

Neue Grundlagen der Gruppen- und Substitutionentheorie.

Von

P. HOYER in Burg b./Magdeburg.

Einleitung.

In der vorliegenden Abhandlung werde ich darlegen, in welcher Weise die Gruppen- und Substitutionentheorie auf die von mir entwickelte Theorie des Zusammenhanges in Reihen (Math. Ann. 42) zu stützen ist. Es geschieht dies dadurch, dass den Substitutionen gewisse Reihen zugeordnet werden und auf diese Reihen der in meiner Abhandlung „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppierungsaufgaben“ (Math. Ann. 50) entwickelte Begriff des charakteristischen Functionensystems einer Reihe übertragen wird; doch soll, da dieser Begriff hier von der Reihenvorstellung unabhängige Bedeutung gewinnt, er unmittelbar im Anschluss an den Substitutionenbegriff entwickelt und vorangestellt werden. Damit gestalten sich die Fragen nach der Beschaffenheit mehrerer Substitutionen oder einer Gruppe derselben zu Fragen nach der Beschaffenheit dieser Reihen bzw. Functionensysteme. Ich werde dies im ersten Theile nachweisen an der Untersuchung des Grades der Transitivität, der Ordnung einer Gruppe und der grössten Anzahl von Elementen, die von den Substitutionen einer Gruppe ungeändert bleiben können, ohne dass die übrigen ungeändert bleiben. Ich werde zeigen, wie durch die Benutzung der Ergebnisse meiner letzten Abhandlung die Fragen nach diesen Zahlen sich zu rein analytischen Fragen nach dem Grade gewisser Determinanten gestalten, und werde alsdann den ersten Theil mit der Entwicklung der Functionalgleichung schliessen, welche die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass mehrere gegebene Substitutionen eine Gruppe bilden.

Im zweiten, z. Th. als Anwendung des ersten zu betrachtenden Theil zeige ich sodann, wie die Untersuchung der verschiedenen Formen gleichwerthiger Producte, die sich aus gegebenen Substitutionen bilden lassen, auf's Engste mit der Gruppentheorie verknüpft ist.

Erster Theil.

Von den Substitutionengruppen.

§ 1.

Es sei durch

$$S_1 = \begin{pmatrix} a'_1 a'_2 \dots a'_N \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix}$$

eine Substitution der N -Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ bezeichnet, durch welche die Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ der Reihe nach durch $a'_1, a'_2 \dots a'_N$ ersetzt werden, wenn $a'_1, a'_2 \dots a'_N$ dieselben Elemente $a_1 \dots a_N$ in gewisser Reihenfolge sind. Es seien ferner durch $x_1, x_2 \dots x_N$ N unbeschränkt Veränderliche, durch den Buchstaben C mit irgend welchen Indices unbestimmte Constante und durch $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N$ N von einander verschiedene positive ganze Zahlen bezeichnet. Wir bilden dann die Function

$$\Phi(x_1 x_2 \dots x_N) = \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)} C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} x_{\alpha_1}^{\lambda_1} x_{\alpha_2}^{\lambda_2} \dots x_{\alpha_m}^{\lambda_m},$$

$$(m \leq N)$$

indem wir die Summation über alle $N(N-1) \dots (N-m+1)$ Verbindungen $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m)$ der Zahlen $1, 2 \dots N$ erstrecken, in denen die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ von einander verschieden sind. Auf diese

Function wenden wir die Substitution $\begin{pmatrix} x'_1 x'_2 \dots x'_N \\ x_1 x_2 \dots x_N \end{pmatrix}$ an, indem wir unter $x'_1, x'_2 \dots x'_N$ die Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_N$ in derselben Reihenfolge verstehen, in der die Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ durch $a'_1, a'_2 \dots a'_N$ bezeichnet sind. Dadurch geht die Function $\Phi(x_1 \dots x_N)$ über in $\Phi(x'_1 \dots x'_N)$. Soll

$$(1) \quad \Phi(x_1 \dots x_N) = \Phi(x'_1 \dots x'_N)$$

sein, so müssen die Coefficienten $C_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ gruppenweise einander gleich sein. t_m sei die Anzahl dieser Gruppen gleicher Coefficienten. Wählen wir aus jeder dieser Gruppen einen Coefficienten aus, und bezeichnen wir die so erhaltenen Coefficienten kurz durch $C_1, C_2 \dots C_{t_m}$, so erhalten wir als Folge der Gleichung (1) die Gleichung

$$(2) \quad \Phi(x_1 \dots x_N) = \sum_{\alpha=1}^{t_m} C_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{(m)}(x_1 \dots x_N),$$

in der jede der t_m Functionen $\varphi_{\alpha}^{(m)}(x_1 \dots x_N)$ ($\alpha=1 \dots t_m$) eine Summe von Termen von der Form $x_{\alpha_1}^{\lambda_1} x_{\alpha_2}^{\lambda_2} \dots x_{\alpha_m}^{\lambda_m}$ ist. Die so definirten Functionen $\varphi_{\alpha}^{(m)}(x_1 \dots x_N)$ ($\alpha=1 \dots t_m$) bezeichnen wir als die der

Substitution S_1 entsprechenden Functionen m^{ter} Ordnung und die Veränderlichen $x_1 \dots x_N$ in ihnen als die den Elementen $a_1 \dots a_N$ in S_1 entsprechenden Veränderlichen.

Ist

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_1'' a_2'' \dots a_N'' \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix}$$

eine zweite Substitution derselben Elemente $a_1 \dots a_N$, so lassen wir den Elementen $a_1, a_2 \dots a_N$ in S_2 eine zweite Reihe von Veränderlichen $x_{N+1}, x_{N+2} \dots x_{2N}$ entsprechen, und können alsdann der Substitution S_2 eine Reihe von Functionen m^{ter} Ordnung von $x_{N+1} \dots x_{2N}$ in derselben Weise entsprechen lassen, wie wir vorher der Substitution S_1 eine Reihe von Functionen m^{ter} Ordnung von $x_1 \dots x_N$ entsprechen liessen. Bezeichnen wir nämlich wieder durch $x_{N+1}'', x_{N+2}'' \dots x_{2N}''$ die Veränderlichen $x_{N+1}, x_{N+2} \dots x_{2N}$ in derselben Reihenfolge, in der die Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ durch $a_1'', a_2'' \dots a_N''$ in S_2 bezeichnet sind, und wenden wir darauf die Substitution $\begin{pmatrix} x_{N+1}'' x_{N+2}'' \dots x_{2N}'' \\ x_{N+1} x_{N+2} \dots x_{2N} \end{pmatrix}$ an auf die Function $\Phi(x_{N+1} \dots x_{2N})$, so ergibt sich als Folge der Gleichung $\Phi(x_{N+1} \dots x_{2N}) = \Phi(x_{N+1}' \dots x_{2N}')^*$ eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(x_{N+1} \dots x_{2N}) = \sum_{\alpha=1}^{t_m'} C_{\alpha} \varphi_{t_m'+\alpha}^{(m)}(x_{N+1} \dots x_{2N}),$$

in der die Coefficienten $C_{\alpha} (\alpha=1 \dots t_m')$ von einander verschieden und die Functionen $\varphi_{t_m'+\alpha}^{(m)}(x_{N+1} \dots x_{2N}) (\alpha=1 \dots t_m')$ die der Substitution S_2 entsprechenden Functionen m^{ter} Ordnung sind.

