

## Über die Definition instantaner Elemente, nebst Tafeln für (91) Aegina. Von *M. Brendel*.

Die Frage, ob die oskulierenden Elemente das geeignetste Mittel sind, um die Bewegung eines Planeten darzustellen, hat sich gewiß schon mancher Rechner aufgeworfen; bei der Berechnung spezieller Störungen wird man allerdings in erster Linie auf die Anwendung solcher Elemente angewiesen sein, während man bei der Berechnung allgemeiner Störungen wohl ziemlich ohne Vorurteil der Verwendung von Koordinaten- oder Elementenstörungen gegenübersteht. Viele Rechner werden aber zu der Ansicht gekommen sein, daß von der Gesamtheit der Störungsglieder einige zweckmäßiger als Störungen der Elemente, andere wieder als solche der Koordinaten aufgefaßt werden können, und daß die Entscheidung hierüber nach der Form der Glieder, speziell also nach ihrer Periode, zu treffen sein würde.

Diese Gesichtspunkte haben mich veranlaßt, eine neue Art von Bahnelementen zu benutzen, die ich »instantane« genannt habe und die mit den oskulierenden nur die eine Eigenschaft gemeinsam haben, daß sie den Ort des Planeten darstellen, nicht aber die zweite, auch die Geschwindigkeiten darzustellen. Da es beliebig viel solcher Elementensysteme gibt, so wähle ich die übrigen Bedingungen so, daß man sie in möglichst einfacher Form für einen längeren Zeitraum tabulieren kann. Es werden nämlich die verschiedenen Störungsglieder je nach ihrer Periode auf die verschiedenen Elemente verteilt und diese Verteilung wird eine verschiedene sein, je nach dem Typus, dem der behandelte Planet angehört, also je nach seiner mittleren Bewegung, da es von der letzteren GröÙe bekanntlich abhängt, von welcher Periode die größten Störungsglieder sind. In zweiter Linie kann die Gruppierung der Störungsglieder nach den Elementen auch von der GröÙe der Exzentrizität und der Neigung abhängig gemacht werden.

In meiner Theorie der kleinen Planeten<sup>1)</sup> habe ich die Störungen zunächst mit Hilfe der Gyldénschen Koordinaten ermittelt, wobei die Bewegung des Planeten in seiner oskulierenden Bahnebene durch folgende Gleichungen definiert ist:

$$\begin{aligned} L &= n(t - t_0) + A \\ M &= L - II - W & v &= v + II \\ \varepsilon - \eta \sin \varepsilon &= M & r &= \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \eta \cos v + R} \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 - \eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Analogie dieser Formeln mit denen der elliptischen Bewegung ist einleuchtend. Die Konstanten  $n$ ,  $A$  und  $a$  entsprechen der mittleren Bewegung, der mittleren (ungestörten) Länge in der Nullepoche und der großen Halbachse;  $\eta$  und  $II$  entsprechen der Exzentrizität und der Perihellänge, sind aber nicht konstant, sondern enthalten bereits die sogenannten

sekularen Störungen, und zwar nach Belieben entweder in sekularer oder in periodischer Form.  $L$  entspricht der mittleren ungestörten Länge, während an die mittlere Anomalie  $M$  bereits die Störungen (die Funktion  $W$ ) angebracht sind.  $\varepsilon$  ist analog der exzentrischen und  $v$  der wahren Anomalie, während  $v$  die Länge in der Bahn, gezählt von einem festen Punkte, bedeutet.  $R$  enthält die Störungen des Radiusvektors.

Man kann Tafeln für die Gyldénschen Koordinaten entwerfen, aus welchen  $L$ ,  $\eta$  und  $II$  direkt entnommen und  $R$  und  $W$ , nach Entnahme einiger tabulierter HilfsgröÙen, sehr schnell berechnet werden können. Diese Tafeln lassen sich leicht für einen Zeitraum von 100 Jahren aufstellen, und man kann aus ihnen in sehr kurzer Zeit den Ort des Planeten für einen beliebigen Zeitpunkt finden. Will man eine Ephemeride berechnen, die möglichst scharf sein soll, so wird man allerdings auf die Veränderlichkeit von  $R$  und  $W$  Rücksicht nehmen müssen;  $\eta$  und  $II$  ändern sich nur äußerst langsam.

Zu letzterem Zweck dürfte es indessen zweckmäßiger sein, elliptische Elemente abzuleiten und zwar die oben erwähnten instantanen. Diese definiere ich durch die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} L &= n(t - t_0) + A \\ \bar{L} &= L + \delta L \\ \bar{e} &= \eta + \delta e \\ \bar{\pi} &= II + \delta \pi \\ \bar{v} &= v + \delta v \\ \delta v &= -\delta \pi \\ \bar{p} &= a(1 - \eta^2) + \delta p = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \eta} \\ \delta p &= -\frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \eta} \nu \end{aligned} \quad (2)$$

Aus den Elementen  $\bar{p}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{\pi}$  berechnet man den Ort des Planeten nach den gewöhnlichen elliptischen Formeln, nämlich:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \bar{L} - \bar{\pi} & v &= \bar{v} + \bar{\pi} \\ \bar{E} - \bar{e} \sin \bar{E} &= \bar{M} & r &= \frac{\bar{p}}{1 + \bar{e} \cos \bar{v}} \\ \operatorname{tg} \frac{\bar{v}}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{\bar{E}}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Die instantane mittlere Bewegung, die mit  $\bar{n}$  zu bezeichnen wäre, ebenso wie die große Halbachse  $\bar{a}$ , habe ich nicht eingeführt, weil man aus den Tafeln direkt  $L$  entnehmen kann und weil es sich nicht empfiehlt, diese GröÙe mit Hilfe eines Wertes der mittleren Bewegung zu berechnen, der zu dem der großen Halbachse im Verhältnisse des dritten

<sup>1)</sup> Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Neue Folge. Teil I, 1898. Teil II u. III, 1910. Teil IV, 1911 (im Druck).

