

Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

Von

C. CARATHÉODORY in Göttingen.

§ 1.

Dualistische Betrachtungen, wie sie in der Geometrie üblich sind, führen zu einer sehr elementaren Begründung der Theorie der Charakteristiken für die Differentialgleichung

$$(1) \quad F(x, y, z; p, q) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Mit S. Lie kann man diese Gleichung als ein vierdimensionales Gebilde von *Flächenelementen* ansehen, wenn man unter Flächenelement einen Punkt und eine durch ihn gehende Ebene versteht. Die eindimensionalen Elementvereine der Differentialgleichung wollen wir dann in *Elementkegel*, *Elementplankurven* und *Elementstreifen* einteilen, die folgendermaßen definiert sind:

1. Der *Elementkegel* im Punkte xyz ist der Inbegriff aller Flächenelemente von (1), die durch diesen Punkt gehen.

Die Erzeugenden der Elementkegel genügen bekanntlich den Gleichungen

$$(2) \quad \frac{X-x}{F_p} = \frac{Y-y}{F_q} = \frac{Z-z}{pF_p + qF_q}$$

wo X, Y, Z laufende Koordinaten bedeuten.

2. Die *Elementplankurve* in der Ebene

$$z = px + qy + c$$

ist der Inbegriff sämtlicher Flächenelemente von (1) welche in dieser Ebene liegen; hierbei bedeuten p, q, c konstante Parameter.

Die Projektion dieser Kurve auf die XY Ebene und die ihrer Tangente im Punkte x, y lauten:

$$F(x, y, c + px + qy; p, q) = 0,$$

$$(3) \quad (F_x + pF_z)(X - x) + (F_y + qF_z)(Y - y) = 0.$$

3. Als *Elementstreifen* wollen wir alle übrigen eindimensionalen Elementvereine der Differentialgleichung (1) bezeichnen.

Sie bestehen aus einer Kurve c_1

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

und einer abwickelbaren Fläche durch diese Kurve, welche von den Ebenen

$$(4) \quad Z - z(t) = p(t)(X - x(t)) + q(t)(Y - y(t))$$

umhüllt wird; p und q werden als Funktionen von t durch die Gleichungen

$$F(x, y, z; p, q) = 0,$$

$$(5) \quad z'(t) = p x'(t) + q y'(t)$$

bestimmt.

In jedem Flächenelement des Streifens gibt es vier ausgezeichnete Richtungen, nämlich: die Tangente t_1 der Kurve c_1 des Streifens und die

Erzeugende e_1 seiner abwickelbaren Fläche; die Tangente t_2 der Elementplankurve c_2 , und die Erzeugende e_2 des Elementkegels k im betrachteten Flächenelemente (Fig. 1).

Die Projektion dieser Richtungen auf die XY Ebene lauten folgendermaßen:

a) Für t_1

$$(6) \quad \frac{dx_1}{x'(t)} = \frac{dy_1}{y'(t)}.$$

b) Für t_2 wegen (3)

$$(7) \quad (F_x + pF_z)dx_2 + (F_y + qF_z)dy_2 = 0.$$

c) Für e_1 erhält man durch Differentiation von (4) nach t mit Berücksichtigung von (5)

$$(8) \quad p'(t)dx_3 + q'(t)dy_3 = 0.$$

d) Für e_2 wegen (2)

$$(9) \quad \frac{dx_4}{F_p} = \frac{dy_4}{F_q}.$$

Außerdem haben wir, weil die Gleichung (1) längs des ganzen Streifens gilt

$$F_x x' + F_y y' + F_z z' + F_p p' + F_q q' = 0$$

oder nach (5)

$$(10) \quad (F_x + pF_z)x' + (F_y + qF_z)y' + F_p p' + F_q q' = 0.$$

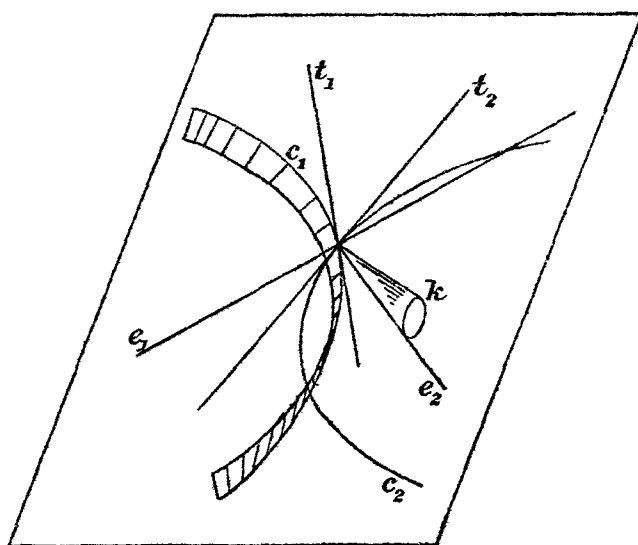


Fig. 1.