Sind daher $S_1, S_2 \dots S_q$ q Substitutionen der Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$ und lassen wir den Elementen in diesen Substitutionen resp. die q Reihen von Veränderlichen

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_{N+1} & x_{N+2} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & & & \\ x_{(q-1)N+1} & x_{(q-1)N+2} & \dots & x_{qN} \end{array}$$

entsprechen, so ergibt sich zu jeder der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ eine entsprechende Reihe von Functionen m^{ter} Ordnung der entsprechenden Reihe von Veränderlichen. Das System aller auf diese Weise erhaltenen Functionen stellt ein System von Functionen der sämtlichen Veränderlichen $x_1 \dots x_{qN}$ dar, und wir bezeichnen dasselbe demgemäss durch

$$\varphi_1^{(m)}(x_1 \dots x_{qN}), \varphi_2^{(m)}(x_1 \dots x_{qN}) \dots \varphi_{t_m}^{(m)}(x_1 \dots x_{qN}).$$

Fügen wir zu den Functionen dieses Systems noch die $N(N-1) \dots (N-m+1)$ Functionen $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x_1 \dots x_{qN})$, die wir aus der Gleichung

$$\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = \sum_{k=0}^{q-1} x_{kN+\alpha_1}^{2_1} x_{kN+\alpha_2}^{2_2} \dots x_{kN+\alpha_m}^{2_m}$$

erhalten, wenn wir für $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ alle Verbindungen der Zahlen $1 \dots N$ setzen, in denen die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ verschieden von einander sind, so stellt das erhaltene System von $N(N-1) \dots (N-m+1) + \tau_m$ Functionen „das charakteristische Functionensystem m^{ter} Ordnung“ dar, das zu den Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gehört.

Die Functionen des charakteristischen Functionensystems sind danach Summen, deren Addenden einer Reihe von $q N(N-1) \dots (N-m+1)$ Producten von der Form $x_{k_1}^{2_1} x_{k_2}^{2_2} \dots x_{k_m}^{2_m}$ angehören. Wir können jede dieser Functionen als eine lineare homogene Function dieser sämtlichen Producte ansehen, in der die Coefficienten die Werthe 0,1 haben. Das System dieser Coefficienten ist alsdann die zu den Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gehörige „Charakteristik m^{ter} Ordnung“.

§ 2.

Jeder Veränderlichen $x_{kN+\alpha}$ in dem charakteristischen Functionensystem m^{ter} Ordnung, das zu den Substitutionen $S_1 \dots S_q$ der Elemente $\alpha_1 \dots \alpha_N$ gehört, entspricht zufolge § 1 ein Element a_α , jedem Product $x_{k_1}^{2_1} x_{k_2}^{2_2} \dots x_{k_m}^{2_m}$ können wir daher eine Verbindung $a_{k_1} \cdot a_{k_2} \dots a_{k_m}$ der Elemente $a_1 \dots a_N$ entsprechen lassen, in der

$$k'_1 \equiv k_1 \pmod{N}, k'_2 \equiv k_2 \pmod{N} \dots k'_m \equiv k_m \pmod{N}$$

ist, und jeder Summe solcher Producte endlich können wir einen Complex solcher Verbindungen entsprechen lassen, von denen jede die entsprechende eines Termes der Summe ist. Lassen wir in dieser Weise in dem charakteristischen Functionensystem der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ einer jeden der Functionen $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{qN})$ ($\alpha = 1 \dots \tau_m$) einen Complex $A_\alpha^{(m)}$ von Verbindungen der Elemente $a_1 \dots a_N$ entsprechen, so erhalten wir eine Reihe

$$A_1^{(m)} A_2^{(m)} \dots A_{\tau_m}^{(m)},$$

in deren Gliedern $A_1^{(m)}, A_2^{(m)} \dots A_{\tau_m}^{(m)}$ somit die Verbindungen ohne Wiederholung m^{ter} Klasse der Elemente $a_1 \dots a_N$ als Elemente enthalten sind. Diese Reihe ist die zu den Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gehörige „Reihe m^{ter} Ordnung“. Wie aus § 1 meiner Abhandlung „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppierungsaufgaben“*)

*) Math. Ann. Bd. 50.

unmittelbar ersichtlich ist, ist das charakteristische Functionensystem dieser Reihe nichts anderes, als das in § 1 definierte charakteristische Functionensystem m^{ter} Ordnung der Substitutionen $S_1 \dots S_\varrho$.

Entspricht die Function $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{\varrho N})$ des charakteristischen Functionensystems der Substitution S_β , so enthält sie zufolge § 1 alle diejenigen Terme, die aus einem ihrer Terme

$$x_{(\beta-1)N+k_1}^{2_1} x_{(\beta-1)N+k_2}^{2_2} \dots x_{(\beta-1)N+k_m}^{2_m}$$

durch wiederholte Anwendung einer Substitution entstehen, welche die Veränderlichen $x_{(\beta-1)N+1}, x_{(\beta-1)N+2} \dots x_{\beta N}$ ebenso vertauscht, wie die Substitution S_β die entsprechenden Elemente $a_1, a_2 \dots a_N$. Ist daher

$$S_\beta = \begin{pmatrix} a'_1 a'_2 \dots a'_N \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix}, \quad S_\beta^2 = \begin{pmatrix} a''_1 a''_2 \dots a''_N \\ a_1 a_2 \dots a_N \end{pmatrix} \dots$$

so enthält das der Function $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{\varrho N})$ entsprechende Glied $A_\alpha^{(m)}$ der Reihe m^{ter} Ordnung alle verschiedenen Verbindungen von der Form

$$a_{k_1} \dots a_{k_m}, \quad a'_{k_1} \dots a'_{k_m}, \quad a''_{k_1} \dots a''_{k_m}, \dots$$