Keplerschen Gesetzes steht. Will man, etwa bei Berechnung einer Ephemeride, eine mittlere Bewegung einführen, so wird man für Anfang, Mitte und Ende des in Betracht kommenden Zeitraums sich die Werte von  $\bar{L}$  verschaffen und aus ihnen einen Wert für die mittlere Bewegung und eventuell auch für die mittlere Beschleunigung ableiten, wie wir unten in unserem Beispiel getan haben.

Die Störungen treten bei Anwendung instantaner Elemente durch die Größen  $\delta L$ ,  $\nu$ ,  $\delta e$ ,  $\delta \pi$  auf und sind zwischen diesen Größen so verteilt, daß zunächst alle in  $e$  und  $\pi$  *sekularen* Glieder bereits in  $\eta$  und  $\Pi$  berücksichtigt und alle in diesen Größen langperiodischen Glieder zu  $\delta e$  und  $\delta \pi$  gezogen sind; damit sind  $\bar{e}$  und  $\bar{\pi}$  Funktionen, die sich mit der Zeit langsam ändern und direkt tabuliert werden können. Alle übrigen Störungsglieder sind in  $\delta L$  und  $\nu$  aufgenommen. Man sieht, daß man die letzteren nach Belieben als Elementen- oder Koordinatenstörungen ansehen kann, je nachdem man sie als solche der mittleren Länge in der Nullepoche ( $\mathcal{A}$ ) und des Parameters ( $\bar{p}$ ), oder als solche der wahren Länge in der Bahn ( $\nu$ ) und des Radiusvektors ( $r$ ) ansieht.

Die Größen  $\delta L$  und  $\nu$  lassen sich für die Planeten vom  $1/3$ -Typus in die folgende Form setzen:

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum \bar{A}_i \sin \frac{1}{3} i L + \sum \bar{B}_i \cos \frac{1}{3} i L \\ \nu &= \sum \bar{C}_i \sin \frac{1}{3} i L + \sum \bar{D}_i \cos \frac{1}{3} i L\end{aligned}\quad (4)$$

wo  $\bar{A}_i$ ,  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{C}_i$ ,  $\bar{D}_i$  Koeffizienten sind, die sich langsam ändern und leicht zu tabulieren sind.

Statt der Gleichungen (4) kann man auch solche der Form

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum A_i \sin (\frac{1}{3} i L + B_i) \\ \nu &= \sum C_i \sin (\frac{1}{3} i L + D_i)\end{aligned}\quad (4a)$$

anwenden; doch ist die Form (4) gewiß dann vorzuziehen, wenn man eine Rechenmaschine zur Hand hat, mit der die Rechnung sehr bequem ist; auch sonst scheint die Form (4) mehr Schutz vor Rechenfehlern zu gewährleisten als (4a), da die  $B_i$  nicht gleich den  $D_i$  sind.

Der Gebrauch unserer Tafeln für (91) Aegina<sup>1)</sup> ist hier nach ohne weiteres verständlich, und ich gebe als Beispiel die Ableitung der instantanen Elemente für 1911 Juli 20, zu welcher Zeit annähernd die Opposition des Jahres 1911 stattfindet.

Mit dem Argument 1911 Juli 20.0 erhält man zunächst  $L$  und  $1/3 L$ , welche Größen ich beide tabuliert habe, um eine Kontrolle zu ermöglichen; es ist:

$$L = 304^{\circ}091 \quad 1/3 L = 341^{\circ}364.$$

Ferner wird

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| $\bar{A}_0 = +106$  | $\bar{B}_0 = +332$  |
| $\bar{A}_1 = +19$   | $\bar{B}_1 = -93$   |
| $\bar{A}_2 = -6$    | $\bar{B}_2 = -74$   |
| $\bar{A}_3 = -96$   | $\bar{B}_3 = +5$    |
| $\bar{A}_4 = +4$    | $\bar{B}_4 = -90$   |
| $\bar{A}_5 = +12$   | $\bar{B}_5 = +5$    |
| $\bar{A}_6 = -4$    | $\bar{B}_6 = -5$    |
| $\bar{A}_7 = -2$    | $\bar{B}_7 = +3$    |
| $\bar{A}_{10} = -2$ | $\bar{B}_{10} = -3$ |

|                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $\bar{C}_1 = +24$ | $\bar{D}_0 = -43$ |
| $\bar{C}_2 = +22$ | $\bar{D}_1 = +24$ |
| $\bar{C}_4 = +50$ | $\bar{D}_2 = +4$  |
| $\bar{C}_5 = -4$  | $\bar{D}_4 = -54$ |
| $\bar{C}_6 = +3$  | $\bar{D}_5 = +4$  |
| $\bar{C}_7 = -4$  | $\bar{D}_6 = +9$  |
|                   | $\bar{D}_7 = -5$  |

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta L &= +0.00206 = +0^{\circ}.118 \\ \nu &= -0.00097, \quad \log \frac{1}{1+\nu} = 0.00042.\end{aligned}$$

Nun entnimmt man noch aus den Tafeln  $\log p_0 = 0.40835$ , sowie die Werte  $\bar{e}$  und  $\bar{\pi}$  und hat hiermit sofort das instantane Elementensystem

$$\begin{aligned}\bar{L} &= 304^{\circ}.209 & \log \bar{e} &= 9.02278 \\ \bar{p} &= 0.40877 & \bar{\pi} &= 81^{\circ}.871\end{aligned}\quad (1900.0).$$

Die beiden noch fehlenden Elemente, Neigung und Knoten, habe ich für die instantane Ellipse mit den oskulierenden Werten identifiziert, so daß also instantane und oskulierende Bahnebene zusammenfallen. Bei kleineren Neigungen kann man  $i$  und  $\Omega$  direkt tabulieren, wie es auch in unserer Tafel für (91) Aegina geschehen ist. Bei großen Neigungen dagegen wird man eine ähnliche Rechnung auszuführen haben, wie oben für  $\delta L$  und  $\nu$ .

