

Cylinder gelegt und nenne dieselben kurz resp. Strahl- und Normalcylinder. Wenn dann bezüglich des Ueberganges des Lichtes, solange die Mittel als ideell durchsichtig vorausgesetzt werden, die Strahl- wie die Normalcylinder sich als gleichmässig brauchbar erweisen, so überwiegt doch alsbald die Bedeutung der letzteren, sobald es sich um absorbirende Mittel handelt. Andererseits vereinfachen die Strahlcylinder die Differentialgleichungen der innern Bewegung, und zwar sowohl bei der Ableitung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in den fortschreitenden (transferirten) doppelt brechenden Mitteln, als auch namentlich bezüglich der Behandlung des Dispersionsproblems.

VII. *Ueber den Uebergang des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen und anisotropen Mitteln und über die Mechanik der Schwingungen in denselben; von E. Ketteler.*

Ausgehend von der Annahme des Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen, bin ich im Verfolge meiner optischen Untersuchungen zu Resultaten gelangt, denen eine bemerkenswerthe Allgemeinheit zukommen dürfte. Ich erlaube mir, dieselben hier vollständig zusammenzustellen und sie zugleich mit möglichster Strenge aus ihren Prämissen zu entwickeln.

Was zunächst die Uebergangsbedingungen des Lichtes betrifft, so denke man sich zwei absorbirende — vorläufig isotrope — Mittel in ebener Trennungsfläche sich berühren. Im Innern des ersten Mittels bewege sich eine gegebene ebene Welle gegen die Trennungsfläche hin und werde an derselben zum Theil gespiegelt, zum Theil gebrochen. Da das Mittel absorbirt, so charakterisirt sich die gegebene

Welle durch zwei ausgezeichnete Richtungen, die ich kurz die Extinctionsrichtung und die Propagationsrichtung nennen werde. Sie sind die Normalen zweier Ebenen, der Ebene gleicher Amplituden und der Ebene gleicher Phasen, welche letztere kurzweg die Wellenebene heisse.

Man mache nun die Trennungsfläche zur XY -Ebene eines Coordinatensystems, ziehe darin irgend welche Gerade als X -Axe und nehme die Richtung des Lothes als Z -Axe desselben. Man fixire ferner zwei unendlich kleine Volumenelemente, die im ersten und zweiten Mittel aneinander stossen, mache ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten und beziehe auf ihn die sämmtlichen Schwingungen der Theilchen beider Mittel. Für ein Aetherresp. Körpertheilchen, dessen Ruhelage sich in x, y, z befindet, mögen die Schwingungscomponenten bezeichnet werden als ξ, η, ζ , resp. ξ', η', ζ' .

Da ich weiter unten zeigen werde, dass sich die Körpertheilchen mit einem gewissen Rechte als eine Art Ballast oder Bewegungswiderstand für den Aether bezeichnen lassen, und da man zudem für das eine der beiden Mittel die ponderabeln Massen fortnehmen, dasselbe also durch den Weltäther ersetzen darf, so begreift sich, dass in die (linearen) Uebergangsbedingungen ausschliesslich die Ausschläge der Aethertheilchen, resp. die durch sie hervorgerufenen elastischen Kräfte des Aethers eingehen. Die von mir gefundenen sogenannten Grenzgleichungen sind nun folgende vier:

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} \sum \left(\alpha \frac{d\zeta}{dz} \right)_1 &= \sum \left(\alpha \frac{d\zeta}{dz} \right)_2 \\ \sum \left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right)_1 &= \sum \left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right)_2 \\ \sum \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_1 &= \sum \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right)_2 \\ \sum \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_1 &= \sum \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right)_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Sie gelten für Mittel von beliebiger Anordnung, und beziehen sich darin die Indices 1, 2 auf das erste, resp. zweite derselben, die Summenzeichen auf die Zahl der in jedem Mittel vorkommenden Wellen.

Sofern der Coëfficient α der ersten dieser Gleichungen für isotrope Mittel $= 1$ ist, so verlangt dieselbe die Gleichheit der linearen Dilatation senkrecht zur Trennungsfläche, die drei übrigen verlangen die Gleichheit der bezüglichen Drehungscomponenten und zwar sämmtlich für die im Coordinatenanfangspunkte fixirten kleinen Aetherparallelepipeda. Auf die Bedeutung, welche diese Begriffe in der neuern Mechanik überhaupt gewonnen haben, brauche ich hier kaum hinzuweisen.

Den vorstehenden Grundsätzen lassen sich für ideell durchsichtige Mittel, aber auch nur für diese, zwei weitere hinzufügen. Es sind das der Fresnel-Neumann'sche Grundsatz der Gleichheit der Schwingungscomponenten parallel der Schnittlinie von Einfallsebene und Trennungsfläche, sowie der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in welchen letztern dann auch die Amplituden der Körpertheilchen eingehen. Ich komme weiter auf dieselben zurück.

Mit den eben gewonnenen vier Grenzgleichungen verbinden wir noch das Huygens'sche Princip, sowie das Princip der Incompressibilität des Aethers. Letzteres gibt die bekannte Gleichung:

$$(II) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Was dagegen das erstere betrifft, so knüpft sich seine analytische Formulirung an die Besprechung der zugehörigen Integralausdrücke. Hier sehe ich mich indess veranlasst, die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen insoweit einzuschränken, als ich für die beiden vorausgesetzten Mittel von einer specifischen Grenzwirkung, d. h. von einer eigenthümlichen Einwirkung der Grenzschichten derselben auf sich selbst wie aufeinander absehe.¹⁾ Wir

1) Man findet darüber das Nothwendige in Wied. Ann. III. p. 300—314. 1878.

werden demgemäss den Extinctionscoefficienten (q) und den Refractionscoefficienten (ν) für alle Punkte der Mittel als gleich nehmen.

Dies vorausgesetzt, haben die Integrale der vorstehenden Differentialgleichungen die allgemeine, elliptischen Schwingungen entsprechende Form:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} q (u'x + v'y + w'z)} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\nu (ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \psi_x \right], \\ \text{(III) } \eta &= \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} q (u'x + v'y + w'z)} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\nu (ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \psi_y \right], \\ \zeta &= \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q (u'x + v'y + w'z)} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\nu (ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \psi_z \right], \end{aligned}$$

Darin bedeutet e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, t die laufende Zeit, T die Schwingungsdauer und λ die Wellenlänge im Weltäther. Die \mathfrak{A}_x , \mathfrak{A}_y , \mathfrak{A}_z sind die Amplituden, und die ψ_x , ψ_y , ψ_z die entsprechenden axialen Anomalien. Endlich sind die u , v , w die Cosinus der Winkel zwischen Propagationsrichtung und Axen, die u' , v' , w' die Cosinus der Winkel zwischen Extinctionsrichtung und Axen.

Zugleich mit w ist auch der sogenannte Einfallswinkel r gegeben. Man hat nämlich:

$$\cos r = w, \quad \sin r = \sqrt{u^2 + v^2};$$

die sogenannte Einfallsebene bildet folglich mit der X -Axe einen Azimuthwinkel Θ , der bestimmt ist durch:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{v}{u}.$$

Entsprechend erhält man für das Azimuth der die Extinctionsrichtung enthaltenden Normalebene:

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{v'}{u'}.$$

und sonach für den Winkel zwischen beiden:

$$\operatorname{tg} (\Theta - \Theta') = \frac{v u' - v' u}{u u' + v v'}.$$

Ich werde im Folgenden das einfallende, reflectirte und durchgehende Licht durch die Amplituden \mathfrak{E} , \mathfrak{R} , \mathfrak{D} und bezüglich der übrigen Attribute durch ein angehängtes E , R , D unterscheiden.

