

# SU ALCUNI CARATTERI DI UNA SERIE ALGEBRICA, E LA FORMOLA DI DE JONQUIÈRES PER SERIE QUALSIASI.

Memoria di **Edward S. Allen** (Roma).

Adunanza del 13 luglio 1913.

## CAPITOLO I.

### Alcuni caratteri di una serie algebrica.

1. In lavori del CASTELNUOVO <sup>1)</sup> e di R. TORELLI <sup>2)</sup> sulle serie algebriche di gruppi di punti sopra una curva algebrica si sono presentati due caratteri,  $\chi$  e  $Z$ , delle serie semplicemente e doppiamente infinite. A me è riuscito di definire caratteri analoghi per serie di una dimensione qualunque, di trovare alcune proprietà generali di questi caratteri, e di estendere, per mezzo di essi, la formola nota di DE JONQUIÈRES <sup>3)</sup>, <sup>4)</sup> alle serie non-lineari.

2. Sia data una serie algebrica  $\gamma_m^p$ , irriducibile, non composta, di dimensione  $p$ , ordine  $m$ , indice  $v$ , sopra una curva algebrica irriducibile  $C$ . Definiamo i numeri  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p$  nel modo seguente <sup>5)</sup>:  $\chi_b$  sia il numero di quei gruppi di una  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  subordinata nella  $\gamma_m^p$  data da  $(p-b)$  punti generici, che sono contenuti in una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  lineare generica. Allora (cfr. § 1)  $\chi = \chi_1$ ,  $Z = \chi_2$ . Nella notazione del TORELLI [loc. cit. <sup>2)</sup>, p. 1324],  $\chi_b = \chi_0[m - \rho + b, b, v, m + p - \rho, m - \rho]$ .

<sup>1)</sup> G. CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XV, 1° semestre 1906, pp. 337-344].

<sup>2)</sup> R. TORELLI, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXVII, parte II<sup>a</sup>, pp. 1323-1336].

<sup>3)</sup> R. TORELLI, *Dimostrazione di una formola di DE JONQUIÈRES e suo significato geometrico* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXI (1° semestre 1906), pp. 58-65].

<sup>4)</sup> E. DE JONQUIÈRES, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré  $r$ , qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré  $m$ ; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXVI (1866), pp. 289-321].

<sup>5)</sup> Le  $\chi$  di cui si occupa questo lavoro non sono da confondersi colle  $Z_0, Z_1, \dots$  definite in una memoria recente di A. COMESSATTI: *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (2° semestre 1913), pp. 35-57]. Infatti queste  $Z$ , assai importanti dal punto di vista trascendente, si riferiscono a serie semplicemente infinite. La sua  $Z_0$  coincide però colla nostra  $\chi_1$ .

3. Si vede dalla definizione stessa che la  $\chi_b$  è zero quando  $b > p$ . Infatti è impossibile allora che un gruppo di  $(m - \rho + b)$  punti sia contenuto dentro un gruppo di  $(m + p - \rho)$  punti.

Converrà chiamare l'indice della serie  $\chi_\rho$  anzichè  $\nu$ . Infatti, se estendiamo la definizione delle  $\chi_b$  (§ 2) per comprendere anche  $\chi_\rho$ , questa dev'essere il numero dei gruppi di una  $\gamma_{m-\rho}^\rho$ , subordinata nella  $\gamma_m^\rho$  da  $\rho$  punti generici, contenuti in una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  generica. Ora,  $\nu$  è l'indice, non soltanto della  $\gamma_m^\rho$ , ma di ogni serie subordinata in essa da punti fissi. Quindi la  $\gamma_{m-\rho}^\rho$  si compone di  $\nu$  gruppi di  $(m - \rho)$  punti. Evidentemente ciascuno di questi gruppi appartiene ad un gruppo (individuato da esso) della  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$ . Ne risulta che è lecito scrivere

$$(1) \quad \chi_\rho = \nu.$$

4. Dimostriamo adesso che, la condizione necessaria e sufficiente perchè ogni gruppo della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  sia equivalente ad infiniti altri gruppi è che  $\chi_b = 0$ .

Se  $\chi_b = 0$ , una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  generica non contiene nessun gruppo della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$ ; vuol dire che non più di  $\infty^{p-1}$  delle  $\infty^b$   $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  contengono gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$ . Ogni gruppo della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  fa parte di  $\infty^{p-b}$  gruppi di  $(m + p - \rho)$  punti; quindi vi sono  $\infty^b$  gruppi di  $(m + p - \rho)$  punti contenenti gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$ . È impossibile che le  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  contenenti gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  ne contengano ciascuna un numero finito, perchè così non arriveremmo a più di  $\infty^{p-1}$  gruppi di  $(m + p - \rho)$  punti, invece di  $\infty^b$ . Quindi ciascuna di queste  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  contiene infiniti gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$ .

Prendiamo adesso una  $g_{m+p-\rho+k}^{m-\rho+k}$  di dimensione abbastanza alta perchè la serie contenga infiniti gruppi della  $\gamma_{m-\rho+k}^k$ . Un gruppo  $G$  di  $k$  punti subordina nella  $g_{m+p-\rho+k}^{m-\rho+k}$  una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$ ; la quale non conterrà, in generale, alcun gruppo della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$ , ma per scelte particolari del gruppo  $G$  ne conterrà infiniti. E appunto un tale caso si avrà, scegliendo il gruppo  $G$  nel modo seguente. Prendiamo un gruppo di  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  contenuto nella  $g_{m-\rho+p-k}^{m-\rho+k}$ .  $k$  qualsiasi dei  $(p - b + k)$  punti residui di questo gruppo possono servire a formare  $G$ . Allora infiniti gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  sono residui del gruppo fisso di  $(p - b + k)$  punti rispetto alla serie lineare  $g_{m-\rho+p+1}^{m-\rho+1}$ . Cioè sono equivalenti al gruppo iniziale.

5. Viceversa, suppongasì che ad un gruppo generico della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  siano equivalenti infiniti altri. Ora una serie lineare completa che contiene parzialmente un gruppo qualsiasi, contiene tutti gli altri gruppi equivalenti ad esso. Quindi ogni  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  contenente un gruppo della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  ne conterrà infiniti. Ma una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  generica non può contenere infiniti gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$ ; quindi  $\chi_b = 0$ .

6. Segue dal teorema del § 4 che se, per una serie algebrica  $\gamma_m^\rho$ ,  $\chi_b = 0$ , allora tutte le  $\chi$  con indici superiori a  $b$  sono nulle. Ammesso che  $\chi_b = 0$ , dimostriamo che  $\chi_{b+1} = 0$  (il che significa, per induzione, che ogni  $\chi$  con indice superiore a  $b$  s'annullerà). La  $\chi_{b+1}$  è il numero dei gruppi di una  $\gamma_{m-\rho+b+1}^{b+1}$  contenuti in una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  generica. Se nella  $\gamma_{m-\rho+b+1}^{b+1}$  subordiniamo una  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  mediante un punto  $P$  della curva, essendo  $\chi_b = 0$ , ogni gruppo della serie ottenuta sarà equivalente ad infiniti altri. Se aggiungiamo  $P$  a questi gruppi equivalenti otteniamo infiniti gruppi equivalenti di  $\gamma_{m-\rho+b+1}^{b+1}$ . Ma  $P$  è un punto qualsiasi della curva, quindi ogni gruppo della  $\gamma_{m-\rho+b+1}^{b+1}$  è equivalente ad infiniti altri. Quindi, per il § 4,  $\chi_{b+1} = 0$ .

7. Adesso dimostriamo, per una via simile ad una seguita dal TORELLI [loc. cit <sup>2</sup>], p. 1331] il teorema seguente:

*Se per una  $\gamma_m^\rho$  irriducibile, non composta, sopra una curva di genere  $p$  si trovano soddisfatte le condizioni:*

$$z_\rho = 0, \quad z_{\rho-1} > 0, \quad z_{\rho-2} > 0, \dots$$

*allora i gruppi della  $\gamma_m^\rho$  si ripartiscono in  $\infty^{\rho-1}$  serie semplicemente infinite  $\bar{\gamma}$ , tali che i gruppi di una stessa  $\bar{\gamma}$  sono a due a due equivalenti, e non lo sono mai due gruppi di  $\bar{\gamma}$  diverse; e viceversa.*

8. Se i gruppi della  $\gamma_m^\rho$  si ripartiscono nel modo detto, allora ve ne sono infiniti equivalenti ad un gruppo dato. Il teorema del § 4 dice allora che  $z_\rho = 0$ .

9. Dimostriamo che  $z_{\rho-1} > 0$ , adoperando il metodo di induzione completa. Giacchè è evidente quando  $\rho = 1$  (perchè allora  $z_{\rho-1}$  è l'indice) ed è stato dimostrato dal TORELLI per  $\rho = 2$ , basta provarlo per un valore arbitrario di  $\rho$ , avendolo ammesso per ogni valore inferiore ad esso.

Supponiamo che i gruppi della  $\gamma_m^\rho$  siano distribuiti nel modo detto, e che tuttavia  $z_{\rho-1} = 0$ . Vuol dire che la  $\gamma_{m-1}^{\rho-1}$  subordinata nella  $\gamma_m^\rho$  da un punto qualunque  $P$  della curva si ripartisce in  $\infty^{\rho-2}$  serie  $\bar{\bar{\gamma}}$ , tali che i gruppi di una stessa  $\bar{\bar{\gamma}}$  sono a due a due equivalenti; e non lo sono mai due gruppi di  $\bar{\bar{\gamma}}$  diverse. Se aggiungiamo  $P$  a ciascuno dei gruppi di una  $\bar{\bar{\gamma}}$ , otteniamo una  $\gamma_m^1$  costituita di gruppi equivalenti. Chiamiamola semplicemente  $\gamma$ .

Prendiamo un altro punto  $P'$ ; tutti i gruppi della  $\gamma_{m-1}^{\rho-1}$  subordinata da esso si distribuiscono in  $\infty^{\rho-2}$   $\bar{\bar{\gamma}}'$  semplicemente infinite.  $P'$  appartiene ad altrettante  $\gamma_m^1$ , di cui chiameremo una generica  $\gamma'$ . In ogni  $\gamma$  vi sarà almeno un gruppo contenente  $P'$ , e quindi appartenente ad una delle  $\gamma'$ . La  $\gamma'$ , al pari della  $\gamma$ , consiste di gruppi equivalenti. Al variare di  $P'$  vi sarà sempre una serie semplicemente infinita di serie  $\gamma'$  di gruppi equivalenti, di cui una apparterrà alla  $\gamma$  scelta. Così si vede che vi sono  $\infty^2$  gruppi della  $\gamma_m^\rho$  equivalenti ad un gruppo dato. Questo è però contrario all'ipotesi. Quindi  $z_{\rho-1} > 0$ , e (per § 6)  $z_{\rho-2} > 0, \dots$ .