Am bequemsten wird es aber sein, aus unseren Tafeln direkt die Konstanten für den Äquator zu entnehmen. Diese habe ich ebenso definiert, wie im IV. Teil der Theorie der kleinen Planeten, Seite 28-29; vgl. auch Herrn Bodas Artikel in den Astr. Nachr. Bd. 185 p. 207.

Es gelten dann zur Berechnung der rechtwinkligen Äquatorialkoordinaten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= ar \cos (A + \nu) \\ y &= br \sin (B + \nu) \\ z &= cr \sin (C + \nu).\end{aligned}$$

Wir erhalten aus unseren Tafeln für das mittlere Äquinoktium 1900.0:

$$\begin{aligned}\log a &= 9.99999 & A &= -0^{\circ}.007 \\ \log b &= 9.95532 & B &= +0^{\circ}.186 \\ \log c &= 9.63478 & C &= -0^{\circ}.852.\end{aligned}$$

Will man aber den Ort des Planeten nicht für das genannte Äquinoktium berechnen, sondern sogleich für das des Jahresanfangs, so entnimmt man unseren Tafeln die Präzession und erhält für 1911.0:

$$\begin{aligned}\log a &= 9.99999 & A &= +0^{\circ}.146 \\ \log b &= 9.95532 & B &= +0^{\circ}.342 \\ \log c &= 9.63476 & C &= -0^{\circ}.710.\end{aligned}$$

Das Elementensystem selbst ist hierbei nicht wegen Präzession zu reduzieren, sondern es werden die oben ermittelten für 1900.0 geltenden Werte für  $\bar{L}$  und  $\bar{\pi}$  beibehalten; auch  $\nu$  ist für 1900.0 zu nehmen.

<sup>1)</sup> Diese sind innerhalb einer solchen Genauigkeitsgrenze gerechnet, daß der Fehler in der Darstellung des geozentrischen Ortes den Betrag von 1' nicht sehr erheblich übersteigen soll.

## Tafeln für (91) Aegina, 1910-1950. (Mittl. Äquin. 1900.0).

| Jan. o.o | $L$                | $\frac{1}{3} L$ | $\log \bar{e}$ | $\bar{\pi}$ | $\log \sin i$ | $\Omega$ | $\log p_0$ | Monate    | Gemeinjahr<br>$L$ | $\frac{1}{3} L$ | Schaltjahr<br>$L$ | $\frac{1}{3} L$ |
|----------|--------------------|-----------------|----------------|-------------|---------------|----------|------------|-----------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| 1910     | 170°273 + 2 × 360° | 296°758         | 9.02296        | 81°948      | 8.5710        | 10°92    | 0.40835    | Febr. o.o | 7°3293            | 2°443           | 7°3293            | 2°443           |
| 11       | 256.569 » »        | 325.523         | 283            | 899         | 5709          | 92       |            | März o.o  | 13.9493           | 4.650           | 14.1857           | 4.729           |
| 12       | 342.865 » »        | 354.288         | 273            | 849         | 5708          | 91       |            | April o.o | 21.2786           | 7.093           | 21.5150           | 7.172           |
| 13       | 69.398 + 3 × 360°  | 23.133          | 267            | 799         | 5707          | 90       |            | Mai o.o   | 28.3714           | 9.457           | 28.6078           | 9.536           |
| 14       | 155.695 » »        | 51.898          | 265            | 748         | 5705          | 90       |            | Juni o.o  | 35.7007           | 11.900          | 35.9371           | 11.979          |
| 1915     | 241.991 » »        | 80.664          | 9.02267        | 81.698      | 8.5704        | 10.89    | 0.40836    | Juli o.o  | 42.7935           | 14.265          | 43.0300           | 14.343          |
| 16       | 328.287 » »        | 109.429         | 272            | 648         | 5703          | 88       |            | Aug. o.o  | 50.1228           | 16.708          | 50.3593           | 16.787          |
| 17       | 54.820 + 4 × 360°  | 138.273         | 282            | 600         | 5702          | 87       |            | Sept. o.o | 57.4521           | 19.151          | 57.6885           | 19.230          |
| 18       | 141.117 » »        | 167.039         | 295            | 553         | 5700          | 86       |            | Okt. o.o  | 64.5450           | 21.515          | 64.7814           | 21.594          |
| 19       | 227.413 » »        | 195.804         | 312            | 508         | 5699          | 85       |            | Nov. o.o  | 71.8742           | 23.958          | 72.1107           | 24.037          |
| 1920     | 313.709 » »        | 224.570         | 9.02332        | 81.466      | 8.5698        | 10.84    | 0.40836    | Dez. o.o  | 78.9671           | 26.322          | 79.2035           | 26.401          |
| 21       | 40.242 + 5 × 360°  | 253.414         | 356            | 425         | 5696          | 82       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 22       | 126.539 » »        | 282.180         | 383            | 388         | 5695          | 81       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 23       | 212.835 » »        | 310.945         | 413            | 356         | 5694          | 80       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 24       | 299.131 » »        | 339.710         | 446            | 327         | 5692          | 78       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 1925     | 25.664 + 6 × 360°  | 8.555           | 9.02481        | 81.301      | 8.5691        | 10.77    | 0.40836    |           |                   |                 |                   |                 |
| 26       | 111.960 » »        | 37.320          | 518            | 280         | 5690          | 75       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 27       | 198.257 » »        | 66.086          | 557            | 263         | 5688          | 74       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 28       | 284.553 » »        | 94.851          | 597            | 251         | 5687          | 72       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 29       | 11.086 + 7 × 360°  | 123.695         | 639            | 244         | 5686          | 70       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 1930     | 97.382 » »         | 152.461         | 9.02682        | 81.241      | 8.5684        | 10.68    | 0.40837    |           |                   |                 |                   |                 |
| 31       | 183.679 » »        | 181.226         | 726            | 244         | 5683          | 66       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 32       | 269.975 » »        | 209.992         | 770            | 251         | 5682          | 64       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 33       | 356.508 » »        | 238.836         | 814            | 264         | 5681          | 62       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 34       | 82.804 + 8 × 360°  | 267.601         | 858            | 281         | 5679          | 60       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 1935     | 169.101 » »        | 296.367         | 9.02901        | 81.304      | 8.5678        | 10.58    | 0.40837    |           |                   |                 |                   |                 |
| 36       | 255.397 » »        | 325.132         | 944            | 331         | 5677          | 56       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 37       | 341.930 » »        | 353.977         | 9.02985        | 364         | 5676          | 54       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 38       | 68.226 + 9 × 360°  | 22.742          | 9.03025        | 401         | 5675          | 52       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 39       | 154.523 » »        | 51.508          | 063            | 442         | 5674          | 49       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 1940     | 240.819 » »        | 80.273          | 9.03100        | 81.488      | 8.5673        | 10.47    | 0.40837    |           |                   |                 |                   |                 |
| 41       | 327.352 » »        | 109.117         | 135            | 538         | 5673          | 44       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 42       | 53.648 + 10 × 360° | 137.883         | 167            | 591         | 5672          | 42       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 43       | 139.945 » »        | 166.648         | 196            | 648         | 5671          | 40       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 44       | 226.241 » »        | 195.414         | 222            | 709         | 5670          | 37       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 1945     | 312.774 » »        | 224.258         | 9.03245        | 81.772      | 8.5670        | 10.35    | 0.40838    |           |                   |                 |                   |                 |
| 46       | 39.070 + 11 × 360° | 253.023         | 265            | 838         | 5669          | 33       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 47       | 125.367 » »        | 281.789         | 282            | 906         | 5669          | 30       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 48       | 211.663 » »        | 310.554         | 295            | 81.976      | 5668          | 28       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 49       | 298.196 » »        | 339.399         | 304            | 82.047      | 5668          | 26       |            |           |                   |                 |                   |                 |
| 1950     | 24.492 + 12 × 360° | 8.164           | 9.03310        | 82.120      | 8.5668        | 10.24    | 0.40838    |           |                   |                 |                   |                 |