Was nunmehr die Auswerthung des Huygens'schen Principis betrifft, so ist die mit diesem Namen belegte Vorstellungsweise sowohl auf die Ebene gleicher Amplitude wie auf die Ebene gleicher Phase in Anwendung zu bringen. Wenn daher bezüglich letzterer die bekannten Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} (IV a) \quad v_E \sin r_E &= v_R \sin r_R = v_D \sin r_D, \\ \Theta_E &= \Theta_R = \Theta_D, \\ v_R &= v_E, \\ \cos r_R &= -\cos r_E, \quad r_R = 180^\circ - r_E, \end{aligned}$$

und sonach:

$$u_R = u_E, \quad v_R = v_E, \quad w_R = -w_E,$$

so muss nach gleicher Schlussweise bezüglich der ersteren die Forderung gestellt werden:

$$\begin{aligned} (IV b) \quad q_R &= q_E, \\ u'_R &= u'_E, \quad v'_R = v'_E, \quad w'_R = -w'_E, \\ u'_D &= 0, \quad v'_D = 0, \quad w'_D = 1. \end{aligned}$$

Es liegen folglich die drei Propagationsnormalen in einer und derselben Ebene, und sind die drei Extinctionsnormalen symmetrisch zur Trennungsfläche.

Bevor ich die Ausdrücke (III) unter Benutzung der vorstehenden Gleichungen (IV) in die Bedingungsgleichungen (I) einführe, sollen im Interesse der Uebersichtlichkeit folgende Abkürzungen festgestellt werden. Es bedeute:

$$\delta = u'x + v'y + w'z, \quad \varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{v(u x + v y + w z)}{\lambda} \right),$$

Ferner:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \vartheta_x = \frac{q u'}{r u}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_y = \frac{q v'}{r v}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_z = \frac{q w'}{r w},$$

$$f_x = \sqrt{v^2 u^2 + q^2 u'^2}, \quad f_y = \sqrt{v^2 v^2 + q^2 v'^2}, \quad f_z = \sqrt{v^2 w^2 + q^2 w'^2}.$$

Alsdann ist:

$$(2) \quad \begin{aligned} \sin \vartheta_x &= \frac{qw'}{f_x}, & \cos \vartheta_x &= \frac{vu}{f_x}, \\ \sin \vartheta_y &= \frac{qv'}{f_y}, & \cos \vartheta_y &= \frac{rv}{f_y}, \\ \sin \vartheta_z &= \frac{qw'}{f_z}, & \cos \vartheta_z &= \frac{vw}{f_z}, \end{aligned}$$

und sonach:

$$(2) \quad \begin{aligned} \vartheta_x^R &= \vartheta_x^E, & \vartheta_y^D &= \vartheta_y^E, & \vartheta_z^R &= 180^\circ + \vartheta_z^E, \\ \vartheta_x^R &= 0, & \vartheta_y^D &= 0. \end{aligned}$$

Nunmehr erhält man z. B. den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dz} &= -\frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q\delta} [\nu w \sin(\varphi - \psi_z) - qw' \cos(\varphi - \psi_z)] \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q\delta} f_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) \end{aligned}$$

und Ausdrücke von ähnlichem Bildungsgesetze auch für die übrigen.

Durch Substitution derselben in Gleichung (II) wird zuvörderst die Incompressibilitätsbedingung:

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_x f_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_y) \\ + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) = 0. \end{aligned}$$

Sie zerfällt durch Eliminirung des die laufende Zeit t enthaltenden Winkels φ in die beiden folgenden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_x f_x \cos(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \cos(\psi_y + \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \cos(\psi_z + \vartheta_z) &= 0, \\ \mathfrak{A}_x f_x \sin(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\psi_y + \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\psi_z + \vartheta_z) &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sofort einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Eliminirt man der Reihe nach \mathfrak{A}_x , \mathfrak{A}_y , \mathfrak{A}_z , so gewinnt man die Doppelgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}_x^2 (\nu^2 u^2 + q^2 u'^2)}{\sin^2 [(\psi_y + \vartheta_y) - (\psi_z + \vartheta_z)]} &= \frac{\mathfrak{A}_y^2 (\nu^2 v^2 + q^2 v'^2)}{\sin^2 [(\psi_x + \vartheta_x) - (\psi_z + \vartheta_z)]} \\ &= \frac{\mathfrak{A}_z^2 (\nu^2 w^2 + q^2 w'^2)}{\sin^2 [(\psi_x + \vartheta_x) - (\psi_y + \vartheta_y)]} \end{aligned}$$

Es entsprechen sich sonach die in den folgenden Horizontalreihen aufgeführten Specialfälle:

$$\begin{aligned} u = u' = 0, & \quad \psi_y + \vartheta_y = \psi_z + \vartheta_z, & \mathfrak{A}_y f_y + \mathfrak{A}_z f_z = 0, \\ v = v' = 0, & \quad \psi_x + \vartheta_x = \psi_z + \vartheta_z, & \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_z f_z = 0, \\ w = w' = 0, & \quad \psi_x + \vartheta_x = \psi_y + \vartheta_y, & \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_y f_y = 0. \end{aligned}$$

Damit also eine der Schwingungscomponenten herausfalle, dazu ist nothwendig, dass gleichzeitig Fortpflanzungsrichtung und Auslöschungsrichtung auf der betreffenden Axe senkrecht stehen. Dann sind aber Phasendifferenz und Amplitudenverhältniss der übrig bleibenden Componenten aus den als bekannt vorausgesetzten Functionen ϑ und f direct ableitbar.

Sollen ferner zwei Componenten zusammen verschwinden, so hat man die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_x = 0, & \quad \mathfrak{A}_y = 0, & w = w' = 0, \\ \mathfrak{A}_x = 0, & \quad \mathfrak{A}_z = 0, & v = v' = 0, \\ \mathfrak{A}_y = 0, & \quad \mathfrak{A}_z = 0, & u = u' = 0, \end{aligned}$$

folglich in der einen übrig bleibenden linear polarisirtes Licht.

Lässt man beispielsweise die Extinctionsrichtung in die Einfallsebene als XZ -Ebene fallen, sodass $v = v' = 0$ wird, so folgt für die in derselben liegenden einfallenden Schwingungen:

$$\psi_x^E - \psi_z^E = \vartheta_z^E - \vartheta_x^E$$

und für die zugehörigen reflectirten zufolge Gleichung (3):

$$\begin{aligned} \psi_x^R - \psi_z^R &= 180^\circ + \vartheta_z^E - \vartheta_x^E \\ &= 180^\circ + \psi_x^E - \psi_z^E. \end{aligned}$$

Die reflectirte elliptische Bewegung geht also im entgegengesetzten Sinne vor sich wie die einfallende. Für das gebrochene Licht ist $\vartheta_x^D = 0$; folglich hat man:

$$(5) \quad \operatorname{tg}(\psi_x^D - \psi_z^D) = \operatorname{tg} \vartheta_z^D = \frac{q}{p w} = \frac{q}{p}.$$

Die Amplituden sind gegeben durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{U}_x^2 (\nu^2 u^2 + q^2 u'^2) = \mathfrak{U}_z^2 (\nu^2 w^2 + q^2 w'^2).$$

Führt man darin zwei neue Grössen \mathfrak{U}_1 , r ein, für welche:

$$\mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}_1 \cos r, \quad \mathfrak{U}_z = \mathfrak{U}_1 \sin r,$$

so lassen sich dieselben als Amplitude, resp. Schwingungszimuth der restaurirten Schwingung, d. h. derjenigen linearen Schwingung definiren, deren Energie der Energie der gegebenen elliptischen Schwingung gleich kommt. Die restaurirte reflectirte Schwingung wird auf der restaurirten gebrochenen senkrecht stehen, sobald die Bedingung erfüllt ist:

$$\operatorname{tg} r^R \operatorname{tg} r^D = -1,$$

$$(6) \quad \frac{\sqrt{\nu^2 u^2 + q^2 u'^2}}{\sqrt{\nu^2 w^2 + q^2 w'^2}} \frac{\nu_D u_D}{\sqrt{\nu_D^2 w_D^2 + q_D^2}} = 1.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für den sogenannten Hauptincidenzwinkel. Ist insbesondere $\nu = 1$, $q = 0$, $\nu u = \nu_D u_D = \sin e$, so vereinfacht sie sich auf:

$$(6b) \quad \sin e \operatorname{tg} e = \sqrt{p_D^2 + q_D^2}, \quad \operatorname{tg} e = \sqrt{\nu_D^2 + q_D^2}.$$

Analog endlich lassen sich mittelst der obigen Doppelgleichung auch die Richtungs cosinus $\frac{\mathfrak{U}_x}{\mathfrak{U}}$, $\frac{\mathfrak{U}_y}{\mathfrak{U}}$, $\frac{\mathfrak{U}_z}{\mathfrak{U}}$ der allgemeinen restaurirten Schwingung ermitteln.

