

**2. Ein Beitrag zur Theorie der Lichtzerstreuung  
kugelförmiger Medien und Berechnungen für das  
nach zweimaliger Innenreflexion austretende  
Lichtbüschel;**

**von Johannes Rosenberg.**

(Gekürzte Leipziger Dissertation.)

Inhalt: Einleitung. — I. Teil. Das Gleichungssystem für ein Büschel der Ordnung  $\alpha$  und seine Auswertung. 1. Die Grundlagen und die Aufstellung der Gleichungen. 2. Über die Auswertung der Integrale. 3. Über die Verteilung der einzelnen Lichtbüschel im Beobachtungsgebiet. Gegenüberstellung von Berechnungen Wieners und Rayleighs. — II. Teil. Berechnungen für das Büschel zweiter Ordnung an Wassertropfen von  $\frac{1}{8}$  bis 8 Wellenlängen Durchmesser. 1. Die Grundlagen der Rechnung. 2. Einiges über die Zahlenrechnung. 3. Die Integrationen. 4. Die Intensitäten in den verschiedenen Beobachtungsrichtungen. 5. Über die anderen Lichtbüschel. 6. Zusammenfassung.

**Einleitung.**

Die Reflexionen und Brechungen, die eine ebene Lichtwelle bei der Störung durch eine isotrope, nicht absorbierende, durchsichtige Kugel erfährt, lassen eine unendliche Reihe von Lichtbüscheln entstehen, die hinsichtlich ihrer Intensität und ihrer Ausbreitung im Raume sehr verschieden sind und sich in der mannigfachsten Weise übereinander lagern. Von diesen sind die Intensitäten des nach einmaliger Innenreflexion wieder austretenden Büschels bereits des öfteren berechnet worden, zuletzt und am exaktesten von Möbius.<sup>1)</sup> In Anlehnung an seine Arbeit soll im folgenden ein Gleichungssystem aufgestellt werden, das jedes der im Innern der Kugel beliebig oft reflektierten und danach mit der Ordnungszahl  $\alpha$  gekennzeich-

1) W. Möbius, Zur Theorie des Regenbogens an Kugeln von 1 bis 10 Lichtwellenlängen Durchmesser, Preisschr. d. Fürstl. Jablonowskischen Ges. z. Leipzig. XL. 1912, gekürzt abgedruckt in Ann. d. Phys. 40. S. 736. 1913.

neten Lichtbüschel, sowie das außen zurückgeworfene und das unreflektiert hindurchgehende Licht, bei dem hiernach  $\alpha = -1$  bzw. 0 wäre, unter Einsetzung des jeweiligen Wertes von  $\alpha$  zu berechnen gestattet. Man kann dann zu den so erhaltenen Amplituden die Phasen ermitteln und mit ihrer Hilfe in jeder Beobachtungsrichtung alles in Betracht kommende Licht zur Interferenz bringen. Ist das für eine genügende Anzahl von Richtungen rings um die Kugel geschehen, so ist damit die wirkliche Lichtverteilung gewonnen, wie sie die experimentelle Beobachtung, abgesehen von den Randbeugungen und der Absorption, zeigen würde. Der Betrag des gesamten zerstreuten Lichtes muß schließlich gleich dem des einfallenden Lichtes sein.

Ferner war es nötig, die von Möbius in der genannten Arbeit begonnene Berechnung der Lichtzerstreuung für Kugeldurchmesser vom Neunfachen der Wellenlänge  $\lambda$  bis zu einem Bruchteile derselben mit den gleichen Parametern fortzusetzen. Die kleinsten der gewählten Kugeln können dann zu einer Vergleichung ihrer hier auf der Grundlage des Huygens-Fresnelschen Prinzips ermittelten Lichtzerstreuung mit den Ergebnissen dienen, die Lord Rayleigh<sup>1)</sup> nach seiner Theorie der Beugung an so kleinen Teilchen erhalten hat. Damit wird gleichzeitig die Frage der Anwendbarkeit jenes Prinzips bei so kleinen Störungskörpern entschieden werden können.

#### **I. Teil: Das Gleichungssystem für ein Büschel der Ordnung $\alpha$ und seine Auswertung.**

##### **1. Die Grundlagen und die Aufstellung der Gleichungen.**

Die einfallende ebene Lichtwelle sei monochromatisch, von der Wellenlänge  $\lambda$  und werde fürs erste als geradlinig polarisiert angenommen. Die Schwingungsebene bilde den Winkel  $\varphi$  mit der Beobachtungsebene (Fig. 1), die durch die Richtung des einfallenden Strahles, den Kugelmittelpunkt  $M$  und den Beobachtungspunkt  $P$  bestimmt ist. Die Entfernung  $p$  des Punktes  $P$  von  $M$  sei groß gegen  $r$ . Die Richtung nach  $P$ , die Beobachtungsrichtung, bilde mit der Richtung nach der Lichtquelle den Beobachtungswinkel  $N$ .

1) Lord Rayleigh, The Incidence of Light upon a Transparent Sphere of Dimensions Comparable with the Wave-Length. Proc. Roy. Soc. London 84. S. 25. 1910.

Wenn  $\varepsilon$  der Einfallswinkel,  $\beta$  der durch den Brechungs-  
exponenten  $n$  nach

$$(1) \quad \sin \varepsilon = n \cdot \sin \beta$$

bestimmte Brechungswinkel ist, so ist bekanntlich die Gesamt-  
drehung  $\delta_\pi$ , die der Strahl von seiner ursprünglichen Richtung  
aus für die Ordnung  $\pi$  bis zum Austritt im ganzen erfährt,

$$(2) \quad \delta_\pi = 2(\varepsilon - \beta) + \pi(\pi - 2\beta).$$

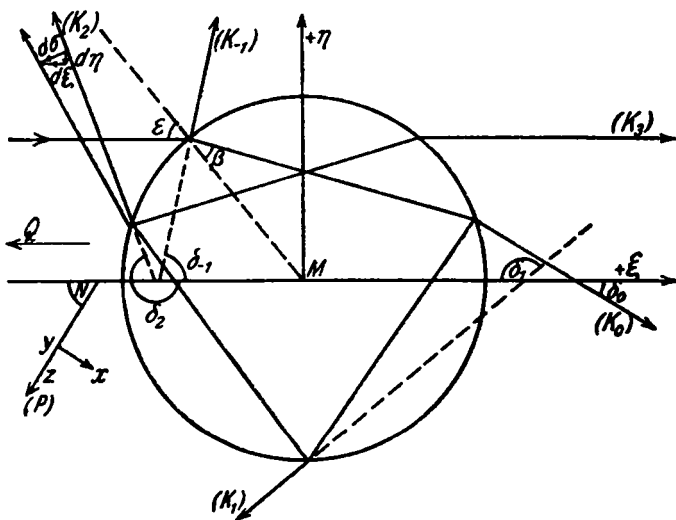


Fig. 1. (Beobachtungsebene.)

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad \frac{d\delta_\pi}{d\varepsilon} = 2 - 2(\pi + 1) \frac{d\beta}{d\varepsilon} = 2 - 2(\pi + 1) \frac{\cos \varepsilon}{n \cos \beta}.$$

Die Koordinaten der Wellenflächen, die aus der ebenen  
Welle durch die Deformationen an bzw. in der Kugel ent-  
stehen, können in derselben Weise wie in Möbius' erster  
Bearbeitung des Regenbogenproblems<sup>1)</sup> als Funktionen von  $\varepsilon$   
dargestellt werden. Man erhält in bezug auf das in Fig. 1 an-  
gedeutete Achsensystem

$$(4) \quad \xi : r = A_\pi \cos \delta_\pi + \sin \varepsilon \cdot \sin \delta_\pi,$$

$$(5) \quad \eta : r = -A_\pi \sin \delta_\pi + \sin \varepsilon \cdot \cos \delta_\pi,$$

1) W. Möbius, Abh. d. Math.-Phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges.  
d. Wiss. 30. S. 112. 1907. Ann. d. Phys. 33. S. 1497. 1910.

wo

$$(6) \quad A_{\kappa} = b + 2 \cos \varepsilon - 2(\kappa + 1)n \cos \beta$$

und

$$(7) \quad b = a:r + 2(\kappa + 1)n + n:[2n - 2(\kappa + 1)] - 2.$$

$a$  ist der auf der  $\xi$ -Achse gemessene Abstand zwischen Wellen- und Brennfläche und zwar von der letzteren nach  $M$  zu positiv gerechnet. Die dritte Koordinate dieser Umdrehungsflächen wird durch den Winkel  $\omega$  zwischen Einfall- und Beobachtungsebene dargestellt. Dabei soll das Licht in der Richtung der  $+\xi$ -Achse kommen und im Bereich der  $+\eta$ -Achse auftreffen. Welche der unendlich vielen Wellenflächen benutzt wird, welchen Wert man also bei einem bestimmten Büschel für  $a$  oder  $b$  festsetzt, ist theoretisch gleichgültig. Wegen der später zu erwähnenden Zylinderfunktionen und Reihenentwicklungen empfiehlt es sich meist, möglichst kleine Flächen zu wählen. Definiert man das Bogenelement  $d\sigma_{\kappa}$  der in der Beobachtungsebene liegenden Wellenlinie als positiv mit zunehmendem  $\varepsilon$ , so ergibt sich (Fig. 1) mit Hilfe von (4) und (5)

$$(8) \quad \frac{1}{r} \frac{d\sigma_{\kappa}}{d\varepsilon} = \cos \varepsilon - A_{\kappa} \frac{d\delta_{\kappa}}{d\varepsilon}.$$

Durch Drehung von  $d\sigma_{\kappa}$  um den sehr kleinen Winkel  $d\omega$  entsteht das Wellenflächenelement  $df_{\kappa}$ .