10. Dimostriamo adesso la parte inversa del teorema del § 7, supponendo che  $z_\rho = 0$ , ma che  $z_{\rho-1} > 0$  (e quindi  $z_{\rho-2} > 0, \dots$ ). Allora la  $\gamma_{m-1}^{\rho-1}$  subordinata da un punto generico avrà un numero finito di gruppi contenuti in una  $g_{m+p-\rho}^{m+\rho}$  generica.

Un gruppo  $G$  di  $(m + p - \rho)$  punti presi genericamente su  $C$  fissa una serie lineare completa  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho} [G]$ ; e questa, per l'ipotesi  $z_\rho = 0$ , non contiene alcun gruppo della  $\gamma_m^\rho$ . Se aggreghiamo un gruppo di  $k$  punti generici  $\Gamma$  a  $G$ , il gruppo  $(G + \Gamma)$  individua una  $g_{m+p-\rho+k}^{m-\rho+k} [G + \Gamma]$ ; prendiamo  $k$  abbastanza grande perchè la  $[G + \Gamma]$  contenga una serie infinita  $\gamma$  di gruppi della  $\gamma_m^\rho$ . Ora i residui dei gruppi di  $\gamma$  rispetto alla  $[G + \Gamma]$  costituiscono una varietà  $V$  di dimensione  $l$  minore di  $k$ . Se non fosse così, un residuo passerebbe per  $\Gamma$ , e la  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  conterrebbe un gruppo della  $\gamma_m^\rho$ , contro il supposto. Ciascuno dei residui è un gruppo di  $(p - \rho + k)$  punti non contenenti  $\Gamma$ , e, se ci mettiamo nel caso generico, avente indice di specialità  $(\rho - k)$ .

Segue intanto che la serie  $\gamma$  deve essere  $\infty^{l+1}$ . Infatti  $z_{\rho-1} > 0$ , e quindi un gruppo

generico della  $\gamma_m^\rho$  non ha mai  $\infty^2$  altri gruppi equivalenti ad esso. La  $\gamma$  contiene però  $\infty^1$  famiglie di gruppi equivalenti, perchè contenuti nei residui di un gruppo di punti fissi rispetto ad una serie lineare.

**11.** I gruppi di due diverse delle componenti della  $\gamma$  non sono mai equivalenti; e quindi le componenti non possono avere gruppi a comune.

Diciamo  $\bar{\gamma}$  una qualunque di tali componenti;  $E$  il residuo dei suoi gruppi rispetto alla  $[G + \Gamma]$ ; e, scelto genericamente un altro gruppo  $\Gamma'$  senza punti comuni con  $\Gamma$ , consideriamo gli enti  $E'$ ,  $\bar{\gamma}'$ , analoghi ai precedenti. Sarà dimostrato che la  $\gamma_m^\rho$  è costituita di  $\infty^{\rho-1}$   $\gamma_m^\rho$  distinte, ciascuna composta di gruppi equivalenti, se noi faremo vedere che un gruppo  $T$  di  $\bar{\gamma}$  e uno  $T'$  di  $\bar{\gamma}'$ , non possono essere equivalenti. Ed infatti supponiamo, se possibile, che sia

$$T \equiv T'.$$

Ora

$$E + T \equiv G + \Gamma, \quad E' + T' \equiv G + \Gamma';$$

quindi

$$\Gamma + E' \equiv E + \Gamma'.$$

Abbiamo osservato poc'anzi che  $E$  non contiene il gruppo  $\Gamma$ ; così è impossibile che i gruppi  $(\Gamma + E')$  e  $(E + \Gamma')$  coincidano.

$E$  aveva indice di specialità  $(\rho - k)$ ; quindi,  $\Gamma'$  essendo un gruppo generico,  $E + \Gamma'$  ha l'indice di specialità  $(\rho - 2k)$ . La serie completa  $[E + \Gamma']$  ha ordine  $(p - \rho + 2k)$ . Il teorema di RIEMANN-ROCH mostra allora che  $[E + \Gamma']$  è una  $g_{p-\rho+2k}^\rho$ . Quindi non vi è nessun altro gruppo [come  $(\Gamma + E')$ ] equivalente ad  $(E + \Gamma')$ . Quindi è assurdo supporre  $T \equiv T'$ . Il teorema del § 7 resta così dimostrato.

**12.** Il teorema ha l'estensione seguente, che si dimostra con argomenti precisamente analoghi a quelli adoperati sopra:

*Se per una serie algebrica irriducibile non composta  $\gamma_m^\rho$ , abbiamo  $\chi_b > 0$  ma  $\chi_{b+1} = 0$ , allora i gruppi della  $\gamma_m^\rho$  si ripartiscono in  $\infty^b$  serie  $\infty^{\rho-b} \bar{\gamma}$ , tali che i gruppi di una stessa  $\bar{\gamma}$  sono a due a due equivalenti; e non lo sono mai due gruppi di  $\bar{\gamma}$  diverse.*

La dimostrazione che abbiamo data non è valida se  $b > p$ , perchè i residui  $E$  [di  $(p - b + 1)$  punti] non esisteranno. Però il fatto che  $\chi_b = 0$  quando  $b > p$  (§ 3) e che non vi sono mai più di  $\infty^b$  gruppi non equivalenti di un dato ordine fa vedere che il teorema or ora enunciato vale anche in questo caso. Infatti  $\chi_{p+1} = 0$ ; e, se  $\chi_p > 0$ , abbiamo  $\infty^p$  componenti  $\bar{\gamma}_m^{\rho-p}$  della  $\gamma_m^\rho$ , ciascuna composta di gruppi equivalenti a due a due, ma non equivalenti a quelli di altre componenti; etc.

**13.** Una seconda definizione interessante delle  $\chi_b$  si enuncia nel modo seguente:

$\chi_b$  è stata definita come il numero dei gruppi di una  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  che sono contenuti in una  $g_{m+p-\rho}^{m-\rho}$  generica. Scegliendo una  $g_{m+p-\rho+b}^{m-\rho+b}$  in modo che i gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  non siano neutri rispetto ad essa, sottraggiamo i gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  dai gruppi, da loro determinati, della  $g_{m+p-\rho+b}^{m+\rho+b}$ . Otteniamo così una serie algebrica di ordine  $p$ .

Se  $\chi_b > 0$ , questa serie avrà la dimensione  $b$ . La serie, contata un numero di volte ( $\geq 1$ ) uguale al numero dei gruppi della  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  equivalenti ad un suo gruppo generico, sarà in corrispondenza birazionale colla  $\gamma_{m-\rho+b}^b$  data. Se invece  $\chi_b = 0$ , la  $\gamma_p$



15. Il DE JONQUIÈRES [l. c. <sup>3</sup>), <sup>4</sup>)] ha dimostrato la (2) nel caso delle serie lineari, cioè quando  $z_0 = 1$ ,  $z_i = z_2 = \dots = 0$ . Allora la (2) prende la forma:

$$(5) \quad d_{k_1 k_2 \dots k_a} = \frac{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_a + 1)}{c_1! c_2! \dots c_n!} \sum_{b=0}^a y_b b! \binom{p-b}{b} (a-b)! \binom{m-\rho-b}{a-b}.$$

Il CASTELNUOVO [loc. cit. <sup>1</sup>)] ha ottenuto la formola generale per  $d_i$ . Il TORELLI ha esteso questo risultato per trovare  $d_{k_i}$  <sup>6</sup>) e  $d_{i_1}$  [loc. cit. <sup>2</sup>), pag. 1330]. Queste due formole sono la (6) e la (7):

$$(6) \quad d_{k_i} = (k_i + 1)[z_0(m - \rho + k_i p) - z_i k_i].$$

Il TORELLI in questa formola suppone che  $\rho = k$ , ma il suo risultato non ha essenzialmente minore generalità per questo.

$$(7) \quad \begin{cases} d_{i_1} = 2\{z_0[(m - \rho)(m - \rho - 1) + 2p(m - \rho - 1) + p(p - 1)] \\ \quad - z_i[2(m - \rho - 1) + 2(p - 1)] + 2z_2 \\ \quad = 2z_0(m + p - \rho)(m + p - \rho - 1) - 4z_0 p - 4z_i(m + p - \rho - 2) + 4z_2. \end{cases}$$

Qui ancora la formola data dal TORELLI è in apparenza meno generale, giacchè egli mette  $\rho = 2$ .

16. Insieme colla (2) bisognerà dimostrare una formola che si riferisce alle serie individuate dentro la  $\gamma_m^\rho$  da punti multipli.

Se dai gruppi della  $\gamma_m^\rho$  che contengono un punto  $(x_1 + 1)$ -plo, un punto  $(x_2 + 1)$ -plo, ... un punto  $(x_\alpha + 1)$ -plo, togliamo questi punti, otteniamo una  $\gamma_{m - \sum x_i - \alpha}^{\rho - \sum x_i}$ , che chiameremo  $\frac{x_1 x_2 \dots x_\alpha}{\gamma}$ . Tutti i simboli che abbiamo già spiegati, quando si riferiscono alla  $\gamma_m^\rho$ , saranno scritti colle lettere  $x_1 x_2 \dots x_\alpha$  sopra la linea, quando si riferiscono alla  $\frac{x_1 x_2 \dots x_\alpha}{\gamma}$ . In particolare  $\bar{\gamma}_{m-2}^{\rho-1}$  sia la serie subordinata nella  $\gamma_m^\rho$  dai punti doppi. L'indice della serie  $\frac{x_1 x_2 \dots x_\alpha}{\gamma}$  è il numero dei gruppi che contengono  $(\rho - \sum x_i)$  punti fissi generici. Ma questo è il numero dei gruppi della  $\gamma_{m-\rho+\sum x_i}^{\sum x_i}$  subordinata dai  $(\rho - \sum x_i)$  punti che contengono un punto  $(x_1 + 1)$ -plo, un punto  $(x_2 + 1)$ -plo, ... un punto  $(x_\alpha + 1)$ -plo; cioè l'indice della serie  $\frac{x_1 x_2 \dots x_\alpha}{\gamma}$  è  $d_{x_1 x_2 \dots x_\alpha}$ .

