

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Sechster Bericht.*)

Von

FELIX KLEIN in Göttingen.

Unser Gauß-Archiv hat seit Erscheinen des letzten Berichtes**) wieder eine erfreuliche Bereicherung erfahren; wir erhielten:

1) 26 Originalbriefe von Gauß an Repsold von Herrn Dr. Repsold, Hamburg.

2) 11 Originalbriefe von Gauß an Hansen, 1 Originalbrief von Gauß an Lindemann, 1 Kopie eines Briefes von Gauß an Benzenberg, von Herrn Professor Harzer, namens der Hansenschen Familie.

3) einen Originalbrief von Gauß an G. H. Schubert, von Herrn Professor Joh. Ranke, München, durch Vermittlung von Herrn Professor Engel, Leipzig-Greifswald.

4) Kopie eines Briefes von Gauß an Hauptmann Müller und anderes von Herrn F. S. Archenhold, Treptow.

5) eine größere Zahl auf Gauß und Wilh. Weber bezüglicher Papiere aus dem Nachlaß von Professor Rehnisch, Göttingen, von Frau Professor Rehnisch.

6) ein Exemplar der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* ins englische übersetzt von Morehead und Hildebrand.

Außerdem wurde uns zur Einsicht zur Verfügung gestellt:

ein Vorlesungsheft von dem Geologen Peter Merian, das sich auf eine im Wintersemester 1815/16 von Gauß gehaltene Vorlesung „über verschiedene mathematische Gegenstände“ bezieht, von Herrn Dr. Stehlin, Basel, durch Vermittlung von Herrn Dr. Fueter.

Im Herbste vorigen Jahres erschien der IX. Band der Werke, bearbeitet von Herrn L. Krüger, wodurch das Unternehmen um einen

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1904, Heft 1.

**) Fünfter Bericht, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftliche Mitteilungen, 1902. Abgedruckt in Bd. 57 der Math. Annalen.

großen Schritt seiner Vollendung entgegengeführt worden ist; infolge der hierdurch entstandenen Entlastung kann nun auch Band VII in schnellerem Tempo weitergeführt werden und es mögen über seinen Inhalt einstweilen folgende Mitteilungen hier Platz finden, die ich dem Herausgeber, Herrn Brendel, verdanke:

„Die *Theoria motus*, welche den Band eröffnen wird, ist fertig gesetzt; es hat sich im Laufe des Neudrucks gezeigt, daß in den numerischen Beispielen sich eine größere Zahl von Fehlern findet, woraus Anlaß genommen wurde, diese sämtlich einer gründlichen Revision zu unterziehen. Diese allerdings etwas mühsame Arbeit erschien deswegen wünschenswert, weil die von Gauß hier angeführten und bis in die Einzelheiten durchgeführten Beispiele klassisch geworden sind und auch heute noch gern, namentlich als Prüfstein neuerer Methoden, wieder herangezogen werden. Man sieht auch hieran, wie an den unten zu erwähnenden Störungsrechnungen, daß Gauß keineswegs mit einer so peinlichen Genauigkeit gearbeitet hat, wie man bisher anzunehmen pflegte. Wenn er sich vorgenommen hatte, *pauca sed matura* zu schaffen, so hat er also sein „matura“ nicht im pedantischen Sinne so gemeint, daß alle Einzelheiten peinlich durchgeprüft sein, sondern daß von höherem Gesichtspunkte aus das Wesen und die wahre Bedeutung und Tragweite der von ihm geschaffenen Theorien erkannt sein sollten; daß er auch die gesamte Kärnerarbeit hat selbst leisten wollen, lag nicht in seiner Absicht; hätte er das tun wollen, so wäre sicher auch der erste Teil seines Wahlspruchs, „pauca“, in Erfüllung gegangen.“

„Bei der Herausgabe der gesammelten Werke war nun die Frage zu entscheiden, was geschehen solle, wenn beim Neudruck an irgend einer Stelle Fehler im Original gefunden wurden; wo sich diese Fehler leicht verbessern ließen, empfahl es sich, dies zu tun; in vielen Fällen, namentlich bei längeren Rechnungen, schien es aber angemessener, von einer solchen Verbesserung abzusehen, da dies eine vollkommene Umrechnung des gesamten Materials erfordert hätte. Natürlich ist bei der Herausgabe stets angegeben worden, falls irgend welche Fehler im Original entdeckt wurden. Bei größeren Rechnungen, wie den Pallasstörungen, wäre eine genaue Kontrolle auch undurchführbar gewesen und es wurde nur versucht, solche Proben aus den Originalen als Beispiele zu geben, welche in sich fehlerfrei waren. Band VII wird in dieser Hinsicht möglichst einheitlich mit Band IX gestaltet werden, in welchem Herr L. Krüger diese Frage sehr geschickt gelöst hat.“

„An die *Theoria motus* werden sich noch einzelne kleinere Notizen anschließen, welche sie teils ergänzen, teils sich auf verwandte Probleme beziehen, wie z. B. auf die Bestimmung von Kometenbahnen. Sodann

werden Gauß' Rechnungen über die Störungen der Ceres folgen, bei denen er sich wesentlich an Laplaces *Mécanique céleste* anlehnt (Störungen in Polarkoordinaten), wenn er auch die Methoden für seine Zwecke umformt, namentlich bei der Entwicklung der Störungsfunktion (1802) bereits von der Darstellung des vollständigen elliptischen Integrals durch das arithmetisch-geometrische Mittel Gebrauch macht. Die numerischen Rechnungen sind hier fehlerhaft infolge Anwendung einer falschen Formel und dies gilt namentlich von den in Zachs Monatlicher Korrespondenz 1802 Oktober publizierten Resultaten.“

