

13.

Umkehrung des Ptolomäischen Satzes.

(Von Herrn Professor Dr. Förstemann, zu Danzig.)

Im 8ten Bande dieses Journals S. 320. ist von mir eine Aufgabe vorgelegt worden, welche nichts anders, als die Umkehrung des Ptolomäischen Satzes über Vierecke, die einem Kreise eingeschrieben sind, fordert. Zwar sind von dieser Aufgabe in diesem Journale schon zwei verschiedene Auflösungen gegeben (Bd. 10. S. 41. und Bd. 11. S. 264.); gleichwohl halte ich die Mittheilung meiner eigenen Auflösung nicht für überflüssig.

Es seien a, b, c, d die Seiten, p, q die Diagonalen eines einem Kreise eingeschriebenen Vierecks, und zwar so, daß die Seiten a, c einander gegenüberliegen, wie auch b und d , und daß die Diagonale p die beiden Ecken verbinde, von denen die eine durch das Zusammenstoßen von a mit d , die andere durch das Zusammentreffen von b mit c gebildet wird, während q die übrigen Ecken verbinde. Dann gilt nicht bloß die Gleichung des Ptolomäischen Satzes:

$$pq = ac + bd,$$

sondern auch, wegen eines andern bekannten Satzes, die folgende

$$p:q = ad + bc : ab + cd.$$

Statt dieser beiden Gleichungen können wir schreiben:

$$\text{I. } ac + bd - pq = 0, \quad \text{oder } A = 0,$$

$$\text{II. } abp + cdq - adq - bcq = 0, \quad \text{oder } B = 0;$$

wenn wir nemlich setzen:

$$A = ac + bd - pq, \quad B = abp + cdq - adq - bcq.$$

Sind von einem Vierecke im Kreise die Seiten a, b, c, d gegeben, so kann man aus jenen Gleichungen p und q bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß durch Elimination von q und von p sich beziehlich für p und q reine quadratische Gleichungen ergeben, aus denen sich findet:

$$(\alpha.) \quad p = \sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)},$$

$$(\beta.) \quad q = \sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right)},$$

so, daß, wenn für a, b, c, d durchgängig positive Zahlen angenommen werden, für p nur ein einziger reeller Werth entsteht, und eben so auch für q ; indem es hier offenbar nicht nöthig ist, die negativen Werthe der Quadratwurzeln zu berücksichtigen.

Nun ergibt sich leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes: „Hat man ein Viereck, dessen Seiten und Diagonalen den Gleichungen (I.) und (II.) genügen, so kann durch die Eckpunkte desselben ein Kreis beschrieben werden.“ Ein Viereck im Kreise nemlich wird schon durch seine vier Seiten bestimmt; stellte man sich nun ein Viereck im Kreise mit den Seiten a, b, c, d vor, dessen Diagonalen p' und q' hießen, so müßte dasselbe auch den Gleichungen I. und II. genügen, nur p' und q' statt p, q geschrieben; vermöge der vorher betrachteten Natur der Gleichungen (α .) und (β .) müßte daher sein: $p = p', q = q'$, und, wie leicht daraus folgt, das Viereck aus a, b, c, d, p, q dem aus a, b, c, d, p', q' congruent, mithin jenes ebenfalls ein Viereck im Kreise.

Um nun den Satz zu beweisen: „Genügen die Seiten und Diagonalen eines Vierecks der Gleichung (I.), so ist das Viereck ein Viereck im Kreise,“ wird es darauf ankommen, zu beweisen: „Wenn die Seiten und Diagonalen der Gleichung (I.) genügen, so genügen sie auch nothwendig der Gleichung (II.).“

Dieses läßt sich aber folgendermaßen leisten. Da von den sechs Größen a, b, c, d, p, q schon fünf hinreichen, ein Viereck ganz im Allgemeinen zu bestimmen, so muß es eine Gleichung zwischen jenen sechs Größen geben, die bei jedem Vierecke Statt findet. Diese Gleichung ist folgende:

$$\left. \begin{aligned} & a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 d^2 + b^2 d^4 + p^4 q^2 + p^2 q^4 \\ & - a^2 b^2 c^2 - a^2 b^2 d^2 - a^2 c^2 d^2 - b^2 c^2 d^2 - a^2 c^2 p^2 - a^2 c^2 q^2 \\ & - b^2 d^2 p^2 - b^2 d^2 q^2 - a^2 p^2 q^2 - b^2 p^2 q^2 - c^2 p^2 q^2 - d^2 p^2 q^2 \\ & + a^2 b^2 p^2 + a^2 d^2 q^2 + b^2 c^2 q^2 + c^2 d^2 p^2 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Man findet diese Gleichung z. B. bewiesen in Carnot's Geometrie der Stellung, übersetzt von Schumacher Th. II. S. 258. Den in derselben links stehenden Ausdruck können wir aber, wie sich bei der Prüfung bestätigen wird, ausdrücken durch $AC + B^2$, wenn wir setzen: $C = (a^2 + c^2)(ac - bd + pq) + (b^2 + d^2)(-ac + bd + pq) - (p^2 + q^2)(ac + bd + pq)$, so, daß also geschrieben werden kann:

$$\text{III. } AC + B^2 = 0,$$

als Andeutung der allgemeinen Gleichung für die sechs Größen a, b, c, d, p, q bei jedem Vierecke.

Nun folgt leicht: „Findet bei einem Vierecke die Gleichung (I.) Statt, d. h. ist $A=0$, so gehet die bei ihm nothwendig Statt findende Gleichung (III.) über in $B^2=0$; es ist also auch $B=0$, d. h. auch (II.) findet Statt, und somit ist das Geforderte geleistet.

Nicht eben so unmittelbar läßt sich der durch die Gleichung (II.) ausgedrückte Satz umkehren; denn ist $B=0$, so folgt zwar $AC=0$, aber nicht nothwendig $A=0$. Auch kann man keinesweges die Umkehrung des Ptolomäischen Satzes so aussprechen: „Genügen die sechs Linien a, b, c, d, p, q den Gleichungen (I.) und (III.), so kann man aus ihnen ein Viereck im Kreise bilden.“ Denn, obgleich man für a, b, c, d beliebige reelle und positive Werthe annehmen, dann mittelst (α.) und (β.) reelle Werthe von p und q finden kann, welche nicht blofs den Gleichungen (I.) und (II.), sondern auch der Gleichung (III.) genügen, so wird doch nicht immer ein Viereck möglich sein, welches diese reellen Linien a, b, \dots enthält; das Viereck ist z. B. unmöglich, wenn man die Linien a, b, c, d so wählt, dafs eine derselben gröfser ist, als die Summe der übrigen.

Der Beweis, welcher für den hier bewiesenen Satz im 8ten Bande dieses Journals gegeben ist, scheint mir nicht genügend. Es ist darin von einer Bedingungsgleichung die Rede, welche für die sechs Größen a, \dots, q bei jedem Vierecke statt finden müsse. Diese Bedingungsgleichung, offenbar die hier mit (III.) bezeichnete, wird aber nicht aufgestellt, und nur bewiesen, sie müsse von $pq = ac + bd$ verschieden sein, so, dafs mittelst dieser beiden Gleichungen für gegebene Werthe von a, b, c, d sich die zugehörigen Werthe von p und q bestimmen lassen müßten. Es scheint aber hieraus nicht mit Sicherheit geschlossen werden zu können, dafs ein Viereck, welches die gegebenen Seiten a, b, c, d und die auf jene Art berechneten Diagonalen p und q enthält, ein Viereck im Kreise, also identisch mit dem durch a, b, c, d schon völlig bestimmten Vierecke im Kreise sein müsse. Könnten sich nicht, bei Auflösung der beiden in Rede stehenden Gleichungen, mehrfache Werthe von p und q ergeben? Nur dafs, wie oben gezeigt wurde, aus (I.) und (III.) auch (II.), dann aber aus (I.) und (II.) sich (α.) und (β.) ergeben, welche Gleichungen für

jede Diagonale nur einen einzigen Werth darbieten, scheint einen sichern Schluß möglich zu machen. Freilich würde man, auch ohne weitere Kenntniß der Beschaffenheit der Bedingungsgleichung (III.), sagen können: ein Viereck, das den Gleichungen (I.) und (III.) genüge, erfordere zu seiner Bestimmung vier Stücke, statt fünf; wollte man aber vielleicht hieraus folgern, es müsse ein Viereck im Kreise sein, so ginge dies eben so wenig an, wie, wenn man (so wie in einem Beweise des Parallelogramms der Kräfte im 1sten Bande dieses Journals geschehen) behauptete, ein Viereck, das durch drei Stücke bestimmbar sei, müsse durchaus ein Parallelogramm sein.