Die Anwendung des Huygens-Fresnelschen Prinzips in seiner von Kirchhoff<sup>1)</sup> vervollkommenen Form bedeutet die Summierung aller auf der Wellenfläche vorhandenen, noch mit dem „Strahlungsfaktor“

$$(9) \quad k = \frac{1}{2p\lambda} (1 - \cos N \cos \delta + \sin N \sin \delta \cos \omega)^2$$

multiplizierten Lichterregungen. Wenn man jedoch das einfallende Licht von der Schwingungsrichtung  $\varphi$  in zwei senkrecht bzw. parallel zu jeder Einfallsebene polarisierte Komponenten zerlegt, ergeben sich zwei Amplituden, deren Schwingungsrichtungen auf jedem  $df_{\kappa}$  verschieden sind, auf die also

1) A. Winkelmann, Handb. d. Phys. 2. Aufl. 6. S. 1034ff. 1906 oder P. Drude, Lehrb. d. Optik, S. 168. 1908.

2) W. Möbius, Preisschriften usw., S. 7. 1912. Nach genauester Winkeldefinition (vgl. Drude, Lehrb. d. Optik, S. 172. 1912) muß das Vorzeichen wie oben geändert werden.

das obige Prinzip nicht ohne weiteres anwendbar ist. Es muß daher eine weitere Zerlegung nach drei für alle  $df_x$  gleichen Richtungen vorgenommen werden. Bei der Auswahl dieser Richtungen und bei der ganzen weiteren Berechnung soll Möbius' Verfahren beim Büschel erster<sup>1)</sup> Ordnung auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen werden; die ausführlichere Herleitung aller folgenden Größen kann daher unterbleiben. Die drei Komponenten sind nun so anzusetzen, daß die eine ( $y$ ) senkrecht zur Beobachtungsebene, die anderen in der Beobachtungsebene parallel ( $z$ ) bzw. senkrecht zur Beobachtungsrichtung ( $x$ , Fig. 1) schwingen. Die  $z$ -Komponente kann dann für das Weitere fortfallen. Es verbleibt also die Integration für  $x$  und  $y$  über die ganze Wellenfläche. Veränderliche sind  $\omega$  und  $\varepsilon$  mit den Grenzen  $-\pi$  bis  $+\pi$ , bzw. 0 bis  $\pi:2$ . Die Integrationen nach  $\omega$  können allgemein durchgeführt werden und ergeben Zylinderfunktionen erster Art ( $J^0, J^1, J^2, J^3$  in den folgenden Gleichungen). Die verbleibenden Integrale nach  $\varepsilon$  bilden die Grundlage zu jeder Rechnung mit bestimmten Parametern. Wenn die Indizes  $x$  und  $y$  sich auf die beiden oben genannten Komponenten beziehen, so ist im Beobachtungspunkt  $P$  die Lichtstärke

$$(10) \quad J = J_x + J_y$$

$$(11) \quad J_x = \frac{\pi^2 r^4 \cos^2 \varphi}{4 p^2 \lambda^2} (C_x^2 + S_x^2), \quad J_y = \frac{\pi^2 r^4 \sin^2 \varphi}{4 p^2 \lambda^2} (C_y^2 + S_y^2).$$

Die in den Klammern stehenden Größen  $C_x, C_y$  usw. sind als Teilamplituden zu bezeichnen und haben folgende Werte:

$$(12) \quad C_x = \int_0^{\pi:2} (\cos u \cdot e_1 - \sin u \cdot e_2) d\varepsilon,$$

$$(13) \quad S_x = \int_0^{\pi:2} (\sin u \cdot e_1 + \cos u \cdot e_2) d\varepsilon,$$

$$(14) \quad C_y = \int_0^{\pi:2} (\cos u \cdot e_3 - \sin u \cdot e_4) d\varepsilon,$$

$$(15) \quad S_y = \int_0^{\pi:2} (\sin u \cdot e_3 + \cos u \cdot e_4) d\varepsilon,$$

---

1) W. Möbius, Preisschriften usw. S. 4. 1912.

wo

$$(16) \quad \begin{cases} e_1 = g_1 J^0(v) + g_2 J^2(v), & e_2 = g_3 J^1(v) + g_4 J^3(v), \\ e_3 = g_5 J^0(v) + g_6 J^2(v), & e_4 = g_7 J^1(v) - g_8 J^3(v), \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} g_1 = b_1 \cos N + b_2 \cos^2 N + b_3, & g_2 = b_4 \cos N + b_5 \cos^2 N - b_6, \\ g_3 = b_6 \sin N + b_7 \cos N \sin N, & g_4 = b_8 \cos N \sin N, \\ g_5 = b_1 + b_9 \cos N, & g_6 = -b_4 - b_{10} \cos N, \\ g_7 = b_{11} \sin N, & g_8 = b_9 \sin N, \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} b_1 = a_1 + a_3, & b_2 = a_2 + a_4 - a_5, & b_3 = a_6, \\ b_4 = a_1 - a_3, & b_6 = a_2 - a_4 + a_5, & b_8 = 2a_6, \\ b_7 = \frac{7}{2}a_7 + \frac{1}{2}a_8, & b_9 = \frac{1}{2}a_9 - \frac{1}{2}a_7, & b_9 = a_2 + a_4, \\ b_{10} = a_2 - a_4, & b_{11} = \frac{1}{2}a_7 + \frac{3}{2}a_8, \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} a_1 = a_{s*}, & a_2 = -a_{s*} \cos \delta, & a_3 = -a_{t*} \cos \delta, \\ a_4 = a_{t*} \cos^2 \delta, & a_5 = a_{t*} \sin^2 \delta, & a_6 = a_{t*} \sin \delta, \\ a_7 = -a_{t*} \sin \delta \cos \delta, & & a_8 = a_{s*} \sin \delta, \end{cases}$$

$$(20) \quad a_{s*}^2 = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cdot \left| \frac{\eta}{r} \right| \cdot \left| \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right| \cdot \alpha_s^* (1 - \alpha_s)^2,$$

$$(21) \quad a_{t*}^2 = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cdot \left| \frac{\eta}{r} \right| \cdot \left| \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right| \cdot \alpha_t^* (1 - \alpha_t)^2,$$

$$(22) \quad \alpha_s = \sin^2(\varepsilon - \beta) : \sin^2(\varepsilon + \beta),$$

$$(23) \quad \alpha_t = \operatorname{tg}^2(\varepsilon - \beta) : \operatorname{tg}^2(\varepsilon + \beta).$$

Für das außen reflektierte Licht, bei dem die Brechungen wegfallen, wird

$$(20a) \quad \alpha_s^2 = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cdot \left| \frac{\eta}{r} \right| \cdot \left| \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right| \cdot \alpha_s,$$

$$(21a) \quad \alpha_t^2 = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cdot \left| \frac{\eta}{r} \right| \cdot \left| \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right| \cdot \alpha_t.$$

Die Argumente  $u$  und  $v$  der vorkommenden trigonometrischen und Zylinderfunktionen sind durch Zerlegung der Phasendifferenz  $2\pi d:\lambda$  nach

$$(24) \quad 2\pi d:\lambda = u + v \cos \omega$$

entstanden.  $d$  ist die Wegedifferenz jedes austretenden Strahles gegenüber einem solchen, der von einem ausgewählten Punkte der Wellenfläche (Koordinaten  $\xi_0, \eta_0$ ) kommt. So wird

$$(25) \quad u = \frac{2\pi r}{\lambda} \left[ \left( \frac{\xi}{r} - \frac{\xi_0}{r} \right) \cos N - \frac{\eta_0}{r} \sin N \right],$$

$$(26) \quad v = \frac{2\pi r}{\lambda} \frac{\eta}{r} \sin N.$$

Sämtliche Gleichungen sind hier in der Form aufgestellt, die auf Grund von umständlichen Untersuchungen bei den numerischen Rechnungen bisher als vorteilhafteste befunden worden ist. Sie werden für die besonderen Richtungen  $N = 0$ ,  $\pi:2$  und  $\pi$  wesentlich einfacher.

Wenn man natürliches Licht einfallen läßt, erhält man aus

$$(27) \quad J'_x = J_x p^2 : \cos^2 \varphi \quad \text{und} \quad J'_y = J_y p^2 : \sin^2 \varphi$$

durch Integration nach  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  in  $P$  die Lichtstärke

$$(28) \quad J_n = \frac{1}{2} (J'_x + J'_y).$$

## 2. Über die Auswertung der Integrale.

Reihenentwicklungen zur Ausführung der Integration zu benutzen, ist nur bei sehr kleinen Durchmessern praktisch möglich. Möbius hat für das Büschel erster Ordnung<sup>1)</sup>  $\sin u$ ,  $\cos u$  und die Zylinderfunktionen in Potenzreihen entwickelt, die er bei der dritten Potenz abbricht. Um den dadurch entstandenen Fehler auf höchstens 1 Proz. herabzudrücken, dürfen bei den dortigen Parametern die Kugeldurchmesser den Wert  $\lambda:3$  nicht übersteigen. Dieses Verfahren, auf eine beliebige Ordnung  $x$  angewendet, liefert genau dieselben Formeln, deshalb sollen sie hier nicht noch einmal aufgeführt werden.<sup>2)</sup> Man erhält dabei die Teilamplituden (vgl. die praktische Durchführung im folgenden II. Teile, S. 432) als Aggregate aus Gliedern, deren Faktoren die hauptsächlichsten Parameter  $r$  und  $N$  nur in Form sehr einfacher Funktionen enthalten. So hat man den großen Vorteil, innerhalb der gewählten Genauigkeitsgrenze jeden beliebigen Wert dieser beiden Parameter einsetzen zu können, ohne stets wieder integrieren zu müssen. Die Fehler solcher angenäherten Berechnungen sind um so geringer, je

1) W. Möbius, Preisschriften usw. S. 12 1912.