„Den interessantesten Gegenstand werden die nun folgenden Untersuchungen über die Pallasstörungen bilden, sowohl mit Bezug auf die von Gauß angewandten Methoden zur Berechnung der speziellen und der allgemeinen Störungen als namentlich mit Bezug auf die Entdeckung, daß sich die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas wie 7 zu 18 verhalten (Göttingische Gelehrte Anzeigen von 1812 April und Gauß an Bessel 5. Mai 1812). Bereits in einem früheren Berichte*) ist erwähnt, daß sich einige kleine Zettel über diese Frage gefunden haben; es scheint aber, daß diese nicht zu den in den Jahren bis 1812 ausgeführten Untersuchungen über die Störungen der Pallas gehören, da die letzteren sich bis in alle Einzelheiten inzwischen haben aufklären lassen und unter ihnen sich auch die Rechnungen befinden, aus denen Gauß unzweifelhaft seinen Schluß gezogen hat, daß sich das Verhältnis 7/18 der mittleren Bewegungen immer wieder herstellt. Hierzu sei folgendes bemerkt:“

„Gauß hat bei den Pallasstörungen die Methode der Variation der Elemente benutzt (vor der Publikation von Lagranges Methode); die sechs Differentialgleichungen haben daher auch eine ähnliche Form wie die sonst üblichen; als zu variierende Elemente benutzt Gauß außer Neigung, Knotenlänge, mittlerer Länge, Länge des Perihels und dem Exzentrizitätswinkel teils die mittlere Bewegung, teils die halbe große Achse, teils den halben Parameter; die Störungen der mittleren Länge in der Anfangsepoche, die Gauß einfach Epoche der mittleren Länge nennt, teilt er in zwei Teile, von denen der erstere die durch das bekannte Doppelintegral $\iint dn dt$ dargestellten besonders großen Störungen enthält. Die Entwicklung der Störungsfunktion geschieht nach den mittleren Anomalien der beiden Körper und zwar nach beiden Argumenten mit Hilfe der Interpolationsmethode, die auch Hansen später benutzt hat und deren Grundlagen in der *Theoria interpolationis* entwickelt sind; diese

*) Vierter Bericht, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftliche Mitteilungen, 1901. Abgedruckt in Bd. 57 der Math. Annalen.

Entwicklung hat Gauß außerordentlich weit getrieben, bis etwa zur 18-fachen mittleren Anomalie Jupiters und zur 20-fachen der Pallas.“

„Die mittlere Länge stellt sich durch die Relation $L = nt + \varepsilon$ dar, wo ε die Epoche bezeichnet, und für die letztere ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (1 - \cos i) \left\{ \cos i \frac{d\Omega}{n dt} + \frac{d\varpi}{n dt} \right\} + 2r \cos \varphi \cdot T,$$

wo

$$T = \frac{m' ar}{\varrho^2 \cos \varphi} - \frac{m' ar'}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r'^2} \right) \cos \beta' \cos (v - v'),$$

oder nach der Entwicklung der Störungsfunktion

$$\frac{d\varepsilon}{n dt} = \sum \sum P_{i,i'} \cos [(i'n' + in)t + Q_{i,i'}]$$

und integriert

$$\varepsilon = \sum \sum P_{i,i'} \frac{n}{i'n' + in} \sin [(i'n' + in)t + Q_{i,i'}].$$

Unter der Annahme von

$$n' = 299'', 264975$$

wird aber $18/7n' = 769'', 53851$, also äußerst nahe der mittleren Bewegung der Pallas, die etwa $n = 769'', 24$ ist. Das Glied in $i' = 18$, $i = -7$ würde daher einen so kleinen Divisor erhalten, daß seine Integration in dieser Form nicht angeht. Gauß entwickelt es darum in eine Potenzreihe; er findet es, numerisch, wie folgt

$$\text{Glied in } \frac{d\varepsilon}{n dt} = -0'', 04383 \cos [(18n' - 7n)t + 23^\circ 22' 34''].$$

Die Entwicklung in die Potenzreihe gibt:

$$-0'', 04383 \cos 23^\circ 22' 34'' + 0'', 04383 (18n' - 7n)t \sin 23^\circ 22' 34''$$

und integriert, sowie t in Jahrhunderten ausgedrückt

$$\text{Glied in } \varepsilon = -5'', 48t + 1'', 18(18n' - 7n)t^2.$$

Als Störung der mittleren Bewegung aufgefaßt, wird dies:

$$\text{Glied in } n = -5'', 48 + 1'', 18(18n' - 7n)t.$$

Außer einem konstanten Gliede in der mittleren Bewegung ergibt sich also ein in t multipliziertes; das Wesentliche ist nun, daß dieses letztere dasselbe Vorzeichen hat wie $18n' - 7n$; ist also $18n' > 7n$, so ist das Glied in t positiv und n wird vergrößert, ist dagegen $18n' < 7n$, so wird n verkleinert, bis in beiden Fällen $18n' = 7n$ geworden ist. Das strenge Verhältnis $7/18$ stellt sich also von selbst immer wieder her.

Daß Gauß das aufsehenerregende Resultat über die strenge Herstellung der Kommensurabilität der mittleren Bewegungen auf diese Weise gefunden hat, kann nicht mehr zweifelhaft sein, wenn auch im Nachlaß nichts Direktes darüber zu finden ist. Heutzutage wissen wir, daß bei Berücksichtigung der Störungen erster Ordnung allein dieser Beweis nicht stichhaltig ist und sich über ihn dasselbe sagen läßt, wie über den Laplaceschen Stabilitätsbeweis.“

„Des weiteren wird der VII. Band noch einige Einzelheiten auch über praktische und stellare Astronomie bringen, über die hier nicht näher berichtet werden kann, da sie noch nicht vollkommen durchgearbeitet sind.“