Combinirt man jetzt die vier Grenzbedingungen mit der auf beide Mittel gesondert angewandten Incompressibilitätsbedingung (4), so erhält man für den (an sich offenbar willkürlichen) Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ das System der folgenden sechs Gleichungen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) - \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_z)] f_z \\ \quad = \mathfrak{D}_z f_z^D \sin(\varphi - \psi_z^D - \vartheta_z^D). \\ \\ [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) + \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_z)] f_x \\ \quad - [\mathfrak{E}_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) - \mathfrak{R}_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \vartheta_x)] f_z \\ \quad = \mathfrak{D}_z f_x^D \sin(\varphi - \psi_z^D) - \mathfrak{D}_x f_z^D \sin(\varphi - \psi_x^D - \vartheta_z^D). \end{array} \right.$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{E}_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_x) + \Re_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \vartheta_x)] f_x \\ - [\mathfrak{E}_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_y) + \Re_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \vartheta_y)] f_y \\ = \mathfrak{D}_y f_x^D \sin(\varphi - \psi_y^D) - \mathfrak{D}_x f_y^D \sin(\varphi - \psi_x^D). \\ \\ [\mathfrak{E}_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_z) - \Re_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \vartheta_z)] f_z \\ - [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_y) - \Re_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_y)] f_y \\ = \mathfrak{D}_y f_z^D \sin(\varphi - \psi_y^D - \vartheta_z^D) - \mathfrak{D}_z f_y^D \sin(\varphi - \psi_z^D). \\ \\ \Re_x f_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \vartheta_x) + \Re_y f_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \vartheta_y) \\ - \Re_z f_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_z) = 0. \\ \\ \mathfrak{D}_x f_x^D \sin(\varphi - \psi_x^D) + \mathfrak{D}_y f_y^D \sin(\varphi - \psi_y^D) \\ + \mathfrak{D}_z f_z^D \sin(\varphi - \psi_z^D - \vartheta_z^D) = 0. \end{array} \right.$$

Sind darin die Functionen f und ϑ bekannt und ausserdem die drei \mathfrak{E} und $\psi^E = \psi$ gegeben, so lassen sich mittelst derselben die drei \Re und ψ^R und die drei \mathfrak{D} und ψ^D berechnen.

In der That zerfällt jede dieser Gleichungen durch Eliminirung von φ in zwei, und führt man jetzt die neuen Anomalien ein:

$$\chi^R = \psi^R - \psi, \quad \chi^D = \psi^D - \psi,$$

so genügen die dann vorhandenen zwölf Gleichungen zur Ermittlung von zwölf Unbekannten:

$$\begin{array}{ll} R' = \Re \cos \chi^R, & R'' = \Re \sin \chi^R, \\ D' = \mathfrak{D} \cos \chi^D, & D'' = \mathfrak{D} \sin \chi^D. \end{array}$$

Hiermit ist die im ersten Theile gestellte Aufgabe allgemein gelöst.

Für die weitere Verwendung der Gleichungen empfiehlt es sich, sie rückwärts mittelst der symbolischen Amplituden:

$$\begin{array}{l} R = R' + R'' \sqrt{-1}, \\ D = D' + D'' \sqrt{-1}, \end{array}$$

in bequemere complexe Formen zusammenzufassen. Ich lasse indess zur leichtern Ueberleitung zu den von mir

bisher in Wiedemann's Annalen (vgl. u. p. 26) behandelten Specialfällen fortan die Einfallsebene mit der ZX -Ebene zusammenfallen, setze wie früher:

$$\vartheta_x = \gamma, \quad \vartheta_z = \beta;$$

$$vu = v_2 u_2 = \sin e, \quad vw = p,$$

und schreibe abkürzungsweise:

$$\Psi_{m,\mu} = \cos(\psi_m + \mu) + \sqrt{-1} \sin(\psi_m + \mu).$$

Man erhält dann:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} (\mathfrak{E}_z - R_z) \Psi_{z,\beta} = \sqrt{p_2^2 + q_2^2} D_z \Psi_{z,\beta_2}, \\ \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2} (\mathfrak{E}_z + R_z) \Psi_{z,\gamma} - \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} (\mathfrak{E}_x - R_x) \Psi_{x,\beta} \\ \quad = \sin e D_z \Psi_{z,\gamma_2} - \sqrt{p_2^2 + q_2^2} D_x \Psi_{x,\beta_2}, \\ \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2} (\mathfrak{E}_y + R_y) \Psi_{y,\gamma} - \sqrt{-1} q v' (\mathfrak{E}_x + R_x) \Psi_x \\ \quad = \sin e D_y \Psi_y, \\ \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} (\mathfrak{E}_y - R_y) \Psi_{y,\beta} - \sqrt{-1} q v' (\mathfrak{E}_z + R_z) \Psi_z \\ \quad = p_2 D_y \Psi_{y,\beta_2}, \\ \sqrt{p^2 + q^2 w'^2} R_z \Psi_{z,\beta} + \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2} R_x \Psi_{x,\gamma} - q v' R_y \Psi_y = 0, \\ \sqrt{p_2^2 + q_2^2} D_z \Psi_{z,\beta_2} + \sin e D_x \Psi_{x,\gamma_2} = 0. \end{array} \right.$$

Dass das System auch dieser Gleichungen miteinander verträglich ist, bedarf wohl keines weitern Nachweises. Setzt man z. B. einmal $\sin e = 0$, $u' = 0$, und sodann $\sin e = 0$, $v' = 0$, so erhält man die gleichen Ausdrücke wie bei der Vertauschung von x und y . Das wäre freilich nicht der Fall, wollte man die erste Gleichung, welche die linearen Dilatationen senkrecht zur Trennungsfläche enthält, durch eine die Dilatationen parallel der Trennungsfläche enthaltende ersetzen.

Wenn ich bezüglich der Details auf meine frühere Arbeit verweise, so möge hier bloss der nicht uninteressante Fall erwähnt werden, dass nämlich bei senkrechter Incidenz die Propagations- und Extinctionsnormalen sich rechtwinkelig schneiden. Man findet für ihn:

$$\mathfrak{E} + \Re = 0, \quad \chi^R = 0, \quad \mathfrak{D} = 0,$$

sodass das gebrochene Licht seine Fähigkeit zu weiterer Brechung unter normalem Einfall verloren hat. Ein ähnlicher Fall würde in der Natur bezüglich desjenigen Lichtes realisirt sein, welches unter den Bedingungen der Total-reflexion als sogenannter „streifender Strahl“ in ein optisch dünneres Mittel eintritt.

II. Wenn ich nunmehr zur Mechanik der Aetherkörperschwingungen in absorbirenden Mitteln übergehe, so sehe ich den intermolekularen Aether derselben als gleichartig an mit dem Weltäther, lege also beiden gleiche Elasticität und Dichtigkeit bei und nehme daher an, dass das einzelne Körpertheilchen trotz verhältnissmässig grosser Masse nur einen verschwindend kleinen Raum einnimmt. Dies vorausgesetzt, heisse m die in der Volumeneinheit enthaltene Aethermasse, m' die in derselben befindliche optisch-chemisch einfache Körpermasse, die Schwingungscomponenten der Aethertheilchen seien ξ , η , ζ , die der Körpertheilchen ξ' , η' , ζ' , die respectiven Amplituden $\mathfrak{A}_x \dots$, $\mathfrak{A}_y \dots$, und es bedeute endlich e die Deformationsconstante des Weltäthers. Ich habe nun gefunden, dass zwischen diesen Grössen, und zwar sowohl für anisotrope wie isotrope Mittel, die Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} & m \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} d\mathfrak{A}_x + \frac{d^2 \eta}{dt^2} d\mathfrak{A}_y + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} d\mathfrak{A}_z \right) \\ \text{V.} \quad & + \sum m' \left(\frac{d^2 \xi'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_x + \frac{d^2 \eta'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_y + \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} d\mathfrak{A}'_z \right) \\ & = e (A_2 \xi d\mathfrak{A}_x + A_2 \eta d\mathfrak{A}_y + A_2 \zeta d\mathfrak{A}_z), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Es ist also die Summe der Schwingungsarbeiten der Aether- und Körpertheilchen, gemessen durch die Beschleunigungen, gleich der Schwingungs-

arbeit des Aethers, gemessen durch die Deformation desselben.¹⁾

Die Integrale dieser Gleichung sind für die Aethertheilchen die früheren Ausdrücke (III), für die Körpertheilchen die nämlichen Ausdrücke, wenn die bezüglichen Amplituden $\mathfrak{U}'_x \dots$, und Verzögerungen $\psi'_x \dots$ durch Accentuirung von \mathfrak{U}_x und ψ_x unterschieden werden. Es durchlaufen demnach die Körpertheilchen wie die Aethertheilchen im allgemeinen elliptische Bahnen.