2) W. Möbius, Preisschriften usw. S. 12. 1912. Gleichungen (57) bis (74), dazu die Ausdrücke für  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  auf S. 13 und 14. Bei  $Y_1$  ist dort jedoch ein (für die spätere Zahlenrechnung unwesentliches) Versehen untergelaufen; es muß im letzten angeführten Glied heißen  $l^2 c s^2$  usw.

kleiner  $r$ ,  $\sin N$ ,  $\cos N$  und die Koordinaten der Wellenfläche ( $\xi$  und  $\eta$ ) sind. Beim Überschreiten der oberen Grenze, die den Kugeldurchmessern durch eine gegebene Genauigkeit gezogen ist, nehmen die Fehler der Intensitäten schnell zu, die der Teilamplituden lassen keinerlei Gesetzmäßigkeit erkennen. Empirische Korrektionsgrößen haben sich daher für solche Näherungsformeln nicht aufstellen lassen, ihrer allgemeinen Anwendung stände auch die Abhängigkeit von der großen Zahl der Parameter im Wege. Der einzige Anhalt, der für eine Genauigkeit von 1 bis 3 Proz. gegeben werden kann, ist der, daß die Größen

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \frac{\eta}{r} \sin N \quad \text{und} \quad \frac{2\pi r}{\lambda} \left( \frac{\xi}{r} - \frac{\xi_0}{r} \right) \cdot \cos N$$

die Werte 0,5 bzw. 0,4 nicht übersteigen dürfen.

Man könnte nun versucht sein, den Anwendungsbereich dieses Verfahrens zu erweitern, indem man in den Reihenentwicklungen, statt alle Glieder von der dritten Potenz nur die von der vierten an unterdrückt. Die nach ungeraden Potenzen der Argumente fortschreitenden Entwicklungen weisen nämlich die größten Fehler auf. Nun haben aber bisher schon die Teilamplituden im ganzen 52 Glieder zur Berechnung nötig, obwohl die abgebrochenen Reihen nur höchstens zwei-, meist eingliedrig sind oder verschwinden. Die Hinzunahme einer weiteren Potenz würde daher die Formeln viel zu umfangreich gestalten. Eher kann das umgekehrte Verfahren praktische Bedeutung gewinnen, nämlich bei Durchmessern, die wesentlich kleiner sind als die obere Grenze der bisher angenommenen, in den Reihenentwicklungen auch die Glieder mit der zweiten Potenz wegzulassen. Einige der Funktionen verschwinden dabei, andere nehmen den Wert 1 an. Wirklich einfache Formeln erzielt man jedoch erst durch Vernachlässigung auch der ersten Potenzen. Dann bleibt unter den Integralen bei den Teilamplituden  $C_x$  und  $S_x$  nur die Größe  $g_1$  aus (17) und bei  $C_y$  und  $S_y$  nur  $g_5$  übrig. Bei Forderung einer Genauigkeit von 1 Proz. und den im zweiten Teil dieser Abhandlung angenommenen Parametern dürften dann die Kugeldurchmesser die Größe von  $\frac{1}{150} \lambda$  nicht übersteigen. Damit wäre man freilich in dem Gebiet angelangt, wo der Störungskörper klein ist



gegen die Wellenlänge und wo die Gültigkeit des Huygens-Fresnelschen Prinzips erst nachgewiesen werden muß.

Wenn die Reihenentwicklungen praktisch versagen, hat bisher nur die Anwendung mechanischer Quadratur zum Ziele geführt. Das wird im allgemeinen der Fall sein, wenn die Kugeldurchmesser größer als die Wellenlänge werden. Man hat dann also für jeden Beobachtungswinkel  $N$  und jede Ordnung  $\kappa$  die Gleichungen (1) bis (8), (10) bis (23) und (25) und (26) mit einer genügenden Anzahl ausgewählter  $\varepsilon$  innerhalb der Grenzen 0 und  $\pi/2$  zu berechnen. Die Abstände der  $\varepsilon$ -Werte voneinander haben sich nach der Zahl der Maxima und Minima der Integranden zu richten, für diese wiederum ist der Verlauf der Phasendifferenz  $2\pi d:\lambda$  maßgebend. Es hat sich gezeigt, daß es noch beim Auftreten von 8 Maximis und Minimis genügt, Intervalle von  $4^\circ$  zu wählen. Die Erwartung, dabei an dem sehr umfangreichen Ziffernmateriale dadurch sparen zu können, daß man die Zahlenwerte jeder Größe aus denen einer anderen Ordnung ableitet, wird, von wenigen Ausnahmen abgesehen, nicht erfüllt. Die schließlich sich ergebenden beiden Komponenten jedes Büschels können in ihrer Größe wesentlich verschieden sein. Aus (22) und (23) folgt nämlich

$$\alpha_i = \alpha_s \cdot \left[ \frac{\cos(\varepsilon + \beta)}{\cos(\varepsilon - \beta)} \right]^2,$$

und weil der Wert des Quadrates außer für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 90^\circ$  stets kleiner als 1 wird, ist im allgemeinen  $\alpha_i < \alpha_s$ . Die senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Strahlen werden also stärker zurückgeworfen als die in ihr schwingenden und müssen ihnen gegenüber bei den Innenreflexionen verhältnismäßig an Intensität zunehmen. Die in bezug auf den Punkt  $P$  wirksamsten dieser Strahlen verlaufen nun in Einfallsebenen, die in unmittelbarer Nähe der Beobachtungsebene liegen, und ihre Schwingungsrichtungen stimmen nahezu mit denjenigen der durch den Index  $y$  gekennzeichneten Komponenten überein. Diese werden daher bei  $\kappa \gg 1$  immer stärker sein als die  $x$ -Komponenten. Die Berechnungen und Kurven Wieners<sup>1)</sup> und

1) Chr. Wiener, Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung. Abh. d. Kais. Leop.-Carol. deutsch. Akad. d. Naturforscher LXXIII. S. 28/29 ff. u. 106 ff. 1900.

Möbius<sup>1)</sup> zeigen diesen Unterschied deutlich, noch besser tritt er im zweiten Teil dieser Abhandlung (vgl. Tab. 2 und Fig. 3) hervor. Es wäre zu erwägen, ob nicht in extremen Fällen die  $x$ -Komponente unberücksichtigt bleiben könnte.

8. Über die Verteilung der einzelnen Lichtbüschel im Beobachtungsgebiet. Gegenüberstellung von Berechnungen Wieners und Rayleighs.

Zur Beurteilung, welche Ordnungen in jeder Richtung  $N$  zu berücksichtigen, bzw. welche Winkel  $N$  bei jeder einzelnen Ordnung auszuwählen sind, kann bei Kugeldurchmessern von wenigstens einigen Wellenlängen die geometrische Darstellung des Strahlenverlaufs und der Wellenlinien sowie für  $x \geq 1$  die Mascartsche Methode<sup>2)</sup> oft schon genügenden Anhalt bieten. Die letztere ist bei  $x = 1$  noch bis zu  $2r = 4\lambda$ <sup>3)</sup> herab als brauchbar befunden worden, doch das Büschel zweiter Ordnung gestattet ihre Anwendung erst bei etwas größeren Kugeln;  $2r = 8\lambda$ , der größte Durchmesser im zweiten Teil dieser Abhandlung, ist z. B. noch zu klein. Dieselbe Methode kann in manchen Fällen auch die Gesamtzahl der zu erwartenden Maxima und Minima angeben, im folgenden immer kurz als „Streifen“ bezeichnet.<sup>4)</sup> Das Stärkeverhältnis der Lichtbüschel zueinander kann mit Hilfe der  $\alpha$  aus (22) und (23) wenigstens der Größenordnung nach berechnet werden. Wenn nämlich  $L_n$  die Lichtstärke in  $df_n$ ,  $L'$ , die in  $df'$  ist, wo  $df'$  das von denselben Strahlen wie  $df$  begrenzte einfallende Wellenflächenelement bedeutet, so ist, abgesehen von dem Falle  $x + 1 = 0$ , stets

$$(29) \quad L_n = L' \frac{df'}{df_n} \cdot \alpha^n (1 - \alpha)^2$$

und

$$(30) \quad L_{n+1} : L_n = \alpha \cdot df_n : df_{n+1}.$$

Voraussetzung ist dabei also, daß  $df_n$  und  $df_{n+1}$  von  $df'$  nahezu gleich weit entfernt sind. Da die Größen  $\alpha_n$  und

1) W. Möbius, Abhandl. usw. S. 195. 1907 und Preisschr. usw. S. 22 ff. 1912.

2) E. Mascart, Traité d'Optique I. S. 398. 1889 u. 3. S. 434. 1893.

3) W. Möbius, Preisschr. usw. S. 30. 1912.

4) W. Möbius, Abhandl. usw. S. 248. 1907.

