Ueber einen liniengeometrischen Satz.

Von

F. Klein in Leipzig.

(Aus den Göttinger Nachrichten vom 20. März 1872).*)

Statt die Coordinaten p_{ik} der geraden Linie im Raume als zweigliedrige Determinanten aus den Coordinaten zweier Punkte oder Ebenen zu definiren, kann man sie bekanntlich auch als selbständige Veränderliche auffassen, welche an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

gebunden sind. Bei diesem Ausgangspunkte entsteht die Frage, ob jeder algebraische Liniencomplex durch *eine* zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung definirt werden kann, oder ob nicht zur reinen Darstellung des Complexes gelegentlich mehrere Gleichungen erforderlich sind. Ich werde nun im Folgenden zeigen: *dass allerdings zur Darstellung eines algebraischen Liniencomplexes immer eine zu $P = 0$ hinzutretende Gleichung genügt.* Die zum Beweise nothwendigen, sehr einfachen Ueberlegungen, wie sie im Nachstehenden auseinandergesetzt sind, können voraussichtlich überhaupt bei der Untersuchung analoger Fragen**) Anwendung finden und scheinen dadurch ein allgemeineres Interesse zu besitzen.

Rein analytisch gefasst, lautet der zu beweisende Satz folgender-

---

*) Ich bringe nachstehend vier ältere Arbeiten von mir, die bisher nur beiläufig publicirt waren, zum Wiederabdruck, indem ich glaube, dass dieselben auch heute noch ein gewisses Interesse haben, und ich in absehbarer Zeit doch jedenfalls nicht dazu komme, die in ihnen behandelten Themata, wie ich es ursprünglich vorhatte, weiter auszuführen. Der Wiederabdruck ist, von ganz unbedeutenden sprachlichen Aenderungen abgesehen, ein wörtlicher. Ein paar Citate, welche ich jetzt hinzugefügt habe, sind durch das in Klammern beigefügte Datum [Febr. 1883] kenntlich gemacht. Klein. [Febr. 1883.]

**) Ich erinnere hier an eine Betrachtung, welche Cayley gelegentlich anstellt (Quart. Journ. t. III. 1860, p. 234), und die sich darauf bezieht, dass nicht auf allen algebraischen Flächen unvollständige Durchschnittscurven gelegen sein können.

massen: Aus einer allgemeinen*) Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen ist eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine quadratische Gleichung mit nicht verschwindender Determinante**)

$$P = 0$$

ausgeschieden. Jede in ihr enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen kann durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden.“

Statt dieses Satzes mögen wir gleich den folgenden, ihn einschliessenden beweisen:

„Es sei eine allgemeine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen gegeben, wo $n \geqq 4$, und aus ihr eine Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung:

$$P = 0$$

abgeschieden. Jede in der letzteren enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen kann durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden, *falls nicht alle aus den Coefficienten von P zusammengesetzten fünfreihigen Unterdeterminanten verschwinden.*“

Diese Bedingung ist in dem ursprünglich aufgestellten Satze befriedigt, insofern dort die (sechsreihige) Determinante von P selbst nicht verschwindet, um so weniger also ihre fünfreihigen Unterdeterminanten sämmtlich gleich Null sind.

Der Beweis des allgemeinen algebraischen Satzes mag zunächst für $n = 4$ geführt werden, wo also die Bedingung die ist, *dass die Determinante von P nicht verschwindet.* Bei einem beliebigen n lassen sich hinterher dieselben Betrachtungen anstellen, für $n = 4$ haben wir nur den Vorzug, den Ueberlegungen, wie im Folgenden geschehen soll, ein anschauliches geometrisches Bild zu Grunde legen zu können.

Das einzelne Element der gegebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen sei durch die relativen Werthe der fünf homogenen Veränderlichen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

bestimmt. Man wird dieselben immer (und auf unendlich viele Weisen) so wählen können, dass die gegebene quadratische Gleichung $P = 0$ (deren Determinante nicht verschwindet) die folgende Gestalt annimmt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$

oder, indem man

---

*) *Allgemein* mag eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen heissen, deren Element von *unabhängig gedachten* Parametern abhängt.

**) Diese nähere Bestimmung ist zugefügt, weil sie die quadratische Gleichung, sofern ihre Eigenschaften hier in Betracht kommen, vollständig charakterisirt.

$$x_4 + i x_5 = p, \qquad x_4 - i x_5 = q$$

setzt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + pq = 0.$$

Das Element:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad p = 0,$$

welches im Folgenden ausgezeichnet werden soll, ist dabei ein unter den übrigen der Mannigfaltigkeit $P = 0$ angehörigen beliebig ausgewähltes.