Substituirt man statt der Wegelemente die ihnen proportionalen Amplituden und beachtet bei Ausführung der Rechnung, dass die Grössen m , c mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v des Weltäthers durch die Beziehung verknüpft sind:

$$c = mv^2,$$

so gewinnt man nach Eliminirung der laufenden Zeit und Wiederezusammenfassung der Theilausdrücke die symbolische Form:

$$\begin{aligned} & v^2 - q^2 - 1 + 2\nu q \cos \varrho \sqrt{-1} = \\ (9) \quad & \frac{\sum m' [\mathfrak{U}'_x{}^2 (\cos \psi'_x + \sqrt{-1} \sin \psi'_x) + \mathfrak{U}'_y{}^2 (\cos \psi'_y + \sqrt{-1} \sin \psi'_y) + \dots]}{m [\mathfrak{U}_x{}^2 (\cos \psi_x + \sqrt{-1} \sin \psi_x) + \mathfrak{U}_y{}^2 (\cos \psi_y + \sqrt{-1} \sin \psi_y) + \dots]} \end{aligned}$$

Darin bedeutet ϱ den Winkel zwischen Extinctions- und Propagationsnormale, sodass:

$$\cos \varrho = uu' + vv' + ww'.$$

Reducirt man endlich die beschleunigenden und bewegenden Kräfte der je zusammengehörigen Componenten auf gleiche Phase, indem man schreibt:

1) Dieser Satz unterscheidet sich von den bezüglichen, jüngst von Hrn. de Saint-Venant in den Ann. de chim. et de phys. (4) XXV. p. 335—381 beifällig besprochenen Sätzen Boussinesq's im wesentlichen dadurch, dass in letzteren nicht die Arbeiten der Kräfte, sondern diese selbst vorkommen.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_x^2 \cos \psi_x + \mathfrak{A}_y^2 \cos \psi_y + \mathfrak{A}_z^2 \cos \psi_z &= \mathfrak{A}^2 \cos \psi, \\
\mathfrak{A}_x^2 \sin \psi_x + \mathfrak{A}_y^2 \sin \psi_y + \mathfrak{A}_z^2 \sin \psi_z &= \mathfrak{A}^2 \sin \psi, \\
\mathfrak{A}'_x^2 \cos \psi'_x + \mathfrak{A}'_y^2 \cos \psi'_y + \mathfrak{A}'_z^2 \cos \psi'_z &= \mathfrak{A}'^2 \cos \psi', \\
\mathfrak{A}'_x^2 \sin \psi'_x + \mathfrak{A}'_y^2 \sin \psi'_y + \mathfrak{A}'_z^2 \sin \psi'_z &= \mathfrak{A}'^2 \sin \psi',
\end{aligned}$$

ersetzt also die gegebene elliptische Schwingung durch eine äquivalente restaurirte von gleicher Schwingungsarbeit mit den neuen Amplituden \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' und Anomalien ψ , ψ' , so schreibt sich kürzer:

$$\begin{aligned}
v^2 - q^2 - 1 + 2\nu q \cos \varrho \sqrt{V-1} = \\
\frac{Zm' \mathfrak{A}'^2 [\cos(\psi' - \psi) + \sqrt{V-1} \sin(\psi' - \psi)]}{m \mathfrak{A}^2}.
\end{aligned}$$

Man hat folglich:

$$\begin{aligned}
(10) \quad v^2 - q^2 - 1 &= \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos(\psi' - \psi)}{m \mathfrak{A}^2} \\
2\nu q \cos \varrho &= \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \sin(\psi' - \psi)}{m \mathfrak{A}^2}
\end{aligned}$$

Sofern nun die rechten Seiten dieser Gleichungen die gegebene Fortpflanzungsrichtung des Mittels in absoluter Weise charakterisiren, also insbesondere von ϱ unabhängig sind, so hat man:

$$(11) \quad v^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad \nu q \cos \varrho = ab,$$

wo a und b zwei Constanten sind, nämlich diejenigen Specialwerthe von ν und q , die $\varrho = 0$ entsprechen. Die Bedeutung derselben ist also folgende. Ist allgemein $\varrho = 0$, läuft die Wellenebene der Absorptionsebene parallel, so sind a der zugehörige Refractions- und b der Extinctionscoëfficient, beide folglich von der Incidenz unabhängig. Ist dagegen $u' = v' = 0$, $w' = 1$ und sonach $\varrho = r = \arccos w$, so entsprechen a und b dem senkrechten Einfall $r = e = 0$. Für jede andere Incidenz e leitet man dann ab:

$$\begin{aligned}
2\nu^2 &= a^2 - b^2 + \sin^2 e + \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 e)^2 + 4a^2 b^2}, \\
q &= \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 e}}.
\end{aligned}$$

Nunmehr lässt sich obige Gleichung auf die Form bringen:

$$(a + b\sqrt{-1})^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 (\cos A + \sqrt{-1} \sin A)}{m \mathfrak{A}^2},$$

oder kürzer:

$$\text{VI.} \quad n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2}{m \mathfrak{A}^2},$$

sodass die beiden Constanten a , b , die fortan als der Hauptrefractions- und Hauptextinctionscoefficient bezeichnet werden sollen, als die Charakteristik eines complexen Brechungsverhältnisses n behandelt werden dürfen.

Wenn ich in verschiedenen Abhandlungen dem Systeme der Gleichungen (V) und (VI) den Rang eines dioptrischen Grundgesetzes beigelegt habe, so veranlassten dazu die folgenden Erwägungen:

1. Der ihm zu Grunde liegende Satz ist a priori einzusehen. Denn solange eine Welle von bestimmter Aetheramplitude, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsdauer zu Stande kommt, solange leistet die Elasticität des Aethers die gleiche Arbeit, mögen nun die von ihm angeregten mitschwingenden Körpertheilchen gleiche oder verschiedene Amplitude und Schwingungsdauer erlangen, und mögen sie der Bewegung Widerstand leisten oder nicht.

2. Für ideell durchsichtige Mittel liefern diese Gleichungen bei Anwendung des Principes der Erhaltung der lebendigen Kräfte eine (quadratische) Beziehung, welche mit den übrigen (linearen) Uebergangsbedingungen verträglich ist.¹⁾

3. Für bewegte durchsichtige Mittel gilt nicht bloss das Nämliche, sondern sie begründen auch die durch die Erfahrung bestätigte, zuerst von Fresnel nachgewiesene Modification der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.²⁾

4. Für total reflectirende Combinationen liefern sie direct den von Cauchy auf indirectem Wege mittelst

1) Vgl. unten. Ferner Wied. Ann. I. p. 219. 1877.

2) Vgl. unten. Ferner Wied. Ann. I. p. 556. 1877; III. p. 297. 1878 und des Verfassers Astron. Undulationstheorie. Bonn 1873.

complex gewordener Amplituden erhaltenen Extinctions-index des streifenden Strahles.¹⁾

5. Für absorbirende Mittel endlich, insbesondere für die Erscheinungen der Metallreflexion stimmen ebenso die mit Beihülfe der Beziehungen (11) mittelst der obigen Grenzgleichungen abgeleiteten Reflexionsformeln mit den indirect von Cauchy abgeleiteten überein.²⁾

Was schliesslich die experimentelle Ermittlung der Charakteristik a , b betrifft, so hat man mit der Aufsuchung der Hauptincidenz, als deren Bedingung oben:

$$(6b) \quad p^2 + q^2 = \sin^2 e \operatorname{tg}^2 e$$

gefunden wurden, die Kenntniss des Hauptazimuths h , für welches sich mittelst der Grenzgleichungen:

$$\operatorname{tg} \vartheta_z = \frac{q}{p} = \operatorname{tg} 2h$$

ergibt, zu verbinden, um sowohl p als q getrennt zu erhalten und die so gefundenen Werthe in Gleichung (11) zu substituiren.