$a_n$  aus (20) und (21)  $L_n$  proportional sind, kann auch der Flächeninhalt ihrer Kurven zu dem obigen Zwecke Verwendung finden. Zuverlässigere Resultate muß die Summierung der Produkte  $L_n \cdot df_n$  liefern; denn diese Werte sind von der Wellenfläche unabhängig. Ungenau bleiben derartige Abschätzungen jedoch deswegen immer, weil auf den Kugelradius keine Rücksicht genommen wird. Tabelle 4 (S. 439) bringt diese Abhängigkeit deutlich zum Ausdruck. Wenn der besondere Brechungsexponent  $n = \frac{4}{3}$  vorliegt, benutzt man am einfachsten und besten die von Wiener<sup>1)</sup> berechneten Helligkeiten. Alle solche Untersuchungen lehren folgendes: Von der Richtung nach der Lichtquelle zu, wo  $N = 0$  ist, bis zum hellsten Beugungsstreifen des Büschels erster Ordnung herrscht dieses vor. Sein geometrischer Strahlenbereich ist kleiner als der aller anderen Ordnungen. Darüber hinaus nimmt dies Büschel rasch ab, und das der zweimaligen Innenreflexion, das sich fast über den ganzen Raum um die Kugel erstreckt, erreicht in seinem ersten hellen Streifen die größte, aber verhältnismäßig geringe Lichtstärke. Von der Richtung  $N = 90^\circ$  an steigt sowohl das außen zurückgeworfene Licht, das sich ebenfalls um die ganze Kugel ausbreitet und bis dahin nur schwach ist, als auch das unreflektiert durch die Kugel wie durch eine Linse gehende Licht rasch an, und beide erreichen für  $N = 180^\circ$  Maxima, die diese Stelle zur hellsten des ganzen Raumes machen. Licht von der Ordnung  $\kappa = 3$  bleibt im Vergleich zu dem der vorher genannten Ordnungen überall sehr schwach, die übrigen Büschel werden meist zu vernachlässigen sein. Die Schwächungskoeffizienten  $\alpha$  erreichen nämlich für die bei den Innenreflexionen hauptsächlich in Betracht kommenden Winkel nur kleine Werte, bei  $n = \frac{4}{3}$  nur etwa 0,4, so daß die Intensität mit fortschreitendem  $\kappa$  schnell abnimmt.

Ein Lichtbüschel für sich allein zu nehmen, hat nur Zweck, wenn Beobachtungsrichtungen existieren, in denen dieses Büschel so stark ist, daß alle anderen vernachlässigt werden können, wie es bei  $\kappa = 0$  und  $\kappa = 1$  denkbar wäre, oder wenn es bloß auf die Lage der Streifen ankommt und diese durch Überlagerungen nicht merklich geändert wird. Die Berechnungen

---

1) Chr. Wiener, Die Helligkeit usw. S. 106.

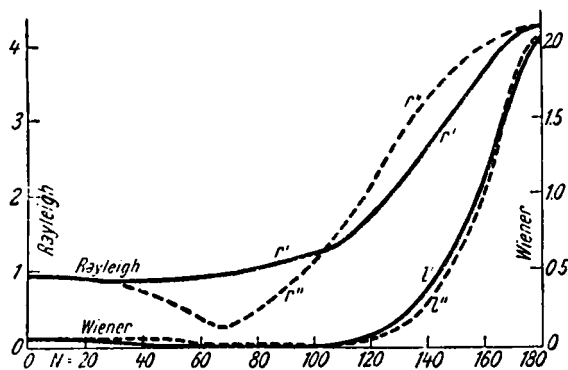
der Streifenlagen der ersten Ordnung haben für Kugeldurchmesser zwischen 0,5 und 6 mm und für Brechungsexponenten zwischen 1,33 und 1,51 mit den experimentellen Untersuchungen befriedigend übereingestimmt. Der Einfluß der anderen Ordnungen, insbesondere auch des außen reflektierten Lichtes, ist also verschwindend. Messungen am zweimal innen zurückgeworfenen Licht sind seltener angestellt worden und weichen oft stark von den Rechnungsergebnissen ab. Wenn solche Differenzen nicht durch die Versuchsanordnung, vor allem etwa durch Elliptizität der Querschnitte des Störungskörpers oder eine dreipolige Wellenfläche verursacht sind, müssen sie Überlagerungen zugeschrieben werden, oder es ist beides der Fall. Merkwürdig stören könnten aller Wahrscheinlichkeit nach nur die Ordnungen  $\alpha = -1$  und  $\alpha = 1$ , die letztere aber nur bei sehr kleinen Kugeln. Betreffs der Außenreflexion schafft folgende Überlegung Klarheit über die Frage. Zu einer bestimmten Intensitätskurve liefernden Wellenlinie möge eine zweite, ihrer Form nach ähnliche Wellenlinie hinzukommen, die in derselben Ebene liegt und deren Normalen in demselben Winkelbereich dieser Ebene verlaufen. Dann wird eine merkbare Veränderung der Lage der Maxima und Minima in jener Kurve nur eintreten, falls die beiden Wellen in dem abgegrenzten Beobachtungsgebiet etwa ebensoviele Streifen liefern wie die erste Welle allein, und sie wird ausbleiben, wenn die Streifenzahl der beiden Wellen groß oder klein gegen die der ersten ist. Daraufhin wurden die Wellenlinien des außen zurückgeworfenen und des zweimal innen reflektierten Lichtes untersucht, und zwar in dem wichtigsten Teile der Wellenlinie des letzteren, dem, der zu dem sogenannten geometrischen Bogen oder den wirksamen Strahlen der Descartesschen Theorie gehört; er ist als zweipolig anzusprechen, wenn man die Fußpunkte der von  $P$  auf die Wellenlinie gefällten Lote als Pole bezeichnet. Zugrunde gelegt wurden Daten von Millers Messungen<sup>1)</sup>, und zwar ein Wasserstrahldurchmesser von 0,534 mm und Licht von 0,000 552 mm Wellenlänge. Eine in großem Maßstabe angefertigte Zeichnung ergab für Überlagerung der beiden

---

1) W. H. Miller, Von den überzähligen Regenbogen. *Pogg. Ann.* 56. S. 563. 1842.

Wellen 68 Streifen auf 20 Streifen des Büchels zweiter Ordnung. Demnach ist eine Störung der Streifenlagen des letzteren durch die Außenreflexion möglich und zur Erklärung der Unterschiede zwischen Messung und Rechnung mit in Betracht zu ziehen.

Eine auf der mechanischen Lichttheorie und auf Integrationen beruhende Berechnung aller ihrer Stärke nach in Betracht kommenden Büschel und damit der ganzen Lichtzerstreuung einer Kugel gibt es bisher noch nicht. Wieners mehrfach erwähnte Arbeit ermittelt zwar die Helligkeiten sämtlicher notwendigen Ordnungen, aber nur eine Ordnung durch Integration. Der Verfasser kam nun auf den Gedanken, Wieners Kurven der Lichtverteilung mit solchen zu vergleichen, die Lord Rayleigh nach seiner ganz anders gearteten Theorie der Beugung des Lichtes an sehr kleinen Teilchen erhalten hat. Nach Berücksichtigung der Besonderheiten der graphischen Darstellung ergab sich eine unerwartet gute Übereinstimmung. In Fig. 2 sind aus Wieners Tab. 25<sup>1)</sup> als



Die Intensitäten des gesamten zerstreuten Lichtes.  $r'$  und  $r''$  ihre Komponenten nach Rayleigh,  $l'$  und  $l''$  nach Wiener.  $N$  der Beobachtungswinkel.

Fig. 2.

Funktionen von  $N$  die Größen  $l'$  und  $l''$  eingetragen. Es sind die Summen der verhältnismäßigen Helligkeiten bis zur dritten

1) Vgl. S. 424, Anm.

Ordnung, d. h. die Lichtmengen, „welche von einem Wassertropfen auf die Flächeneinheit (1 qm) einer Kugel vom Halbmesser Eins (1 m), deren Mittelpunkt im Tropfen liegt, gestreut werden“ (ebenda S. 110), und zwar für das in der Einfallsebene ( $l'$ ) bzw. senkrecht zu ihr polarisierte Licht ( $l''$ ). Lord Rayleighs<sup>1)</sup> Kurven, als Funktionen von  $\cos N$  vorliegend, haben hier ebenfalls die Winkel  $N$  als Abszissen erhalten.  $r'$  und  $r''$  entsprechen  $l'$  und  $l''$  und den in dieser Abhandlung durch die Indizes  $y$  und  $x$  bezeichneten Komponenten. Bei der Vergleichung der beiden Systeme ist folgendes zu beachten. Wieners Lichtmengen gelten für  $n = \frac{4}{3}$ , und ihre Herleitung berücksichtigt Durchmesser von  $8-1 \lambda$ . Lord Rayleighs amplitudische Größen gelten für  $n = \frac{3}{2}$  und einen Durchmesser von etwa  $\frac{3}{4} \lambda$ . In beiden Systemen zeigt jede Komponente für  $N = 180^\circ$  ein sehr großes und für  $N = 0^\circ$  ein kleines Maximum, sonst keine Schwankungen. Die Verhältnisse der beiden Maxima sind als nahezu übereinstimmend anzusprechen. Die Minima liegen fast an derselben Stelle. Nur in der Polarisation zeigt sich ein Unterschied. Wenn man jedoch sämtliche in Lord Rayleighs Abhandlung vorkommende Kurven nebeneinander betrachtet, so gewinnt es den Anschein, als ob der mittlere Schnittpunkt von  $r'$  und  $r''$  sich mit wachsendem Kugelradius nach der hellsten Stelle zu verschiebt.