In der nunmehr hergestellten Gleichungsform kann die Mannigfaltigkeit $P = 0$ ohne Weiteres auf eine allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen eindeutig abgebildet werden, ganz dem entsprechend, wie die Abbildung einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene durch Projection von einem Punkte der Fläche aus erfolgt. Man setze nämlich, unter

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \xi_4$$

die homogenen Coordinaten eines Elementes einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen verstanden:

$$\varrho x_1 = \xi_1 \xi_4, \quad \varrho x_2 = \xi_2 \xi_4, \quad \varrho x_3 = \xi_3 \xi_4, \quad \varrho p = \xi_4 \xi_4,$$
$$\varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Die allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mag jetzt durch den Punktraum vorgestellt sein, die ξ mögen also homogene Punktcoordinaten bedeuten: *dann ist die gegebene Mannigfaltigkeit $P = 0$ durch die vorstehenden Gleichungen eindeutig auf den Punktraum abgebildet.* Dabei tritt im Punktraume ein fundamentaler Kegelschnitt auf:

$$\xi_4 = 0, \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

dessen Punkten jedesmal ∞^1 Elemente der gegebenen Mannigfaltigkeit $P = 0$ entsprechen. Anderseits sind sämmtliche übrige Punkte der Ebene

$$\xi_4 = 0$$

einem einzigen Elemente der Mannigfaltigkeit $P = 0$, dem Elemente:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad p = 0$$

zugeordnet, welches, in Analogie mit dem Projectionspunkte bei der Abbildung der Flächen zweiten Grades, im folgenden das *Projectionselement* heissen mag.

Fügt man nun zu $P = 0$ eine weitere algebraische Gleichung, die vom $m$ten Grade sein mag;

$$\Omega = 0$$

hinzu, so erhält man im Punktraume als Bild der beiden Gleichungen genügenden Elemente eine Fläche vom Grade $2m$, welche den fundamentalen Kegelschnitt m-fach enthält. Von dieser Bildfläche kann sich gelegentlich, einfach oder mehrfach zählend, die Ebene $\xi_4 = 0$ absondern. Es tritt dies dann und nur dann ein, wenn das Projectionselement selbst der Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$, als gewöhnliches oder singuläres Element, angehört. Aber dies können wir immer vermeiden, da es uns ja frei steht, auch wenn die Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$ bereits gegeben ist, das Projectionselement unter den Elementen von $P = 0$ zu wählen, wie wir wollen. Es bildet sich also allgemein die Mannigfaltigkeit:

$$P = 0, \qquad \Omega = 0$$

als eine Fläche vom $2m$ten Grade ab, *welche den fundamentalen Kegelschnitt zur m-fachen Curve hat, und die Ebene desselben in nicht dem Kegelschnitte angehörigen Punkten nicht trifft.*

Es ist aber auch umgekehrt ersichtlich, dass jede Fläche $2m$ten Grades, welche diesen Bedingungen genügt, den vollständigen Durchschnitt von $P = 0$ mit der durch eine hinzutretende Gleichung $\Omega = 0$ vorgestellten Mannigfaltigkeit repräsentirt. Denn die Gleichung einer solchen Fläche muss in jedem Gliede die Ausdrücke ξ_4 und $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$ zusammen in der $m$ten Dimension enthalten. Das einzelne Glied hat also, unter μ eine Zahl $\geqq 0$ und $\leqq m$ verstanden, die folgende Form

$$\xi_4^\mu \cdot (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{m-\mu} \cdot \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

wo φ eine homogene Function vom μten Grade der beigefügten Argumente ist. Aber das Product:

$$\xi_4^\mu \, \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

ist ersichtlich nichts anderes, als eine homogene Function μten Grades der Argumente

$$\xi_1 \xi_4, \quad \xi_2 \xi_4, \quad \xi_3 \xi_4, \quad \xi_4 \xi_4.$$

Jedes Glied der gegebenen Flächengleichung und also die Flächengleichung selbst ist mithin eine homogene Function $m$ten Grades der fünf Argumente:

$$\xi_1 \xi_4, \ \xi_2 \xi_4, \ \xi_3 \xi_4, \ \xi_4 \xi_4, \ (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Man hat jetzt nur statt dieser Argumente bez.

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad p, \quad -q$$

zu setzen, um die Gleichung $m$ten Grades

$$\Omega = 0$$

derjenigen Mannigfaltigkeit zu haben, welche mit $P = 0$ zusammen als vollständigen Durchschnitt eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Bild im Punktraume die ursprünglich gegebene Fläche ist, womit denn die Behauptung, dass die Fläche das Bild eines vollständigen Durchschnittes sei, bewiesen ist.