Ciò posto, possiamo enunciare la formola che dimostreremo:

$$(8) \quad \frac{x}{z_i} = (x+1)^2(p-c+1)z_{c-1} + (x+1)[m-\rho+xp-c(2x+1)]z_c - (c+1)x(x+1)z_{c+1}.$$

Faremo uso della (6), che si può scrivere

$$(6') \quad d_k = (k+1)(m - \rho + kp)z_0 - k(k+1)z_1,$$

e di una formola data dal TORELLI [loc. cit. <sup>2</sup>), pag. 1329]. Se poniamo

$$(9) \quad x = m + p - \rho,$$

<sup>6</sup>) R. TORELLI, *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII (1906-907), pp. 86-99], pag. 89. — Si noti che la  $z$  che compare in questa Nota è il doppio della nostra  $z_i$ .

la formola si scrive :

$$(10) \quad z_b = z_0 \binom{x}{b} + \sum (-1)^{b-\varepsilon} \binom{x}{\varepsilon} \frac{d_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)}.$$

Nella sommatoria  $\varepsilon = 0, 1, \dots, b-1$ ;  $i = 1, 2, \dots, b-\varepsilon$ ; e per ogni coppia di valori di  $\varepsilon, i$ , l'insieme degli interi  $k_1, k_2, \dots, k_i$  (maggiori di zero) deve assumere tutte le  $i$ -ple di valori, diverse a due a due *non soltanto per l'ordine*, soddisfacenti l'eguaglianza  $k_1 + k_2 + \dots + k_i = b - \varepsilon$ .

17. Conviene dimostrare adesso un lemma sulla relazione che esiste tra  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$  e  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta} \gamma_{m-\rho+\sum \lambda-\alpha}^{\sum \lambda}}$  [subordinata nella  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{\gamma_{m-\sum \alpha-\alpha}^{\rho-\sum \alpha}}$  da  $(\rho - \sum \alpha - \sum \lambda)$  punti generici] dotati di un punto  $(\lambda_1 + 1)$ -plo, un punto  $(\lambda_2 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(\lambda_\beta + 1)$ -plo;  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta} \gamma_{m-\rho+\sum \lambda-\alpha}^{\sum \lambda}}$  è il numero dei gruppi della  $\gamma_{m-\rho+\sum \lambda-\alpha}^{\sum \lambda}$  subordinata nella  $\gamma_m^\rho$  da  $(\rho - \sum \alpha - \sum \lambda)$  punti generici, dotati di un punto  $(x_1 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(x_\alpha + 1)$ -plo, un punto  $(\lambda_1 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(\lambda_\beta + 1)$ -plo.

È lecito supporre che i  $(\rho - \sum \alpha - \sum \lambda)$  punti suddetti siano gli stessi tanto per  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$  che per  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta} \gamma_{m-\rho+\sum \lambda-\alpha}^{\sum \lambda}}$ . Ora un gruppo che contribuisce alla  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$ , aggiunto ai punti multipli che individuano quel gruppo, costituisce un solo gruppo che contribuisce alla  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta} \gamma_{m-\rho+\sum \lambda-\alpha}^{\sum \lambda}}$ .

D'altra parte, dato un gruppo che conta fra i  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$ , quanti gruppi dà per la  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$ ? Vale a dire: dati un punto  $(x_1 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(x_\alpha + 1)$ -plo, un punto  $(\lambda_1 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(\lambda_\beta + 1)$ -plo, in quanti modi vi si possono scegliere un punto  $(x_1 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(x_\alpha + 1)$ -plo? Supponiamo che

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{q_1} = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{r_1}; \quad x_{q_1+1} = \dots = x_{q_1+q_2} = \lambda_{r_1+1} = \dots = \lambda_{r_1+r_2}; \dots;$$

$$x_{q_1+\dots+q_{s-1}+1} = \dots = x_{q_1+\dots+q_s} = \lambda_{r_1+\dots+r_{s-1}+1} = \dots = \lambda_{r_1+\dots+r_s},$$

ma che non vi siano altre uguaglianze tra le  $x$  e le  $\lambda$ . (Ciò non impedisce che vi siano altre  $x$  uguali fra di loro, purché non siano uguali a nessuna  $\lambda$ ; e viceversa). Allora, dato uno dei  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$  gruppi, si possono scegliere i punti multipli tali da individuare un gruppo tra i  $\frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}$  in

$$\binom{q_1 + r_1}{q_1} \binom{q_2 + r_2}{q_2} \dots \binom{q_s + r_s}{q_s} \text{ modi.}$$

Ne risulta che

$$(11) \quad \frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}} = \left[ \prod_{j=1}^s \binom{q_j + r_j}{q_j} \right] \frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}}.$$

Giacchè

$$\binom{q_j + r_j}{q_j} = \binom{q_j + r_j}{r_j},$$

si conclude che

$$(12) \quad \frac{x_1 \dots x_\alpha}{d_{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}} = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_\beta}{d_{x_1 \dots x_\alpha}}.$$

**18.** Dimostreremo la (2) e la (8) simultaneamente col metodo d'induzione completa. La (2) è vera per  $a = 1$ , perchè in questo caso si riduce alla (6'). La (8) è vera per  $c = 0$ . Infatti  $\frac{k}{\bar{\alpha}_0}$  è l'indice della  $\frac{k}{\gamma}$  e quindi  $d_k$  (cfr. § 16). Ma si vede che, se mettiamo (come l'estensione della definizione delle  $\bar{\alpha}$  lo permette)  $\bar{\alpha}_1 = 0$ , anche la (8) coincide con la (6') per  $c = 0$ , ed è quindi vera.

Per la dimostrazione completa della (2) e della (8) basta ammettere la (2) per  $a = 1, 2, \dots, \bar{a} - 1$ , e la (8) per  $c = 0, 1, \dots, \bar{a} - 2$ ; e dimostrare che, ammessa questa ipotesi, la (2) è verificata per  $a = \bar{a}$ , la (8) per  $c = \bar{a} - 1$ . Scriveremo  $a$  invece di  $\bar{a}$ , giacchè non dà luogo ad ambiguità. Daremo prima il piano generale della dimostrazione, poi torneremo in un'altro capitolo sui particolari aritmetici.

**19.** Il primo passo consiste nel dimostrare che la (2) vale per  $d_{k_1 k_2 \dots k_a}$ , dove tutte le  $k$  sono uguali all'unità, cioè dove  $d_{k_1 k_2 \dots k_a}$  indica il numero dei gruppi della  $\gamma_m^o$  dotati di  $a$  punti doppi e di  $(\rho - a)$  punti semplici fissi. Indichiamo questo numero con  $d_{1[a]}$ . Per dimostrare la validità della (2) in questo caso partiamo dalla (10) per  $\bar{\alpha}_a$ , e sostituiamo al posto delle varie  $d$  nel secondo membro della (10) i loro valori dati dalla (2). Ne risulta una identità. Ma nel secondo membro della (10) compariscono  $d_{1[a]}$ , e inoltre soltanto alcune  $d$  con meno di  $a$  indici. Per queste  $d$  abbiamo ammesso la verità della (2). La (10), d'altra parte, è sempre valida; quindi il fatto che otteniamo una identità mostra che la (2) è vera anche per  $d_{1[a]}$ .

**20.** La  $d_{1[a]}$  così ottenuta, si riduce alla forma assai semplice

$$(13) \quad d_{1[a]} = 2^a \sum_{b=0}^a \sum_{h=b}^a (-1)^b \bar{\alpha}_h \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\rho-h}{a-h}.$$

Coll'aiuto di questa formola, e della (8), ammessa per i valori di  $c$  minori di  $(a-1)$ , si ottiene una *verificazione della (8) per  $\bar{\alpha}_{a-1}$* . A questo scopo facciamo uso della (11), che ci dà l'identità

$$(14) \quad \bar{d}_{1[a-1]} = a d_{1[a]}.$$

Si ricordi che  $\bar{\gamma}_{m-2}^{\rho-1}$  è la serie ottenuta dalla  $\gamma_m^o$  data mediante la sottrazione di un punto doppio da ogni gruppo in cui comparisce un tale punto. Se un gruppo contiene un numero (maggiore di uno) di punti doppi, darà altrettanti gruppi della  $\bar{\gamma}_{m-2}^{\rho-1}$ .

$\bar{d}_{1[a-1]}$  è il numero dei gruppi della  $\bar{\gamma}$  dotati di  $(a-1)$  punti doppi e di  $(\rho-a)$  punti semplici fissi.

La sostituzione (13) nella (14) dà a sinistra un'espressione contenente  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{a-1}$ , a destra un'espressione con  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_a$ . Sappiamo che è lecito sostituire i valori di  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{a-2}$  secondo la (8). Rimane una equazione in  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_a, \bar{\alpha}_{a-1}$ , la quale, semplificata, diviene la (8) per il caso considerato; vale a dire,

$$(15) \quad \bar{\alpha}_{a-1} = 4(p-a+2)\alpha_{a-2} + 2(x-3a+3)\alpha_{a-1} - 2a\alpha_a.$$

**21.** Avendo ammessa la (8) per  $\frac{k}{\alpha_0}, \frac{k}{\alpha_1}, \dots, \frac{k}{\alpha_{a-2}}$ , e dimostrata per  $\bar{\alpha}_{a-1}$ , pas-



siamo a dimostrare la (8) per  $\frac{k}{\alpha_{a-1}}$  ( $k > 1$ ). Ancora una volta applichiamo la (11), ottenendo l'equazione

$$(16) \quad \bar{d}_{1[a-2]k} = (a-1) \bar{d}_{1[a-1]k}.$$

Infatti tutte due sono uguali a  $(a-1)d_{1[a-1]k}$ . Qui  $d_{1[a-1]k}$  indica il numero dei gruppi della  $\gamma_m^\rho$  dotati di  $(a-1)$  punti doppi, di un punto  $(k+1)$ -plo, e di  $(\rho-a+1-k)$  punti semplici fissi; e  $\bar{d}_{1[a-2]k}$  ha un significato analogo.

La (2), ammessa per  $d$  ad  $(a-1)$  indici, fornisce nel primo membro della (16) una espressione con  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{a-1}$ , nel secondo membro,  $\frac{k}{\alpha_0}, \frac{k}{\alpha_1}, \dots, \frac{k}{\alpha_{a-1}}$ .

Troviamo che la sostituzione (8) per queste  $\alpha$  risulta una identità. D'altra parte, la (8) è certamente vera per tutte queste  $\alpha$ , colla possibile eccezione della  $\frac{k}{\alpha_{a-1}}$ . Quindi il fatto, che la sostituzione (8) dà un'identità, fa vedere che la (8) è vera anche per  $\frac{k}{\alpha_{a-1}}$ .