## II. Teil: Berechnungen für das Büschel zweiter Ordnung an Wassertropfen von $\frac{1}{4}$ bis 8 Wellenlängen Durchmesser.

### 1. Die Grundlagen der Rechnung.

Bei den Büscheln zweiter und dritter Ordnung ist für die zu benutzenden Parameter die umständliche Integrationsmethode um so weniger zu umgehen, als die Mascartsche Methode, die ihrem Wesen nach nur bei kleinen Abständen der Streifen vom geometrischen Bogen brauchbar ist, hier günstigstenfalls einen Abstand des ersten hellen Streifens von  $23^\circ$ , des ersten dunklen von  $48^\circ$  und des zweiten hellen von  $64^\circ$  liefert. Über die Gesamtzahl der entstehenden Streifen vermag sie überhaupt nichts mehr anzugeben; sie kann daher auch nichts darüber aussagen, ob bei bestimmter Kleinheit der Kugeln

1) Vgl. S. 415, Anm.

überhaupt noch „Streifen“ entstehen. Die Gleichungen der zweimaligen Innenreflexion ergeben sich zwar ohne weiteres aus (1) bis (28) durch Einsetzen von  $\kappa = 2$ , es sind jedoch einige nicht näher zu bestimmende Vorzeichenänderungen vorgenommen worden. Läßt man nämlich wie üblich das in der Richtung der  $+\xi$ -Achse ankommende Licht in der Kugelhälfte der positiven  $\eta$  eintreten, so tritt das Bündel erster Ordnung in der anderen Kugelhälfte aus, in die man deshalb stets auch die Beobachtungspunkte verlegt hat. Nach abermaliger Innenreflexion wird jedoch der Raum der positiven  $\eta$  von den austretenden Strahlen erfüllt. Außerdem behalten zwar die  $y$ -Komponenten der Lichtvektoren (vgl. S. 418) für beide Ordnungen die gleiche Lage, die  $x$ -Komponenten aber bekommen einander entgegengesetzte Richtungen, wie man durch Verfolgung des Verlaufes eines Strahles in Fig. 1 leicht feststellen kann. Die Interferenz der beiden Bündel muß sich daher einfacher gestalten, wenn man für das Folgende das Licht im Bereich der negativen  $\eta$  eintreten läßt.

Von den einzusetzenden Parametern hat  $\kappa$  den Wert 2, der Winkel  $\varphi$  braucht, wie die Formeln unter (11) zeigen, erst nach der Integration ausgewählt zu werden, bzw. kann er durch Annahme von einfallendem natürlichen Licht eliminiert werden, für  $\lambda$  ist der Wert 0,0005893, für  $n$  1,33352 gegeben.<sup>1)</sup> Der letztere Wert schien zunächst insofern nachteilig zu sein, als es dafür keine Wellenlinie ohne Spitze gibt. Bei dem allerdings fernerliegenden Brechungsindex  $n = 1,5$ , den Lord Rayleigh in seiner zur Vergleichung heranzuziehenden Rechnung benutzt, kann es spitzenlose Kurven geben, auch wäre dann diese Vergleichung genauer. Das Vorhandensein der Spitze hat jedoch infolge der exakten Darstellung jeder Formelgröße keine solchen Schwierigkeiten gezeitigt, wie sie die frühere Regenbogentheorie, z. B. bei Wiener, haben mußte. So konnte es bei der Wahl der Wellenlinie nur noch darauf ankommen, weitere Spitzen und Doppelpunkte zu vermeiden und eine möglichst kurze Kurve zu finden (vgl. S. 417). Diesen Bedingungen genügt die Kurve, deren Wendetangente durch  $M$  geht. Solche Wellenlinien haben bei allen Ordnungen, wie sich durch Be-

1) W. Möbius, Preisschr. usw. S. 14. 1912.

rechnung von  $\cotg \delta$  mit Hilfe von (4), (5) und (6) leicht ergibt, den Parameter

$$b = 2(\kappa + 1)n \cos \beta_0 - 2 \cos \epsilon_0,$$

wo  $\beta_0$  und  $\epsilon_0$  die Werte der betreffenden Größen im Wendepunkte darstellen. So wird  $b = 4,9904704$ . Was die Auswahl der Kugeldurchmesser betrifft, so wurden für

$$q = \frac{2\pi r}{3\lambda}$$

die Werte 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,  $\frac{1}{2}$  gewählt. Die obere Grenze ist dadurch begründet, daß Möbius' Rechnung bei  $q = 9$  zwei deutlich umrissene helle Streifen ergeben hat, deren Lage gut mit der nach der Mascartschen Methode ermittelten übereinstimmt, während die Intensitätskurven der kleineren Kugeln über Zahl und Lage der Maxima noch Zweifel zulassen. Ferner wurde  $q = \frac{1}{2}$  weggelassen, weil diese Kugelgröße beim Büschel erster Ordnung die gleiche Kurvenform geliefert hatte wie  $q = \frac{1}{3}$ . Die Ergänzung für so kleine, hier nicht berücksichtigte Durchmesser ist übrigens mit Hilfe der noch zu erläuternden Ausdrücke des 3. Abschnitts, die auf Reihenentwicklungen beruhen, leicht zu bewerkstelligen. Wassertröpfchen von etwa 8 bis  $\frac{1}{2}\lambda$ , also 0,0045 bis 0,0002 mm Größe kommen in klarer Luft bzw. in künstlichem Nebel vor. Die Auswahl der Werte des letzten Parameters,  $N$ , wird, sobald  $\kappa > 1$  ist, dadurch erschwert, daß die austretenden Strahlen fast den ganzen Raum um die Kugel erfüllen. Ihr Bereich ist beim Büschel zweiter Ordnung mehr als dreimal so groß wie bei dem erster Ordnung. Um daher im Hinblick auf den großen Umfang der Rechenarbeit zur kleinsten notwendigen und hinreichenden Anzahl der  $N$  zu kommen, wurde nach S. 423 eine Abschätzung der Lichtverteilung in jedem Büschel bis zu dem der dritten Ordnung vorgenommen. Die Gesamtintensitäten wurden erstens mit Hilfe der Produkte aus  $d f$  und der darauf befindlichen Lichtstärke berechnet. Es ergab sich für

$$\begin{array}{cccccc} \kappa = -1, & = 0, & = 1, & = 2, & = 3 \\ 9038 & 120882 & 5646 & 863 & 226. \end{array}$$

Der Maßstab ist nach einem bestimmten Gesichtspunkt willkürlich gewählt. Dasselbe mit Wieners Helligkeiten  $l'$  und  $l''$  (vgl. S. 426) durchgeführt ergab



für $\kappa = -1,$	$= 0,$	$= 1,$	$= 2,$	$= 3$
5347	93854	3704	226	76.

Die Übereinstimmung mit den obigen Zahlen ist nicht gut, allenfalls kann man von gleicher Größenordnung sprechen. Wieners Helligkeiten wurden insbesondere auch noch für die Konstruktion der Kurven der Außenreflexion und des unreflektiert hindurchgehenden Lichtes benutzt. Sämtliche Kurven wurden in ihren Größenverhältnissen bezogen auf die zeichnerische Darstellung des Büschels erster Ordnung, dessen Intensitäten Möbius' Arbeit entnommen wurden. So ergab sich ein angenähertes Bild der Intensitätsverhältnisse in den einzelnen Beobachtungsgebieten. Danach brauchte vom Büschel zweiter Ordnung zwischen  $N = 0^\circ$  und  $50^\circ$  wegen des Überwiegens der ersten Ordnung und zwischen  $130^\circ$  und  $180^\circ$  wegen der im Innern nicht reflektierten Büschel nichts berechnet zu werden. In den übrigbleibenden Bereich fällt der erste dunkle und teilweise der erste und zweite helle Streifen. Man kann daher, zumal das ganze Büschel schwach ist und für jede Richtung etwa 30 000 Ziffern zu berechnen sind, mit wenigen Winkeln  $N$  auskommen. Für den Anfang und das Ende des fraglichen Gebietes wurden je zwei, für die Mitte, die Gegend des Minimums, ein Winkel festgesetzt. Dem passen sich die für die Rechnung sehr bequemen Werte

$$\sin N = 0.8, 0.9, 1, 0.9, 0.8$$

gut an, wo die letzten beiden stumpfen Winkeln angehören. Man könnte wegen der geringen Anzahl der Beobachtungsrichtungen Bedenken tragen, zumal auch beim Büschel erster Ordnung manche Kurve  $J(N)$  mit einer größeren Zahl Winkelwerte sicherer zu zeichnen gewesen wäre. Bei Anlage des Tabellenwerkes wurde auch Rücksicht auf eine etwaige Erweiterung in dieser Hinsicht genommen; die Integrationsergebnisse machten sie jedoch entbehrlich. Ein weiterer Zweck der erwähnten Abschätzungen war gewesen, vorläufig festzustellen, ob noch Büschel höherer Ordnung als der zweiten berechnet werden müßten. Bei der drei- und mehrmaligen Innenreflexion handelt es sich danach jedoch um so geringe Lichtmengen, daß ihre Berücksichtigung nicht nötig erscheint.