Die vorstehende Entwicklung umfasst ferner ebenso die anisotropen wie die isotropen Mittel. Hält man fest an der früher gegebenen Definition der Strahl- und Normalcylinder als unendlich enger gerader Cylinder, die resp. um die Richtung des Strahles und der Normalen herumgelegt sind, und unterscheidet man die Bestimmungsstücke der Integralausdrücke (III), sofern sie sich auf die Normale beziehen sollen, durch angehängte n von denen der Strahlrichtung, so passt allerdings die Differentialgleichung (V) nur auf die Strahlcylinder.

Nichtsdestoweniger liesse sich der zunächst gleichfalls für den Strahl geltenden Gleichung (VI), nämlich:

$$(13a) \quad n^2 = \frac{m \mathfrak{A}^2 + \sum m' \mathfrak{A}'^2}{m \mathfrak{A}^2}$$

1) Wied. Ann. III. p. 91–93. 1878.

2) Wied. Ann. III. p. 95–103 und 284–297. 1878.

für die Normale die analoge Beziehung zuordnen:

$$(13b) \quad n_n^2 = \frac{m \mathfrak{U}_n^2 + \sum m' \mathfrak{U}'_n^2}{m \mathfrak{U}_n^2}.$$

Identificirt man nämlich diese Ausdrücke dadurch, dass man setzt:

$$(14) \quad \frac{n}{n_n} = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{\mathfrak{U}_n}{\mathfrak{U}} = \cos \delta,$$

$$m \mathfrak{U}_n^2 + \sum m' \mathfrak{U}'_n^2 = m \mathfrak{U}^2 + \sum m' \mathfrak{U}'^2,$$

unter δ den Winkel zwischen Strahl und Normale verstanden, so sind diese Bedingungen im Einklange mit der in der vorhergehenden Abhandlung dargelegten Auffassung.

Hiernach unterliegt es nun wohl keinem Zweifel, dass sich zunächst auch für den Uebergang des Lichtes zwischen anisotropen Mitteln die Strahl- wie die Normalcylinder zur Formulirung der Grenzgleichungen verwerthen lassen werden. Man gelangt in der That wenigstens für den speciellen Fall der durchsichtigen Mittel mit beiden zum Ziele. Nennt man U_s , V_s , W_s die Cosinus der Winkel zwischen der (virtuellen) Schwingungsrichtung innerhalb der Strahlcylinder und den Axen, Θ den Azimuthwinkel zwischen der Schwingungs- und Einfallsebene als XZ -Ebene, und bedeutet r den Brechungswinkel der Normalen, so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} U_s &= -\sin \delta \sin r + \cos \delta \cos r \cos \Theta, \\ V_s &= +\cos \delta \sin \Theta, \\ W_s &= -\sin \delta \cos r - \cos \delta \sin r \cos \Theta, \\ u_s &= +\cos \delta \sin r + \sin \delta \cos r \cos \Theta, \\ v_s &= +\sin \delta \sin \Theta, \\ w_s &= \cos \delta \cos r - \sin \delta \sin r \cos \Theta. \end{aligned}$$

Bezieht man nun unter der Annahme $q=0$ die drei letzten der Gleichungen (I) einmal auf die Strahl- und alsdann auf die Normalcylinder der aus dem Weltäther kommenden gebrochenen Strahlen, so entstehen vermöge der aus Gleichung (14) ableitbaren Beziehung:

$$\mathfrak{A}_s n_s = \mathfrak{A}_n n_n = \mathfrak{D} n,$$

sechs Gleichungen, die zu je zwei identisch sind, nämlich:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E} \cos \theta_E - \mathfrak{R} \cos \theta_R = \Sigma \mathfrak{D} n \cos \theta_D \\ (15) \quad & \mathfrak{E} \sin \theta_E + \mathfrak{R} \sin \theta_R = \Sigma \mathfrak{D} n \sin \theta_D \\ & \cos e (\mathfrak{E} \sin \theta_E - \mathfrak{R} \sin \theta_R) = \Sigma \mathfrak{D} n \sin \theta_D \cos r. \end{aligned}$$

Zu diesen drei Gleichungen fügen wir als vierte die Gleichung der lebendigen Kräfte. Wird dieselbe auf die während der Zeiteinheit gewonnenen Totalenergien der Aether- und Körpertheilchen angewandt, so erhält sie zunächst die Form:

$$M(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = \Sigma (M_D \mathfrak{D}^2 + \Sigma M'_D \mathfrak{D}'^2),$$

unter \mathfrak{D} , \mathfrak{D}' die Amplituden der Aether- und Körpertheilchen, und unter M , M_D die äquivalenten Volumina verstanden. Diese letzteren sind proportional den Huygens'schen Prismen, d. h. der Gesamtheit der Strahlcylinder, welche von der Trennungsfläche ausgehen und durch die resp. Wellenebenen abgeschnitten werden.

Es sei O der erste, D der letzte (nach Verlauf der Zeiteinheit erschütterte) Einfallspunkt der ankommenden Welle, die Richtung der gebrochenen Normalen sei OA , die des Strahles OB , und es stehe Ebene DAB senkrecht auf der Einfallsebene. Dieselbe ist alsdann die gebrochene Wellenebene, welcher Punkt B als Contactpunkt der Wellenfläche und Richtung AB als Schwingungsrichtung entspricht, sodass Winkel $BAD = \theta$. Fällt man nun von B auf die Einfallsebene das Perpendikel BC und von C auf OD ein zweites CE , dann ist $CE = CD \sin r$ die Höhe des bezüglichen Prisma und zugleich das Maass für sein Volumen M . Directer gewinnt man diese Höhe durch die Projection des rad. vect. OB auf die Z -Axe. Dieselbe beträgt:

$$M_D = \omega_n \cos r (1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r \cos \theta) = \omega_s \omega_s.$$

Sowie es bezüglich dieses Volumens an sich gleichgültig ist, ob man dasselbe in elementare Strahl- oder Normalcylinder zerlegt denkt, so ist es ferner zufolge Be-

ziehungen (13) und (14) ebenso gleichgültig, ob man die Amplituden \mathfrak{D} der Aethertheilchen als in der Strahl- oder Normalebene gelegen ansieht und die Körpertheilchen mittelst der ersten oder zweiten jener Gleichungen eliminirt. Man erhält jedenfalls:

$$(16) \quad (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) \sin e \cos e = \Sigma \mathfrak{D}^2 n^2 \sin r \cos r (1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r \cos \Theta).$$

Sofern nun das System der vier Bedingungen (15) und (16) zur Einzelberechnung der Amplituden und Azimuthe der gespiegelten und gebrochenen Wellen genügt, so leisteten sonach Strahl- und Normalcylinder bezüglich des Ueberganges des Lichtes die gleichen Dienste.

Multiplicirt man noch die zweite und dritte der Gl. (15), subtrahirt das Product von Gl. (16) und dividirt den verbleibenden Rest durch die erste der Gl. (15), so erhält man, wie insbesondere für die sogenannten uniradialen Azimuthe ohne weiteres einleuchtet:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E} \cos \Theta_E + \mathfrak{H} \cos \Theta_R) \cos e &= \Sigma \mathfrak{D}_s (-\sin \delta \sin r + \cos \delta \cos r \cos \Theta) \\ &= \Sigma \mathfrak{D}_n \cos \Theta \cos r \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r}{\cos \Theta} \right). \end{aligned}$$

Man kann die erstere dieser Beziehungen auf die Form bringen:

$$(\mathfrak{E} \cos \Theta_E + \mathfrak{H} \cos \Theta_R) \cos e = \Sigma \mathfrak{D}_s U_s$$

oder:

$$(17) \quad \xi_E + \xi_R = \Sigma \xi_D^s \quad | \quad z = 0,$$

welche Gleichung dem auf die Strahlcylinder bezogenen Fresnel-Neumann'schen Continuitätsprincip entsprechen würde.