Bezeichnen wir durch

$$p_1^{(m)}, p_2^{(m)} \dots p_{N(N-1) \dots (N-m+1)}^{(m)}$$

alle Verbindungen m^{ter} Klasse ohne Wiederholung der Elemente $a_1 \dots a_N$, und wenden wir auf die Reihe dieser Verbindungen die Substitution S_β an, so geht jede Verbindung

$$p_\alpha^{(m)} = a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$$

über in eine andere

$$p_\alpha^{(m)} = a'_{k_1} a'_{k_2} \dots a'_{k_m}.$$

Es entspricht also der Substitution S_β eine Substitution der Elemente $p_1^{(m)}, p_2^{(m)} \dots p_{N(N-1) \dots (N-m+1)}^{(m)}$. Wird diese Substitution in ihre Circularsubstitutionen zerlegt, so stellen die Elementencomplexe dieser Circularsubstitutionen die der Substitution S_β entsprechenden Glieder in der Reihe $A_1^{(m)} A_2^{(m)} \dots A_{\varrho N}^{(m)}$ dar, d. h. diejenigen Glieder, welche den der Substitution S_β entsprechenden Functionen $\varphi_\alpha^{(m)}(x_1 \dots x_{\varrho N})$ des charakteristischen Functionensystems entsprechen. Daraus geht hervor, dass die Reihe, deren Glieder die Elementencomplexe der Circularsubstitutionen von $S_1 \dots S_\varrho$ selbst sind, nur einen speciellen Fall der Reihe m^{ter} Ordnung darstellt, nämlich die Reihe erster Ordnung. Sind $n_1, n_2 \dots n_m$ die Ordnungen derjenigen Circularsubstitutionen von S_β , welche resp. die Elemente $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots a_{k_m}$ der Verbindung $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$ enthalten, wenn wieder durch $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$ eine Verbindung in einem der Substitution S_β entsprechenden Gliede $A_\alpha^{(m)}$ der Reihe m^{ter} Ordnung

bezeichnet wird, so ist die Anzahl der in $A_a^{(m)}$ enthaltenen Verbindungen gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen

$$n_1, n_2 \dots n_m.$$

§ 3.

Ist die zu den Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gehörige Reihe m^{ter} Ordnung transitiv, so kann man zufolge § 2 jede Verbindung ohne Wiederholung m^{ter} Klasse der Elemente $a_1 \dots a_N$ in jede andere solche Verbindung durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ überführen, es ist also die durch die Substitutionen $S_1 \dots S_q$ bestimmte Gruppe mindestens m -fach transitiv. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so sind auch je zwei Verbindungen in der Reihe m^{ter} Ordnung zusammenhängend, d. h. die Reihe m^{ter} Ordnung ist transitiv. In dem charakteristischen Functionensystem der Reihe ist alsdann nur eine Function von den übrigen abhängig*), und die nach Fortnahme einer beliebigen Function des Systems übrigbleibenden Functionen sind von einander unabhängig. Es giebt also im System der Subdeterminanten der Charakteristik nicht verschwindende Determinanten, deren Grad um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Functionen des charakteristischen Functionensystems. Ist dagegen die Reihe intransitiv, so sind wenigstens zwei Functionen des charakteristischen Functionensystems von den übrigen abhängig, das System der Subdeterminanten enthält also keine nicht verschwindende Determinante, deren Grad nur um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Functionen. Man erhält damit als analytisches Kriterium für die Bestimmung des Grades der Transitivität einer Gruppe den Satz:

Ist der höchste Grad der nichtverschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik m^{ter} Ordnung, die zu gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gehört, um Eins kleiner als die Anzahl der Functionen des zugehörigen charakteristischen Functionensystems m^{ter} Ordnung, so ist die durch die Substitutionen $S_1 \dots S_q$ bestimmte Gruppe mindestens m -fach transitiv; ist ausserdem die Charakteristik m^{ter} Ordnung unter den zu $S_1 \dots S_q$ gehörenden Charakteristiken diejenige höchster Ordnung, welche dieser Bedingung genügt, so giebt die Zahl m den Grad der Transitivität der Gruppe an.

§ 4.

Ist der Grad der Transitivität der durch $S_1 \dots S_q$ bestimmten Gruppe gleich m , so müssen zufolge § 3 die zu $S_1 \dots S_q$ gehörigen Reihen von der Reihe $(m + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung an aufwärts intransitiv

*) „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppierungsaufgaben“, § 2.

werden. Zuzolge § 2 enthält dann jede transitive Gruppe der Reihe alle diejenigen Verbindungen, die sich aus einer ihrer Verbindungen durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ herleiten lassen, und auch nur diese Verbindungen. Dies gilt also auch von der Reihe N^{ter} Ordnung. Die Verbindungen, welche die Elemente der Reihe N^{ter} Ordnung bilden, sind die sämtlichen Permutationen der Elemente $a_1 \dots a_N$. Da es nur eine Substitution der Gruppe giebt, die eine solche Permutation in eine andere überführt, so ist die Anzahl der Elemente jeder transitiven Gruppe der Reihe N^{ter} Ordnung gleich der Anzahl der Substitutionen der Gruppe, also gleich der Ordnung ν der Gruppe, und die Anzahl r_N der transitiven Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung ist folglich gleich dem Index i der Gruppe $= \frac{N!}{\nu}$. Be-

zeichnet ferner ν_α die Ordnung der Substitution S_α , so enthält zuzolge § 2 jedes S_α entsprechende Glied der Reihe N^{ter} Ordnung ν_α Permutationen, da ν_α das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von den Ordnungen der Circulardsubstitutionen von S_α ist. Die Anzahl der S_α entsprechenden Glieder ist mithin $\frac{N!}{\nu_\alpha}$, und ebenso gross ist also die Anzahl der S_α entsprechenden Functionen $\varphi_\beta^{(N)}(x_1 \dots x_{qN})$ im charakteristischen Functionensystem N^{ter} Ordnung. Ausser diesen

$$\frac{N!}{\nu_1} + \frac{N!}{\nu_2} + \dots + \frac{N!}{\nu_q}$$

Functionen $\varphi_\beta^{(N)}(x_1 \dots x_{qN})$ enthält das charakteristische Functionensystem N^{ter} Ordnung noch $N!$ Functionen $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}^{(N)}(x_1 \dots x_{qN})$ (§ 1), so dass die Anzahl aller Functionen des charakteristischen Functionensystems N^{ter} Ordnung gleich

$$N! + \frac{N!}{\nu_1} + \frac{N!}{\nu_2} + \dots + \frac{N!}{\nu_q}$$

ist.

Bezeichnet nun allgemein r die Anzahl der transitiven Gruppen des charakteristischen Functionensystems einer beliebigen Reihe, n die Anzahl der Functionen des Systems, so ist stets der höchste Grad der nicht verschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik gleich $n - r$. Denn lässt man aus jeder transitiven Gruppe eine Function fort, so sind die übrigbleibenden Functionen linear unabhängig, es giebt also nicht verschwindende Subdeterminanten der Charakteristik vom Grade $n - r$. Lässt man aber weniger als r Functionen fort, so finden sich unter den übrigen die Functionen wenigstens einer transitiven Gruppe vollständig vor, und da diese linear abhängig von einander sind, so ist jede Subdeterminante der Coefficienten der übrigbleibenden Functionen, deren Grad gleich der Anzahl dieser Functionen

ist, also überhaupt jede Subdeterminante, deren Grad grösser als $n-r$ ist, gleich Null. Wenden wir dies auf die Reihe N^{ter} Ordnung an, so ergibt sich als analytisches Criterium für die Bestimmung des Index, bezw. der Ordnung einer Gruppe dem Vorangehenden zufolge der Satz:

Bezeichnet k den höchsten Grad der nicht verschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik N^{ter} Ordnung, die zu gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ von N Elementen gehört, so ist der Index der durch diese Substitutionen bestimmten Gruppe

$$i = N! + \frac{N!}{v_1} + \frac{N!}{v_2} + \dots + \frac{N!}{v_q} - k$$

wenn $v_1, v_2 \dots v_q$ die resp. Ordnungen der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ sind.