## 2. Einiges über die Zahlenrechnung.

In den ersten Gleichungen, denen, die noch nicht die Parameter  $N$  und  $2\pi r:\lambda$  enthalten, wurden alle Größen für 24  $\varepsilon$ -Werte berechnet, Zwischenwerte wurden nur an einigen Stellen nach Bedarf eingefügt. Die Kurven der Teilamplituden waren damit sicher zu zeichnen, sie hatten nur wenige Schwankungen. Um möglichst große Genauigkeit zu erzielen, wurde mit siebenstelligen Logarithmen begonnen, von denen — es handelte sich um etwa 1300 Werte — mindestens fünf Stellen hingeschrieben wurden. Die vorliegenden Zahlenwerte des Büschels erster Ordnung<sup>1)</sup> konnten nur die Berechnung der Ablenkungswinkel, ihrer Differentialquotienten und der Größe  $A$  ein wenig erleichtern, andere einfache Beziehungen zwischen den entsprechenden Größen der beiden Büschel waren nicht zu finden. Da für die vielen, die Zahl 1400 übersteigenden trigonometrischen Funktionen von „Tafeln dezimaler Teilung“ benutzt wurden und diese sowohl wie die der Zylinderfunktionen nur vier Dezimalstellen abzulesen gestatteten, wurde mit dem Eintritt dieser Funktionen in die Rechnung für die noch notwendigen rund 19000 Multiplikationen und Divisionen ein großer, ebenfalls vier Stellen ergebender Rechenschieber verwendet. Die sämtlichen durch ihn ermittelten Größen waren jedoch fünfstellig hinschreiben, wobei die letzte Stelle um 2—3 Einheiten falsch sein konnte. Gleichzeitig mit der Verringerung der Stellenzahl wurde bei denjenigen Kugeln und den Winkeln  $N$ , wo besonders einfache Kurvenformen zu erwarten waren, ein  $\varepsilon$ -Wert um den anderen unausgerechnet gelassen. Dadurch haben für  $q = 3, 4$  und  $5$  bei den spitzen Winkeln  $N$  und für  $q = 1$  und  $2$  bei allen Winkeln, soweit nicht nach den angenäherten Formeln gerechnet wurde, die Kurvenpunkte Abstände von  $8^\circ$  erhalten. Eine spätere Ergänzung der Zwischenwerte hat sich nicht nötig gemacht. Ferner mußte zur gleichen Zeit eine umständliche Untersuchung darüber angestellt werden, welche der vielen Arten, die Integranden aus den trigonometrischen und den Zylinderfunktionen und ihren Faktoren  $g_1$  bis  $g_8$  numerisch zusammenzusetzen,

1) Herr Privatdozent Dr. Möbius stellte seine Tabellen freundlichst zur Verfügung.

die geringste Anzahl von Einzeloperationen erforderte. Der an und für sich schon sehr große Umfang der Rechenarbeit hätte sich sonst leicht um sechs- bis achtausend Einstellungen und Ablesungen am Rechenschieber und um 3200 Additionen vergrößern können. Es stellte sich heraus, daß dasjenige Verfahren am vorteilhaftesten war, das aus demselben Grunde schon bei der Berechnung des Büschels erster Ordnung benutzt worden war. Darauf ist auch die Formulierung der Gleichungen (12) bis (16) zurückzuführen.

Vom Anfang bis zum Ende der Rechnung ist jede Ziffer und jedes Vorzeichen mindestens einmal nachgeprüft worden. Immer ist die Stetigkeit, meist graphisch, untersucht worden. Willkürliche Korrekturen brauchten ihrerwegen in keinem Falle, auch bei den Kurven der Integranden nicht, vorgenommen zu werden.

### 3. Die Integrationen.

Die gewählte Wellenlinie war der Anwendung der S. 420 erwähnten Reihenentwicklungen günstig, da die Größen

$$(\xi - \xi_0):r \quad \text{und} \quad \eta:r,$$

denen die Argumente der trigonometrischen und der Zylinderfunktionen proportional sind, die Werte 0,27184 bzw. 0,64827 nicht übersteigen. So konnte das angenäherte Verfahren für  $q = \frac{1}{3}$  ohne Bedenken durchgeführt werden, für  $q = 1$  wurde es nur bei den spitzen Beobachtungswinkeln benutzt, um die Genauigkeit nicht zu sehr im Vergleich zu der der Hauptrechnung herabzusetzen. So ergab sich

$$C_x = \cos u_0 \int_0^{\pi/2} X_1 d\varepsilon - \sin u_0 \int_0^{\pi/2} X_2 d\varepsilon,$$

$$S_x = \sin u_0 \int_0^{\pi/2} X_1 d\varepsilon + \cos u_0 \int_0^{\pi/2} X_2 d\varepsilon,$$

$$C_y = \cos u_0 \int_0^{\pi/2} Y_1 d\varepsilon - \sin u_0 \int_0^{\pi/2} Y_2 d\varepsilon,$$

$$S_y = \sin u_0 \int_0^{\pi/2} Y_1 d\varepsilon + \cos u_0 \int_0^{\pi/2} Y_2 d\varepsilon,$$

wo

$$u_0 = \frac{\eta_0}{r} \frac{2\pi r}{\lambda} \cdot \sin N$$

und der Index 0 sich auf den Wendepunkt bezieht und wo

$$m \int X_1 d\varepsilon = (-5490 + 18465c + 10070c^2) + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 \cdot (722s^2 - 23c^2 - 70c^3 - 492cs^2 - 852c^2s^2) \dots,$$

$$m \int X_2 d\varepsilon = \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) \cdot (-509c + 3949s^2 - 137c^2 + 568cs^2) + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^3 \cdot (28c^2s^2 + 8c^3s^2 + 11cs^2) \dots,$$

$$m \int Y_1 d\varepsilon = (18465 + 4370c) + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 \cdot (-2328s^2 - 70c^2 - 23c^3 - 1128cs^2) \dots,$$

$$m \int Y_2 d\varepsilon = \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) \cdot (-137c - 509c^2 - 6842s^2) + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^3 \cdot (28cs^2 + 19c^2s^2) \dots$$

Der Faktor  $m$  wird S. 435 bestimmt,  $c$  und  $s$  sind Abkürzungen für  $\cos N$  und  $\sin N$ . Während bei großen Durchmessern für jeden Wert derselben von neuem umständliche Integrationen ausgeführt werden müssen, gestattet das obige Formelsystem mit seiner Zusammenfassung der Glieder nach Potenzen von  $\frac{2\pi r}{\lambda}$ , bei kleinen Kugeln die Lichtzerstreuung innerhalb der bestimmten Genauigkeitsgrenze für jeden neuen Durchmesser in der denkbar einfachsten Weise zu ermitteln.

Sämtliche Integrationen sind mit einem Planimeter ausgeführt worden. Wegen der großen Zahl der Kurvenpunkte mußte statt weißen Zeichenpapierses Millimeterpapier verwendet werden, obwohl die Prüfungen desselben und die dabei gesammelten Erfahrungen davon abrieten. Selbst das als bestes bekannte Papier zeigte, mit genauem Maßstab bei entsprechender Zimmertemperatur gemessen, einen Eingang oder Ausgang von mehreren Zehntelmillimetern, der von der Luftfeuchtigkeit und scheinbar auch von der Richtung, in der das Papier bei der Herstellung durch die Walze gezogen worden war, stark abhängig war. Das verwendete Planimeter ist eine sehr bequem zu handhabende und sehr zuverlässige, aber wohl wegen ihrer großen Dimensionen angeblich nur in zwei Exemplaren

ausgeführte Konstruktion<sup>1)</sup>, die in der Literatur nirgends erwähnt gefunden wurde, deren Beschreibung aber auch hier zu

Tabelle 1.

Aus (12) bis (15) ermittelte Werte der Teilamplituden  $C_x$ ,  $S_x$ ,  $C_y$ ,  $S_y$  in den Beobachtungsrichtungen  $N$ , multipliziert mit  $m = 2250000 : \pi$ .

sin $N =$		0,8	0,9	1	0,9( $N > 90^\circ$ )	0,8( $N > 90^\circ$ )
$q = \frac{1}{3}$	$m C_x$	+ 7 225	+ 2 454	- 6 163	- 11 080	- 12 264
	$m S_x$	+ 6 396	+ 5 143	+ 583	- 2 888	- 3 461
	$m C_y$	+ 19 120	+ 18 432	+ 17 191	+ 15 797	+ 15 174
	$m S_y$	+ 4 689	+ 4 371	+ 3 420	+ 2 915	+ 2 806
1	$m C_x$	- 6 097	- 9 974	- 8 306	- 6 996	- 7 558
	$m S_x$	+ 10 628	+ 6 485	- 2 246	- 7 142	- 8 450
	$m C_y$	+ 13 874	+ 16 749	+ 12 658	+ 11 826	+ 11 480
	$m S_y$	+ 1 629	+ 384	+ 4 060	+ 5 692	+ 5 760
2	$m C_x$	- 8 700	- 6 700	- 3 540	- 108	+ 26
	$m S_x$	- 208	- 2 326	- 3 686	- 5 436	- 6 960
	$m C_y$	+ 17 495	+ 17 735	+ 13 934	+ 10 150	+ 8 892
	$m S_y$	+ 395	+ 4 560	+ 7 762	+ 6 230	+ 5 514
3	$m C_x$	- 4 635	- 4 815	- 2 764	- 248	+ 834
	$m S_x$	- 1 245	- 1 645	- 2 301	- 2 208	- 2 539
	$m C_y$	+ 12 690	+ 8 515	+ 6 371	+ 5 582	+ 6 186
	$m S_y$	+ 10 955	+ 9 430	+ 7 825	+ 8 783	+ 8 375
4	$m C_x$	- 4 290	- 3 598	- 1 936	- 12	+ 426
	$m S_x$	- 1 705	- 2 124	- 1 533	- 1 691	- 1 896
	$m C_y$	+ 8 765	+ 10 185	+ 6 010	+ 2 983	+ 2 053
	$m S_y$	+ 3 690	+ 6 010	+ 7 661	+ 6 130	+ 6 466
5	$m C_x$	- 3 325	- 3 720	- 1 731	- 61	+ 751
	$m S_x$	- 1 675	- 1 772	- 1 416	- 680	- 984
	$m C_y$	+ 10 305	+ 5 896	+ 3 471	+ 1 323	+ 1 397
	$m S_y$	+ 8 075	+ 7 482	+ 5 683	+ 5 479	+ 5 169
6	$m C_x$	- 3 146	- 2 551	- 1 781	- 46	+ 429
	$m S_x$	- 1 933	- 1 682	- 710	- 418	- 486
	$m C_y$	+ 6 213	+ 7 563	+ 2 767	+ 307	- 450
	$m S_y$	+ 5 039	+ 5 684	+ 5 914	+ 3 426	+ 3 720
7	$m C_x$	- 2 635	- 2 859	- 1 368	- 173	+ 549
	$m S_x$	- 1 576	- 1 665	- 706	+ 133	- 139
	$m C_y$	+ 8 355	+ 4 689	+ 2 067	- 188	- 491
	$m S_y$	+ 5 878	+ 6 300	+ 4 035	+ 2 518	+ 1 998
8	$m C_x$	- 2 630	- 2 131	- 1 587	- 203	+ 330
	$m S_x$	- 1 811	- 1 314	- 400	+ 276	+ 257
	$m C_y$	+ 5 667	+ 5 854	+ 1 074	- 328	- 965
	$m S_y$	+ 5 233	+ 5 327	+ 3 928	+ 903	+ 1 044

