

Über ein Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten Legendreschen Transformation.

Von

C. Carathéodory in Smyrna.

1. Die Berechnung der verallgemeinerten Legendreschen Transformation, auf die ich in einer früheren Arbeit aufmerksam gemacht habe¹⁾, wird in vielen Fällen erleichtert durch die Bemerkung, daß diese Transformation, bei Vertauschung der griechischen mit den lateinischen Indizes invariant bleibt.

Hierunter ist folgendes zu verstehen:

Die verallgemeinerte Legendresche Transformation erhält man, wenn man aus zwei Reihen von je $(n\mu + 1)$ Veränderlichen

$$f, p_{i\alpha}; \varphi, \pi_{i\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \alpha = 1, 2, \dots, \mu),$$

die durch die Relation

$$(1) \quad f + \varphi = \sum_{i, \alpha} p_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$$

verbunden sind, zwei neue Reihen von ebenso vielen Veränderlichen $F, P_{i\alpha}; \Phi, \Pi_{i\alpha}$, mit Hilfe der folgenden Gleichungen berechnet:

$$(2) \quad a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - \sum_i p_{i\alpha} \pi_{i\beta}$$

$$(3) \quad f^{\mu-1} F = |a_{\alpha\beta}|$$

$$(4) \quad f^{\mu-1} P_{i\alpha} = \sum_{\varrho} \pi_{i\varrho} \bar{a}_{\alpha\varrho}$$

$$(5) \quad \varphi \Pi_{i\alpha} = \sum_{\sigma} p_{i\sigma} a_{\alpha\sigma}$$

$$(6) \quad F + \Phi = \sum_{i, \alpha} P_{i\alpha} \Pi_{i\alpha}.$$

¹⁾ Über die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale, diese Zeitschrift 85, S. 78–88.

Hierbei laufen die lateinischen Indizes durchweg von 1 bis n , die griechischen durchweg von 1 bis μ und $\bar{a}_{\alpha\beta}$ bedeutet das algebraische Komplement von $a_{\alpha\beta}$ in der Determinante $|a_{\alpha\beta}|$; ferner bedeutet $\delta_{\alpha\beta}$ Null oder Eins, je nachdem $\alpha \neq \beta$ oder $\alpha = \beta$ ist.

Vertauschen wir nun in diesen Formeln die lateinischen mit den griechischen Indizes, so würden wir zwei weitere Reihen von je $(n\mu + 1)$ Veränderlichen $F', P'_{i\alpha}$; $\Phi', \Pi'_{i\alpha}$ einzuführen haben, die durch folgende Formeln definiert werden:

$$(7) \quad b_{ij} = \delta_{ij} f - \sum_{\varrho} p_{i\varrho} \pi_{j\varrho}$$

$$(8) \quad f^{n-1} F' = |b_{ij}|$$

$$(9) \quad f^{n-1} P'_{i\alpha} = \sum_s \pi_{s\alpha} \bar{b}_{is}$$

$$(10) \quad \varphi \Pi'_{i\alpha} = \sum_t p_{t\alpha} b_{it}$$

$$(11) \quad F' + \Phi' = \sum_{i,\alpha} P'_{i\alpha} \Pi'_{i\alpha}.$$

Der Satz, den wir beweisen wollen, besagt nun, daß stets die Gleichungen

$$F' = F, \quad P'_{i\alpha} = P_{i\alpha}, \quad \Pi'_{i\alpha} = \Pi_{i\alpha}, \quad \Phi' = \Phi$$

bestehen.

2. Wir bemerken hierzu, daß man die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ durch eine $(n + \mu)$ -reihige Determinante folgendermaßen darstellen kann

$$|a_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ p_{j\alpha} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Multipliziert man in dieser letzten Determinante die mit dem Index j bezeichnete Kolonne mit $\pi_{j\beta}$, summiert über j und addiert die Summe zu der mit β bezeichneten Kolonne, so kommt, weil einerseits

$$\sum_j \delta_{ij} \pi_{j\beta} = \pi_{i\beta},$$

und andererseits nach (2)

$$a_{\alpha\beta} + \sum_j p_{j\alpha} \pi_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta} f$$

ist,

$$|a_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \pi_{i\beta} \\ p_{j\alpha} & \delta_{\alpha\beta} f \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplikation der n Zeilen mit dem Index i durch f und