§ 5.

Gehen wir von der Reihe N^{ter} Ordnung zurück zu Reihen niedrigerer Ordnung, so wird im allgemeinen die Anzahl der transitiven Gruppen abnehmen, bis sie schliesslich für die Reihe m^{ter} Ordnung gleich 1 wird, wenn die durch $S_1 \dots S_q$ bestimmte Gruppe m -fach transitiv ist. Denn gehören die beiden Verbindungen $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu}$ und $a_{\beta_1} \dots a_{\beta_\mu}$ zwei verschiedenen transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung an ($\mu \leq N$), so gehören auch zwei Verbindungen von der Form $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}}$ und $a_{\beta_1} \dots a_{\beta_\mu} a_{\beta_{\mu+1}}$ zwei verschiedenen transitiven Gruppen der Reihe $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an, da eine Ueberführung von $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}}$ in $a_{\beta_1} \dots a_{\beta_\mu} a_{\beta_{\mu+1}}$ durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ auch eine Ueberführung von $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu}$ in $a_{\beta_1} \dots a_{\beta_\mu}$ in sich schliesst. Es ist also jedenfalls die Anzahl der transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung nicht grösser, als die der Reihe $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Enthält ferner die durch $S_1 \dots S_q$ bestimmte Gruppe $e_1^{(\mu)}$ Substitutionen, welche die Elemente $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu}$ ungeändert lassen, so enthält jede transitive Gruppe der Reihe N^{ter} Ordnung, die eine Verbindung von der Form $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}} \dots a_{\alpha_N}$ enthält, genau $e_1^{(\mu)}$ Verbindungen, in denen die ersten μ Elemente die Verbindung $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu}$ bilden. Da es nun $(N-\mu)!$ Verbindungen $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu} a_{\alpha_{\mu+1}} \dots a_{\alpha_N}$ giebt, in denen die Reihe der ersten μ Indices die Reihe der Zahlen $\alpha_1 \dots \alpha_\mu$ ist, so giebt es $\frac{(N-\mu)!}{e_1^{(\mu)}}$ solche Verbindungen enthaltende transitive Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung, welche wir als entsprechend der die Verbindung $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu}$ enthaltenden transitiven Gruppe der Reihe μ^{ter} Ordnung ansehen.

Ist ferner $a_{\beta_1} \dots a_{\beta_\mu}$ eine zweite Verbindung dieser transitiven Gruppe, so enthält auch jede ihr entsprechende transitive Gruppe der

Reihe N^{ter} Ordnung Verbindungen $a_{\beta_1} \dots a_{\beta_\mu} a_{\beta_{\mu+1}} \dots a_{\beta_N}$, in denen also die Reihe der ersten μ Indices die Reihe der Zahlen $\beta_1 \dots \beta_\mu$ ist, d. h. die Bestimmung der einer transitiven Gruppe der Reihe μ^{ter} Ordnung entsprechenden transitiven Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung ist unabhängig von der Wahl der Verbindung $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_\mu}$. Gleiches gilt folglich auch von der Anzahl der Substitutionen, die die Elemente $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_\mu}$ einer Verbindung der transitiven Gruppe einer Reihe ungeändert lassen, dem „Exponenten“ der transitiven Gruppe. Ist nun r_μ die Anzahl der transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung, und sind $e_1^{(\mu)} \dots e_{r_\mu}^{(\mu)}$ die Exponenten dieser transitiven Gruppen, so ergibt sich für die Anzahl aller transitiven Gruppen der Reihe N^{ter} Ordnung oder den Index der durch $S_1 \dots S_\varrho$ bestimmten Gruppe

$$i = \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{(N-\mu)!}{e_\alpha^{(\mu)}}$$

oder für die Exponenten $e_1^{(\mu)} \dots e_{r_\mu}^{(\mu)}$ besteht die Gleichung

$$(a) \quad \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{1}{e_\alpha^{(\mu)}} = \frac{i}{(N-\mu)!}.$$

Ist die durch $S_1 \dots S_\varrho$ bestimmte Gruppe m -fach transitiv, so liefert diese Formel für $\mu = m$ die bekannte Formel

$$(b) \quad \frac{1}{e^{(m)}} = \frac{i}{(N-m)!} = \frac{N(N-1) \dots (N-m+1)}{\nu},$$

wenn ν die Ordnung der Gruppe ist und $e^{(m)}$ die Anzahl der Substitutionen, die m Elemente ungeändert lassen. Ist anderseits

$$e_1^{(\mu)} = e_2^{(\mu)} = \dots = e_{r_\mu}^{(\mu)} = 1,$$

giebt es also in der durch $S_1 \dots S_\varrho$ bestimmten Gruppe ausser der Identität keine Substitution, welche μ Elemente ungeändert lässt, so wird

$$(c) \quad r_\mu = \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{1}{e_\alpha^{(\mu)}} = \frac{i}{(N-\mu)!}$$

und aus (b) folgt alsdann

$$(d) \quad e^{(m)} = \frac{(N-m)!}{r_\mu (N-\mu)!}.$$

Ist dagegen eine der Zahlen $e_1^{(\mu)} \dots e_{r_\mu}^{(\mu)}$ von 1 verschieden, so giebt es in der durch $S_1 \dots S_\varrho$ bestimmten Gruppe ausser der Identität Substitutionen, welche μ Elemente ungeändert lassen, alsdann ist

$$r_\mu > \sum_{\alpha=1}^{r_\mu} \frac{1}{e_\alpha^{(\mu)}},$$

also:

$$(e) \quad r_\mu > \frac{i}{(N-\mu)!}.$$

Wir erhalten somit als analytisches Kriterium für die Bestimmung der grössten Anzahl von Elementen, die durch die Substitutionen einer Gruppe ungeändert bleiben können, ohne dass auch die übrigen Elemente ungeändert bleiben, sowie für die Bestimmung der Anzahl der Substitutionen, welche m Elemente einer mindestens m -fach transitiven Gruppe ungeändert lassen, den Satz:

Bezeichnet $r_\mu (\mu = 1 \dots N)$ die Anzahl der transitiven Gruppen einer Reihe μ^{ter} Ordnung, die zu gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gehört, so ist

$$r_\mu (N - \mu)! > r_N,$$

oder

$$r_\mu (N - \mu)! = r_N,$$

je nachdem die durch $S_1 \dots S_q$ bestimmte Gruppe ausser der Identität Substitutionen, die μ Elemente ungeändert lassen, besitzt, oder nicht besitzt. Ist die Gruppe mindestens m -fach transitiv und ist $e^{(m)}$ die Anzahl der Substitutionen der Gruppe, die m Elemente ungeändert lassen, so folgt aus $r_\mu (N - \mu)! = r_N$ zur Bestimmung von $e^{(m)}$ die Gleichung

$$e^{(m)} = \frac{(N - m)!}{r_\mu (N - \mu)!}.$$

Dabei ist, wie in § 4 gezeigt wurde, durch die Anzahl n_μ der Functionen des charakteristischen Functionensystems μ^{ter} Ordnung und den höchsten Grad k_μ der nicht verschwindenden Subdeterminanten der Charakteristik μ^{ter} Ordnung die Anzahl $r_\mu = n_\mu - k_\mu (\mu = 1 \dots N)$ der transitiven Gruppen der Reihe μ^{ter} Ordnung bestimmt.