1) Herr Landmesser Rößler in Zwickau stellte mir diesen Apparat, der in seinem Bureau in Gebrauch ist, dankenswerterweise zur Verfügung.

weit führen würde. Jede Messung wurde mindestens zweimal und auf verschiedenen Wegen ausgeführt, wobei sich nur Unterschiede von wenigen Quadratmillimetern herausstellten. Nach den wegen der verschiedenen Koordinatenmaßstäbe notwendigen Umrechnungen sind die Planimeterergebnisse in Tab. 1 in der Einheit 1 qmm eingetragen worden. Bei den wenigen Tabellenzahlen, die den tatsächlichen Flächeninhalt darstellen, wie er gemessen wurde, ist mit Fehlern von höchstens fünf Einheiten der letzten Stelle zu rechnen. Die Fehler der übrigen Zahlen sind wegen ihrer verschiedenen Entstehungsweise und der mannigfachen Umrechnungen allgemein nicht angebbar. Da bei den erstgenannten Zahlen die Grenzen der Integrationsveränderlichen  $s$  einen Abstand von 225 mm hatten und dem Integranden 0,00002 eine Länge von 0,1 mm entsprach, muß man alle Tabellenwerte durch den Faktor

$$m = 2250000 : \pi$$

dividieren, um den wahren Wert der Teilamplituden zu erhalten. Die für  $q = \frac{1}{2}$  und für die spitzen Winkel von  $q = 1$  angegebenen Größen sind nach dem S. 432 geschilderten Verfahren berechnet worden.

#### 4. Die Intensitäten in den verschiedenen Beobachtungsrichtungen.

Aus den Amplituden sind nach (27) die den Lichtstärkekomponenten  $J_x$  und  $J_y$  proportionalen Größen

$$\frac{10^9 p^3}{\cos^2 \varphi} J_x = J_x'' \quad \text{und} \quad \frac{10^9 p^3}{\sin^2 \varphi} J_y = J_y''$$

der Tab. 2 hervorgegangen. In ihren Zahlen ist die vorletzte Dezimalstelle sicher, die letzte kann um wenige Einheiten falsch sein.  $\varphi$  wird eliminiert, indem nach (28) aus  $J_x''$  und  $J_y''$  die Intensität  $J_n$  der Tab. 3 bei einfallendem natürlichen Licht berechnet wird.

Der wahre Wert des Verhältnisses zwischen der Intensität in einem Beobachtungspunkte und der des einfallenden Lichtes wird gefunden, indem man die Tabellenzahlen durch  $10^9 p^3$  dividiert. Er ist in allen Fällen sehr klein, wie es die Abschätzungen auf S. 429 und die den Wellenflächenamplituden proportionalen Größen  $a_x$  und  $a_y$ , die stets kleiner als 0,04400 waren, bereits erwarten ließen.

Tabelle 2.

Werte der den Lichtstärkekomponenten  
in den Beobachtungsrichtungen  $N$  proportionalen Größen

$$J_x'' = J_x \frac{10^9 p^2}{\cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad J_y'' = J_y \frac{10^9 p^2}{\sin^2 \varphi}$$

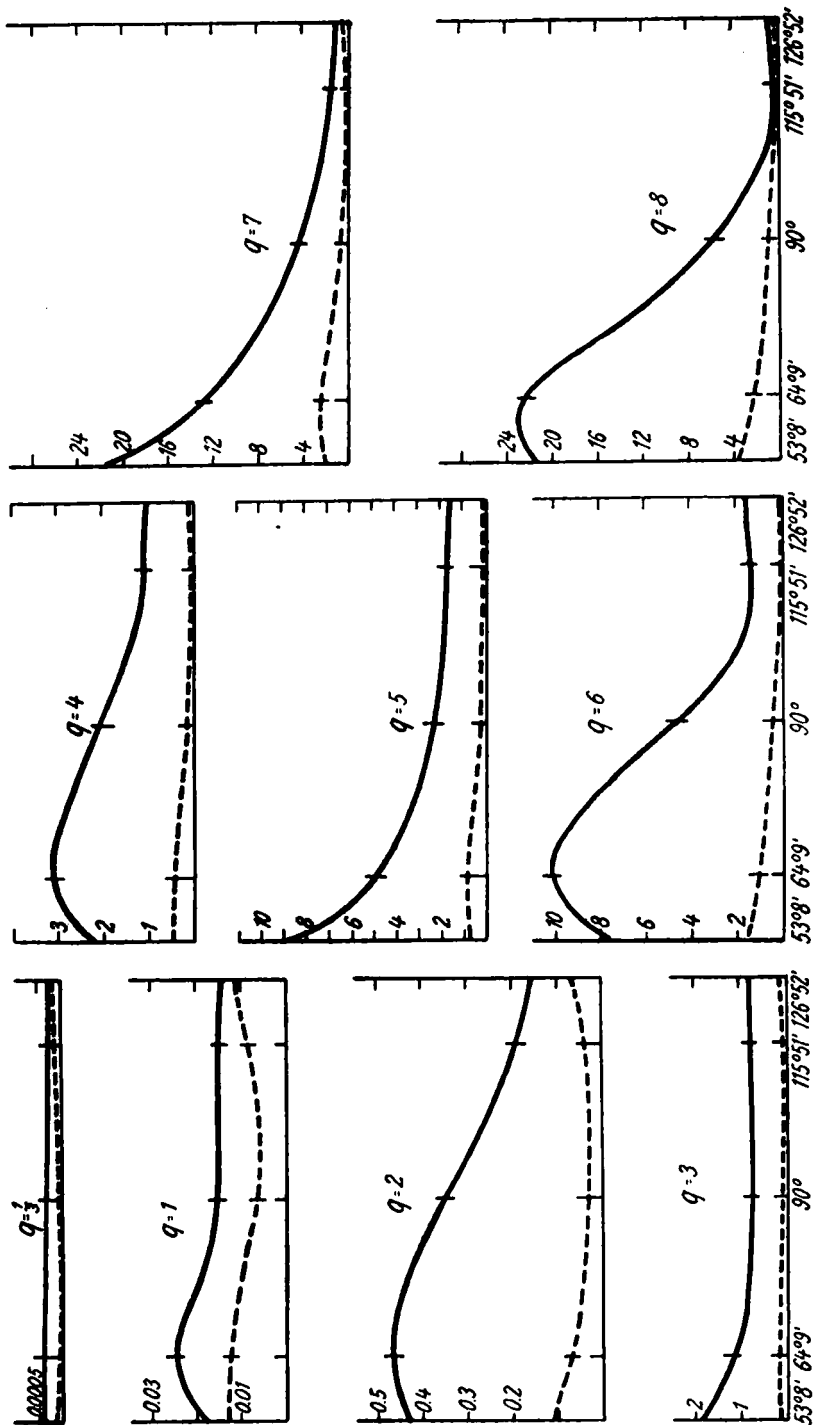
$\sin N =$	0,8	0,9	1	$0,9 (N > 90^\circ)$	$0,8 (N > 90^\circ)$
$q = \frac{1}{3}$	0,0000933	0,0000348	0,0000411	0,0001405	0,0001741
1	0,01303	0,01229	0,00642	0,00868	0,01116
2	0,1051	0,0700	0,0364	0,0412	0,0671
3	0,162	0,182	0,091	0,035	0,051
$J_x''$ 4	0,474	0,388	0,136	0,063	0,084
5	0,75	0,92	0,27	0,03	0,08
6	1,54	1,05	0,41	0,02	0,05
7	1,96	2,23	0,49	0,01	0,07
8	8,63	2,23	0,95	0,04	0,06
$q = \frac{1}{3}$	0,0004154	0,0003846	0,0003293	0,0002765	0,0002552
1	0,01698	0,02437	0,01534	0,01495	0,01432
2	0,4254	0,4659	0,3534	0,1970	0,1521
3	1,978	1,135	0,716	0,762	0,762
$J_y''$ 4	2,011	3,109	2,108	1,034	1,024
5	9,31	4,93	2,41	1,72	1,56
6	7,21	10,09	4,79	1,38	1,58
7	21,80	12,84	4,28	1,33	0,88
8	21,18	22,29	5,90	0,33	0,72

Tabelle 3.

