

# Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen\*).

Von A. MAYER in Leipzig.

Nach der in den Lehrbüchern angenommenen Theorie ist das isoperimetrische Problem, den relativ grössten oder kleinsten Werth des gegebenen Integrales

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(xy_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n') dx$$

zu finden, wenn nur solche Functionen  $y_1 \cdots y_n$  in Betracht gezogen werden sollen, für welche eine Reihe anderer gegebener Integrale

$$V_x = \int_{x_0}^{x_1} f_x(xy_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n') dx, \quad x = 1, 2, \cdots m,$$

vorgeschriebene Werthe behalten, vollkommen identisch mit der Aufgabe, das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m) dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen, wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$  unbestimmte Constanten bedeuten, die hinterher so bestimmt werden, dass die Integrale  $V_x$  die gegebenen Werthe annehmen. Dies ist nun allerdings vollkommen richtig, solange es sich lediglich um die Lösung des Problems, d. h. um die Bestimmung der unbekannten Functionen  $y$  handelt. Wäre dagegen auch die Frage, ob und innerhalb welcher Grenzen die gefundenen Functionen  $y$  ein wirkliches Maximum oder Minimum erzeugen, in beiden Problemen auf dieselbe Art zu beantworten, so würde sich beispielsweise ergeben, dass der Schwerpunkt eines homogenen, an beiden Enden aufgehängenen Fadens durchaus nicht bei jeder Lage seiner Endpunkte immer die tiefstmögliche Lage einnimmt, was offenbar absurd ist. Es ist daher klar, dass

\*) Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Juli 1877.

die Kriterien des Maximums und Minimums in beiden Problemen unmöglich dieselben sein können. Dies hat für den Fall einer einzigen unbekannten Function  $y$ , von der aber beliebig hohe Differentialquotienten in den Integralen auftreten können, schon 1869 der, leider noch in demselben Jahre verstorbene Schwedische Mathematiker Lundström in der Abhandlung: „Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique“, Nova acta reg. soc. sc. Upsaliensis Ser. 3, Vol. VII, hervorgehoben und darin zugleich die richtigen Kriterien des Maximums und Minimums für die isoperimetrischen Probleme aufgestellt.

Allein abgesehen davon, dass in Folge ungenauen Ausdrucks und zum Theil auch nicht ganz richtiger Formeln seine Schlüsse nur schwer verständlich sind, dürfte es wohl überhaupt auf dem Lundström'schen Wege unmöglich sein, nachzuweisen, dass die als nothwendig erkannten Kriterien zugleich auch hinreichend sind. Meiner Meinung nach kann nämlich dieser letzte, schwierigste Punkt nur dadurch entschieden werden, dass man nach dem Vorgange von Jacobi und Clebsch die zweite Variation des betreffenden Integrales auf ihre einfachste Form bringt, und gerade solche von der Integration von Differentialgleichungen abhängige Transformation vermeidet Lundström absichtlich als zu complicirt.

Nun habe ich aber in meiner Habilitationsschrift\*) aus der Clebsch'schen Reduction der zweiten Variation die Kriterien des Maximums und Minimums für dasjenige allgemeine Problem entwickelt, in welchem, wie Lagrange\*\*) und Clebsch\*\*\*) gezeigt haben, alle Aufgaben der Variationsrechnung, in denen nur eine einzige unabhängige Variable auftritt, enthalten sind. In diesen allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums müssen daher nothwendig auch die besonderen Kriterien der isoperimetrischen Probleme stecken. Der Wunsch, die letzteren durch Ableitung aus jenen strenger zu begründen und damit zugleich an dem wichtigsten Beispiele die Anwendbarkeit meiner allgemeinen Kriterien auf die verschiedenen speciellen Gattungen von Problemen der Variationsrechnung darzuthun, war die Veranlassung zu der vorliegenden Note. Unter Hinweis auf den Aufsatz: „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale“, Borchardt's J. 69, der, in theilweise veränderter Darstellung, die Untersuchungen meiner Habilitationsschrift reproducirt, setze ich diese Ableitung in § 1. auseinander.

\*) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866.

