann das Differential $\frac{d\breve{G}_k(x_\tau)}{d\tau}$ auf die mannigfachste Weise „reduziert“ werden. Wir wollen insbesondere auf alle in (67) auftretenden Elementardifferentiale gleichzeitig Red. III_2 zur Anwendung bringen. Dann wird aus $\sum\sum\limits_{\lambda=2}^{\Delta_{\mathfrak{p}_\pi}}$ ein lineares Aggregat von

$$\frac{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau}, \quad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}_j^{(0)})}{d\tau}$$

und der Ableitung einer Funktion. Wir haben demnach den **allgemeinen Reduktionssatz für die Differentiale:** *Alle Differentiale von* $(\breve{K})$ *lassen sich reduzieren auf folgende Elementardifferentiale:*

$$\text{die } \breve{\sigma} \text{ überall endlichen Differentiale } \frac{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(x_\tau)}{\mathfrak{M} \; d\tau},$$

$$\text{die Differentiale 1. Ordnung } \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{d}_\delta)}{d\tau}, \qquad \mathfrak{d}_\delta \neq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{P}_\infty\}$$

$$(68) \qquad \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{m}_\mu)}{d\tau}$$

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{a}_j^{(0)})}{d\tau}, \qquad \varepsilon_j^{(0)} = 0,$$

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}(x_\tau, \mathfrak{p}_{\infty_j})}{d\tau},$$

$$\text{die } \sigma \text{ Differentiale 2. Ordnung } \frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau}$$

und die mit $\frac{dx}{d\tau}$ multiplizierte Ableitung einer Funktion der Klasse $(\breve{K})$.

Die Integralform des Satzes lehrt uns, was durch die Integrale *Neues* zu den Funktionen der Klasse hinzutritt: nämlich nur die den Differentialen (68) entsprechenden Integrale.

Spezieller Reduktionssatz für die Differentiale: *Alle Differentiale von* $(\breve{K})$, *für welche*

$$D_1^{(d_\delta)} = D_1^{(\mathfrak{m}'_{\mu'})} = D_1^{(\mathfrak{n}'_{\nu'})} = D_1^{(\infty_{j'})} = 0$$

ist, d. h. in deren Integralen — außer eventuell bei $(\mathfrak{A})$ *— keine Logarithmen vorkommen, lassen sich reduzieren auf die*

$\breve{\sigma}$ überall endlichen Differentiale $\dfrac{d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x_\tau)}{d\tau}$,

σ Differentiale 2. Ordnung $\dfrac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau}$,

A_0 Differentiale 1. Ordnung $\dfrac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(1)}}(x_\tau, \mathfrak{a}_j^{(0)})}{d\tau}$, $\alpha_j^{(0)} = 0$ oder $= i\alpha_j''$.

Zusatz 1: Ist $(\breve{K})$ speziell eine solche Klasse, daß für jedes $\mathfrak{a}$ und jedes j entweder $\alpha_j = 0$ oder $\alpha_j = \alpha_j' + i\alpha_j''$ mit $\alpha_j' \neq 0$ ist [d. h. kein rein imaginäres $\alpha_j = i\alpha_j''$ vorkommt], dann lassen sich alle logarithmenfreien Integrale $\left(\int \dfrac{d\,\breve{G}_k(x_\tau)}{d\tau} d\tau,\ \int \dfrac{d\,\overset{\breve{a}}{\breve{G}_k}(\overset{a}{x_\tau})}{d\tau} d\tau\right)$ ausdrücken durch die

$\breve{\sigma}$ überall endlichen Integrale $\displaystyle\int \frac{d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}}(x_\tau)}{d\tau} d\tau$,

σ Integrale $\displaystyle\int \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(2)}}(x_\tau, \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}})}{d\tau} d\tau$

und eine Funktion der Klasse.

Zusatz 2: Ist $(\breve{K})$ eine *algebraische Klasse**), so wird $\sigma = \breve{\sigma} = p$ und es lassen sich alle logarithmenfreien Integrale ausdrücken durch die $2p$ „Fundamentalintegrale" und eine algebraische Funktion.

Zusatz 3: $\breve{\mathfrak{M}} = \prod\limits_1^{\sigma} \breve{\mathfrak{m}}_{\breve{\mu}}$ ist hierbei ein Divisor von der Art, daß — außer den eventuell vorhandenen überall endlichen Funktionen — keine Funktion von $(\breve{K})$ existiert, welche Multiplum von $\breve{\mathfrak{M}}^{-1}$ ist.

---

*) S. Weierstraß, a. a. O. S. 264; Hensel-Landsberg, a. a. O. 22. Vorlesung; Brill-Noether, a. a. O. S. 428.

§ 24. Partialbruchdarstellung und Reduktion einer beliebigen Funktion von (K).

Ist $f_j(\xi_\tau)$ eine beliebige Funktion von (K) mit Polen und Entwicklungen analog wie 1., $\cdots$, 5., so genügen nach dem *Residuensatz für die Funktionen**) die Koeffizienten den $\breve{\sigma}$ Relationen

$$(69) \qquad \sum \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d\breve{\psi}_j^{(\mathfrak{m})}(\xi_\tau)}{d\tau} \cdot f_j(\xi_\tau) \right]_{\tau^{-1}} = 0,$$

wo sich die $\sum$ über alle Pole von f_j erstreckt; setzt man jetzt

$$(70) \qquad \sum \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d\breve{F}_{ji}^{(1)}(\xi_\tau, z)_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}}{d\tau} \cdot f_j(\xi_\tau) \right]_{\tau^{-1}} = 0,$$

so erhält man mit einem Schlag die Partialbruchdarstellung von $f_i(z)$ mittels der Elementarfunktionen von (K) — analog zu (66). Wendet man auf diese die Reduktionstheoreme des V. Abschnittes in der einen oder andern Weise an, so kann man $f_i(z)$ wieder auf die mannigfachste Weise reduzieren. Insbesondere ergibt die Anwendung von Red. II_2 einen dem bei den Differentialen analogen **allgemeinen und speziellen Reduktionssatz für die Funktionen von (K).**

Schlußbemerkung.

Obwohl das Vorstehende nur für Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme *in der Ebene* gilt, so gestatten die darin entwickelten Methoden doch die Ausdehnung auf den Fall, daß nicht die Ebene, sondern eine beliebige geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht p vorliegt. Insbesondere ordnen sich dann für $n = 1$ auch die Resultate ein — soweit sie arithmetischer Natur sind (d. h. nicht Integralperioden betreffen) —, welche Prym-Rost in dem Werk: „Die Prymschen Funktionen 1. Ordnung“, Leipzig 1911, im 2. Teil gegeben haben.

Berlin, 24. November 1917.

---

*) S. „III“, § 5