Die Lichtstärke  $J_*$  in den Beobachtungspunkten, gemessen an der durch  
 $10^9 p^2$  dividierten Lichtstärke des einfallenden natürlichen Lichtes.

$\sin N =$	0,8	0,9	1	$0,9 (N > 90^\circ)$	$0,8 (N > 90^\circ)$
$q = \frac{1}{3}$	0,0002569	0,0002097	0,0001852	0,0002085	0,0002147
1	0,01498	0,01833	0,01088	0,01182	0,01274
2	0,2653	0,2680	0,1949	0,1191	0,1096
3	1,070	0,659	0,404	0,399	0,407
4	1,243	1,749	1,122	0,549	0,554
5	5,03	2,93	1,34	0,88	0,82
6	4,38	5,57	2,60	0,68	0,82
7	11,88	7,56	2,39	0,67	0,48
8	12,41	12,26	3,43	0,19	0,67

Die Komponenten  $J_x''$  und  $J_y''$  sind nach Tab. 2 in Fig. 3 als Funktionen von  $N$  aufgezeichnet. Da die Größenordnung der Zahlen bei den Komponenten jeder Kugel ferner auch besonders bei den verschiedenen Kugeln so ungleich ist, mußte mit dem Ordinatenmaßstab öfter gewechselt werden. Beim



Kurven:  $J''(N)$  gestrichelt,  $J''(N)$  ausgezogen, nach Tab. 2. Fig. 3.



Zeichnen stellte sich heraus, daß in der Auswahl der  $N$  im allgemeinen das Richtige getroffen worden war. Die Kurven zeigen meist deutlich den nach S. 430 erwarteten ersten hellen und ersten dunklen Streifen. Je kleiner die Kugel ist, um so weiter entfernen sich in Übereinstimmung mit der Theorie die Maxima, soweit sie als solche in Erscheinung treten, vom geometrischen Bogen ( $N = 51^{\circ} 2' 24''$ ). Ebenso entspricht es völlig den Darlegungen des ersten Teiles (S. 422), daß hier die  $y$ -Komponente überall stärker ist als die  $x$ -Komponente. Das senkrecht zur Beobachtungsebene schwingende Licht überwiegt hier derart, daß es für einfallendes natürliches Licht fast allein die Form der Kurven bestimmt; deshalb kann auf die Wiedergabe der letzteren an dieser Stelle verzichtet werden. In einer Hinsicht jedoch entsprechen mehrere der Kurven, so wie sie gezeichnet sind, nicht ganz den Erwartungen. Es ist nämlich zwar möglich gewesen, sämtliche Kurven durch die eingetragenen Punkte zu legen und damit ihre Form und die Lage der Streifen im großen und ganzen zu bestimmen. Die genauere Lage des ersten Maximums konnte jedoch auffallenderweise bei  $q = 2, 4, 6$  und  $8$  für die  $x$ -Komponente und bei  $q = 3, 5$  und  $7$  für die  $y$ -Komponente nicht festgelegt werden. Daher ist beim Zeichnen ganz darauf verzichtet worden, an der betreffenden Stelle die genannten Kurven den übrigen anzupassen. Bei denselben Kurven könnte auch die Größe des Flächeninhaltes im Vergleich zu dem der anderen auf den ersten Blick Bedenken erregen. Eine genauere Ausmessung unter Berücksichtigung der Verschiedenheit der Maßstäbe beweist jedoch gerade, daß die Kurven im wesentlichen richtig sein müssen. Bei so kleinen Kugeln dürfte die Lage der Streifen, soweit man von solchen überhaupt noch sprechen kann, nie auf einen Winkelgrad genau bestimmbar sein. Die entsprechenden Kurven der einmaligen Innenreflexion lassen in dieser Hinsicht ebenfalls einen mehr oder minder weiten Spielraum für die Lagenbestimmung zu.

##### 5. Über die anderen Lichtbüschel.

Da das Büschel zweiter Ordnung nur in einem beschränkten Beobachtungsbereich berechnet war, wurden zur Vergleichung der beiden vorliegenden Ordnungen in Tab. 4 die

Maximalintensitäten bei einfallendem natürlichem Licht für diejenigen Kugeln zusammengestellt, deren Kurven sie deutlich abzulesen gestatteten. Die zweimalige Innenreflexion nimmt danach in unverkennbarer Weise mit steigendem Kugelradius verhältnismäßig an Stärke zu.

Tabelle 4.

Höchstwerte der Lichtstärken  $J_n$  unter  $\alpha_1$  für das Bündel erster und unter  $\alpha_2$  für das zweiter Ordnung.  
 $\alpha_2$  in % von  $\alpha_1$ .

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	%
$q = \frac{1}{3}$	0,0183	0,0002569	1,4
1	1,35	0,0183	1,4
2	18,10	0,27	1,5
4	83,0	1,77	2,1
6	205	5,57	2,8
8	337	12,9	3,8

Um wenigstens für eine Kugel eine sicherere Vergleichung der beiden Bündel zu haben, wurde die für natürliches Licht entworfene Intensitätskurve bei  $q = 8$  durch hier nicht wiederzugebende umständliche Abschätzungen bei  $N = 0^\circ$  bzw.  $N = 180^\circ$  ergänzt und samt der zugehörigen auf gleiche Maßstäbe gebrachten Kurve der ersten Ordnung vermessen. Es ergab sich das Verhältnis 333:5506, d. h. bei  $\alpha = 2$  ist die Gesamtintensität 6,0 Proz. von der bei  $\alpha = 1$ . Das stimmt gut überein mit der Abschätzung nach Wieners Helligkeiten auf S. 430, sie lieferte 6,1 Proz. Von geringerer Bedeutung ist die Übereinstimmung mit den Flächenbestimmungen der Kurven der Größen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , die etwa 7 Proz. ergaben. Diese geringe Lichtstärke rechtfertigt durchaus die S. 430 festgesetzte Abgrenzung des Beobachtungsgebietes.

Das dreimal innen reflektierte Licht wird noch viel schwächer, seine  $x$ -Komponenten ganz zu vernachlässigen sein. Sollten ähnliche Verhältnisse herrschen wie in Tab. 4, so wird bei den kleineren Kugeln auch die gesamte Lichtstärke verschwindend sein. Da sich außerdem der hellste Streifen zwischen  $N = 138^\circ$  und  $N = 180^\circ$  befindet, kann dies Bündel für alle Kugeln an allen Stellen des Beobachtungsgebietes unberücksichtigt bleiben. Die Bündel höherer Ordnung kommen über-

haupt nicht mehr in Betracht. Um so stärker ist das außen reflektierte und das unreflektiert hindurchgehende Licht. Die Gesamtintensität des ersteren kann man nach S. 429 etwa anderthalb, die des letzteren etwa dreiundzwanzig mal so groß wie die der ersten Ordnung annehmen. Man braucht sich auch nur die Zahlen in den Tabellen der Intensitäten und ihren kleinen Maßstab zu vergegenwärtigen, um zu erkennen, welch hoher Betrag noch an der Energie des einfallenden Lichtes fehlt.

#### 6. Zusammenfassung.

Im ersten Teile ist im Anschluß an Möbius' Bearbeitungen der Regenbogentheorie ein Gleichungssystem für die Berechnung der Intensitäten sämtlicher Büschel, die bei der Zerstreuung parallelen monochromatischen Lichtes durch eine isotrope, nicht absorbierende Kugel infolge der Brechungen und Reflexionen entstehen, aufgestellt worden. Bei Kugeldurchmessern von der Größe eines Bruchteiles der Wellenlänge läßt sich für die Auswertung der komplizierten Integrale ein Annäherungsverfahren mittels Reihenentwicklungen ableiten, dessen Gleichungen um so einfacher werden, je kleiner die Kugeln sind.

Im zweiten Teile sind nach dieser Theorie Berechnungen des zweimal innen zurückgeworfenen Lichtes angestellt worden, und zwar für Wassertropfen von  $\frac{1}{3}$  bis 8 Wellenlängen Durchmesser und für dieselben Parameter, für die das Büschel erster Ordnung von Möbius berechnet vorlag. Die Mascartsche Methode, die dort noch gute Ergebnisse gezeitigt hatte, versagte hier völlig. Von den beiden Lichtstärkekomponenten in den Beobachtungspunkten überwiegt die senkrecht zur Beobachtungsebene (vgl. S. 415) schwingende bedeutend die in ihr schwingende. Die Gesamtintensität ist für einfallendes natürliches Licht bei der größten Kugel etwa 6 Proz. von der des Büschels erster Ordnung. Licht mit drei und mehr Reflexionen im Innern ist verhältnismäßig so schwach, daß es vernachlässigt werden kann.

Zum Schluß sei es mir gestattet, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Wiener und Herrn Privatdozent Dr. Möbius für die zahlreichen wertvollen Anregungen und Ratschläge auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Durch ihre lebenswürdige Unterstützung ist manche Schwierigkeit beseitigt worden, die der Durchführung einer solchen Arbeit neben der Berufstätigkeit hier in Zwickau im Wege stand.

Leipzig, Physik. Inst. d. Univ., März 1922.

(Eingegangen 10. April 1922.)