Die zweite Gleichung schreibt sich dagegen auch so:

$$(18) \quad \frac{d\xi_E}{dz} + \frac{d\xi_R}{dz} = \Sigma \frac{d\xi_D}{dz} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r}{\cos \Theta} \right), \quad | \quad z = 0;$$

sie wird mit der ersten der Gl. (I) identisch, sobald man darin für die einfallende und gespiegelte Welle $\alpha=1$ und für die gebrochenen setzt:

$$(19) \quad \alpha = 1 - \frac{\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r}{\cos \Theta}.$$

Diese zweite Form enthält sonach die linearen Dilatationen der Normalschwingungen senkrecht zur Trennungsfläche, und es erscheint darin der Coëfficient α als unabhängig vom Doppelbrechungsvermögen, vom Brechungswinkel und vom Schwingungsazimuth. Seine geometrische Construction ist folgende.

Man verlängere die Schwingungsrichtung BA , welche mit dem Durchschnitte CD von Wellenebene und Einfallsebene den Winkel Θ bildet, und fälle darauf vom Einfallspunkte D aus das Perpendikel DF . Alsdann ist:

$$AB = AO \cdot \operatorname{tg} \delta = \omega_n \operatorname{tg} \delta$$

$$AF = AD \cos \Theta = -\omega_n \operatorname{ctg} r \cos \Theta$$

und sonach:

$$\frac{AB}{AF} = -\frac{\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r}{\cos \Theta},$$

sodass kommt:

$$\alpha = 1 + \frac{AB}{AF} = \frac{BF}{AF}.$$

Dem entsprechend hat man die Dilatation der Normalschwingungen parallel der Z -Axe im Verhältnisse der Linien $BF:AF$ zu vergrössern; ihre auf beide gebrochene Wellen ausgedehnte Summe ist dann der parallelen Dilatation im ersten Mittel gleich. Sonach hat von den beiden Linien:

$$CD = \omega_n \operatorname{ctg} r (1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r \cos \Theta),$$

$$BF = \omega_n \operatorname{ctg} r (\cos \Theta - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} r),$$

die zweite eine ähnliche Bedeutung bezüglich der Gleichheit der Dilatationen wie die erstere bezüglich der Gleichheit der lebendigen Kräfte.

Geht man jetzt von ideell durchsichtigen zu absorbierenden Mitteln zurück, sodass das Princip der lebendigen Kräfte seine Anwendbarkeit verliert, so wird auch zugleich die durch Gl. (17) ausgesprochene Continuitätsbedingung hinfällig. Man kann nämlich das Brechungsverhältniss n als complexe Grösse ansehen, deren Charakteristik a, b durch die Ausdrücke 10 bestimmt ist. Denkt man sich jetzt r und δ als Functionen von n und e , so werden die-

selben gleichfalls, und ebenso schliesslich U complex. Um also die Intensitätsbestimmung mit Hülfe der Strahlcylinder ausführen zu können, hat man das absorbirende Mittel unter die durchsichtigen zu subsumiren und die Bedeutung von a , b als gegeben vorauszusetzen.

Grössere Einfachheit und Vollständigkeit bieten in diesem Falle die Normalcylinder. Für sie behalten nicht nur die Grenzgleichungen der Drehungscomponenten, sondern ebenso die der Dilatation die reelle Form. Dass nämlich gerade auch der Coefficient α eine Function zwischen reellen Grössen bleibt, davon überzeugt man sich mittelst des weiter unten zu erweisenden Satzes, dass das Verhältniss des Hauptextinctions- und Hauptrefractionscoefficienten von der Orientirung unabhängig ist, wenigstens für die einfacheren Fälle¹⁾, leicht, da sowohl das eine wie das andere Verfahren zu den gleichen Endformeln hinführt.

Hiernach gelten denn die zunächst für isotrope Mittel gewonnenen Gleichungen (I) auch für beliebige Combinationen anisotroper Mittel, sofern man nur, entsprechend der Anzahl der reflectirten und gebrochenen Wellen, die unterdrückten Summenzeichen wiederherstellt und in die erste derselben die Dilatationscoefficienten α mit den ihnen nach Gl. (19) zukommenden Werthen einführt.

Wenn nun dem Bisherigen zufolge für den Uebergang des Lichtes die Bedeutung der Normalcylinder überwiegt, so vereinfachen dagegen die Strahlcylinder die Formulirung der Differentialgleichungen der innern Bewegung.

Von besonderem Gewichte ist dieser Umstand für die Entwicklung der Wellenfläche bewegter doppelt brechender Mittel. Um nämlich die Gesetze der Aberrationserscheinungen in Krystallen, wie ich sie empirisch aus

1) Wied. Ann. III. p. 106—112. 1878. Die Anwendung dieses Satzes führt zu einer erheblichen Vereinfachung der dort entwickelten Formeln.

eigens angestellten Versuchen ¹⁾ ableiten konnte, theoretisch zu begründen, dazu bedarf es einer doppelten Erwägung.

Es ist nämlich erstens kraft des Doppler'schen Princip's die Schwingungsdauer der Aether- und Körpertheilchen in den bisherigen Differentialgleichungen verschieden zu nehmen. Und zwar übersieht man, dass die Differenz beider durch den Winkel zwischen der Strahlrichtung als der thatsächlichen Fortpflanzungsrichtung und der Translationsrichtung bedingt ist, derart nämlich, dass sie im Maximum ist, wenn diese beiden Richtungen zusammenfallen, dagegen verschwindet, wenn sich dieselben rechtwinkelig kreuzen. Daraus ergibt sich denn mit Evidenz, dass das Operiren mit der Strahlrichtung auf einfacherem Wege zum Ziele führt als das Operiren mit der Normalen, und dass das letztere zugleich den Begriff des Strahles als primär gegeben voraussetzen muss. Zweitens tritt bei der Translation vermöge der von mir sogenannten „inneren Aberration der Anisotropie“ an die Stelle einer bestimmten Krystallrichtung mit ihrem zugehörigen charakteristischen Amplitudenverhältnisse eine benachbarte andere in die zu untersuchende feste Richtung des Raumes.

Man denke sich nun der Einfachheit wegen einen unendlich ausgedehnten Hauptschnitt eines einaxigen Krystalles und lasse auch die Translationsrichtung in denselben hineinfallen. Wir beschränken uns auf extraordinäres Licht, bezeichnen das Geschwindigkeitsverhältniss des Strahles für eine und dieselbe Krystallrichtung durch n' für den Zustand der Bewegung, durch n für den Zustand der Ruhe und nehmen wie bei isotropen Mitteln an, dass das Amplitudenverhältniss ($A':\mathfrak{A}$) ungeändert bleibt. Die optische Axe mache mit der Richtung des Strahles den Winkel γ und mit der der Translation den Winkel ψ .

Dies vorausgesetzt, tritt an die Stelle der Integralgleichung (VI) die allgemeinere folgende:

$$(20) \quad n'^2 - 1 = \sum \frac{m' A'^2}{m \mathfrak{A}^2} \frac{T^2}{T'^2},$$

1) Pogg. Ann. CXLVII. p. 404—429. 1872.

wo T die Schwingungsdauer der Aethertheilchen, T' die der Körpertheilchen bedeutet. Man hat dann weiter:

$$\Sigma \frac{m' A'^2}{m A^2} = n^2 - 1, \quad \frac{T}{T'} = 1 - \frac{g}{\omega} \cos(\psi - \gamma),$$

sofern nämlich das Verhältniss der Schwingungsdauern entsprechend dem Doppler'schen Princip¹⁾ auf ein Verhältniss der Componente der Translationsgeschwindigkeit g parallel der Strahlrichtung und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω' im intermolecularen Aether zurückgeführt wird. Wir werden im Folgenden die höheren Potenzen des kleinen Bruches $\frac{g}{\omega}$ vernachlässigen, sodass sich also schreiben lässt:

$$(21) \quad n^2 - 1 = (n^2 - 1) \left(1 - 2 \frac{g}{\omega} \cos(\psi - \gamma) \right).$$

Ist nun der leuchtende Punkt in relativer Ruhe zu den Körpertheilchen, so lassen sich die rad. vect. der Wellenfläche, sowie diese selbst am leichtesten auf dem zusammenhängenden Gerippe der Körpertheilchen markiren. In diesem Sinne ist vorstehende Gleichung, die sich auch auf die Form bringen lässt:

$$(22) \quad n' = n \left(1 - \frac{gk}{\omega} \cos(\psi - \gamma) \right), \quad n^2 = n_1^2 \sin^2 \gamma + n_2^2 \cos^2 \gamma,$$

$$k = \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad \omega' = \omega + gk \cos(\psi - \gamma),$$

zugleich die Gleichung der Wellenfläche. Die Verlängerung oder Verkürzung der rad. vect. erfolgt sonach in anisotropen wie isotropen Mitteln nach dem gleichen Gesetze.