| Tage | $L$    | $\frac{1}{3} L$ | Stund. | $L$    | $\frac{1}{3} L$ |
|------|--------|-----------------|--------|--------|-----------------|
| 1    | 0°2364 | 0°079           | 1      | 0°0099 | 0°003           |
| 2    | 4729   | 158             | 2      | 0197   | 007             |
| 3    | 7093   | 236             | 3      | 0296   | 010             |
| 4    | 0.9457 | 315             | 4      | 0394   | 013             |
| 5    | 1.1821 | 0.394           | 5      | 0.0493 | 0.016           |
| 6    | 4186   | 473             | 6      | 0591   | 020             |
| 7    | 6550   | 552             | 7      | 0690   | 023             |
| 8    | 1.8914 | 630             | 8      | 0788   | 026             |
| 9    | 2.1279 | 709             | 9      | 0887   | 030             |
| 10   | 2.3643 | 0.788           | 10     | 0.0985 | 0.033           |
| 11   | 6007   | 867             | 11     | 1084   | 036             |
| 12   | 2.8371 | 0.946           | 12     | 1182   | 039             |
| 13   | 3.0736 | 1.025           | 13     | 1281   | 043             |
| 14   | 3100   | 103             | 14     | 1379   | 046             |
| 15   | 3.5464 | 1.182           | 15     | 0.1478 | 0.049           |
| 16   | 3.7828 | 261             | 16     | 1576   | 053             |
| 17   | 4.0193 | 340             | 17     | 1675   | 056             |
| 18   | 2557   | 419             | 18     | 1773   | 059             |
| 19   | 4921   | 497             | 19     | 1872   | 062             |
| 20   | 4.7286 | 1.576           | 20     | 0.1970 | 0.066           |
| 21   | 4.9650 | 655             | 21     | 2069   | 069             |
| 22   | 5.2014 | 734             | 22     | 2167   | 072             |
| 23   | 4378   | 813             | 23     | 2266   | 076             |
| 24   | 6743   | 891             | 24     | 0.2364 | 0.079           |
| 25   | 5.9107 | 1.970           |        |        |                 |
| 26   | 6.1471 | 2.049           |        |        |                 |
| 27   | 3836   | 128             |        |        |                 |
| 28   | 6200   | 207             |        |        |                 |
| 29   | 6.8564 | 285             |        |        |                 |
| 30   | 7.0928 | 2.364           |        |        |                 |
| 31   | 7.3293 | 2.443           |        |        |                 |

| Minut. | $L$    | Minut. | $L$    | Minut. | $L$    |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1      | 0°0002 | 5      | 0°0008 | 10     | 0°0016 |
| 2      | 0003   | 6      | .0010  | 20     | .0033  |
| 3      | 0005   | 7      | .0011  | 30     | .0049  |
| 4      | 0.0007 | 8      | .0013  | 40     | .0066  |
|        |        | 9      | 0.0015 | 50     | .0082  |
|        |        |        |        | 60     | 0.0099 |