§ 6.

Die Elemente jeder transitiven Gruppe der Reihe N^{ter} Ordnung werden von allen solchen Permutationen der Elemente $a_1 \dots a_N$ gebildet, die durch die Substitutionen der durch $S_1 \dots S_q$ bestimmten Gruppe in einander übergehen. Es müssen also die Elemente derjenigen transitiven Gruppe, welche unter ihren Elementen die Permutation $a_1 a_2 \dots a_N$ enthält, die der Substitutionengruppe entsprechende Permutationengruppe bilden, durch die also die Substitutionengruppe selbst unmittelbar gegeben ist. Die Bestimmung der transitiven Gruppen der Reihe aber erfolgt analytisch durch Aufstellen der Gleichungen, die

zwischen den unbestimmten Constanten C stattfinden müssen, damit die Identität

$$(1) \quad \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_N)} C_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1 \dots x_{\varrho N}) = \sum_{\alpha=1}^{\tau_N} C_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x_1 \dots x_{\varrho N})$$

zwischen den Functionen des charakteristischen Functionensystems N^{ter} Ordnung besteht. Das Bestehen dieser Gleichung verlangt, dass die Coefficienten C gruppenweise einander gleich sind. Alsdann bestimmt jede Gruppe gleicher Coefficienten der Functionen ψ durch ihre Indices die Elemente einer der transitiven Gruppen der Reihen N^{ter} Ordnung, und die dieser Coefficientengruppe gleiche Gruppe der Coefficienten der Functionen φ bestimmt ebenso die Glieder dieser transitiven Gruppe. Ist daher

$$\begin{aligned} C_{12\dots N} &= C_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_N} = \dots = C_{\alpha_1^{(v-1)} \alpha_2^{(v-1)} \dots \alpha_N^{(v-1)}} \\ &= C_{\alpha'} = C_{\alpha''} = \dots = C_{\alpha(\mu)} \end{aligned}$$

diejenige Gruppe gleicher Coefficienten, welche den Coefficienten $C_{12\dots N}$ enthält, so wird die durch $S_1 \dots S_{\varrho}$ bestimmte Substitutionengruppe gebildet von den Substitutionen

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} a_{\alpha'_1} & a_{\alpha'_2} & \dots & a_{\alpha'_N} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \dots \\ \dots S_{\nu} &= \begin{pmatrix} a_{\alpha_1^{(v-1)}} & a_{\alpha_2^{(v-1)}} & \dots & a_{\alpha_N^{(v-1)}} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und in der entsprechenden Permutationengruppe werden die den Substitutionen $S_1 \dots S_{\varrho}$ entsprechenden Permutationencomplexe, von denen jeder die durch die Potenzen einer dieser Substitutionen in einander übergehenden Permutationen enthält, gebildet von den Gliedern

$$A_{\alpha'}^{(N)}, A_{\alpha''}^{(N)}, \dots A_{\alpha(\mu)}^{(N)}$$

der Reihe N^{ter} Ordnung, wobei μ zur Abkürzung

$$= \frac{\nu}{\nu_1} + \frac{\nu}{\nu_2} + \dots + \frac{\nu}{\nu_{\varrho}}$$

gesetzt ist. Da nun die Substitutionen $S_1 \dots S_{\varrho}$ selbst in der durch sie bestimmten Substitutionengruppe enthalten sind, so ergibt sich hieraus unmittelbar als analytisches Kriterium dafür, dass mehrere Substitutionen eine Gruppe bilden, der Satz:

Sollen die Substitutionen

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1'} & a_{\alpha_2'} & \dots & a_{\alpha_N'} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1''} & a_{\alpha_2''} & \dots & a_{\alpha_N''} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots S_q = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1^{(q)}} & a_{\alpha_2^{(q)}} & \dots & a_{\alpha_N^{(q)}} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

der N Elemente a_1, a_2, \dots, a_N eine Gruppe bilden, so muss zwischen den Functionen des zugehörigen charakteristischen Functionensystems N^{ter} Ordnung eine Identität bestehen von der Form

$$\sum_{k=1}^q \psi_{\alpha_1^{(k)} \alpha_2^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}} (x_1 \dots x_{qN}) = \sum_{k=1}^{qN} C_k \varphi_k (x_1 \dots x_{qN}),$$

in der die Grössen C Constante bedeuten und die Summation über sämtliche, den Substitutionen $S_1 \dots S_q$ entsprechenden Functionen φ und ψ erstreckt ist; und umgekehrt, wenn man die Constanten C in dieser Gleichung so bestimmen kann, dass dieselbe identisch besteht, so bilden auch die Substitutionen $S_1 \dots S_q$ eine Gruppe. Die Constanten C können dann keine anderen Werthe, als 0, 1 haben, und die Indices der nicht verschwindenden unter ihnen stimmen mit den Indices derjenigen Glieder der Reihe N^{ter} Ordnung überein, welche die den einzelnen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ entsprechenden Permutationencomplexe in der entsprechenden Permutationengruppe enthalten.

Zweiter Theil.

Von den Productformen der Substitutionen.

§ 7.

Die verschiedenen Formen gleichwerthiger Producte, die durch Versetzen von Factoren sich in einander umwandeln lassen, bilden schon lange Gegenstand substitutionentheoretischer Untersuchungen. Dagegen scheint eine andere hierher gehörige, meines Erachtens nicht minder interessante Frage bisher völlig unbeachtet geblieben zu sein, nämlich die Frage nach den verschiedenen möglichen Formen, in denen eine gegebene Substitution sich als Product gegebener Substitutionen $S_1 \dots S_q$ darstellen lässt. Der Ausdruck „Product gegebener Substitutionen“ ist dabei im weitesten Sinne zu verstehen, d. h. es können die Substitutionen $S_1 \dots S_q$ beliebig oft wiederholt und in beliebiger Reihenfolge vorkommen. Es ist nun ohne Weiteres klar, dass die Anzahl solcher Productformen von gleichem Werthe unendlich gross ist, denn man kann in jede solche Form aus den gegebenen Substitutionen gebildete identische, d. h. der Einheit gleiche Producte be-

liebig oft und in beliebiger Reihenfolge einschalten oder zu ihr hinzufügen. Es kann sich daher nur darum handeln, ein Gesetz aufzustellen, das die *Entstehung der Gesamtheit dieser Formen aus einer endlichen Anzahl von Formen*, die man füglich als „Stammformen“ bezeichnen kann, erkennen lehrt. Dass solche Stammformen in endlicher Anzahl existiren müssen, ist a priori einzusehen. Man könnte für dieselben z. B. alle aus den gegebenen Substitutionen zu bildenden identischen Producte wählen, die keine identischen Unterproducte enthalten. Die Bestimmung der Anzahl aber solcher Stammformen ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Es soll nun gezeigt werden, dass bei richtiger Wahl des Systems der Stammformen, m. a. W. bei richtiger Bestimmung des Gesetzes der Entstehung aller gleichwerthigen Productformen aus Stammformen, die Anzahl der letzteren mit der Ordnung der durch die gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ bestimmten Gruppe in einfacher Beziehung steht, sodass durch die eine Zahl die andere unmittelbar gegeben ist. Dieses Gesetz liefert uns der Begriff der substitutionentheoretischen Congruenz, der im folgenden Paragraphen entwickelt werden soll.