22. Rimane da provare la (2) per  $d_{k_1 k_2 \dots k_a}$ . Sappiamo già la relazione che esiste tra  $d_{k_1 k_2 \dots k_a}$  e  $\bar{d}_{k_1 k_2 \dots k_{a-1}}^{\frac{k_a}{a}}$ ; è data dalla (11). Sappiamo valutare la seconda di queste  $d$  mediante la (2), e esprimere le  $\frac{k_a}{\alpha_0}, \frac{k_a}{\alpha_1}, \dots, \frac{k_a}{\alpha_{a-1}}$  che vi compariscono con termini contenenti  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_a$ . Così sappiamo calcolare la  $d_{k_1 k_2 \dots k_a}$ ; ed infatti troveremo che la (2) dà il suo valore.

### CAPITOLO III.

#### Dimostrazione particolareggiata.

##### Particolari relativi al § 19.

23. Prima di procedere alla dimostrazione, che la (2) riduce la (10) ad una identità formale, conviene considerare certi numeri che chiameremo  $C_{\beta, i, h}$ . Definiamo questi nel modo seguente: Si prendano tutti i gruppi di  $i$  interi maggiori di zero, la cui somma è  $\beta$ , i gruppi essendo eventualmente diversi soltanto per l'ordine dei numeri. Poi per ciascun gruppo si calcolino  $y_h$  [cioè, la somma dei prodotti degli  $i$  interi presi ad  $h$  ad  $h$  in tutti i modi possibili; cfr. (4), § 14];  $C_{\beta, i, h}$  è la somma di queste  $y_h$ . Calcoliamo per esempio  $C_{4, 2, 1}$ . I gruppi di 2 interi la cui somma è 4 sono 1, 3; 2, 2; 3, 1;  $y_1$ , la somma stessa degli interi di un gruppo, è in ogni caso 4; quindi  $C_{4, 2, 1} = 12$ .

Si vede che dobbiamo avere  $\beta \geq i \geq h$ ; se no,  $C_{\beta, i, h} = 0$ .

24. Vogliamo ottenere una formola generale per  $C_{\beta, i, h}$ . Calcoliamo prima, però,  $C_{\beta, i, 0}$ . Giacchè  $y_0 = 1$  [cfr. (4)],  $C_{\beta, i, 0}$  è il numero dei gruppi di  $i$  interi, la cui somma è  $\beta$ .

Dimostriamo per induzione completa, che <sup>7)</sup>

$$(17) \quad C_{\beta, i, 0} = \binom{\beta - 1}{i - 1}.$$

Per  $i = 1$ , la (17) dà

$$(18) \quad C_{\beta, 1, 0} = 1,$$

la quale è evidente.

Consideriamo ora  $C_{\beta, i, 0}$  per un valore qualsiasi di  $i$ , ammettendo che la (17) dia il valore giusto per i valori di  $i$  minori di quello. La dimostrazione si fa considerando successivamente i gruppi che cominciano con 1, quelli che cominciano con 2, ... quelli che cominciano con  $(\beta - i + 1)$ . I gruppi che cominciano con un certo numero  $j$  avranno, in tutti i modi possibili, altri  $(i - 1)$  numeri la cui somma sia  $(\beta - j)$ . Il numero dei gruppi che cominciano con  $j$  è quindi  $C_{\beta-j, i-1, 0}$ . Ne risulta che

$$C_{\beta, i, 0} = C_{\beta-1, i-1, 0} + C_{\beta-2, i-1, 0} + \dots + C_{i-1, i-1, 0}.$$

Ma la (18) è ammessa per  $(i - 1)$ , quindi possiamo scrivere

$$C_{\beta, i, 0} = \binom{\beta - 2}{i - 2} + \binom{\beta - 3}{i - 2} + \dots + \binom{i - 2}{i - 2}.$$

La somma di una serie del tipo dato a destra è nota; quindi otteniamo

$$(17) \quad C_{\beta, i, 0} = \binom{\beta - 1}{i - 1}.$$

Essendo in ogni caso  $y_1 = \beta$ ,

$$(19) \quad C_{\beta, i, 1} = \beta \binom{\beta - 1}{i - 1}.$$

**25.** Una formola ricorrente per  $C_{\beta, i, h}$  si ottiene in modo analogo.

Consideriamo i termini che provengono dai gruppi che cominciano con  $j$ . In ciascuno di questi gruppi di  $i$  numeri consideriamo i loro prodotti ad  $h$  ad  $h$ . Questi prodotti si dividono in quelli che hanno il fattore  $j$ , e in quelli che non lo hanno. Quelli che non lo hanno portano a  $C_{\beta, i, h}$  il contributo del numero  $C_{\beta-j, i-1, h}$ . Quelli che hanno il fattore  $j$  danno  $j C_{\beta-j, i-1, h-1}$ . Da queste considerazioni segue che

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\beta, i, h} = (C_{\beta-1, i-1, h} + C_{\beta-1, i-1, h-1}) \\ \quad + (C_{\beta-2, i-1, h} + 2 C_{\beta-2, i-1, h-1}) \\ \quad + \dots \\ \quad + (C_{\beta-j, i-1, h} + j C_{\beta-j, i-1, h-1}) \\ \quad + \dots \\ \quad + (C_{i-1, i-1, h} + (\beta - i + 1) C_{i-1, i-1, h-1}). \end{array} \right.$$

**26.** La (20) per  $i = h$ , diventa

$$C_{\beta, h, h} = C_{\beta-1, h-1, h-1} + 2 C_{\beta-2, h-1, h-1} + \dots + (\beta - i + 1) C_{h-1, h-1, h-1}.$$

Infatti il primo termine in ogni parentesi della (20) s'annulla, essendo  $h - 1 < h$

<sup>7)</sup> Il valore dato per  $C_{\beta, i, 0}$  si trova già in L. ÖTTINGER, *Lehre von der Kombinatorik* (Freiburg 1837).

(cfr. § 23). Ora siamo in grado di dimostrare che:

$$(21) \quad C_{\beta, h, h} = \binom{\beta + h - 1}{2h - 1}.$$

Per  $h = 1$ , la (21) diventa  $C_{\beta, 1, 1} = \beta$ , la cui verità sappiamo dalla (19).

Sia verificata la (21) fino a  $(h - 1)$ , ma non per  $h$ . La (20) è in questo caso

$$C_{\beta, h, h} = \binom{\beta + h - 3}{2h - 3} + 2 \binom{\beta + h - 4}{2h - 3} + \dots + (\beta - h + 1) \binom{2h - 3}{2h - 3}.$$

Ne risulta con facile calcolo che

$$C_{\beta, h, h} = \binom{\beta + h - 1}{2h - 1}.$$

27. Con le equazioni (17), (19) e (21) per base, è possibile adesso dimostrare che

$$(22) \quad C_{\beta, i, h} = \binom{i}{h} \binom{\beta + h - 1}{\beta - 1}.$$

Supponiamo la (22) già dimostrata per ogni caso dove  $(i - h)$  abbia un valore minore di quello che consideriamo, e anche per questo valore purchè  $h$  stessa abbia un valore minore di quello considerato. Allora i termini a destra nella (20) sono noti, e si può calcolarne  $C_{\beta, i, h}$ .

Schematicamente, il procedimento può spiegarsi così:

$h$	0	1	2	3	4	...	$= i - h,$
0	0	(17)	(17)	(17)	(17)	...	
	(19)	.					
1	(21)	(19)	(19)	(19)	(19)	...	
2	(21)	$x$	.				
	.....						
3	(21)						
4	(21)						
...	.....						

Abbiamo segnato le coppie di valori di  $h$  e di  $(i - h)$ , per le quali  $C$  è nota, coi numeri delle formole che la danno. Ma se tutti i punti di un rettangolo nell'angolo superiore a sinistra rappresentano valori noti, ad eccezione del punto inferiore a destra del rettangolo, allora quel punto rappresenta una  $C$ , il cui valore si calcola per mezzo della (20). È evidente che si giunge in questo modo ad ogni punto rappresentante valori interi, positivi o nulli, di  $(i - h)$  e di  $h$ .

Applichiamo la (20) sotto l'ipotesi fatta.

$$C_{\beta, i, h} = \left[ \binom{i-1}{h} \binom{\beta+h-2}{\beta-i} + \binom{i-1}{h} \binom{\beta+h-3}{\beta-i-1} + \dots + \binom{i-1}{h} \right] \\ + \left[ \binom{i-1}{h-1} \binom{\beta+h-3}{\beta-i} + 2 \binom{i-1}{h-1} \binom{\beta+h-4}{\beta-i-1} + \dots + (\beta-i+1) \binom{i-1}{h-1} \right].$$

Semplificazioni abbastanza facili riducono questa formola alla forma voluta

$$(22) \quad C_{\beta, i, h} = \binom{i}{h} \binom{\beta + h - 1}{\beta - i}.$$

28. Ricordiamoci che ci siamo proposti nel § 19 di dimostrare che, se nella (10) (dove è posto  $b = a$ ) sostituiamo i valori delle  $d_{k_1 k_2 \dots k_i}$  dati dalla (2) ne risulta un'identità. Riscriviamo la (10), e poi, per maggiore chiarezza, scriviamola per disteso nell'ipotesi  $a = 4$ :

$$(10) \quad z_a = z_0 \binom{x}{a} + \sum (-1)^{a-\varepsilon} \binom{x}{\varepsilon} \frac{d_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)},$$

dove nella sommatoria  $\varepsilon = 0, 1, \dots, a - 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, a - \varepsilon$ ; e per ogni coppia di valori di  $\varepsilon, i$ , l'insieme degli interi ( $> 0$ )  $k_1, k_2, \dots, k_i$  deve assumere tutte le  $i$ -ple di valori, diverse a due a due *non soltanto per l'ordine*, soddisfacenti l'eguaglianza:  $k_1 + k_2 + \dots + k_i = a - \varepsilon$

$$\begin{aligned} z_4 = & z_0 \binom{x}{4} \\ & - \binom{x}{3} \frac{d_1}{2} \\ & + \binom{x}{2} \left[ \frac{d_{11}}{4} + \frac{d_2}{3} \right] \\ & - \binom{x}{1} \left[ \frac{d_{111}}{8} + \frac{d_{12}}{6} + \frac{d_3}{4} \right] \\ & + \binom{x}{0} \left[ \frac{d_{1111}}{16} + \frac{d_{112}}{12} + \frac{d_{22}}{9} + \frac{d_{13}}{8} + \frac{d_4}{5} \right]. \end{aligned}$$

Si vede che i polinomi in parentesi saranno gli stessi per un valore qualunque di  $a$ . Questi *polinomi* si scrivono

$$\sum \frac{d_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)},$$

dove nella sommatoria la  $i$  e le  $k$  possono variare, ma sempre in modo che

$$k_1 + k_2 + \dots + k_i = \beta,$$

numero fisso. Prima di trovare il valore di tale somma, troveremo il valore di

$$\sum \frac{d_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)}$$

quando *non soltanto*  $\beta$  *ma anche*  $i$  (il numero degli indici di ciascuna  $d$ ) è *fissa*.