## Tafeln für

1910-

| Jan. o.o | $\bar{A}_1$ | $\bar{A}_2$ | $\bar{A}_3$ | $\bar{A}_4$ | $\bar{A}_5$ | $\bar{A}_6$ | $\bar{A}_7$ | $\bar{A}_{10}$ | $\bar{B}_0$ | $\bar{B}_1$ | $\bar{B}_2$ | $\bar{B}_3$ | $\bar{B}_4$ | $\bar{B}_5$ | Jan. o.o |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|
| 1910     | +115        | +22         | -7          | -89         | +3          | +13         | -4          | -1             | +377        | -84         | -76         | +3          | -98         | +6          | 1910     |
| 11       | 109         | 20          | 6           | 94          | 4           | 12          | 4           | 2              | 349         | 90          | 75          | 3           | 93          | 5           | 11       |
| 12       | 103         | 18          | 6           | 98          | 4           | 12          | 4           | 2              | 318         | 96          | 74          | 4           | 88          | 5           | 12       |
| 13       | 97          | 17          | 5           | 102         | 5           | 11          | 4           | 2              | 285         | 102         | 73          | 4           | 82          | 4           | 13       |
| 14       | 90          | 15          | 4           | 106         | 5           | 11          | 4           | 2              | 250         | 108         | 72          | 4           | 76          | 3           | 14       |
| 1915     | +83         | +14         | -4          | -109        | +6          | +10         | -3          | -2             | +213        | -113        | -72         | +5          | -71         | +2          | 1915     |
| 16       | 76          | 13          | 3           | 113         | 6           | 10          | 3           | 2              | 175         | 118         | 71          | 5           | 65          | 2           | 16       |
| 17       | 69          | 12          | 2           | 115         | 6           | 9           | 3           | 2              | 136         | 122         | 70          | 5           | 59          | +1          | 17       |
| 18       | 61          | 11          | 2           | 118         | 6           | 8           | 3           | 2              | 95          | 126         | 70          | 6           | 53          | 0           | 18       |
| 19       | 54          | 10          | -1          | 120         | 6           | 7           | 2           | 3              | 54          | 130         | 69          | 6           | 47          | -1          | 19       |
| 1920     | +46         | +9          | 0           | -122        | +6          | +6          | -2          | -3             | +13         | -133        | -68         | +6          | -40         | -2          | 1920     |
| 21       | 38          | 9           | 0           | 124         | 6           | 5           | 2           | 3              | -28         | 136         | 68          | 5           | 34          | 3           | 21       |
| 22       | 30          | 8           | +1          | 126         | 6           | 4           | 2           | 3              | 69          | 138         | 68          | 5           | 28          | 4           | 22       |
| 23       | 21          | 8           | 2           | 127         | 5           | 3           | 2           | 3              | 110         | 140         | 68          | 5           | 21          | 5           | 23       |
| 24       | 13          | 7           | 2           | 128         | 5           | 2           | 1           | 3              | 150         | 142         | 68          | 5           | 15          | 5           | 24       |
| 1925     | +4          | +6          | +3          | -128        | +4          | +1          | -1          | -3             | -189        | -143        | -68         | +5          | -9          | -6          | 1925     |
| 26       | -4          | 6           | 4           | 128         | 4           | 0           | -1          | 3              | 226         | 144         | 68          | 4           | -2          | 7           | 26       |
| 27       | 12          | 5           | 4           | 128         | 3           | -1          | 0           | 3              | 262         | 144         | 69          | 4           | +4          | 7           | 27       |
| 28       | 21          | 4           | 5           | 128         | 2           | 2           | 0           | 3              | 297         | 144         | 69          | 4           | 11          | 8           | 28       |
| 29       | 29          | 3           | 6           | 128         | +1          | 3           | 0           | 3              | 329         | 143         | 70          | 3           | 17          | 8           | 29       |
| 1930     | -38         | +2          | +6          | -127        | 0           | -4          | 0           | -3             | -360        | -142        | -71         | +3          | +24         | -8          | 1930     |
| 31       | 46          | +1          | 6           | 126         | -1          | 5           | +1          | 3              | 388         | 141         | 71          | 2           | 30          | 9           | 31       |
| 32       | 54          | 0           | 7           | 125         | 2           | 6           | 1           | 3              | 413         | 139         | 72          | 1           | 37          | 9           | 32       |
| 33       | 62          | -1          | 7           | 123         | 3           | 7           | 1           | 3              | 435         | 137         | 73          | +1          | 43          | 9           | 33       |
| 34       | 70          | 2           | 8           | 121         | 4           | 8           | 1           | 3              | 455         | 134         | 74          | 0           | 50          | 9           | 34       |
| 1935     | -78         | -4          | +8          | -118        | -4          | -9          | +2          | -3             | -472        | -131        | -75         | -1          | +56         | -8          | 1935     |
| 36       | 85          | 6           | 8           | 116         | 5           | 9           | 2           | 3              | 485         | 127         | 76          | 1           | 62          | 8           | 36       |
| 37       | 92          | 8           | 8           | 113         | 6           | 10          | 2           | 3              | 496         | 123         | 77          | 2           | 69          | 8           | 37       |
| 38       | 99          | 10          | 8           | 109         | 7           | 11          | 2           | 3              | 503         | 118         | 78          | 3           | 75          | 7           | 38       |
| 39       | 106         | 12          | 8           | 106         | 8           | 11          | 3           | 3              | 506         | 114         | 79          | 3           | 81          | 7           | 39       |
| 1940     | -112        | -15         | +8          | -102        | -9          | -12         | +3          | -3             | -507        | -109        | -80         | -4          | +87         | -6          | 1940     |
| 41       | 119         | 18          | 8           | 97          | 9           | 12          | 3           | 3              | 504         | 103         | 80          | 5           | 92          | 5           | 41       |
| 42       | 124         | 20          | 8           | 92          | 10          | 12          | 3           | 3              | 497         | 98          | 81          | 5           | 98          | 4           | 42       |
| 43       | 130         | 23          | 8           | 87          | 10          | 13          | 3           | 3              | 487         | 92          | 82          | 6           | 103         | 3           | 43       |
| 44       | 135         | 26          | 8           | 82          | 11          | 13          | 4           | 2              | 474         | 85          | 82          | 7           | 108         | 2           | 44       |
| 1945     | -139        | -30         | +7          | -76         | -11         | -13         | +4          | -2             | -458        | -79         | -82         | -7          | +113        | -1          | 1945     |
| 46       | 144         | 33          | 7           | 70          | 11          | 13          | 4           | 2              | 439         | 72          | 82          | 8           | 118         | 0           | 46       |
| 47       | 148         | 36          | 6           | 63          | 11          | 13          | 4           | 2              | 417         | 65          | 82          | 9           | 122         | +1          | 47       |
| 48       | 151         | 40          | 6           | 57          | 11          | 13          | 4           | 2              | 392         | 58          | 82          | 9           | 126         | 2           | 48       |
| 49       | 154         | 43          | 5           | 50          | 11          | 12          | 4           | 2              | 364         | 51          | 81          | 10          | 129         | 3           | 49       |
| 1950     | -157        | -47         | +5          | -42         | -11         | -12         | +4          | -2             | -334        | -43         | -80         | -10         | +132        | +4          | 1950     |