Wenn nun e_1 und e_2 zusammenfallen, d. h. die Gleichung

$$\frac{dy_3}{dx_3} = \frac{dy_4}{dx_4}$$

gilt, so muß nach (8), (9)

$$F_p p' + F_q q = 0$$

sein. Dieses in (10) eingesetzt liefert

$$(F_x + p F_z) x' + (F_y + q F_z) y' = 0$$

und diese letzte Gleichung besagt nichts anderes, als daß

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2},$$

also daß die Richtungen t_1 und t_2 auch zusammenfallen.

Hieraus folgt unmittelbar folgender Satz:

Fällt in einem Flächenelement eines Elementstreifens die Erzeugende e_1 der abwickelbaren Fläche des Streifens zusammen mit der Erzeugenden e_2 des Elementkegels in diesem Flächenelemente, so fallen auch die Tangente t_1 der Kurve des Streifens und die Tangente t_2 der Elementplankurve im betrachteten Flächenelemente zusammen; und umgekehrt.

§ 2.

Mongesche Kurven nennt man bekanntlich solche Kurven, deren Tangenten in jedem Punkte mit einer der Erzeugenden des Elementkegels in diesem Punkte zusammenfallen.

Als *Mongesche abwickelbare Flächen* wollen wir dementsprechend solche abwickelbaren Flächen bezeichnen, deren Erzeugende e in jeder Tangentialebene mit einer der Tangenten t_2 der Elementplankurve c_2 in dieser Ebene zusammenfällt (Fig. 2).

Ist eine beliebige Fläche Σ im Raume vorgelegt, so bestimmt in jedem Punkte P von Σ der Schnitt des Elementkegels in diesem Punkte mit der Tangentialebene der Fläche mindestens eine (reelle oder imaginäre) Richtung e_2 . Diese sämtlichen Richtungen können in einer einfachen Schar von Mongeschen Kurven γ_1 vereinigt werden, welche auf der Fläche Σ liegen.

Ähnlich kann man durch diesen Punkt mindestens eine Tangente t_2 an die Elementplankurve legen, welche in der Tangentialebene von Σ in P liegt.

Die zu diesen Richtungen t_2 konjugierten Richtungen können abermals

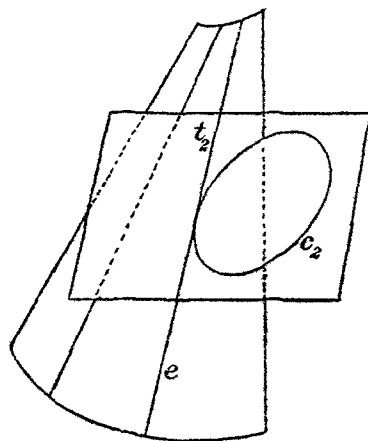


Fig. 2.

zu einer Schar von Kurven γ_2 vereinigt werden. Ist Σ selbst keine abwickelbare Fläche, so sind die abwickelbaren Flächen, welche die Fläche Σ längs einer Kurve γ_2 umhüllen, Mongesche Flächen.

Es sei jetzt Σ eine Integralfäche der Gleichung (1) und γ_3 eine Kurve, welche der Schar von Mongeschen Kurven auf dieser Fläche konjugiert ist. Dann fallen für den Elementstreifen längs γ_3 die Richtungen e_1 und e_2 zusammen und infolge des oben bewiesenen Satzes berührt γ_3 in jedem ihrer Punkte die Elementplankurve in der Tangentialebene dieses Punktes.

Mit anderen Worten: *Es sind die Richtungen e_2 und t_2 der Erzeugenden des Elementkegels und der Tangente der Elementplankurve in jedem Flächenelemente einer Integralfäche konjugiert, und es fallen die Kurvenscharen γ_1 und γ_2 zusammen.*

Man nennt bekanntlich *charakteristische Streifen* der Differentialgleichung (1) Elementstreifen, welche eine der Mongeschen Kurven einer Integralfäche enthalten.