Denkt man sich dagegen den Erschütterungsmittelpunkt in relativer Ruhe zu den Aethertheilchen und fixirt dem entsprechend die Strahlengeschwindigkeit durch den Aether, so bleibt noch zu beachten, dass durch eine feste Richtung γ_0 des Raumes gleichzeitig mit der undulatorischen Strahlbewegung die ponderablen Theilchen einer Krystallrichtung γ hindurchgehen, deren Lage durch den Aberrationswinkel:

1) Wied. Ann. I. p. 589. 1877.

$$\alpha = \frac{g}{\omega} \sin(\psi - \gamma_0)$$

bestimmt ist. Und wäre ebenso umgekehrt γ bekannt, so findet man γ_0 mittelst der Beziehung:

$$\gamma_0 = \gamma + \alpha.$$

Mit Rücksicht hierauf schreibt sich der Ausdruck für n^2 nun auch so:

$$\begin{aligned} n^2 &= n_1^2 \sin^2(\gamma_0 - \alpha) + n_2^2 \cos^2(\gamma_0 - \alpha) \\ &= n_1^2 \sin^2 \gamma_0 + n_2^2 \cos^2 \gamma_0 - 2(n_1^2 - n_2^2) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \alpha. \end{aligned}$$

Und coordinirt man schliesslich der Richtung γ_0 für den Ruhezustand des Mittels das Geschwindigkeitsverhältniss n_0 , so erhält jetzt die Gl. (21) die Form:

$$n'^2 - 1 = [n_0^2 - 1 - 2(n_1^2 - n_2^2) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \alpha] \left(1 - 2 \frac{g}{\omega} \cos(\psi - \gamma_0) \right)$$

und bei der Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} n'^2 &= n_0^2 - 2 \frac{g}{\omega} [(n_0^2 - 1) \cos(\psi - \gamma_0) + (n_1^2 - n_2^2) \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \sin(\psi - \gamma_0)] \\ &= n_0^2 - 2 \frac{g}{\omega} [(n_1^2 - 1) \sin \psi \sin \gamma_0 + (n_2^2 - 1) \cos \psi \cos \gamma_0]. \end{aligned}$$

Lässt man im Folgenden die angehängten $_0$ fort, ersetzt die Geschwindigkeitsverhältnisse durch die Geschwindigkeiten selbst und führt für die axialen Richtungen die Coefficienten k_1, k_2 ein, so erhält man nach Ausziehung der Wurzel:

$$(23) \quad \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{\omega_2^2}} - g \left(\frac{k_1}{\omega_1^2} \sin \psi \sin \gamma + \frac{k_2}{\omega_2^2} \cos \psi \cos \gamma \right).$$

Es ist dies die Gleichung der Wellenfläche des bewegten anisotropen Mittels, bezogen auf die ruhenden Aetherpunkte. Um dieselbe auch in Punktcoordinaten auszudrücken, setze man noch:

$$y = \omega' \sin \gamma, \quad x = \omega' \cos \gamma.$$

Alsdann ergibt sich leicht:

$$(23b) \quad \omega_2^2 (y - g k_1 \sin \psi)^2 + \omega_1^2 (x - g k_2 \cos \psi)^2 = \omega_1^2 \omega_2^2.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind identisch mit den in meiner Astronomischen Undulationstheorie (p. 176) direct aus der Erfahrung abgeleiteten Gleichungen (67) und (65).

Der hier entwickelten Strahlengeschwindigkeit ω' in der Richtung γ ordnet sich eine Normalgeschwindigkeit ω'_n längs der Richtung χ zu, die sich darstellt als ein vom Centrum auf die bezügliche Tangentialebene gefälltes Perpendikel. Sie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$(24) \quad \omega'_n = \sqrt{\omega_1^2 \sin^2 \chi + \omega_2^2 \cos^2 \chi} \\ + g (k_1 \sin \psi \sin \chi + k_2 \cos \psi \cos \chi).$$

Den Versuch einer unmittelbaren theoretischen Begründung desselben findet man in meinem Buche p. 212 bis 216; sie ist weniger anschaulich und zugleich umständlicher, sofern nämlich die Schwingungsdauern der Aether- und Körpertheilchen, welche in der Richtung χ der gleichen Sinusoide angehören, in dem Verhältnisse stehen:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)_n = 1 - \frac{g \cos(\psi - \gamma)}{\omega_n \cos(\gamma - \chi)}.$$

In der That sind es also hier die Strahlcylinder, welche mittelst der einfacheren Voraussetzungen zum Ziele führen.

(Schluss folgt.)

VIII. *Ueber das Sauerstoffspectrum und über die electricen Lichterscheinungen verdünnter Gase in Röhren mit Flüssigkeits-electroden;* von A. Paalzow.

(Aus dem Monatsberichte der Königl. Akademie d. Wiss. zu Berlin.
31. Oct. 1878 vom Hrn. Verfasser mitgetheilt.)

Die electricen Lichterscheinungen verdünnter Gase werden in der Regel so untersucht, dass den in Glasröhren eingeschlossenen Gasen durch eingeschmolzte Metalldrähte die Electricität zugeführt wird. Da die Metalle leicht

einen Einfluss auf die Erscheinungen ausüben können, habe ich es versucht, zwischen Metall und Gas eine Flüssigkeit einzuschieben, um dadurch gewissermassen Flüssigkeitselectroden zu bilden.

Ein zweimal rechtwinkelig gebogenes Glasrohr enthielt in seinen weiteren Theilen eingeschmelzte Platindrähte und concentrirte Schwefelsäure, welche die Platindrähte um 1 cm überragte. Das Rohr wurde an eine Quecksilberluftpumpe angeschmolzt, deren Trockengefäß mit fester Phosphorsäure gefüllt war.

Nachdem die in dem Rohre und der Pumpe enthaltenen Gase soweit verdünnt waren, dass ein Inductionsstrom hindurchgehen konnte, wurden die eingeschmelzten Platindrähte mit den Polen eines Ruhmkorff'schen Inductoriums verbunden, das, durch vier Bunsen erregt, eine Schlagweite von 71 mm und an einer Spiegelbussole einen Ausschlag von 50 Scalentheilen gab. (Ein constanter Strom von 0,000 35 Siemens-Daniell'schen Einheiten gab an derselben Bussole mit denselben Spiralen einen Ausschlag von 100 Scalentheilen. Aus der Schwingungsdauer des gedämpften Magnets und aus seinem logarithmischen Decrement berechnete sich der Werth der 50 Scalentheile des momentanen Stromes zu 0,000 013 S.-D.-Einheiten.)

Die Lichterscheinungen, welche unter diesen Verhältnissen in der Röhre beobachtet werden, sind im allgemeinen denen ähnlich, die man in Röhren sieht, deren Drähte mit Metallscheiben versehen sind.

Das positive Licht geht von der Begrenzungslinie der Flüssigkeitsoberfläche und der Glaswand aus und verbreitet sich in (je nach der Stärke des Gasdruckes) engeren und weiteren Schichten bis in die Nähe der negativen Flüssigkeit.

Von der negativen Flüssigkeitsoberfläche selbst erhebt sich in einigem Abstände von derselben ein schwach conischer Lichtring, ähnlich wie die Flamme eines ringförmigen Brenners. Die Intensität dieses Lichtringes nimmt von unten nach oben ab. Je mehr die Verdünnung wächst,

um so mehr verlängert sich dieser negative Lichtcylinder, und um so grösser wird sein Abstand von der Flüssigkeitsoberfläche. Bei der stärksten Verdünnung sind die Lichterscheinungen an beiden Polen fast gleich. Das negative Licht tritt auch auf an den Verengerungsstellen der Röhre.¹⁾ Bei einer Neigung des ganzen Rohres, sodass die Flüssigkeitsflächen von Ellipsen begrenzt werden, geht das positive Licht von der höchsten Stelle der Begrenzung aus, das negative ist am intensivsten im tiefsten Punkte der Begrenzung, der ganze Lichtring bleibt jedoch der Röhrenwand parallel.