Division der μ Kolonnen mit dem Index β durch dieselbe Größe enthält man ferner:

$$|a_{\alpha\beta}| = f^{\mu-n} \begin{vmatrix} \delta_{ij} f & \pi_{i\beta} \\ p_{j\alpha} & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Nun multipliziere ich die Kolonne mit dem Index β durch $-p_{j\beta}$, summiere über β und addiere diese Summe zu der Kolonne mit dem Index j ; es kommt mit Berücksichtigung von (7)

$$(12) \quad |a_{\alpha\beta}| = f^{\mu-n} \begin{vmatrix} b_{ji} & \pi_{i\beta} \\ 0 & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = f^{\mu-n} |b_{ji}|.$$

Wenn wir diese Gleichung mit (3) und (8) vergleichen, erhalten wir schließlich

$$(13) \quad F' = F.$$

3. Aus (7) folgt:

$$(14) \quad \sum_i b_{si} P_{sa} = \sum_i \delta_{si} f P_{sa} - \sum_{s,\varrho} p_{s\varrho} \pi_{i\varrho} P_{sa}.$$

Nun entnimmt man leicht aus (2), (3) und (4), daß folgende Relation besteht²⁾

$$\sum_s P_{sa} p_{s\varrho} = f^{2-\mu} \bar{a}_{a\varrho} - \delta_{a\varrho} F;$$

dieses in (14) eingesetzt gibt uns

$$\sum_i b_{si} P_{sa} = f P_{ia} - f^{2-\mu} \sum_{\varrho} \pi_{i\varrho} \bar{a}_{a\varrho} + F \pi_{ia},$$

d. h. mit Berücksichtigung von (4)

$$(15) \quad F \pi_{ia} = \sum_i b_{si} P_{sa}.$$

Hieraus folgt nun:

$$F \sum_i \pi_{ia} \bar{b}_{it} = \sum_{st} b_{st} P_{sa} \bar{b}_{it},$$

und mit Berücksichtigung von (8) und (13)

$$F \sum_i \pi_{ia} \bar{b}_{it} = \sum_i \delta_{is} f^{n-1} F P_{sa},$$

oder endlich

$$f^{n-1} P_{ia} = \sum \pi_{ia} \bar{b}_{it}.$$

Diese letzte Gleichung mit (9) verglichen, liefert uns schließlich:

$$(16) \quad P'_{ia} = P_{ia}.$$

²⁾ s. a. O. Gl. (16).

4. Aus (7) folgt ferner:

$$(17) \quad \sum_t b_{it} p_{t\alpha} = \sum_t \delta_{it} f p_{t\alpha} - \sum_{t,\varrho} p_{i\varrho} \pi_{t\varrho} p_{t\alpha};$$

nun ist nach (2)

$$\sum_t p_{t\alpha} \pi_{t\varrho} = \delta_{\alpha\varrho} f - a_{\alpha\varrho},$$

und man kann statt (17) schreiben

$$\sum_t b_{it} p_{t\alpha} = f p_{i\alpha} - \sum_{\varrho} p_{i\varrho} (\delta_{\alpha\varrho} f - a_{\alpha\varrho})$$

oder, wenn man noch (5) berücksichtigt,

$$\sum_t b_{it} p_{t\alpha} = \varphi \Pi_{i\alpha}.$$

Diese letzte Gleichung mit (10) verglichen liefert uns

$$(18) \quad \Pi'_{i\alpha} = \Pi_{i\alpha}.$$

Aus (13), (16) und (18), verglichen mit (6) und (11), entnehmen wir endlich

$$(19) \quad \Phi' = \Phi,$$

so daß das Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten Legendreschen Transformation völlig bewiesen ist.

5. In der oben zitierten Abhandlung hatten wir bemerkt, daß unsere Transformation in die gewöhnliche Legendresche Transformation übergeht, falls $\mu = 1$ ist. *Die Ausführungen dieser Note zeigen nun, daß wir es wieder mit einer gewöhnlichen Legendreschen Transformation zu tun haben, falls μ beliebig, aber jetzt $n = 1$ ist.*

Dies tritt bei Variationsproblemen auf, in denen das zu variierende Integral zwar mehrfach ist, aber nur eine einzige unbekannte Funktion und ihre ersten Ableitungen enthält.

Im allgemeinen wird man zur Berechnung der kanonischen Koordinaten von Variationsproblemen dasjenige unter den Gleichungssystemen (2) bis (6) oder (7) bis (11) bevorzugen, in welchem die vorkommenden Determinanten die niedrigste Ordnung besitzen; also das erste, falls $n > \mu$, und das zweite, falls $\mu > n$ ist.

Smyrna, den 3. Januar 1922.

(Eingegangen am 3. 1. 22.)