Tale è, per esempio,  $\left( \frac{d_{13}}{8} + \frac{d_{22}}{9} \right)$  nel caso  $\beta = 4, i = 2$ . Le  $k$  prendono sempre tutti gli insiemi di valori *diversi non soltanto per l'ordine*, tali che  $\sum k = \beta$ .

29. Mettiamo

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)} = D_{k_1 k_2 \dots k_i}, \\ & c_1! c_2! \dots c_n! d_{k_1 k_2 \dots k_i} = \delta_{k_1 k_2 \dots k_i} \text{ [cfr. (3)],} \\ & \frac{\delta_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)} = c_1! c_2! \dots c_n! D_{k_1 k_2 \dots k_i} = \Delta_{k_1 k_2 \dots k_i}. \end{aligned} \right.$$

In questa notazione la (2) si scrive

$$(24) \quad \Delta_{k_1 k_2 \dots k_i} = \sum_{b=0}^i \sum_{h=b}^i (-1)^b \alpha_b y_h h! \binom{p-b}{h-b} (i-h)! \binom{m-\rho-h}{i-h}.$$

Prendiamo un certo insieme di indici  $k_1, k_2, \dots, k_i$ , supponendo (come nel § 14) che

$$(3) \quad k_1 = k_2 = \dots = k_{c_1}; \dots; k_{c_1 + \dots + c_{n-1} + 1} = \dots = k_{c_1 + \dots + c_{n-1} + c_n}.$$

Il numero degli ordini *diversi* in cui si possono scrivere le  $k$  è

$$\frac{i!}{c_1! c_2! \dots c_n!}.$$

Questo fatto, coll'ultima equazione (23), fa vedere che se ripetiamo  $\Delta_{k_1 k_2 \dots k_i}$  tante volte quanti sono gli ordini in cui si possono scrivere le  $k$ , avremo precisamente  $i! D_{k_1 k_2 \dots k_i}$ .

Ma la

$$\sum \frac{d_{k_1 k_2 \dots k_i}}{(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)}$$

che cerchiamo si scrive anche  $\sum D_{k_1 k_2 \dots k_i}$ , dove diversi ordini delle medesime  $k$  non sono ammessi. Adesso vediamo che questa sommatoria (l'ultima definita nel § 28) può anche definirsi come

$$\frac{1}{i!} \sum \Delta_{k_1 k_2 \dots k_i},$$

dove nella sommatoria le  $k_1, k_2, \dots, k_i$  prendono tutti i valori, diversi eventualmente SOLTANTO PER L'ORDINE, tali che  $k_1 + k_2 + \dots + k_i = \beta$ .

30. Ora nei valori delle diverse  $\Delta_{k_1 k_2 \dots k_i}$  dati dalla (24), il secondo membro di quella equazione non cambia se non per ragione della scelta delle  $k$ , cioè nelle  $y_h$ . Quindi la somma che cerchiamo (essendo fisso, ben inteso,  $\beta$  e  $i$ ) è

$$\sum \Delta_{k_1 k_2 \dots k_i} = \sum_{b=0}^i \sum_{h=b}^i (-1)^b \alpha_b (\sum y_h) h! \binom{p-b}{h-b} (i-h)! \binom{m-\rho-h}{i-h}.$$

Si riconosce subito che la  $\sum y_h$  non è altro che la  $C_{\beta, i, b}$  dei §§ 23-27. Perciò, la sostituzione (22) dà

$$\sum \Delta_{k_1 k_2 \dots k_i} = \sum_{b=0}^i \sum_{h=b}^i (-1)^b \alpha_b \binom{\beta + h - 1}{\beta - i} \binom{i}{h} h! \binom{p-b}{h-b} (i-h)! \binom{m-\rho-h}{i-h}.$$

Ma

$$\binom{i}{h} h! (i-h)! = i!$$

e

$$\sum D_{k_1 k_2 \dots k_i} = \frac{1}{i!} \sum \Delta_{k_1 k_2 \dots k_i}$$

(cfr. § 29). Ne risulta che

$$(25) \quad \sum D_{k_1 k_2 \dots k_i} = \sum_{b=0}^i \sum_{h=b}^i (-1)^b \alpha_b \binom{\beta + h - 1}{\beta - i} \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\rho-h}{i-h},$$

dove, nella sommatoria, le  $k$  prendono tutte le  $i$ -ple di valori, diverse non soltanto per l'ordine, tali che  $\sum k = \beta$ .

31. Ora, per ottenere il polinomio che moltiplica  $(-1)^{\beta} \binom{x}{a-\beta}$  nella (10), bisogna sommare la (25) per  $i = 1, 2, \dots, \beta$  (cfr. § 28), cioè bisogna calcolare

$$\sum_{i=1}^{\beta} \sum_{b=0}^i \sum_{h=b}^i (-1)^b \chi_b \binom{\beta+b-1}{\beta-1} \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\rho-b}{i-h}.$$

Il coefficiente di  $\chi_b$  può scriversi:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=b}^{\beta} \sum_{h=b}^i \binom{\beta+b-1}{\beta-1} \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\rho-b}{i-h} \\ = & \binom{p-b}{0} \left[ \binom{\beta+b-1}{\beta-b} \binom{m-\rho-b}{0} \right. \\ & \left. + \binom{\beta+b-1}{\beta-b-1} \binom{m-\rho-b}{1} + \dots + \binom{\beta+b-1}{0} \binom{m-\rho-b}{\beta-b} \right] \\ & + \binom{p-b}{1} \left[ \binom{\beta+b}{\beta-b-1} \binom{m-\rho-b-1}{0} \right. \\ & \left. + \binom{\beta+b}{\beta-b-2} \binom{m-\rho-b-1}{1} + \dots + \binom{\beta+b}{0} \binom{m-\rho-b-1}{\beta-b-1} \right] \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \binom{p-b}{\beta-b} \binom{2\beta-1}{0} \binom{m-\rho-\beta}{0}. \end{aligned}$$

Per valutare questa espressione, possiamo ricorrere all'identità

$$(1+\alpha)^{\mu} (1+\alpha)^{\nu} = (1+\alpha)^{\mu+\nu},$$

$\mu, \nu$  essendo interi positivi.

I coefficienti di  $\alpha^{\lambda}$  a sinistra e a destra sono uguali. Quindi

$$(26) \quad \binom{\mu}{\lambda} \binom{\nu}{0} + \binom{\mu}{\lambda-1} \binom{\nu}{1} + \dots + \binom{\mu}{1} \binom{\nu}{\lambda-1} + \binom{\mu}{0} \binom{\nu}{\lambda} = \binom{\mu+\nu}{\lambda}.$$

Se applichiamo la (26) ai coefficienti di  $\binom{p-b}{0}, \binom{p-b}{1}, \dots$ , otteniamo

$$\begin{aligned} & \binom{p-b}{0} \binom{m-\rho+\beta-1}{\beta-b} \\ & + \binom{p-b}{1} \binom{m-\rho+\beta-1}{\beta-b-1} + \dots + \binom{p-b}{\beta-b} \binom{m-\rho+\beta-1}{0}. \end{aligned}$$

Una seconda applicazione della (26) riduce questa espressione a

$$\binom{m+p-\rho+\beta-b-1}{\beta-b} = \binom{x+\beta-b-1}{\beta-b}.$$

Quindi

$$(27) \quad \sum_{b=0}^{\beta} D_{k_1 k_2 \dots k_i} = \sum_{b=0}^{\beta} (-1)^b \chi_b \binom{x+\beta-b-1}{\beta-b},$$

dove nella prima sommatoria  $i = 1, 2, \dots, \beta$ , e le  $k$  prendono tutti gli insiemi di valori, diversi non soltanto per l'ordine, tali che

$$\sum k = \beta.$$

32. La (10), che dimostreremo essere un'identità, si scrive secondo la (27)

$$\begin{aligned} z_a = & \binom{x}{a} z_0 \\ & + \binom{x}{a-1} [z_0 x - z_1] \\ & + \binom{x}{a-2} \left[ z_0 \binom{x+1}{2} - z_1 x + z_2 \right] - \dots \\ & + (-1)^b \binom{x}{a-b} \left[ z_0 \binom{x+b-1}{b} - z_1 \binom{x+b-2}{b-1} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + (-1)^b z_b \binom{x+b-h-1}{b-h} + \dots + (-1)^b z_b \right] + \dots \\ & + (-1)^a \left[ z_0 \binom{x+a-1}{a} - z_1 \binom{x+a-2}{a-1} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + (-1)^b z_b \binom{x+a-h-1}{a-h} + \dots + (-1)^a z_a \right]. \end{aligned}$$

Evidentemente il coefficiente di  $z_a$  nel secondo membro è 1. Vogliamo dimostrare che i coefficienti delle altre  $z$  sono nulli.

33. Il coefficiente di  $z_b$  è

$$\sum_{b=h}^a \binom{x}{a-b} (-1)^{b+h} \binom{x+b-h-1}{b-h}.$$

Per valutare questo coefficiente, consideriamo l'identità

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^\mu)^\xi (1 - \alpha)^\xi = (1 - \alpha^{\mu+1})^\xi,$$

$\mu, \xi$  essendo interi positivi.

A destra  $\alpha^\mu$  ha coefficiente zero; quindi il coefficiente di  $\alpha^\mu$  a sinistra deve annullarsi. Cioè

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & 0 = \binom{\xi}{\mu} \binom{\xi-1}{0} - \binom{\xi}{\mu-1} \binom{\xi}{1} \\ & + \binom{\xi}{\mu-2} \binom{\xi+1}{2} - \dots + (-1)^k \binom{\xi}{\mu-k} \binom{\xi+k-1}{k} + \dots + (-1)^\mu \binom{\xi}{0} \binom{\xi+\mu-1}{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Mettendo

$$\xi = x, \quad \mu = a - h, \quad k = b - h,$$

troviamo che

$$\sum_{b=h}^a \binom{x}{a-b} (-1)^{b+h} \binom{x+b-h-1}{b-h} = 0.$$

La (10) è così ridotta ad una identità formale; e l'argomento del § 19 è valido, mostrando che la (2) dà il vero valore di  $d_{1[a]}$ .

#### Particolari relativi al § 20.

34. Come abbiamo detto al § 20, vogliamo trasformare la (2) per  $d_{1[a]}$ .

Siccome le  $k$  sono tutte uguali all'unità,  $y_b = \binom{a}{b}$  e  $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_a+1) = 2^a$ .