Die magnetische Ablenkung des positiven und negativen Lichtes ist dieselbe wie die in den vorher erwähnten Röhren mit Metallscheiben.

Die ganze Röhre ist ausserdem erfüllt mit diffusem nachleuchtendem Lichte, welches bei Anwesenheit von Stickstoff grünlich (nach Morren herrührend von einer Bildung oder Zersetzung der Verbindung $\text{NO}_3 + 2\text{SO}_3$), ohne denselben bläulich ist und dann vielleicht von den Dämpfen der Schwefelsäure herrührt. Dieses Licht lässt sich isoliren und liefert dann ein continuirliches Spectrum.

Der ganze Lichtprocess ist begleitet von einer Zersetzung der Schwefelsäure, von allen Theilen der eingetauchten Platindrähte sieht man Glasblasen aufsteigen. Der positive Platindraht liefert Sauerstoff, die positive Flüssigkeitsoberfläche Wasserstoff, umgekehrt auf der negativen Seite. Dafür, dass eine Trennungsfläche zwischen Flüssigkeit und Gas als Electrode angesehen werden kann, lassen sich verschiedene andere Beispiele anführen. Hier sprechen ganz besonders die Occlusionerscheinungen dafür.²⁾ Hat man nämlich lange Zeit den Strom hindurchgehen lassen, so liefert schon ein Inductionsstoss in derselben Richtung deutliche Gasblasen, kehrt man nun den Strom um, so bedarf es bei der mit Sauerstoff geladenen Electrode wohl 7—9 Inductionsstösse, ehe die Gas-

1) Goldstein, Berl. Monatsber. Mai 1876. p. 279.

2) Helmholtz, Pogg. Ann. CL. p. 483. 1873.

blasen beobachtet werden, bei der mit Wasserstoff geladenen dagegen wohl 15—17.

Wurde der electrolytische Process wochenlang fortgesetzt, so erhielt man in der Röhre überwiegend nur Sauerstoff. Primär wird immer noch Sauerstoff und Wasserstoff ausgeschieden, der letztere aber fällt schliesslich den Schwefel aus der Schwefelsäure, der die Flüssigkeit anfangs trübt und dann zu Boden fällt.

Um das complicirte Spectrum zu entziffern und zu erklären, musste ich zwei neue Arbeiten ausführen, ein reines Sauerstoffspectrum herstellen und das Leitungsvermögen der reinen Gase: Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff bestimmen. Ich erlaube mir hier nur über das Sauerstoffspectrum zu berichten und behalte mir vor, über das Leitungsvermögen der genannten Gase später Mittheilungen zu geben.

In der Röhre konnten enthalten sein Stickstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Quecksilberdampf. Die Spectren von Wasserstoff, Quecksilber und Stickstoff sind zweifellos sicher bestimmt. Ueber das Sauerstoffspectrum sind die verschiedensten Resultate gegeben von: Plücker¹⁾, Wüllner²⁾, Salet³⁾, Vogel⁴⁾, Huggins⁵⁾, Plücker und Hittorf⁶⁾, Schuster.⁷⁾

Ich habe die zu untersuchenden Röhren mit Sauerstoff gefüllt:

1) nach der vorher geschilderten Methode durch Zersetzung der concentrirten Schwefelsäure durch den Inductionsstrom, wobei schliesslich fast nur Sauerstoff entwickelt wird;

2) indem an die Versuchsröhre ein Voltameter mit concentrirter Schwefelsäure angeschmolzt wurde — sechs Bunsen'sche Elemente wurden zur Zersetzung verwandt;

1) Pogg. Ann. CVII. p. 497. 1859.

2) Pogg. Ann. CXXXV. p. 377. 1868.

3) Ann. de chim. et phys. (4.) XXVIII. p. 5. 1873.

4) Pogg. Ann. CXLVI. p. 569. 1872.

5) Philos. Trans. CLIV. p. 139. 1864.

6) Philos. Trans. CLV. p. 1. 1863.

7) Proc. Roy. Soc. XXVII. No. 187. p. 383. 1878.

3) eine Retorte mit chlorsaurem Kali, direct angeschmolzt, wurde erhitzt und lieferte der Versuchsröhre den Sauerstoff.

Gasometer und anderweitige Trockenapparate als den einzigen an der Luftpumpe mit fester Phosphorsäure habe ich schliesslich verwerfen müssen, da sie nie reine Resultate lieferten. Dichtungen der Stopfen und Hähne mit Talg, Kautschuk oder concentrirter Schwefelsäure gaben dieselben Resultate.

Füllen und Leeren der Gefässe und Pumpe wurde natürlich so lange wiederholt, bis die Erscheinungen constant wurden. (Allerdings gehörte öfter eine 40- bis 50-malige Wiederholung dazu.)¹⁾

Ich habe immer nur ein Sauerstoffspectrum gefunden, das aus fünf hellen Linien besteht.²⁾ Die Lage derselben habe ich mit einem Prisma nach einer Scala bestimmt, bei der:

<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>b</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	bei
35	50	69,5	74	87	117	liegt.

Wenn ich die fünf Linien von Roth an mit O_α , O_β , O_γ , O_δ , O_ϵ bezeichne, so sind die Lagen derselben a) für meinen Apparat, b) bei Bestimmung der Linien mit Hülfe des mir von Hrn. Kirchhoff geliehenen Spectralapparates nach der Kirchhoff'schen Tafel; endlich die durch Vergleichung derselben mit den Angström'schen Tafeln erhaltenen Wellenlängen λ :

	O_α	O_β	O_γ	O_δ	O_ϵ
<i>a</i> :	45	57,5	72	88,5	158
<i>b</i> :	935	1231	1625	2164	2489
λ :	602	558,2	519	481	453

1) Als Zeichen, dass die Röhren möglichst leer waren, benutzte ich das Auftreten des intensiven grünen Fluorescenzlichtes des Glases.

2) Zwischen O_β und O_γ sind drei, vor O_α vier und hinter O_ϵ ein breiter Lichtstreifen zu sehen, aber so schwach, dass sie mit den fünf Linien nie verwechselt werden können, ausserdem sind sie ganz ohne scharfen Rand und lassen sich auch mit dem 4-Prismenapparate nicht auflösen.

Die Intensität von O_γ ist die grösste, dann folgen O_β und O_δ , zuletzt O_ϵ und O_α . Die Linien sind scharf nach dem rothen Ende des Spectrums, verwaschen nach dem violetten. — Ihre Wellenlängen stimmen am besten mit denen von Hrn. Vogel, nur fehlt ihm O_α , wahrscheinlich weil der Druck des Gases nicht gross genug war. Die Plücker'schen Linien O_α und O_δ sind wohl Quecksilberlinien.

Entgegen der neuesten Angabe von Hrn. Schuster finde ich das Spectrum des reinen Sauerstoffs an beiden Polen ganz gleich. Auch beim Wasserstoff finde ich diese Identität, und beim Stickstoff nur eine Verstärkung zweier seiner Linien 95 und 125 der ersten Scala. Sind die Gase nicht rein, so können am negativen Pole andere Linien auftreten, weil an diesem Pole die ponderable Masse fortgeschleudert wird.

Absichtlich habe ich nur die einfachen Inductionsströme angewandt, weil bei den kurz dauernden heftigen Entladungen einer Leydener Flasche von den Electroden und Glaswänden Theile in den Entladungsstrom hineingetrieben werden können, die bei der ruhigen Entladung des einfachen Inductionsstroms unbetheiligt an ihrer Stelle bleiben. Jedenfalls halte ich die Frage über die vielfachen Spectren eines reinen Gases noch für eine offene und neige mehr dazu, jedem einfachen Gase nur ein Spectrum zuzuschreiben; beim Sauerstoff, den ich innerhalb der Druckvariationen von 200 mm bis zur äussersten Verdünnung verfolgen konnte, habe ich nie andere Linien gesehen, als die genannten fünf, diese am schönsten beim Drucke von 2 mm, von diesem nehmen sie nach beiden Seiten hin so ab, dass bei geringen und hohen Drucken nur ein Lichtschimmer zu sehen ist, dem ich nicht den Namen eines continuirlichen Spectrums geben möchte, viel eher den eines undeutlichen.