\*\*) Leçons sur le calcul des fonctions, Ausgabe von 1806 p. 466 und 469.

\*\*\*) Borchardt's J. 55, p. 336.

In den isoperimetrischen Problemen tritt ferner ein sehr bemerkenswerthes Reciprocitätsgesetz zu Tage, nach welchem jedem isoperimetrischen Probleme mit  $m$  isoperimetrischen Bedingungen  $m$  andere isoperimetrische Probleme in der Weise äquivalent sind, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Grenzen, innerhalb deren die Lösung ein wirkliches Maximum oder Minimum hervorruft, allen  $m + 1$  Problemen gemeinschaftlich angehören. Dieses Reciprocitätsgesetz ist lediglich eine Folge der Euler'schen Regel zur Lösung der isoperimetrischen Probleme und der Form, in welcher bei diesen Problemen die zweite Variation sich vor jeder Reduction darbietet. Die Ableitung des Reciprocitätsgesetzes aus den Kriterien des § 1. wird daher als eine willkommene Bestätigung dieser Kriterien zu betrachten sein.

Im dritten § endlich soll eben jenes Beispiel der Gleichgewichtsfigur eines homogenen, schweren Fadens, oder, was dasselbe ist, die Aufgabe der Curve von gegebener Länge und tiefstem Schwerpunkte die Anwendung der Kriterien und des Reciprocitätsgesetzes erläutern.

Ich betrachte im Folgenden immer nur den einfachsten Fall, wo sowohl die Grenzen  $x_0$  und  $x_1$ , als auch die Werthe, welche die unbekannten Functionen  $y$  in diesen beiden Grenzen annehmen, fest gegeben sind, weil sich auf diesen Fall alle anderen zurückführen lassen. In Betreff dieser Zurückführung verweise ich auf meinen oben citirten Aufsatz, aus welchem auch leicht erhellt, wie man zu verfahren hat, wenn die unbekannten Functionen  $y$  ausser den isoperimetrischen Bedingungen noch gegebenen Differentialgleichungen unterworfen sein sollen, oder, was hiervon nur ein specieller Fall ist, wenn in den Integralen der Aufgabe höhere Differentialquotienten der  $y$  auftreten.

## § 1.

### Kriterien des Maximums und Minimums.

In dem angegebenen Aufsätze, auf den sich im Folgenden die eingeklammerten Seitenzahlen beziehen, habe ich das Problem behandelt:

I. Man soll die Functionen  $y_1, \dots, y_n$ , zwischen denen die  $m$  Bedingungengleichungen:

$$\varphi_x(x y_1 \dots y_n y_1' \dots y_n') = 0, \quad x = 1, 2, \dots, m,$$

vorgeschrieben sind, so bestimmen, dass bei gegebenen Grenzen und Grenzwerten das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x y_1 \dots y_n y_1' \dots y_n') dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde,

und habe für dasselbe (p. 260) die folgenden Kriterien des Maximums und Minimums erhalten:

Das Problem I. wird gelöst durch die  $n + m$  gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen der unabhängigen Variablen  $x$  und den  $n + m$  abhängigen Variablen  $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$

$$(1) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_k} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_k}, \quad \varphi_k = 0,$$

in denen:

$$(2) \quad \Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

ist, und damit man den  $2n$  Grenzbedingungen genügen könne, müssen die durch vollständige Integration dieser Gleichungen gewonnenen Functionen  $y_1, \dots, y_n$   $2n$  willkürliche Constanten  $a_1, \dots, a_{2n}$  enthalten. Hat man diese Constanten durch die gegebenen Grenzwerte ausgedrückt, so ist es (abgesehen immer von dem Eintreten besonderer Ausnahmefälle [p. 241, 260]), damit die so erhaltenen Functionen ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrales hervorbringen, hinreichend und (im Allgemeinen wenigstens auch) nothwendig, dass die obere Grenze  $x_1$  (die ich immer  $> x_0$  voraussetze) zwischen  $x_0$  und der zunächst an  $x_0$  gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$(3) \quad \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \dots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} = 0$$

bleibe und dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung:

$$(4) \quad 2W = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i,$$

deren  $n$  willkürliche Argumente  $U_1, \dots, U_n$  den  $m$  Bedingungsgleichungen:

$$(5) \quad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_h} U_h = 0$$

unterworfen sind, zwischen  $x_0$  und  $x_1$  ihr Zeichen nicht ändern könne.