§ 8.

Zwei aus gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gebildete Productformen Π_1, Π_2 heissen einander „congruent“ ($\Pi_1 \underline{\simeq} \Pi_2$), wenn sie sich mittelst der folgenden beiden (beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge anzuwendenden) Operationen in einander umwandeln lassen:

1) Einschalten (bezw. Hinzufügen) oder Unterdrücken eines der Einheit gleichen Products von Potenzen derselben Substitution, die unter den gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ enthalten ist.

2) Vertauschen von auf einander folgenden, der Einheit gleichen Producten gegen einander.

Congruente Productformen sind somit auch stets von gleichem Werthe, aber umgekehrt sind gleichwerthige Productformen nicht immer congruent.

Ist eine Productform Π congruent einem Product $S_\alpha^a S_\beta^b \dots$, wo die Exponenten a, b, \dots ganze Vielfache der resp. Ordnungen $\nu_\alpha, \nu_\beta \dots$ der Substitutionen $S_\alpha, S_\beta \dots$ sind, so heisst Π der Einheit congruent ($\Pi \underline{\simeq} 1$). Aus $\Pi \underline{\simeq} 1$ folgt somit auch $\Pi = 1$, aber nicht umgekehrt.

Ist $\Pi_1 \underline{\simeq} \Pi_2$, so ist $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \underline{\simeq} 1$, wenn unter Π_2^{-1} das Product der inversen Factoren von Π_2 in umgekehrter Reihenfolge verstanden wird. Denn Π_1 kann zuf. Vor. in Π_2 mittelst der Operationen 1 und 2 umgewandelt werden, und folglich kann, nachdem dies in dem Product $\Pi_1 \Pi_2^{-1}$ geschehen ist, dieses Product durch Anwendung der Operation 1 in eine Potenz S_α^a umgewandelt werden, in der a ein Vielfaches der

Ordnung v_a von S_a ist. Ist umgekehrt $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \underline{\simeq} 1$, so ist auch $\Pi_1 \underline{\simeq} \Pi_2$. Denn zuf. Vor. kann $\Pi_1 \Pi_2^{-1}$ durch die Operationen 1 und 2 in $S_a^{\nu_a}$, also $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \Pi_2$ in $S_a^{\nu_a} \Pi_2 \underline{\simeq} \Pi_2$ umgewandelt werden, m. a. W. aus $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \underline{\simeq} 1$ folgt durch Multiplication mit Π_2 die Congruenz $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \Pi_2 \underline{\simeq} \Pi_2$. Diese aber geht durch Unterdrücken von $\Pi_2^{-1} \Pi_2$ auf Grund der Operation 1 über in $\Pi_1 \underline{\simeq} \Pi_2$.

Ist $\Pi_1 = \Pi_2$ und $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \underline{\simeq} \Pi_0$, so folgt aus dem Vorangehenden $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \Pi_0^{-1} \underline{\simeq} 1$, oder $\Pi_1 (\Pi_0 \Pi_2)^{-1} \underline{\simeq} 1$, es ist also $\Pi_1 \underline{\simeq} \Pi_0 \Pi_2$. Alle gleichwerthigen Productformen sind also congruent Producten aus *einer* solchen Form und den Formen der der Einheit gleichen Producte. Da nun die verschiedenen Werthe der aus den gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ zu bildenden Productformen gegeben sind durch die Substitutionen der durch $S_1 \dots S_q$ bestimmten Gruppe, so bleibt noch übrig, ein System der Einheit gleicher Productformen aufzustellen, aus denen die Gesamtheit dieser (aus $S_1 \dots S_q$ gebildeten) Formen nach einem einfachen Gesetz entstanden gedacht werden kann. Es soll nun ein solches System der Einheit gleicher Formen aufgestellt werden, wobei sich zeigen wird, dass die Anzahl der Glieder derselben ebenfalls durch die Ordnung ν der durch $S_1 \dots S_q$ bestimmten Gruppe gegeben ist.

§ 9.

Ersetzt der erste Factor einer aus Potenzen der gegebenen Substitutionen $S_1 \dots S_q$ gebildeten Productform Π die Permutation $p_1 = a_1 a_2 \dots a_N$ durch p_2 , der zweite p_2 durch p_3 u. s. f., so kann jede solche Permutationenfolge $p_m p_{m+1}$ einem ganz bestimmten Gliede derjenigen transitiven Gruppe \mathfrak{G} der zu $S_1 \dots S_q$ gehörigen Reihe N^{ter} Ordnung angehörig gedacht werden, deren Elemente von den Permutationen der durch $S_1 \dots S_q$ bestimmten Permutationengruppe gebildet werden (§ 6). Gehört nämlich auch die Folge $p_m p_{m+1}$ zweien oder mehrern Gliedern von \mathfrak{G} an, so entspricht unter diesen doch nur eines der Substitution S_a , deren Potenz in Π die Folge $p_m p_{m+1}$ bewirkt, und diesem Gliede wird alsdann $p_m p_{m+1}$ angehörig gedacht. Jeder Productform Π entspricht also eine ganz bestimmte auf \mathfrak{G} bezogene Summe von Elementenpaaren $P = p_1 p_2 + p_2 p_3 + \dots$, die wir, da das letzte Element jedes Paares mit dem ersten des folgenden übereinstimmt, kurz eine „continuirliche Summe“ nennen und durch $\log \Pi$ bezeichnen wollen. Umgekehrt können wir jeder solchen auf \mathfrak{G} bezogenen, continuirlichen und mit $p_1 = a_1 a_2 \dots a_N$ beginnenden Summe von Elementenpaaren eine ganz bestimmte Productform Π von Potenzen der Substitutionen $S_1 \dots S_q$ entsprechen lassen, indem wir jedem Paar $p_m p_{m+1}$ der Summe eine, die Folge $p_m p_{m+1}$ bewirkende Potenz derjenigen Substitution entsprechen lassen, welcher das die Elemente

p_m, p_{m+1} enthaltende*) Glied von \mathfrak{G} entspricht. Das Zeichen $\log \Pi$ hat also für jede aus Potenzen von $S_1 \dots S_q$ gebildete Productform Π einen bestimmten Sinn, und wird umgekehrt eine beliebige auf \mathfrak{G} bezogene continuirliche und mit p_1 beginnende Summe durch $\log \Pi$ bezeichnet, so stellt Π eine ganz bestimmte aus Potenzen von $S_1 \dots S_q$ gebildete Productform dar.