(91) Aegina.

1950.

| Jan. o.o | $\bar{B}_6$ | $\bar{B}_7$ | $\bar{B}_{10}$ | $\bar{C}_1$ | $\bar{C}_2$ | $\bar{C}_4$ | $\bar{C}_5$ | $\bar{C}_6$ | $\bar{C}_7$ | $\bar{D}_0$ | $\bar{D}_1$ | $\bar{D}_2$ | $\bar{D}_4$ | $\bar{D}_5$ | $\bar{D}_6$ | $\bar{D}_7$ | Jan. o.o |
|----------|-------------|-------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|
| 1910     | -3          | +2          | -3             | +22         | +23         | +55         | -4          | +2          | -4          | -40         | +26         | +4          | -50         | +3          | +9          | -6          | 1910     |
| 11       | 4           | 3           | 3              | 23          | 22          | 52          | 4           | 3           | 4           | 42          | 24          | 4           | 53          | 3           | 9           | 5           | 11       |
| 12       | 5           | 3           | 3              | 24          | 22          | 49          | 4           | 4           | 4           | 43          | 23          | 4           | 55          | 4           | 9           | 5           | 12       |
| 13       | 6           | 3           | 3              | 25          | 21          | 46          | 3           | 4           | 4           | 44          | 22          | 4           | 57          | 4           | 8           | 5           | 13       |
| 14       | 7           | 3           | 3              | 27          | 21          | 43          | 3           | 5           | 5           | 45          | 20          | 4           | 59          | 5           | 8           | 5           | 14       |
| 1915     | -8          | +4          | -3             | +28         | +20         | +40         | -2          | +6          | -5          | -45         | +19         | +4          | -61         | +5          | +7          | -5          | 1915     |
| 16       | 9           | 4           | 2              | 29          | 20          | 37          | 2           | 6           | 5           | 46          | 17          | 4           | 63          | 5           | 7           | 4           | 16       |
| 17       | 10          | 4           | 2              | 29          | 20          | 34          | 1           | 7           | 5           | 45          | 16          | 4           | 64          | 5           | 6           | 4           | 17       |
| 18       | 10          | 4           | 2              | 30          | 20          | 30          | -1          | 7           | 6           | 45          | 14          | 4           | 66          | 5           | 6           | 4           | 18       |
| 19       | 11          | 4           | 2              | 31          | 20          | 27          | 0           | 8           | 6           | 44          | 12          | 4           | 67          | 5           | 5           | 3           | 19       |
| 1920     | -11         | +4          | -2             | +32         | +20         | +24         | +1          | +8          | -6          | -43         | +11         | +4          | -68         | +6          | +5          | -3          | 1920     |
| 21       | 12          | 4           | 2              | 32          | 20          | 21          | 1           | 9           | 6           | 41          | 9           | 5           | 69          | 5           | 4           | 3           | 21       |
| 22       | 12          | 4           | 2              | 33          | 20          | 17          | 2           | 9           | 6           | 40          | 7           | 5           | 70          | 5           | 3           | 2           | 22       |
| 23       | 13          | 5           | 1              | 33          | 21          | 14          | 2           | 9           | 6           | 37          | 5           | 5           | 71          | 5           | 2           | 2           | 23       |
| 24       | 13          | 5           | 1              | 33          | 21          | 10          | 3           | 9           | 6           | 35          | 4           | 5           | 72          | 5           | 2           | 2           | 24       |
| 1925     | -13         | +5          | -1             | +33         | +21         | +7          | +3          | +9          | -6          | -33         | +2          | +5          | -73         | +4          | +1          | -1          | 1925     |
| 26       | 13          | 5           | 1              | 34          | 22          | +3          | 4           | 10          | 7           | 30          | 0           | 5           | 73          | 4           | 0           | 1           | 26       |
| 27       | 13          | 5           | 1              | 33          | 22          | -1          | 4           | 9           | 7           | 27          | -2          | 5           | 73          | 3           | -1          | -1          | 27       |
| 28       | 13          | 5           | -1             | 33          | 23          | 4           | 4           | 9           | 7           | 23          | 4           | 5           | 74          | 3           | 2           | 0           | 28       |
| 29       | 13          | 5           | 0              | 33          | 24          | 8           | 5           | 9           | 7           | 20          | 6           | 5           | 74          | 2           | 2           | 0           | 29       |
| 1930     | -12         | +5          | 0              | +33         | +24         | -12         | +5          | +9          | -7          | -16         | -7          | +4          | -73         | +2          | -3          | 0           | 1930     |
| 31       | 12          | 5           | 0              | 32          | 25          | 15          | 5           | 9           | 7           | 13          | 9           | 4           | 73          | 1           | 4           | +1          | 31       |
| 32       | 12          | 5           | 0              | 32          | 26          | 19          | 5           | 8           | 6           | 9           | 11          | 4           | 72          | +1          | 4           | 1           | 32       |
| 33       | 11          | 5           | 0              | 31          | 27          | 23          | 5           | 8           | 6           | 5           | 12          | 3           | 72          | 0           | 5           | 1           | 33       |
| 34       | 10          | 5           | 0              | 30          | 28          | 27          | 5           | 8           | 6           | -1          | 14          | 3           | 71          | 0           | 6           | 2           | 34       |
| 1935     | -10         | +5          | +1             | +30         | +28         | -31         | +5          | +7          | -6          | +2          | -16         | +2          | -70         | -1          | -6          | +2          | 1935     |
| 36       | 9           | 4           | 1              | 29          | 29          | 35          | 5           | 7           | 6           | 7           | 17          | +1          | 68          | 1           | 7           | 3           | 36       |
| 37       | 8           | 4           | 1              | 28          | 30          | 38          | 5           | 6           | 6           | 11          | 19          | 0           | 67          | 2           | 7           | 3           | 37       |
| 38       | 7           | 4           | 1              | 26          | 31          | 42          | 5           | 5           | 6           | 15          | 20          | -1          | 65          | 2           | 8           | 3           | 38       |
| 39       | 6           | 4           | 1              | 25          | 31          | 46          | 4           | 5           | 6           | 19          | 22          | 2           | 63          | 3           | 8           | 4           | 39       |
| 1940     | -6          | +4          | +2             | +24         | +32         | -50         | +4          | +4          | -6          | +22         | -23         | -3          | -60         | -4          | -9          | +4          | 1940     |
| 41       | 5           | 4           | 2              | 23          | 32          | 53          | 4           | 3           | 5           | 26          | 24          | 5           | 58          | 4           | 9           | 4           | 41       |
| 42       | 3           | 4           | 2              | 21          | 33          | 57          | 3           | 3           | 5           | 29          | 26          | 6           | 55          | 4           | 9           | 4           | 42       |
| 43       | 2           | 3           | 2              | 20          | 33          | 60          | 3           | 2           | 5           | 33          | 27          | 7           | 52          | 5           | 9           | 5           | 43       |
| 44       | -1          | 3           | 2              | 18          | 33          | 63          | 2           | +1          | 4           | 36          | 28          | 9           | 49          | 5           | 9           | 5           | 44       |
| 1945     | 0           | +3          | +2             | +17         | +33         | -66         | +2          | 0           | -4          | +39         | -29         | -10         | -46         | -5          | -9          | +5          | 1945     |
| 46       | +1          | 3           | 2              | 15          | 33          | 69          | 1           | 0           | 4           | 41          | 30          | 12          | 42          | 5           | 10          | 5           | 46       |
| 47       | 2           | 3           | 3              | 14          | 33          | 72          | +1          | -1          | 4           | 43          | 30          | 14          | 38          | 5           | 9           | 6           | 47       |
| 48       | 3           | 2           | 3              | 12          | 33          | 74          | 0           | 2           | 3           | 46          | 31          | 15          | 34          | 5           | 9           | 6           | 48       |
| 49       | 4           | 2           | 3              | 10          | 32          | 76          | -1          | 3           | 3           | 47          | 32          | 17          | 30          | 5           | 9           | 6           | 49       |
| 1950     | +5          | +2          | +3             | +9          | +32         | -78         | -1          | -4          | -3          | +49         | -32         | -18         | -25         | -5          | -9          | +6          | 1950     |