In den Formeln (3), (4), (5) sind unter  $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  diejenigen Functionen von  $x, a_1, \dots, a_{2n}$  zu verstehen, die durch die vollständige Integration der Gleichungen (1) erhalten wurden, den Integrationsconstanten  $a_1, \dots, a_{2n}$  selbst hat man die festen Werthe beizulegen, die sich aus den  $2n$  Grenzbedingungen ergaben, und mit  $y_{10}$  endlich ist der Werth der Function  $y_1$  für  $x = x_0$  bezeichnet.

Diese Resultate lege ich dem Folgenden zu Grunde und betrachte nunmehr das isoperimetrische Problem:

II. Die Functionen  $y_1, \dots, y_n$  von  $x$ , welche den  $m$  isoperimetrischen Bedingungen

$$\int_{x_0}^{x_1} f_x(x y_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n') dx = l_x, \quad x = 1, 2, \dots, m,$$

unterworfen sind und überdies in den beiden gegebenen Grenzen  $x_0$  und  $x_1$  gegebene Werthe erhalten sollen, so zu bestimmen, dass für dieselben das Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x y_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n') dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde (wobei selbstverständlich  $m$  jetzt nicht mehr, wie im Probleme I., der Beschränkung  $m < n$  unterliegt).

Führt man nach dem Vorgange Lagrange's  $m$  neue Variablen  $u_1, \dots, u_m$  durch die Substitutionen:

$$u_x = \int f_x dx$$

ein, so kann man die isoperimetrischen Bedingungen durch die  $m$  Bedingungsgleichungen:

$$f_x - u_x' = 0,$$

verbunden mit den  $2m$  Grenzbedingungen:

$$[u_x]_{x=x_0} = \alpha_x, \quad [u_x]_{x=x_1} = \alpha_x + l_x,$$

ersetzen und in den letzteren die Anfangswerthe  $\alpha_x$  als gegebene Grössen betrachten, wodurch das Problem II. die Form annimmt:

III. Die  $n + m$ , durch die  $m$  gegebenen Bedingungsgleichungen:

$$(6) \quad \varphi_x = f_x - u_x' = 0$$

verbundenen Functionen  $y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m$  sind so zu bestimmen, dass bei gegebenen Grenzwerten von  $x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m$  das Integral  $V$  ein relatives Maximum oder Minimum werde.

Das Problem III. ist aber nur ein specieller Fall des Problems I. und man kann daher auf dasselbe die oben angegebene Regel anwenden.

Nach derselben sind die Differentialgleichungen des Problems III.:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_x} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial u_x'}, \quad \varphi_x = 0.$$

Diese reduciren sich aber, wenn man

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

setzt, von selbst auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_h'}, \quad 0 = -\frac{d\lambda_x}{dx}, \quad f_x - u_x' = 0.$$

Das Problem III. wird folglich gelöst durch die  $n$  Differentialgleichungen:

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k},$$

in denen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  als unbestimmte Constanten aufzufassen sind, und nach Integration dieser Gleichungen ergeben sich die  $u_x$  durch die Quadraturen:

$$u_x = c_x + \int f_x dx.$$

Damit man die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten erhalte, um den vorgeschriebenen  $2(n+m)$  Grenzbedingungen genügen zu können, ist es hiernach notwendig und hinreichend, dass die  $n$  Gleichungen (7) auflösbar seien nach den  $n$  zweiten Differentialquotienten  $y_1'', \dots, y_n''$ .

Da ferner nach (2) und (6)

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u'_k \partial y'_k} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u'_k \partial u'_i} = 0$$

ist, so reducirt sich für das Problem III. die Function  $2W$  auf

$$2W = \sum_{h=1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

und die  $m$  Bedingungsgleichungen (5) werden:

$$\sum_{h=1}^{n+m} \frac{\partial f_x}{\partial y'_h} U_h = V_x.$$

Diese  $m$  Gleichungen bestimmen aber nur die in der Function  $2W$  gar nicht vorkommenden Grössen  $V_1, \dots, V_m$  als Functionen der Argumente  $U_1, \dots, U_n$ . Sie beschränken also die Willkürlichkeit dieser Argumente in keiner Weise und können daher ganz weggelassen werden.