La (2) è, in questo caso,

$$d_{1[a]} = \frac{2^a}{a!} \sum_{b=0}^a \sum_{h=b}^a (-1)^b \zeta_b \binom{a}{b} b! \binom{p-b}{b} (a-b)! \binom{m-\rho-b}{a-b}.$$

Ma  $\binom{a}{b} b! (a-b)! = a!$ ; quindi

$$(13) \quad d_{1[a]} = 2^a \sum_{b=0}^a \sum_{h=b}^a (-1)^b \zeta_b \binom{p-b}{b} \binom{m-\rho-b}{a-b}.$$

35. Per la dimostrazione che vogliamo fare, conviene avere la  $d_{1[a]}$  sotto un'altra forma. Per ciò consideriamo l'identità

$$\begin{aligned} & (1+x)^\eta (1+x+x^2+\dots+x^\mu)^{\xi-\mu+1} \\ = & (1+x)^\eta (1-x)^\eta (1+x+x^2+\dots+x^\mu)^\eta (1+x+x^2+\dots+x^\mu)^{\xi-\mu+1} + \text{termini in } x^{\mu+1}, x^{\mu+2}, \dots \\ = & (1-x^2)^\eta (1+x+x^2+\dots+x^\mu)^{\xi+\eta-\mu+1} + \text{termini in } x^{\mu+1}, x^{\mu+2}, \dots \end{aligned}$$

Supponiamo in questa identità che  $\xi, \eta, \mu$  siano interi positivi, e che  $\xi > \mu$ .

Ora

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+\dots+x^\mu)^{\xi-\mu+1} \\ = & 1 + \binom{\xi-\mu+1}{1} x + \binom{\xi-\mu+1}{2} x^2 + \dots + \binom{\xi-\mu+1}{\mu} x^\mu + \text{termini in } x^{\mu+1}, \dots \end{aligned}$$

Quindi, se poniamo l'uguaglianza dei coefficienti di  $x^\mu$  nell'identità soprascritta, e chiamiamo  $U(\xi, \eta, \mu)$  il valore di quei coefficienti, avremo

$$(29) \quad U(\xi, \eta, \mu) = \sum_{x=0}^{\mu} \binom{\xi-x}{\mu-x} \binom{\eta}{x} = \sum_{x=0}^{\frac{\mu}{2}, \frac{\mu-1}{2}} (-1)^x \binom{\xi+\eta-2x}{\mu-2x} \binom{\eta}{x}.$$

36. Ciò posto, vediamo che la (13) può scriversi

$$(30) \quad \begin{cases} d_{1[a]} = 2^a \sum_{b=0}^a (-1)^b \zeta_b U(m-\rho-b, p-b, a-b) \\ = 2^a \sum_{b=0}^a \sum_{h=0}^{\frac{a-b}{2}, \frac{a-b-1}{2}} (-1)^{b+h} \zeta_b \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h}{a-b-2h} \end{cases}$$

Abbiamo visto (§ 20) che

$$(13) \quad \bar{d}_{1[a-1]} = a d_{1[a]}.$$

Per determinare il valore di  $\bar{d}_{1[a-1]}$  bisogna ricordarsi che la  $\bar{\gamma}$  è una  $\gamma_{m-2}^{\rho-1}$  ed ha quindi  $\bar{x} = (m-2) + p - (\rho-1) = x-1$ . Ciò posto, possiamo scrivere la (14), dopo averla divisa per  $2^{a-1}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=0}^{\frac{a-b-1}{2}, \frac{a-b-2}{2}} (-1)^{b+h} \bar{\zeta}_b \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h-1}{a-b-2h-1} \\ = & 2a \sum_{b=0}^a \sum_{h=0}^{\frac{a-b}{2}, \frac{a-b-1}{2}} (-1)^b \zeta_b \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h}{a-b-2h}. \end{aligned}$$



Sostituiamo per  $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{a-2}$  i valori dati dalla (8), cioè

$$\bar{z}_c = 4(p - c + 1)z_{c+1} + 2(x - 3c)z_c - 2(c + 1)z_{c+1}.$$

Ne risulta che

$$(30') \left\{ \begin{aligned} & a \sum_{b=0}^{\frac{a-h}{2}} \sum_{h=0}^{\frac{a-b-1}{2}} (-1)^{b+h} z_b \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h}{a-b-2h} \\ &= \sum_{b=0}^{\frac{a-2}{2}} \sum_{h=0}^{\frac{a-b-2}{2}} (-1)^{b+h} [2(p-b+1)z_{b-1} + (x-3b)z_b - (b+1)z_{b+1}] \times \\ & \quad \times \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h-1}{a-b-2h-1} + \frac{1}{2}(-1)^{a-1} \bar{z}_{a-1} \\ &= \sum_{b=0}^{\frac{a-1}{2}} \sum_{h=0}^{\frac{a-b-1}{2}} (-1)^{b+h} z_b \left[ -2(p-b) \binom{p-b-1}{h} \binom{x-2b-2h-3}{a-b-2h-2} \right. \\ & \quad \left. + (x-3b) \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h-1}{a-b-2h-1} + b \binom{p-b+1}{h} \binom{x-2b-2h+1}{a-b-2h} \right] \\ & \quad + (-1)^{a-2} z_{a-2} \{ (x-3a+6)(x-2a+2) \\ & \quad \quad + (a-2) \left[ \binom{x-2a+5}{2} - (p-a+3) \right] \} \\ & \quad + (-1)^{a-1} z_{a-1} (a-1)(x-2a+3) + \frac{1}{2}(-1)^{a-1} \bar{z}_{a-1}. \end{aligned} \right.$$

37. Vogliamo dimostrare, prima, che, se sottraggiamo l'ultimo membro della equazione precedente dal primo membro, i coefficienti di  $z_0, z_1, \dots, z_{a-3}$  si annullano identicamente. Cioè

$$(31) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\frac{a-b}{2}} \sum_{h=0}^{\frac{a-b-1}{2}} (-1)^{b+h} \left[ a \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h}{a-b-2h} + 2(p-b) \binom{p-b-1}{h} \binom{x-2b-2h-3}{a-b-2h-2} \right. \\ & \quad \left. - (x-3b) \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h-1}{a-b-2h-1} - b \binom{p-b+1}{h} \binom{x-2b-2h+1}{a-b-2h} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Ora possiamo far vedere che, se  $\bar{h} < \frac{a-b+1}{2}$ ,

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\bar{h}} (-1)^h \left[ -a \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h}{a-b-2h} + (x-3b) \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h-1}{a-b-2h-1} \right. \\ & \quad \left. + b \binom{p-b+1}{h} \binom{x-2b-2h+1}{a-b-2h} \right] - \sum_{h=0}^{\bar{h}-1} (-1)^h 2(p-b) \binom{p-b-1}{h} \binom{x-2b-2h-3}{a-b-2h-2} \\ & \quad = (-1)^{\bar{h}} b \binom{p-b}{\bar{h}} \binom{x-2b-2\bar{h}-1}{a-b-2\bar{h}-2}. \end{aligned} \right.$$

Se  $\bar{h} = 0$ , la (32) è ridotta a

$$-a \binom{x-2b}{a-b} + (x-3b) \binom{x-2b-1}{a-b-1} + b \binom{x-2b+1}{a-b} = b \binom{x-2b-1}{a-b-2}.$$

Se dividiamo per  $\binom{x-2b-1}{a-b-2}$ , questa uguaglianza si riduce all'identità

$$-a \frac{(x-2b)(x-a-b+1)}{(a-b)(a-b-1)} + (x-3b) \frac{x-a-b+1}{a-b-1} + b \frac{(x-2b)(x-2b+1)}{(a-b)(a-b-1)} = b.$$

La (32) essendo verificata per  $\bar{h} = 0$ , si procede col metodo dell'induzione completa. Supponiamo cioè che la (32) sia vera per  $\bar{h} - 1$ , e aggiungiamo al secondo membro che corrisponde a quel valore, i termini del primo membro che corrispondono ad  $\bar{h}$ . Così otteniamo

$$(-1)^{\bar{h}} b \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2\bar{h}-1}{a-b-2\bar{h}-2}.$$

38. Il primo membro della (32) coincide col primo membro della (31), se si mette  $\bar{h} = \frac{a-b}{2}$  o  $\frac{a-b-1}{2}$ . Il secondo membro della (32), si annulla in questo caso, giacchè  $(a-b-2\bar{h}-2) < 0$ . La (31) è quindi verificata.

La (30') si trova adesso ridotta alla forma

$$\begin{aligned} & a \sum_{b=a-2}^a \sum_{h=0}^{\frac{a-b}{2}, \frac{a-b-1}{2}} (-1)^{b+h} \chi_b \binom{p-b}{h} \binom{x-2b-2h}{a-b-2h} \\ &= (-1)^{a-2} \chi_{a-2} \left\{ (x-3a+6)(x-2a+3) + (a-2) \left[ \binom{x-2a+5}{2} - (p-a+3) \right] \right\} \\ & \quad + (-1)^{a-1} \chi_{a-1} (a-1)(x-2a-3) + \frac{1}{2} (-1)^{a-1} \bar{\chi}_{a-1}. \end{aligned}$$

Questa equazione si riduce facilmente a quella voluta:

$$\bar{\chi}_{a-1} = 4(p-a+2)\chi_{a-2} + 2(x-3a+3)\chi_{a-1} - 2a\chi_a.$$

Cioè la (8) è verificata per  $\bar{\chi}_{a-1}$ .