Wir haben also folgende Eigenschaft der charakteristischen Streifen erkannt:

Die charakteristischen Streifen einer Gleichung $F(x, y, z; p, q) = 0$ sind Elementstreifen, welche die Eigenschaft haben, zu gleicher Zeit aus einer Mongeschen Kurve und einer Mongeschen abwickelbaren Fläche zu bestehen.

Es müssen also für diese Streifen wegen der obigen Definition die Richtungen t_1 mit e_2 , t_2 mit e_1 zusammenfallen; und es gelten die Gleichungen

$$(11) \quad \frac{x'(t)}{F_p} = \frac{y'(t)}{F_q} = \lambda, \quad \frac{p'(t)}{F_x + pF_z} = \frac{q'(t)}{F_y + qF_z} = \mu$$

oder wegen (10)

$$(12) \quad [(F_x + pF_z)F_p + (F_y + qF_z)F_q](\lambda + \mu) = 0.$$

Verschwindet der erste Faktor dieser Gleichung nicht, so muß $(\lambda + \mu) = 0$ sein, und wir haben, indem wir die Gleichung (5) noch hinzuziehen,

$$(13) \quad \frac{x'(t)}{F_p} = \frac{y'(t)}{F_q} = \frac{z'(t)}{pF_p + qF_q} = -\frac{p'(t)}{(F_x + pF_z)} = -\frac{q'(t)}{(F_y + qF_z)}.$$

Dieses sind aber die gewöhnlichen Gleichungen der Charakteristiken.

Im allgemeinen Falle, wo

$$(F_x + pF_z)F_p + (F_y + qF_z)F_q \neq 0,$$

ist also der bewiesene Satz hinreichend, um die Charakteristiken zu definieren.

§ 3.

Im Falle wo dieser Ausdruck identisch verschwindet, gehört die Differentialgleichung (1) einem nichtlinearen Strahlenkomplex an*). Die Elementkegel der Differentialgleichung fallen mit den Elementkegeln des Komplexes zusammen, während die Elementkurven der Differentialgleichung nichts anderes als die ebenen Komplexkurven sind. Für jeden Elementstreifen welcher eine Mongesche Kurve enthält, fallen die vier Richtungen t_1, t_2, e_1, e_2 zusammen, und die abwickelbare Fläche eines solchen Streifens, welche hier die Kurve des Streifens als Rückkehrkante besitzt, ist *immer* eine Mongesche abwickelbare Fläche.

Unsere Überlegungen reichen nicht mehr aus, um die Charakteristiken zu definieren, und man müßte die Gleichung $(\lambda + \mu) = 0$ durch einen Grenzübergang gewinnen.

§ 4.

Wir haben gesehen, daß für jede Integralfäche der Differentialgleichung (1) die zwei ausgezeichneten Richtungen t_2, e_2 der Tangente der Elementplankurve und der Erzeugenden des Elementkegels in jedem Flächenelemente konjugiert sind. Man kann nach der Gesamtheit der Flächen fragen, die durch diese Eigenschaft definiert sind. Durch leichte Rechnungen findet man dann, daß es Integralfächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$(14) \quad A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

sein müssen. A, B, C sind Funktionen von x, y, z, p, q .

Die Gleichung (1) ist ein intermediäres Integral der Gleichung (14); und die charakteristischen Streifen von (14) enthalten abermals eine Mongesche Kurve und eine Mongesche abwickelbare Fläche von (1), aber es brauchen keine Elementstreifen von (1) zu sein.

Nimmt man z. B. für (1) die Gleichung

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

so findet man als Integralfächen von (14)

a) entweder solche, für welche die Minimalkurven Asymptotenkurven sind. Die Kugel ist die einzige reelle Fläche dieser Art,

b) oder solche, für welche die Minimalkurven konjugiert sind. Diese Eigenschaft führt aber auf Minimalflächen.

Ebenfalls könnte man nach solchen Flächen fragen, welche durch die Eigenschaft definiert sind, daß die Richtungen t_2, e_2 aufeinander senkrecht

*) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen p. 640.

stehen, oder zusammenfallen. Dieses führt auf Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Phi(x, y, z; p, q) = 0, \quad \Psi(x, y, z; p, q) = 0.$$

Die gemeinsamen Integralflächen dieser letzten Gleichungen mit der Gleichung (1), wenn solche existieren, liefern solche Integralflächen von (1), für welche die Charakteristiken Asymptotenkurven oder Krümmungslinien sind, das heißt auf Fragen, die von Lie behandelt worden sind.

Göttingen, Februar 1904.

Nachträgliche Bemerkung des Verfassers:

Statt Elementkurve wird man besser sagen Elementplankurve.