Die Grenzgleichung endlich wird im Problem III., wenn man unter  $a_1, \dots, a_{2n}$  jetzt die  $2n$  willkürlichen Constanten versteht, welche die vollständige Integration der Gleichungen (7) mit sich bringt:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \dots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda_1} \dots \frac{\partial u_m}{\partial \lambda_m} \frac{\partial u_{10}}{\partial c_1} \dots \frac{\partial u_{m0}}{\partial c_m} = 0.$$

Da aber:

$$\frac{\partial y_h}{\partial c_k} = \frac{\partial y_{h0}}{\partial c_k} = \frac{\partial u_h}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{h0}}{\partial c_k} = 0$$

und

$$\frac{\partial u_k}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{k0}}{\partial c_k} = 1$$

ist, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \dots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \dots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0,$$

worin:

$$(8) \quad v_k = u_k - u_{k0} = \int_{x_0}^x f_k dx,$$

und man erhält somit aus der für das Problem I. angeführten Regel die folgenden Kriterien des Maximums und Minimums für das isoperimetrische Problem II.:

IV. Das Problem II. wird gelöst durch die  $n$  Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_h'},$$

in denen

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$$

ist und die  $\lambda$  unbestimmte Constanten bedeuten. Die vollständige Integration dieser Gleichungen liefert, vorausgesetzt, dass sich aus ihnen die zweiten Differentialquotienten  $y_1'', \dots, y_n''$  nicht eliminiren lassen,  $y_1, \dots, y_n$  als Functionen von  $x$ , von den  $m$  isoperimetrischen Constanten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  und von  $2n$  Integrationsconstanten  $a_1, \dots, a_{2n}$ . Hat man diese  $2n + m$  Constanten aus den  $m$  isoperimetrischen und den  $2n$  Grenzbedingungen bestimmt, so ergeben (abgesehen von solchen Ausnahmen, die nur in besonderen Fällen eintreten können und ihrer Natur nach sich den allgemeinen Regeln entziehen) die so erhaltenen Functionen  $y_1, \dots, y_n$  ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrales  $V$ , wenn die homogene Function zweiter Ordnung der  $n$  unabhängigen Variablen  $U_1, \dots, U_n$

$$2W = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{i-n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_h' \partial y_i'} U_i U_j$$

innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen bewahrt, und so lange überdies die obere Grenze  $x_1$  zwischen  $x_0$  und der zunächst an  $x_0$  gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\Delta(x, x_0) = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \dots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \dots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0$$

bleibt, in welcher die Functionen  $v_k$  durch die Quadraturen

$$v_k = \int_{x_0}^x f_k dx$$

zu berechnen sind. Ist dagegen die erste Bedingung nicht erfüllt, so findet sicher weder ein Maximum, noch ein Minimum statt und im Allgemeinen gilt dasselbe auch dann, wenn  $x_1$  die angegebene Grenze erreicht oder überschritten hat.

## § 2.

## Das Reciprocitätsgesetz der isoperimetrischen Probleme.

Das Problem II., auf welches sich der Satz IV. bezieht, lässt sich in Zeichen kurz so wiedergeben:

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \int_{x_0}^{x_1} f dx = \text{Max.}, \text{Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2 dx = l_2, \quad \dots \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m. \end{array} \right.$$

Vergleichen wir dasselbe jetzt mit dem anderen isoperimetrischen Probleme, welches enthalten ist in den Formeln:

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = \text{Max.}, \text{Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f dx = l, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2 dx = l_2, \quad \dots, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m. \end{array} \right.$$

Ich nehme an, dass in beiden Problemen den Grenzen und Grenzwerten dieselben festen Werthe vorgeschrieben sind.