## Konstanten für den Äquator.

| Jan. 0.0 | log $a$ | Präzess.            | log $b$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | log $c$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | $A$    | Präzess.<br>(in 0°001) | $B$    | Präzess.<br>(in 0°001) | $C$    | Präzess.<br>(in 0°001) |
|----------|---------|---------------------|---------|-----------------------|---------|-----------------------|--------|------------------------|--------|------------------------|--------|------------------------|
| 1910     | 9.99999 | verschwindend klein | 9.95532 | +0.03                 | 9.63479 | -0.14                 | -0°007 | +13.95                 | +0°186 | +14.19                 | -0°853 | +12.92                 |
| 1915     | »       |                     | 33      | »                     | 75      | »                     | »      | »                      | 185    | »                      | 850    | »                      |
| 1920     | »       |                     | 34      | »                     | 70      | »                     | »      | »                      | 184    | »                      | 844    | »                      |
| 1925     | »       |                     | 35      | »                     | 66      | »                     | »      | »                      | 182    | »                      | 838    | »                      |
| 1930     | »       |                     | 36      | »                     | 62      | »                     | »      | »                      | 181    | »                      | 830    | »                      |
| 1935     | »       |                     | 36      | »                     | 58      | »                     | »      | »                      | 179    | »                      | 822    | »                      |
| 1940     | »       |                     | 37      | »                     | 56      | »                     | »      | »                      | 177    | »                      | 812    | »                      |
| 1945     | »       |                     | 37      | »                     | 54      | »                     | »      | »                      | 174    | »                      | 802    | »                      |
| 1950     | »       |                     | 9.95537 | »                     | 9.63453 | »                     | »      | »                      | +0.172 | »                      | -0.793 | »                      |