Eine beliebige in $P = 0$ enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen, wird sich nun aber, — falls wir nicht, was wir immer vermeiden können, das Projectionselement unter ihren Elementen wählen — *nicht anders als eine solche Fläche abbilden können, die den vorgenannten Bedingungen genügt.* Denn die Bildfläche muss, der Annahme über die Lage des Projectionselementes entsprechend, die Ebene $\xi_4 = 0$ in keinen anderen Punkten, als in den Punkten des fundamentalen Kegelschnittes treffen, und das ist, *weil der Kegelschnitt ein irreducibeles Gebilde ist,* nicht anders möglich, als wenn sie von gerader Ordnung $= 2m$ ist, und den Kegelschnitt als m-fache Curve enthält.

Hiermit ist der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt. Seine wesentlichen Momente mögen hier noch ausdrücklich zusammengefasst werden, es sind die folgenden:

1) dass im Punktraume eine *irreducibele* Fundamentalcurve auftritt,

2) dass eine durch die Fundamentalcurve gelegte Fläche (die Ebene $\xi_4 = 0$) ein einzelnes, beliebig anzunehmendes Element des darzustellenden Gebildes repräsentirt,

3) dass es nur auf das Verhalten der Bildfläche zum Fundamentalkegelschnitte ankommt, ob eine $P = 0$ angehörige Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen als vollständiger Durchschnitt gefasst werden kann. —

Unser Schluss würde dagegen sofort ungültig werden, wenn der Fundamentalkegelschnitt reducibel wäre, also in ein Geradenpaar zerfiele. Denn dann kann man Flächen von der Ordnung $(m' + m'')$ construiren, welche die Geraden bez. m'- und m''-fach enthalten. Dieselben treffen, wie verlangt, die Ebene des Kegelschnittes nur in Punkten des Kegelschnittes, aber vollständige Durchschnitte würden sie erst dann vorstellen, wenn $m' = m''$ wäre.

Dieses Zerfallen des fundamentalen Kegelschnittes tritt nun gerade dann ein, wenn die Determinante der Form P verschwindet, und musste desshalb beim Beweise unseres Satzes diese Möglichkeit ausdrücklich ausgeschlossen werden. In der That, hat P eine verschwindende Determinante (und zunächst noch keine verschwindenden Unterdeterminanten), so kann man ihm die Form geben:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + pq,$$

die Abbildungsfunctionen werden:

$$\varrho x_1 = \xi_1 \xi_4, \quad \varrho x_2 = \xi_2 \xi_4, \quad \varrho x_3 = \xi_3 \xi_4, \quad \varrho p = \xi_4 \xi_1,$$
$$\varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

und der fundamentale Kegelschnitt wird:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0,$$

ist also in ein Linienpaar:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1 + i\xi_2 = 0,$$
$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1 - i\xi_2 = 0$$

zerfallen. —

Auf ganz ähnliche Weise, wie nunmehr der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt und das Nichtverschwinden der Determinante als nothwendige und hinreichende Bedingung erkannt wurde, erledigt sich die Frage für ein beliebiges n. Ist erstlich $n = 3$, haben wir also eine Fläche zweiten Grades, so entsteht bei der Abbildung derselben auf die allgemeine Mannigfaltigkeit der nächst niederen Dimension ohnehin ein reducibeles Fundamentalgebilde, auch wenn die Determinante der Fläche nicht verschwindet, nämlich ein Punktepaar. *Auf Flächen zweiten Grades findet unser Satz desshalb keine Anwendung**). Dagegen gilt der Satz allemal, wenn bei der Abbildung der Mannigfaltigkeit $P = 0$ auf die allgemeine Mannigfaltigkeit von $(n - 1)$ Dimensionen — eine Abbildung, die sich immer in gleicher Weise gestaltet — ein irreducibeles Fundamentalgebilde auftritt. Hierzu ist das Nichtverschwinden der aus den Coefficienten von P gebildeten fünfreihigen Determinanten die nothwendige und hinreichende Bedingung. Als Fundamentalgebilde tritt nämlich eine Mannigfaltigkeit von $(n - 3)$ Dimensionen auf, welche aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von $(n - 2)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung abgeschieden wird. Soll das Fundamentalgebilde zerfallen, so ist dazu das Verschwinden aller aus den Coefficienten der Gleichung gebildeter dreireihiger Unterdeterminanten die Bedingung; und dies Verschwinden tritt dann und nur dann ein, wenn ein Gleiches bei den fünfreihigen Unterdeterminanten der ursprünglichen quadratischen Gleichung $P = 0$ der Fall war. *Hiermit ist denn unser allgemeiner Satz für ein beliebiges n, insbesondere das in ihm enthaltene liniengeometrische Theorem, bewiesen.*