Wir beschränken uns nun auf die Betrachtung solcher Productformen, deren Werth gleich Eins ist. Die Gesamtheit derselben wird offenbar gebildet von der Gesamtheit der Formen, deren Logarithmen Cyklen sind. Für diese Formen gelten ferner, wie aus dem Vorangehenden unmittelbar folgt, die Sätze: „der Logarithmus eines Products der Einheit gleicher Formen ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Formen“ und „der Logarithmus einer Potenz einer der Einheit gleichen Form ist gleich dem Product aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis“. Dabei ist wieder, wenn der Exponent negativ ist, unter Π^{-n} das Product sämtlicher inversen Factoren von Π^n in umgekehrter Reihenfolge zu verstehen.

Ist $\Pi \cong 1$, so ist $\log \Pi = 0$, und umgekehrt. Denn durch die Operation 1 werden in $\log \Pi$ nur solche Permutationenfolgen eingeschaltet, oder unterdrückt, die jede für sich gleich Null sind, es gilt also für jedes durch die Operation 1 aus Π entstandene Product Π' die Gleichung $\log \Pi' = \log \Pi$. Durch die Operation 2 aber wird im Logarithmus einer Productform weder die Gesamtheit der Permutationenfolgen, noch ihre Zugehörigkeit zu den Gliedern von \mathfrak{G} geändert. Es ist also allgemein, wenn $\Pi \cong \Pi'$ ist, auch $\log \Pi = \log \Pi'$. Ist $\Pi \cong 1$, so ist $\Pi \cong S_\alpha^{\nu_\alpha}$, wo ν_α die Ordnung von S_α ist. Also ist dann $\log \Pi = \log S_\alpha^{\nu_\alpha}$, und da die Summe der durch S_α bewirkten Permutationenfolgen wieder einen Cyklus innerhalb desselben Gliedes von \mathfrak{G} bildet, ist $\log S_\alpha^{\nu_\alpha} = 0$. Die Umkehrung ist nicht so einfach zu beweisen. In meiner Programmabhandlung „Ueber Reihen, Liniengebilde und Substitutionen“ habe ich bei der Betrachtung der auf eine Reihe bezogenen Summen von Elementenpaaren Fundamentalsysteme von Elementenpaaren eingeführt**). Durch die Paare eines solchen Fundamentalsystems kann jede auf die Reihe bezogene Summe dar-

*) Man beachte, dass bei der Beziehung einer Summe von Elementenpaaren auf eine Reihe jedes Paar einem bestimmten Gliede der Reihe angehörig gedacht wird.

**) Jahresbericht des Victoriagymnasiums zu Burg, Ostern 1897, Seite 11 unten und Seite 6 ff. Ist $A = p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_k}$ irgend ein Reihenglied, so stellt z. B. die Reihe der Paare $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}, p_{\alpha_2} p_{\alpha_3}, \dots, p_{\alpha_{k-1}} p_{\alpha_k}$ eine Zerlegung von A in ein Fundamentalsystem von Elementenpaaren dar. Dann ist irgend ein Elementenpaar von A

$$p_{\alpha_n} p_{\alpha_{n+m}} = p_{\alpha_n} p_{\alpha_{n+1}} + p_{\alpha_{n+1}} p_{\alpha_{n+2}} + \dots + p_{\alpha_{n+m-1}} p_{\alpha_{n+m}}$$

oder

$$p_{\alpha_{n+m}} p_{\alpha_n} = p_{\alpha_{n+m}} p_{\alpha_{n+m-1}} + p_{\alpha_{n+m-1}} p_{\alpha_{n+m-2}} + \dots + p_{\alpha_{n+1}} p_{\alpha_n}.$$

gestellt werden, indem jedes Elementenpaar durch eine ihm gleiche, demselben Reihengliede angehörige Summe von Paaren des Fundamentalsystems ersetzt wird. Geschieht dies in $\log \Pi$ und geht dadurch $\log \Pi$ über in $\log \Pi'$, so ist $\Pi' \simeq \Pi$. Denn wird in $\log \Pi$ das Paar $p_m p_{m+1}$ durch eine gleiche, demselben Reihengliede wie $p_m p_{m+1}$ angehörige Summe von Elementenpaaren ersetzt, so wird in Π die die Folge $p_m p_{m+1}$ bewirkende Potenz von S_α durch ein gleichwerthiges Product von Potenzen derselben Substitution S_α ersetzt, d. h. Π erfährt eine Umwandlung durch die Operation 1. Ist $\log \Pi = 0$, also auch $\log \Pi' = 0$, so ist $\log \Pi'$ aus entgegengesetzten Paaren zusammengesetzt*). Dann enthält also $\log \Pi'$ unter den auf das erste Paar $p_1 p_2$ folgenden Paaren ein Paar $p_2 p_1$. Folgt dieses unmittelbar auf $p_1 p_2$, so kann man $p_1 p_2 + p_2 p_1$ in $\log \Pi'$ fortlassen, und $\log \Pi'$ wird dadurch in $\log \Pi''$ umgewandelt, wo $\Pi'' \simeq \Pi'$ ist, da Π'' aus Π' durch Fortlassen zweier auf einander folgenden, einander aufhebenden Potenzen derselben Substitutionen entsteht. Folgt $p_2 p_1$ nicht unmittelbar auf $p_1 p_2$, so sei $p_{m+1} p_m$ das erste Paar in $\log \Pi'$, zu dem es in der Reihe der vorangehenden Paare ein entgegengesetztes giebt. Dann ist $\log \Pi'$ von der Form:

$$\log \Pi' = p_1 p_2 + p_2 p_3 + \cdots + p_m p_{m+1} + \cdots + p_{m+1} p_m + \cdots$$

Entweder folgt nun dieses Paar $p_{m+1} p_m$ unmittelbar auf $p_m p_{m+1}$ — dann erhält man wieder durch Unterdrücken beider Paare $\log \Pi' = \log \Pi'$ und $\Pi'' \simeq \Pi'$ — oder $p_{m+1} p_m$ folgt nicht unmittelbar auf $p_m p_{m+1}$. Dann ist die Aufeinanderfolge der Paare in $\log \Pi'$ von dem Paare $p_m p_{m+1}$ an die folgende:

$$p_m p_{m+1} + p_{m+1} p_{m+2} + \cdots + p_{m+l} p_{m+1} + p_{m+1} p_m + \cdots + p_{m+2} p_{m+1} + \cdots$$