| Jan. 0.0 | $a \sin A$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | $a \cos A$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | $b \sin B$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | $b \cos B$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | $c \sin C$ | Präzess.<br>(5. Dez.) | $c \cos C$ | Präzess.<br>(5. Dez.) |
|----------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| 1910     | -0.00013   | +24.35                | +0.99998   | -0.04                 | +0.00293   | +22.34                | +0.90223   | -0.03                 | -0.00642   | +9.72                 | +0.43126   | -0.01                 |
| 1915     | 13         | 35                    | »          | 5                     | 291        | 34                    | 225        | 4                     | 639        | »                     | 122        | 2                     |
| 1920     | 13         | 35                    | »          | 6                     | 290        | 34                    | 227        | 6                     | 636        | »                     | 118        | 2                     |
| 1925     | 13         | 35                    | »          | 8                     | 287        | 34                    | 229        | 7                     | 631        | »                     | 114        | 3                     |
| 1930     | 12         | 35                    | »          | 9                     | 285        | 34                    | 231        | 8                     | 625        | »                     | 109        | 4                     |
| 1935     | 12         | 36                    | »          | 10                    | 282        | 34                    | 232        | 10                    | 618        | »                     | 106        | 4                     |
| 1940     | 12         | 36                    | »          | 12                    | 278        | 35                    | 234        | 11                    | 611        | »                     | 104        | 5                     |
| 1945     | 12         | 36                    | »          | 14                    | 275        | 35                    | 234        | 12                    | 604        | »                     | 102        | 6                     |
| 1950     | -0.00012   | +24.36                | »          | -0.15                 | +0.00272   | +22.35                | +0.90234   | -0.14                 | -0.00596   | »                     | +0.43102   | -0.06                 |

Die Werte  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  beziehen sich, wie alle übrigen, auf das mittlere Äquinoktium 1900.0. Die Kolumne »Präzess.« gibt die jährliche Änderung dieser Größen unmittelbar so, wie sie zur Reduktion auf den jeweiligen Jahresanfang gebraucht wird. Bei dieser Art der Reduktion fällt die Reduktion der Elemente und der Längen in der Bahn wegen Präzession ganz fort.

Natürlich kann man auch, namentlich wenn man  $i$  und  $\Omega$  aus den Tafeln entnimmt, das ganze Elementensystem für Präzession reduzieren; es scheint mir aber bequemer, die gesamte Reduktion allein an die Konstanten für den Äquator anzubringen.

Berechnet man in der oben angegebenen Weise aus den Tafeln die instantanen Elemente für die drei Daten 1911 Juni 10.0, Juli 20.0, August 29.0 mittlere Zeit Berlin, so wird (Äqu. 1900.0):

|                | 1910 Juni 10.0 | Juli 20.0 | Aug. 29.0 |
|----------------|----------------|-----------|-----------|
| $\log \bar{e}$ | 9.02279        | 9.02278   | 9.02276   |
| $\bar{\pi}$    | 81°877         | 81°871    | 81°866    |
| $\bar{L}$      | 294°766        | 304°209   | 313°653   |
| $\log \bar{p}$ | 0.40876        | 0.40877   | 0.40876   |

Frankfurt a. M., 1910 Nov. 30.

Aus den drei Werten von  $\bar{L}$  leitet man die Relation ab:

$$\bar{L} = 304^{\circ}209 + 849^{\circ}915 t + 0^{\circ}0011 t^2$$

$t$  gezählt in Tagen von 1911 Juli 20 <sup>0h</sup> M. Z. Berlin.

Die mittlere Beschleunigung — wenn wir den Faktor von  $t^2$  so nennen — ist hier außerordentlich klein.

Die Werte der Konstanten für den Äquator sowie  $i$  und  $\Omega$  sind für alle drei Epochen die gleichen, da sie sich in der Zwischenzeit nicht merklich ändern. Die ersteren sind oben gegeben; wünscht man die letzteren zu haben, so ergehen unsere Tafeln:

$$\log \sin i = 8.5708 \quad \Omega = 10^{\circ}92 \quad (1900.0).$$

M. Brendel.

## Beobachtungen des Kometen 1910 a auf der Sternwarte Uccle.

15-zöhl. Refraktor. [Mitgeteilt mit Erlaubnis des Herrn Direktor *Lecointe*].

| 1910    | M. Z. Uccle                                   | $\Delta u$                         | $\Delta \delta$ | Beobacht. | $\alpha$ app.                                   | $\log p A$ | $\delta$ app. | $\log p A$ | Red. ad l. app. | * |
|---------|---|------------------------------------|-----------------|-----------|---|------------|---------------|------------|-----------------|---|
| Jan. 21 | 5 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 50 <sup>s</sup> | —                                  | —               | —         | 20 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 15 <sup>s</sup> | 9.532      | -11° 8'4      | 0.853      | —               | — |
| 22      | 5 3 52  | —                                  | —               | —         | 20 58 28  | 9.523      | - 8 43.5      | 0.851      | —               | — |
| 26      | 6 13 17                                       | +0 <sup>m</sup> 16 <sup>s</sup> 22 | +6' 9"6         | 6,8       | <i>m</i> 21 20 41.69                            | 9.561      | - 2 16 34"8   | 0.834      | -1°92 -10°7     | 1 |
| 27      | 6 8 50  | +5 46.44                           | +1 19.2         | 10,2      | <i>d</i> 21 24 17.01                            | 9.559      | - 1 8 18.6    | 0.833      | -1.92 -10.7     | 2 |
| 29      | 6 8 26  | +1 45.84                           | +6 44.8         | 25,5      | <i>d</i> 21 30 29.29                            | 9.560      | + 0 47 46.5   | 0.831      | -1.89 -10.7     | 3 |
| 31      | 6 25 0  | +3 11.42                           | -6 43.8         | 30,6      | <i>d</i> 21 35 43.73                            | 9.567      | + 2 22 41.3   | 0.829      | -1.88 -10.7     | 4 |
| Febr. 1 | 6 26 33                                       | +2 8.29                            | +2 14.8         | 40,8      | <i>d</i> 21 38 3.28                             | 9.568      | + 3 5 23.7    | 0.829      | -1.87 -10.7     | 5 |