Führen wir, des bequemeren Vergleichs halber, homogene isoperimetrische Constanten ein, d. h. setzen wir:

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{\mu},$$

$$\mu F = \mu f + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_m f_m = \Phi,$$

und bedenken, dass die Determinante  $\Delta(x x_0)$  sich nur um einen constanten Factor ändert, wenn wir an Stelle der  $a_1, \dots, a_{2n}, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  irgend  $2n + m$  unabhängige Functionen dieser Constanten als neue Constanten einführen, so können wir den Satz IV. auch so aussprechen:

Das Problem ( $\alpha$ ) wird gelöst durch die  $n$  Differentialgleichungen:

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'},$$

nach deren vollständiger Integration die  $2n$  Integrationsconstanten  $a_1, \dots, a_{2n}$  und die Verhältnisse der  $m + 1$  isoperimetrischen Constanten  $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m$  aus den  $2n$  Grenzbedingungen und den  $m$  isoperimetrischen Bedingungen:

$$(10) \quad \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2 dx = l_2, \quad \dots \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m$$



zu bestimmen sind, und die so erhaltenen Functionen  $y_1, \dots, y_n$  erzeugen ein wirkliches Maximum oder Minimum im Problem ( $\alpha$ ), so lange die obere Grenze  $x_1$  zwischen  $x_0$  und der zunächst an  $x_0$  gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\Delta_\alpha(x_1, x_0) = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \dots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu} \dots \frac{\partial v_m}{\partial \mu} = 0$$

bleibt, vorausgesetzt, dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung

$$2 W_\alpha = \frac{1}{\mu} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_h \partial y_i} U_h U_i$$

zwischen  $x_0$  und  $x_1$  stets dasselbe Zeichen behält.

Gehen wir nun über zum Probleme ( $\beta$ ), so bleiben für dieses die Gleichungen (9) und die Grenzbedingungen ganz unverändert und die isoperimetrischen Bedingungen (10) ändern sich nur insoweit, als jetzt an Stelle der Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1$$

die folgende:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = l$$

tritt. Im Allgemeinen wird also die Lösung des Problems ( $\beta$ ) verschieden sein von der des Problems ( $\alpha$ ). Nehmen wir aber an, dass sich bei der Lösung des Problems ( $\alpha$ ) als Maximums- oder Minimums-werth des Integrales  $V$  ergeben habe

$$V = \kappa,$$

so sind unter der Annahme

$$(11) \quad l = \kappa$$

die aus dem Problem ( $\alpha$ ) erhaltenen Functionen  $y_1, \dots, y_n$  gleichzeitig auch Lösungen des Problems ( $\beta$ ) und liefern hier für das Integral  $V$  den Werth  $l_1$ . Denn nach Voraussetzung erfüllen diese Functionen und die Werthe der Constantenverhältnisse  $\mu : \mu_1 : \dots : \mu_m$ , die sich bei ihrer Auffindung ergaben, gleichzeitig die Gleichungen (9) und die  $2n$  Grenzbedingungen, die beiden Problemen gemein sind, und genügen überdies den  $m+1$  Gleichungen:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = \kappa, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \quad \dots \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m,$$

welche bei der Annahme (11) die isoperimetrischen Bedingungen sowohl des ersten, wie des zweiten Problems enthalten.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass man immer durch bloss algebraische Operationen das Problem ( $\beta$ ) lösen kann, so oft man das Problem ( $\alpha$ ) gelöst hat für unbestimmte Werthe der Constanten  $l_1, \dots, l_m$ .

Weiter ist für die unter der Voraussetzung (11) beiden Problemen gemeinsame Lösung die Grenzgleichung im Problem ( $\beta$ ):

$$\Delta_\beta(x x_0) = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \dots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \dots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} = 0,$$

wo die  $y_h$  und  $v_k$ , die  $a_i$  und  $\mu_k$  dieselben Werthe haben, wie in der Determinante  $\Delta_\alpha(x x_0)$  und nur an Stelle von  $v_1$  die Function

$$(12) \quad v = \int_{x_0}^x f dx$$

getreten ist. Wegen

$$\Phi = \mu f + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_m f_m$$

folgt aber aus (12) und (8):

$$\mu v + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = \int_{x_0}^x \Phi dx$$

und hieraus ergibt sich durch partielle Differentiation nach  $a_i$  und  $\mu_k$ :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial a_i} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial a_i} + \dots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial a_i} = \int_{x_0}^x dx \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial a_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial a_i} \right),$$

$$v_\alpha + \mu \frac{\partial v}{\partial \mu_\alpha} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mu_\alpha} + \dots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial \mu_\alpha} = \int_{x_0}^x dx \left\{ f_\alpha + \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial \mu_\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial \mu_\alpha} \right) \right\}$$