### Particolari relativi al § 21.

39. Per applicare la (2) al calcolo di  $\bar{d}_{1[a-2]k}$  e di  $\bar{d}_{1[a-1]}^k$ , bisogna conoscere i valori delle  $y_h$  per questi due gruppi di indici. Si ricordi che  $y_h$  è il prodotto degli indici di un gruppo presi ad  $h$  ad  $h$ . Le  $y$  e i prodotti  $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_{a-1}+1)$  nei casi che consideriamo adesso, sono:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= k+a-2, \\ &\dots\dots\dots \\ y_h &= k \binom{a-2}{h-1} + \binom{a-2}{h}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{a-2} &= k(a-2)+1, \\ y_{a-1} &= k, \\ (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_{a-1}+1) &= 2^{a-2}(k+1) \end{aligned} \right\} \text{ per } 1_{[a-2]k}, \quad \left. \begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= a-1, \\ &\dots\dots\dots \\ y_h &= \binom{a-1}{h}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{a-2} &= a-1, \\ y_{a-1} &= 1, \\ (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_{a-1}+1) &= 2^{a-1} \end{aligned} \right\} \text{ per } 1_{[a-1]}^k.$$

Lo scopo di questo capitolo è di far vedere che la sostituzione dei valori dati dalla (2), e poi di quelli dati dalla (8), nella (16) produce una identità nelle  $z_0, z_1, \dots, z_a$ . La sostituzione ci dà

$$\begin{aligned} \frac{k}{d_{1[a-1]}} &= \frac{2^{a-1}}{(a-1)!} \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b \bar{z}_b \binom{a-1}{h} h! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \\ &= 2^{a-1} \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b \{ (k+1)^2 (p-b+1) z_{b-1} + (k+1) [m-\rho+kp-b(2k+1)] z_b \\ &\quad - (b+1) k (k+1) z_{b+1} \} \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \\ &= 2^{a-1} \sum_{b=0}^{a-1} (-1)^{b+1} z_b \left\{ \sum_{h=b+1}^{a-1} (k+1)^2 (p-b) \binom{p-b-1}{h-b-1} \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right. \\ &\quad - \sum_{h=b}^{a-1} (k+1) [m-\rho+kp-b(2k+1)] \binom{p-b}{h-b} \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \\ &\quad \left. - \sum_{h=b-1}^{a-1} b k (k+1) \binom{p-b+1}{h-b+1} \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right\}. \end{aligned}$$

Similmente (ricordiamoci che  $x = m + p - \rho$ )

$$\begin{aligned} \bar{d}_{1[a-2]k} &= \frac{2^{a-2} (k+1)}{(a-2)!} \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b \bar{z}_b \times \\ &\quad \times \left[ k \binom{a-2}{h-1} + \binom{a-2}{h} \right] h! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \\ &= 2^{a-2} (k+1) \sum_{b=0}^{a-1} (-1)^{b+1} z_b \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{h=b+1}^{a-1} 4(p-b)(kh+a-h-1) \binom{p-b-1}{h-b-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \right. \\ &\quad - \sum_{h=b}^{a-1} 2(x-3b)(kh+a-h-1) \binom{p-b}{h-b} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \\ &\quad \left. - \sum_{h=b-1}^{a-1} 2b(kh+a-h-1) \binom{p-b+1}{h-b+1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \right\}. \end{aligned}$$

#### 40. Perché la equazione

$$(16) \quad \bar{d}_{1[a-2]k} = (a-1) \frac{k}{d_{1[a-1]}}$$

sia una identità bisogna che i coefficienti di ciascuna  $z_b$  a sinistra e a destra siano uguali. Cioè

$$\begin{aligned} &\sum_{h=b+1}^{a-1} (p-b) [2(kh+a-h-1) - (k+1)(a-1)] \binom{p-b-1}{h-b-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \\ &- \sum_{h=b}^{a-1} \{ (kh+a-h-1) - [x+(k-1)p-b(2k+1)] (a-1) \} \binom{p-b}{h-b} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \\ &- \sum_{h=b-1}^{a-1} b [kh+a-h-1] - k(a-1) \binom{p-b+1}{h-b+1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} = 0. \end{aligned}$$

Se dividiamo per  $(k-1)$  (la quale è positiva, § 21), e, nell'ultima sommatoria (il cui

termine per  $h = a - 1$  è zero), cambiamo  $h$  in  $(h - 1)$ , ne risulta

$$(33) \left\{ \sum_{h=b}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b+1}{h-b} \{ (h-b)(p-h+1)(a-2h-1) \right. \\ \left. - (p-h+1)[(a-1)(p-2b)-h(x-3b)] - b(x-p-h)(p-b+1) \} = 0. \right.$$

41. Vogliamo dimostrare che la (33) è una identità. Chiamiamo il suo primo membro  $X$ . Si vede che questo membro è una sommatoria, e che per un valore generico di  $h$  abbiamo quattro termini. Possiamo allora separare  $X$  in quattro sommatorie. Ognuna di queste si trasforma facilmente in uno o due termini della forma

$$\varepsilon U(\xi, n, \mu),$$

dove  $U$  ha il significato spiegato alla fine del § 35. Eseguiamo la trasformazione detta sulla prima sommatoria della (33)

$$\begin{aligned} & \sum_{h=b+1}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b+1}{h-b} (h-b)(p-h+1)(a-2h-1) \\ = & \sum_{h=b+1}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b-1}{h-b-1} (p-b+1)(p-b)(a-2h-1) \\ = & (p-b+1)(p-b)(a-2b-3) \sum_{h=b+1}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b-1}{h-b-1} \\ & - 2(p-b+1)(p-b) \sum_{h=b+2}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b-1}{h-b-1} (h-b-1) \\ = & (p-b+1)(p-b)(a-2b-3) \sum_{h=b+1}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b-1}{h-b-1} \\ & - 2(p-b+1)(p-b)(p-b-1) \sum_{h=b+2}^{a-1} \binom{x-p-h-1}{a-h-1} \binom{p-b-2}{h-b-2} \\ = & (p-b+1)(p-b)(a-2b-3) U(x-p-b-2, p-b-1, a-b-2) \\ & - 2(p-b+1)(p-b)(p-b-1) U(x-p-b-3, p-b-2, a-b-3). \end{aligned}$$

Similmente le altre tre sommatorie si mutano rispettivamente in:

$$\begin{aligned} & - (p-b+1)(a-1)(p-2b) U(x-p-b-1, p-b, a-b-1); \\ & (p-b+1)b(x-3b) U(x-p-b-1, p-b, a-b-1) \\ + & (p-b+1)(p-b)(x-3b) U(x-p-b-2, p-b-1, a-b-2); \\ & - (p-b+1)b(x-p-a+1) U(x-p-b, p-b+1, a-b-1). \end{aligned}$$

Scriviamo  $\frac{X}{p-b+1} = Y$ , ricordando che, per  $\varepsilon_b$  diverso da zero,  $p-b+1 > 0$ .

Allora

$$(34) \left\{ \begin{aligned} Y = & -2(p-b)(p-b-1) U(x-p-b-3, p-b-2, a-b-3) \\ & + (x+a-5b-3)(p-b) U(x-p-b-2, p-b-1, a-b-2) \\ & + [b(x-3b)-(a-1)(p-2b)] U(x-p-b-1, p-b, a-b-1) \\ & - b(x-p-a+1) U(x-p-b, p-b+1, a-b-1). \end{aligned} \right.$$

42. Prima di mostrare che  $Y$  s'annulla identicamente, conviene sviluppare tre formole ricorrenti per  $U(\xi, n, \mu)$ . È da notare che, sebbene la funzione  $U$  sia com-

parsa in parecchi lavori di geometria numerativa, non si è riuscito finora a darle una forma chiusa.

Per questa ragione dobbiamo ricorrere a formole ricorrenti per la nostra dimostrazione. La prima di queste formole è basata sulla prima forma data per  $U(\xi, \eta, \mu)$  nella (29), cioè  $\sum_{x=0}^{\mu} \binom{\xi-x}{\mu-x} \binom{\eta}{x}$ . La formola è

$$(35) \quad \mu U(\xi, \eta, \mu) = (\xi - \mu + 1) U(\xi, \eta, \mu - 1) + \eta U(\xi - 1, \eta - 1, \mu - 1).$$

Infatti

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{x=0}^{\mu} \binom{\xi-x}{\mu-x} \binom{\eta}{x} - (\xi - \mu + 1) \sum_{x=0}^{\mu-1} \binom{\xi-x}{\mu-1-x} \binom{\eta}{x} - \eta \sum_{x=0}^{\mu-1} \binom{\xi-1-x}{\mu-1-x} \binom{\eta-1}{x} \\ &= \sum_{x=0}^{\mu} \left[ \mu \binom{\xi-x}{\mu-x} \binom{\eta}{x} - (\xi - \mu + 1) \binom{\xi-x}{\mu-x-1} \binom{\eta}{x} + \eta \binom{\xi-x}{\mu-x} \binom{\eta-1}{x-1} \right] \\ &= \sum_{x=0}^{\mu} \binom{\xi-x}{\mu-x} \binom{\eta-1}{x-1} \left[ \frac{\mu \eta}{x} - \frac{(\mu-x) \eta}{x} + \eta \right] = 0. \end{aligned}$$

Otteniamo una seconda formola dall'altra forma della  $U(\xi, \eta, \mu)$ , vale a dire  $\sum (-1)^x \binom{\xi + \eta - 2x}{\mu - 2x} \binom{\eta}{x}$ , dove  $x$  prende tutti i valori interi che non danno termini nulli:

$$(36) \quad \mu U(\xi, \eta, \mu) = (\xi + \eta - \mu + 1) U(\xi, \eta, \mu - 1) - 2\eta U(\xi - 1, \eta - 1, \mu - 2).$$

Infatti

$$\begin{aligned} & \mu \sum (-1)^x \binom{\xi + \eta - 2x}{\mu - 2x} \binom{\eta}{x} - (\xi + \eta - \mu + 1) \sum (-1)^x \binom{\xi + \eta - 2x}{\mu - 1 - 2x} \binom{\eta}{x} \\ & \quad - 2\eta \sum (-1)^x \binom{\xi + \eta - 2x}{\mu - 2x} \binom{\eta - 1}{x - 1} \\ &= \sum (-1)^x \binom{\xi + \eta - 2x}{\mu - 2x} \binom{\eta - 1}{x - 1} \left[ \frac{\eta \mu}{x} - \frac{\eta (\mu - 2x)}{x} - 2\eta \right] = 0. \end{aligned}$$

La terza formola ricorrente l'otterremo se sottraggiamo la (35) dalla (36), se mutiamo  $\mu$  in  $(\mu - 1)$  e se dividiamo per  $\eta$ :

$$(37) \quad U(\xi, \eta, \mu) - U(\xi - 1, \eta - 1, \mu) - 2U(\xi - 1, \eta - 1, \mu - 1) = 0.$$

43. Adesso siamo in grado di dimostrare la (33) per  $b = 0$ . [La verità della (33) in questo caso risulta anche dal fatto che, per  $z_1 = z_2 = \dots = 0$ , la formola (2) si riduce alla nota formola di DE JONQUIÈRES].

Per  $b = 0$ , la (34) è

$$(38) \quad \left\{ Y = p! - 2(p-1)U(x-p-3, p-2, a-3) + (x+a-3)U(x-p-2, p-1, a-2) - (a-1)U(x-p-1, p, a-1) \right\}.$$

Trasformiamo la prima e la terza  $U$  mediante la (37).

$$\begin{aligned} \frac{Y}{p} &= -(p-1)[U(x-p-2, p-1, a-2) - U(x-p-3, p-2, a-2)] \\ & \quad + (x+a-3)U(x-p-2, p-1, a-2) \\ & \quad - (a-1)[U(x-p-2, p-1, a-1) + 2U(x-p-2, p-1, a-2)] \\ &= (p-1)U(x-p-3, p-2, a-2) + (x-p-a)U(x-p-2, p-1, a-2) \\ & \quad - (a-1)U(x-p-2, p-1, a-1). \end{aligned}$$

Ma, secondo la (35),

$$(a-1)U(x-p-2, p-1, a-1) = (x-p-a)U(x-p-2, p-1, a-2) \\ + (p-1)U(x-p-3, p-2, a-2).$$

Quindi  $Y = 0$  quando  $b = 0$ .