Alsdann bilden die den Paaren

$$p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+l} p_{m+1}$$

entsprechenden Factoren in Π' für sich ein der Einheit gleiches Product, und ebenso die den Paaren

$$p_{m+1} p_m \cdots p_{m+2} p_{m+1}$$

entsprechenden Factoren. Durch Vertauschen dieser beiden Producte (Operation 2) und Fortlassen der Factoren, die den alsdann unmittelbar auf einander folgenden Paaren $p_m p_{m+1}$, $p_{m+1} p_m$ entsprechen (Operation 1), geht wieder Π' über in $\Pi'' \simeq \Pi'$. So fortfahrend muss man einmal zu einer Productform $\Pi^{(k)} \simeq \Pi$ gelangen, die ein Product von Potenzen einer einzigen Substitution ist. Da nun alle diese Formen $\Pi' \dots \Pi^{(k)}$,

*) ib. S. 11 unten. Es ist nämlich jeder aus den Paaren $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}, p_{\alpha_2} p_{\alpha_3}, \dots, p_{\alpha_{k-1}} p_{\alpha_k}$, die durch Zerlegung desselben Reihengliedes erhalten sind, zusammengesetzter Cyklus aus entgegengesetzten Paaren zusammengesetzt.

schon weil die zugehörigen Logarithmen Cyklen sind, den Werth Eins haben, so folgt hieraus, dass $\Pi \simeq 1$ sein muss.

Ist nun $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$ und $\log \Pi_1 = \log \Pi_2$, also $\log \Pi_1 - \log \Pi_2 = 0$, so ergibt sich aus dem Vorangehenden $\log (\Pi_1 \Pi_2^{-1}) = 0$, $\Pi_1 \Pi_2^{-1} \simeq 1$, $\Pi_1 \simeq \Pi_2$. Es gehören also nicht nur zu congruenten, der Einheit gleichen Producten gleiche Logarithmen, sondern umgekehrt bedingt auch die Gleichheit der Logarithmen zweier der Einheit gleichen Productformen die Congruenz dieser Formen.

§ 10.

Wie ich bereits in meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen etc.“*) nachgewiesen habe, kann man die sämtlichen Cyklen einer Reihe durch eine dem Grade des Zusammenhanges \mathfrak{G} der Reihe gleiche Anzahl von Cyklen als lineare homogene Functionen mit ganzzahligen Coefficienten darstellen. Da man nun die Cyklen eines solchen „primitiven Cyklensystems“ der hier betrachteten Reihe \mathfrak{G} offenbar stets so wählen kann, dass dieselben im obigen Sinne continuirliche, mit $p_1 = a_1 a_2 \dots a_N$ beginnende (und folglich auch schliessende) Cyklen sind, so kann man dieselben als ein System von g Logarithmen $\log \Pi_1 \dots \log \Pi_g$ ebensovieler der Einheit gleicher Productformen $\Pi_1 \dots \Pi_g$ ansehen. Alsdann ergibt sich für jede der Einheit gleiche Productform Π :

$$\log \Pi = e_1 \log \Pi_1 + \dots + e_g \log \Pi_g,$$

wo $e_1 \dots e_g$ ganze Zahlen sind, und daraus

$$\Pi \simeq \Pi_1^{e_1} \dots \Pi_g^{e_g}.$$

Da ferner die Glieder eines primitiven Cyklensystems linear von einander unabhängig sind, so kann zwischen $\Pi_1 \dots \Pi_g$ keine Gleichung der Form

$$k_1 \log \Pi_1 + \dots + k_g \log \Pi_g = 0$$

bestehen, wo $k_1 \dots k_g$ ganze Zahlen sind, also besteht auch zwischen $\Pi_1 \dots \Pi_g$ keine Congruenz von der Form:

$$\Pi_1^{k_1} \dots \Pi_g^{k_g} \simeq 1.$$

Dagegen besteht zwischen je $g + 1$ Productformen eine Congruenz dieser Form, da die Logarithmen derselben sich als lineare homogene ganzzahlige Functionen von $\log \Pi_1 \dots \log \Pi_g$ darstellen lassen. Man kann daher die in Betracht kommende Zahl g auch definiren als die grösste Anzahl der Einheit gleicher Productformen, zwischen denen keine Congruenz der angegebenen Form besteht. Bezeichnet w die Wiederholung in \mathfrak{G} , n die Anzahl der Glieder von \mathfrak{G} , so ist

$$g = w - n + 1^{**}).$$

*) Math. Annalen Bd. 42, § 4.

**) ibidem § 3.

Da nun \mathfrak{G} , wenn die Ordnung der durch $S_1 \dots S_q$ bestimmten Gruppe wieder durch ν bezeichnet wird, ν verschiedene Elemente enthält, nämlich die ν den Substitutionen der Gruppe entsprechenden Permutationen, und da jedes dieser Elemente ϱ mal in \mathfrak{G} enthalten ist, so folgt $w = \nu(\varrho - 1)$. Da ferner jeder Substitution S_α $\frac{\nu}{v_\alpha}$ Glieder in \mathfrak{G} entsprechen, wenn wieder v_α die Ordnung von S_α bezeichnet, so folgt

$$n = \frac{\nu}{v_1} + \frac{\nu}{v_2} + \dots + \frac{\nu}{v_q},$$

folglich

$$g = \nu(\varrho - 1) - \frac{\nu}{v_1} - \frac{\nu}{v_2} - \dots - \frac{\nu}{v_q} + 1.$$

Es ergeben sich daraus die folgenden beiden Sätze, mit denen wir die vorliegende Abhandlung schliessen, und von denen der erste sich auf die Darstellung der der Einheit gleichen Productformen bezieht, der zweite die Abhängigkeit der Ordnung einer Gruppe von der soeben definirten, für die Congruenztheorie in Betracht kommenden Zahl g darthun soll:

1. Hat die durch ϱ gegebene Substitutionen von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_q$ bestimmte Gruppe die Ordnung ν , so giebt es unter den der Einheit gleichen Productformen, die man aus den gegebenen Substitutionen bilden kann, stets

$$g = \nu(\varrho - 1) - \frac{\nu}{v_1} - \frac{\nu}{v_2} - \dots - \frac{\nu}{v_q} + 1$$

Productformen $\Pi_1, \dots \Pi_g$, die keiner Congruenz von der Form

$$\Pi_1^{e_1} \Pi_2^{e_2} \dots \Pi_g^{e_g} \cong 1$$

genügen, durch die aber jede aus den gegebenen Substitutionen zu bildende, der Einheit gleiche Productform Π in der Form darstellbar ist:

$$\Pi \cong \Pi_1^{e_1} \Pi_2^{e_2} \dots \Pi_g^{e_g}.$$

2. Bezeichnet g die grösste Anzahl der Einheit gleicher Productformen, die man aus ϱ gegebenen Substitutionen bilden kann und zwischen denen keine Congruenz von der Form

$$\Pi_1^{e_1} \Pi_2^{e_2} \dots \Pi_g^{e_g} \cong 1$$

besteht, so hat die durch die gegebenen Substitutionen bestimmte Gruppe die Ordnung

$$\nu = (g - 1) : \left(\varrho - 1 - \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} - \dots - \frac{1}{v_q} \right).$$

Burg b./Magdeb., 19. Dec. 1897.