Man hat also, wenn man unter  $c$  irgend eine der Constanten  $a_1, \dots, a_{2n}$ ,  $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m$  versteht:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial c} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial c} + \dots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial c} = \int_{x_0}^x dx \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial c} \right).$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial c} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \right) \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right)$$

oder nach (9):

$$= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right),$$

also erhält man:

$$\frac{\partial v}{\partial c} = \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c} - \frac{1}{\mu} \left\{ \sum_{k=2}^{k=m} \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial c} - \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h}{\partial c} - \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \right]_0 \frac{\partial y_{h0}}{\partial c} \right) \right\},$$

wo der Index 0 wie früher die Substitution  $x = x_0$  andeutet.

Diese Formeln drücken aber nur die Elemente  $\frac{\partial v}{\partial c}$  der Determinante  $\Delta_\beta(x x_0)$  durch die Grössen  $-\frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c}$ , vermehrt um je mit demselben Factor multiplicirte, correspondirende Elemente der anderen Reihen dieser Determinante aus. Daher ist identisch:

$$\Delta_\beta(x x_0) = -\frac{\mu_1}{\mu} \Delta_\alpha(x x_0).$$

Für die unter der Annahme (11) beiden Problemen gemeinsame Lösung sind also auch ihre Grenzgleichungen dieselben.

Endlich tritt an die Stelle der homogenen Function  $2W_\alpha$  des Problems ( $\alpha$ ) im Problem ( $\beta$ ) die Function:

$$2W_\beta = \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k' \partial y_i'} U_k U_i.$$

Für die betrachtete gemeinschaftliche Lösung hat man also:

$$2W_\beta = \frac{\mu}{\mu_1} 2W_\alpha = \frac{1}{\lambda_1} 2W_\alpha.$$

Fassen wir diese Resultate zusammen, so können wir demnach den folgenden Satz aussprechen:

V. *Hat man das isoperimetrische Problem*

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \int_{x_0}^{x_1} f dx = \text{Max.}, \text{Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2 dx = l_2, \quad \dots, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m \end{array} \right.$$

durch vollständige Integration der  $n$  Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_h'}$$

gelöst, in denen

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$$

ist und die  $\lambda$  unbestimmte Constanten sind, deren Werthe sich sodann aus den  $m$  isoperimetrischen Bedingungen des Problems bestimmen, und hat man hierbei als Maximums- oder Minimums-Werth des Integrales  $V$  gefunden:

$$V = l,$$

so ist die erhaltene Lösung dieses Problems gleichzeitig auch die Lösung des reciproken Problems:

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = \text{Max.}, \text{Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f dx = l, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2 dx = l_2, \dots, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m, \end{array} \right.$$

vorausgesetzt, dass man in beiden Problemen den Grenzen und Grenzwerthen dieselben festen Werthe vorgeschrieben hat.

Ist ferner im Problem (a)

$$V = l$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales  $V$ , so ist zu gleicher Zeit im Probleme (β)

$$V_1 = l_1,$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales  $V_1$ , wenn

$$\lambda_1 > 0$$

ist, dagegen ein Minimum oder Maximum von  $V_1$ , wenn

$$\lambda_1 < 0$$

ist. Endlich, wenn im Probleme (a) der gefundene Werth  $l$  von  $V$  weder ein Maximum, noch ein Minimum ist, so gilt dasselbe auch im Probleme (β) von dem Werthe  $l_1$  von  $V_1$ .