Ich will hier von der auseinandergesetzten Theorie noch zwei weitere geometrische Anwendungen geben. Die erste bezieht sich wieder auf Liniengeometrie. Man verbinde nämlich mit der quadratischen Gleichung, der die Liniencoordinaten zu genügen haben:

$$P = 0,$$

eine lineare. So hat man einen linearen Complex, den man auch in der folgenden Weise bestimmen kann. Aus der linearen Gleichung nehme man den Werth einer der Veränderlichen, ausgedrückt in den fünf anderen, und substituire ihn in $P = 0$, wodurch eine neue quadratische Gleichung $P' = 0$ entsteht. Der lineare Complex er-

---

*) Ebensowenig gilt der Satz für Kegelschnitte, wie ohne Weiteres ersichtlich.

scheint dann als durch diese Gleichnng aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ausgeschieden. Die Determinante von P' verschwindet nicht, wenn der lineare Complex ein allgemeiner ist; sie verschwindet dann und nur dann, wenn er ein specieller wird*). Wir erhalten also den folgenden Satz:

Congruenzen, welche einem allgemeinen linearen Complexe angehören, können als vollständiger Durchschnitt desselben mit einem anderen Complexe dargestellt werden.

Für den speciellen linearen Complex gilt aber der Satz nicht mehr. Ebensowenig wird der analoge Satz gelten, wenn wir zu der Gleichung des linearen Complexes eine weitere lineare Gleichung hinzufügen und die durch beide dargestellte lineare Congruenz in's Auge fassen. Auf einer linearen Congruenz giebt es in der That Linienflächen, welche sich nicht als vollständiger Durchschnitt der Congruenz mit einem hinzutretenden Complex darstellen lassen. Es sind dies diejenigen, welche die Leitlinien der Congruenz ungleich oft enthalten.

Eine zweite geometrische Anwendung bezieht sich auf die Darstellung des Raumpunktes durch die relativen Werthe seiner (mit gewissen Constanten multiplicirten) Potenzen mit Bezug auf fünf Kugeln, welche Herr Lie in Anknüpfung an die Abbildung des linearen Complexes diese Nachrichten 1871 n. 7, p. 208 gegeben hat, während sie Herr Darboux bereits früher (1868) in einer der Pariser Academie eingereichten Abhandlung aufgestellt hatte, die aber noch nicht veröffentlicht ist (cf. Darboux in den Comptes Rendus 1871. Sept.) Der Punkt wird durch fünf homogene Coordinaten dargestellt, welche, einzeln gleich Null gesetzt, fünf linear unabhängige Kugeln vorstellen, und diese Coordinaten sind an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante geknüpft. Der Punktraum ist hiernach das Bild einer Mannigfaltigkeit, die aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch diese quadratische Gleichung abgeschieden wird; es liegen also genau die

*) Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, dass die eben vorgetragene Abbildung einer Mannigfaltigkeit $P=0$ von drei Dimensionen auf den Punktraum mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum gleichbedeutend ist, welche Herr Nöther in den Göttinger Nachrichten 1869. Nr. 15, gegeben und die Herr Lie seinen metrisch-projectivischen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat. Ich möchte an dieser Stelle ausdrücklich auf die Abbildung des speciellen linearen Complexes hinweisen, welche die Theorie der Flächen mit einer mehrfachen Geraden mit derjenigen der Flächen mit zwei sich schneidenden mehrfachen Geraden in eine merkwürdige Verbindung setzt, durch welche z. B. die Zeuthen'schen Untersuchungen über die Flächen mit einer mehrfachen Geraden (Math. Ann. t. IV, I) für die letztgenannten Flächen verwerthet werden können.

Verhältnisse vor, wie wir sie eben bei dem Beweise des allgemeinen Satzes für $n = 4$ voraussetzten. Dem Projectionselemente entspricht die unendlich ferne Ebene des Punktraumes, der in ihr enthaltene imaginäre Kugelkeis ist der fundamentale Kegelschnitt. Einer Verlegung des Projectionselementes entspricht, wie man leicht sieht, eine Transformation des Punktraums durch reciproke Radien. Hier erhalten wir also: *Jede algebraische Fläche kann vermöge Umformung durch reciproke Radien in eine solche übergeführt werden, die durch eine Gleichung zwischen den in Rede stehenden Coordinaten rein dargestellt wird.* Dagegen würde der entsprechende Satz bei einer analogen Coordinatenbestimmung in der Ebene nicht mehr richtig sein*).

*) Man vergleiche die Arbeiten von Lie und mir im fünften Bande der mathematischen Annalen, sowie Hrn. Darboux's im Jahre 1873 erschienenes Buch: „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces" (Paris, Gauthiers-Villars). [Febr. 1883].