44. Per dimostrare che  $Y = 0$ , qualunque sia il valore di  $b$ , partiamo dalla (38). L'identità che si ottiene, ponendo quella espressione uguale a zero, non dipende da relazioni tra gli argomenti. Quindi è lecito cambiare  $p$  in  $(p-b)$ ,  $x$  in  $(x-2b)$ ,  $a$  in  $(a-b)$ . Ne risulta

$$-2(p-b)(p-b-1)U(x-p-b-3, p-b-2, a-b-3) \\ + (p-b)(x+a-3b-3)U(x-p-b-2, p-b-1, a-b-2) \\ - (p-b)(a-b-1)U(x-p-b-1, p-b, a-b-1) = 0.$$

Se sottraggiamo la (34) da questa identità, risulta

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{Y}{b} &= 2(p-b) \sum_{x=0}^{a-b-2} \binom{x-p-b-2-x}{a-b-2-x} \binom{p-b-1}{x} \\ &- (x-p-2b+a-1) \sum_{x=0}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b}{x} \\ &+ (x-p-a+1) \sum_{x=0}^{a-b} \binom{x-p-b-x}{a-b-1-x} \binom{p-b+1}{x} \end{aligned} \right\}.$$

La prima sommatoria della (39) si scrive anche così:

$$2(p-b) \sum_{x=1}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b-1}{x-1}.$$

La terza\* sommatoria si trasforma nel modo seguente:

$$(x-p-a+1) \sum_{x=0}^{a-b-1} \binom{x-p-b-x}{a-b-1-x} \binom{p-b+1}{x} \\ = (x-p-a+1) \left\{ \sum_{x=0}^{a-b-1} \binom{x-p-b-x}{a-b-1-x} \binom{p-b+1}{x} + \sum_{x=0}^{a-b-2} \binom{x-p-b-x}{a-b-2-x} \binom{p-b}{x} \right. \\ \left. - \sum_{x=1}^{a-b-1} \binom{x-p-b-x}{a-b-1-x} \binom{p-b}{x-1} \right\} \\ = \sum_{x=0}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b}{x} (x-p+a-2b-1-2x).$$

Tornando alla (39), abbiamo

$$-\frac{Y}{b} = 2(p-b) \sum_{x=1}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b-1}{x} \\ - (x-p+a-2b-1) \sum_{x=0}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b}{x} \\ + \sum_{x=0}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b}{x} (x-p+a-2b-1-2x) \\ = 2(p-b) \sum_{x=1}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b-1}{x-1} - \sum_{x=1}^{a-b-1} \binom{x-p-b-1-x}{a-b-1-x} \binom{p-b}{x} 2x = 0.$$

La (33) resta quindi verificata per ogni valore di  $b$ .

## Particolari relativi al § 22.

45. È impossibile scrivere subito la relazione che lega la  $d_{k_1 \dots k_a}$  colla  $\bar{d}_{k_1 \dots k_{a-1}}^{k_a}$ , giacchè dipende dalla eventuale uguaglianza che la  $k_a$  ha con altre  $k$ . Ma ricordandoci che abbiamo definito

$$(23) \quad c_1! c_2! \dots c_n! d_{k_1 k_2 \dots k_a} = \delta_{k_1 k_2 \dots k_a}$$

vediamo che un risultato immediato della (11) è che

$$(40) \quad \delta_{k_1 \dots k_a}^{k_a} = \delta_{k_1 \dots k_{a-1}}^{k_a}.$$

Sappiamo trovare un'espressione per  $\delta_{k_1 k_2 \dots k_{a-1}}^{k_a}$  in termini delle  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_a$  mediante la (2) e la (8), e questo senza sapere se la (2) vale per più di  $(a-1)$  indici o no. In questo capitolo  $y'_h$  si riferisce all'insieme d'indici  $k_1, k_2, \dots, k_{a-1}$ ,  $y_h$  all'insieme  $k_1, k_2, \dots, k_{a-1}, k_a$ .

$$\begin{aligned} \delta_{k_1 \dots k_a}^{k_a} &= \delta_{k_1 \dots k_{a-1}}^{k_a} = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_{a-1} + 1) \times \\ &\times \left\{ \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b \frac{k_a}{z_b} y'_h b! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right\} \\ &= (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_{a-1} + 1)(k_a + 1) \times \\ &\times \left\{ \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b z_{b-1} y'_h (k_a + 1)(p-b+1) b! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right. \\ &+ \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b z_b y'_h [m-\rho+k_a p-b(2k_a+1)] b! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \\ &\left. - \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{h=b}^{a-1} (-1)^b z_{b+1} y'_h (b+1) k_a b! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right\} \\ &= (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_a + 1) \sum_{b=0}^a \sum_{h=b-1}^{a-1} (-1)^{b+1} z_b y'_h \times \\ &\times \left\{ (k_a + 1)(p-b) b! \binom{p-b-1}{h-b-1} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right. \\ &- [m-\rho+k_a p-b(2k_a+1)] b! \binom{p-b}{h-b} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \\ &\left. - b k_a b! \binom{p-b+1}{h-b+1} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right\} \\ &= (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_a + 1) \sum_{b=0}^a \sum_{h=b-1}^{a-1} (-1)^{b+1} z_b y'_h b! \binom{p-b-1}{h-b-1} (a-h-1)! \times \\ &\times \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \frac{p-b}{(h-b)(h-b+1)} [k_a(h+1)(h-p) - (h-b+1)(m-\rho-h)]. \end{aligned}$$

La  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_a + 1)(-1)^{b+1} z_b$  viene moltiplicata per

$$(41) \quad \left\{ - \sum_{h=b-1}^{a-1} k_a y'_h (h+1)! \binom{p-b}{h-b+1} (a-h-1)! \binom{m-\rho-h-1}{a-h-1} \right. \\ \left. - \sum_{h=b}^a y'_h b! \binom{p-b}{h-b} (a-h)! \binom{m-\rho-h}{a-h} \right\}$$





punto  $(k_1 + 1)$ -plo, un punto  $(k_2 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(k_a + 1)$ -plo e di  $(\rho - \sum)$  punti fissi arbitrari. La (8) fa vedere che è possibile calcolare, dai medesimi caratteri, i caratteri corrispondenti relativi alla serie subordinata dai punti  $(k + 1)$ -pli della serie data.

Ma possiamo dire anche di più. Mediante la (8) è possibile calcolare le  $\frac{k_1 k_2}{z_b}$  in termini di  $\frac{k_1}{z_0}, \frac{k_1}{z_1}, \dots$ , e quindi in termini di  $z_0, z_1, \dots, z_\rho$ . Procedendo innanzi così, si arriva a concludere che le  $\frac{k_1 k_2 \dots k_a}{z_b}$  caratteri della serie subordinata nella serie primitiva dagli insiemi di un punto  $(k_1 + 1)$ -plo, un punto  $(k_2 + 1)$ -plo, ..., un punto  $(k_a + 1)$ -plo, si calcolano tutte in termini delle stesse  $z_0, z_1, \dots, z_\rho$ .

Calcoliamo ad esempio  $\frac{11}{z_0}, \frac{11}{z_1}$  per la serie subordinata in una serie  $\gamma_m^\rho$  sopra una curva ellittica dalle coppie di punti doppi. Calcoliamo  $\bar{z}_0, \bar{z}_1$  dalla (8). Mettendo  $p = 1$ ,  $\kappa = 1$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\bar{z}_0 &= 2(m - \rho + 1)z_0 - 2z_1, \\ \bar{z}_1 &= 4z_0 + 2(m - \rho - 2)z_1.\end{aligned}$$

La  $\bar{\gamma}$  è una  $\gamma_{m-2}$ , quindi

$$\begin{aligned}\frac{11}{\bar{z}_0} &= 2(m - \rho)\bar{z}_0 - 2\bar{z}_1, \\ \frac{11}{\bar{z}_1} &= 4\bar{z}_0 + 2(m - \rho - 3)\bar{z}_1.\end{aligned}$$

La sostituzione delle espressioni date per  $\bar{z}_0, \bar{z}_1$ , conduce alle formole volute:

$$\begin{aligned}\frac{11}{z_0} &= 4(m - \rho - 1)(m - \rho + 2)z_0 - 4(m - \rho - 1)z_1, \\ \frac{11}{z_1} &= 16(m - \rho - 1)z_0 + 4(m - \rho - 1)(m - \rho - 4)z_1.\end{aligned}$$

48. Una conseguenza interessante della (8) si trova nel modo seguente. Supponiamo che una serie algebrica  $\gamma_m^\rho$  sopra una curva di genere  $p \geq c$ , sia tale che  $z_{c-1} > 0$  ma  $z_c = 0$  [e quindi (§ 4)  $z_{c+1} = z_{c+2} = \dots = 0$ ]. La (8) dà per  $\frac{x}{z_0}$

$$\frac{x}{z_0} = (x + 1)^2(p - c + 1)z_{c-1}$$

Questo è maggiore di zero. Tenendo in mente il teorema del § 12, possiamo enunciare questo risultato così:

Se una  $\gamma_m^\rho$  algebrica irriducibile non composta sopra una curva di genere  $p \geq c$ , è tale che il massimo sistema di gruppi che se ne possa scegliere, in modo che due non siano mai equivalenti, è  $\infty^c$ , allora è possibile nella  $\gamma_{m-x}^{\rho-x}$ , subordinata nella  $\gamma_m^\rho$  dai suoi punti  $(x + 1)$ -pli, di scegliere almeno  $\infty^{c+1}$  gruppi, in modo che non ve ne siano mai due equivalenti.

In particolare, se  $c = 1$ , abbiamo il corollario: Se, sopra una curva di genere  $p > 0$ , è data una serie algebrica  $\gamma_m^\rho$  i cui gruppi sono tutti equivalenti, i suoi punti

$(\kappa + 1)$ -pli ( $\kappa = 1, 2, \dots, p - 1$ ) subordinano una serie i cui gruppi non sono tutti equivalenti.

Questo è, del resto, evidente; perchè, se non fosse vero, tutti i punti della curva, presi  $(\kappa + 1)$  volte, sarebbero equivalenti, ciò che è impossibile quando  $p > 0$ .

Amsterdam, 27 giugno 1913.

EDWARD S. ALLEN.

---