Man sieht aus diesem Reciprocitätsgesetze der isoperimetrischen Probleme, dass man (bei festen, aber unbestimmten Werthen der Constanten  $l$ ) nur für irgend ein vorgelegtes isoperimetrisches Problem die Lösung gefunden und die Frage entschieden zu haben braucht, ob und innerhalb welcher Grenzen diese Lösung ein wirkliches Maximum oder Minimum der Aufgabe ergibt, um dieselben Fragen ohne Weiteres auch für jedes reciproke Problem beantworten zu können. Es versteht sich ferner von selbst, dass es, um das Reciprocitätsgesetz anwenden zu können, nicht nothwendig ist, das gegebene Problem (a) gerade auf dem angegebenen Wege gelöst zu haben. Man braucht vielmehr nur, wenn man die Lösung auf irgend einem anderen Wege, z. B. durch geometrische Betrachtungen ermittelt hat, rückwärts die Vorzeichen der isoperimetrischen Constanten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  zu bestimmen. Bei den isoperimetrischen Problemen von der Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(xy) dx = \text{Max.}, \text{Min.}, \quad \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + y^2} = l,$$

z. B. ist:

$$2W = \frac{\lambda_1}{(1+y^2)^{3/2}} U_1^2;$$

hier gehört also einer Lösung, die ein Maximum erzeugt, ein nega-

tiver, und einer Lösung, die ein Minimum hervorbringt, ein positiver Werth von  $\lambda_1$  zu.\*)

## § 3.

## Beispiel.

*Diejenige Curve von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.*

Ich nehme die  $z$  Axe vertical und dem Sinne der Schwere entgegengesetzt und lege, der Bequemlichkeit halber, die  $xy$  Ebene durch den gegebenen Anfangspunkt der Curve. Die Aufgabe drückt sich dann analytisch durch die Formeln aus:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} z \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx = \text{Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx = l_1. \end{cases}$$

Man hat also hier:

$$(2) \quad F = (z + \lambda_1) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

und erhält als Lösung der Aufgabe die Kettenlinie:

$$(3) \quad \begin{cases} y = \frac{a_1}{a_2} x + a_3, \\ z + \lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x-a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x-a_4}{a_2}} \right\}, \end{cases}$$

woraus sich für

\*) Die obigen Betrachtungen beweisen das Reciprocitätsgesetz nur für den Fall fest gegebener Grenzen und Grenzwerte. Man kann aber zeigen, dass der Satz V. ganz unverändert auch bei beliebigen Grenzbedingungen gilt, vorausgesetzt natürlich nur, dass diese Grenzbedingungen in beiden Problemen dieselben sind. Es hängt dies mit denjenigen Reciprocitätsverhältnissen zusammen, welche die Maxima und Minima inverser Functionen darbieten. Uebrigens ist das Reciprocitätsgesetz nicht die einzige Eigenschaft, welche die isoperimetrischen Aufgaben vor den anderen Problemen der Variationsrechnung voraus haben. Für dieselben gilt vielmehr noch ein anderer, höchst wichtiger Satz, den man das *Gesetz der Unveränderlichkeit der isoperimetrischen Constanten* nennen könnte. Wenn man nämlich durch Einschaltung von Bedingungen zwischen den Grenzen die Curven  $y$  zwingt, sich in Zweige zu theilen, so ändern sich die Integrationsconstanten  $a$  von einem Zweige zum andern, aber die isoperimetrischen Constanten  $\lambda$  behalten überall dieselben Werthe. In dem besonderen Falle, wo man die geschlossene Curve grössten Flächeninhalts bei gegebenem Umfange, oder kleinsten Umfangs bei gegebener Fläche sucht und überdies verlangt, dass die Curve im Innern eines gegebenen Polygons verlaufen solle, fällt das letztere Gesetz mit dem bekannten Steiner'schen Satze zusammen, dass alle freien Theile der gesuchten Curve Bögen gleicher Kreise sein müssen.

$$v_1 = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

der Werth

$$(4) \quad v_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x-a_2}{a_2}} - e^{-\frac{x-a_2}{a_2}} - e^{\frac{x_0-a_2}{a_2}} + e^{-\frac{x_0-a_2}{a_2}} \right\}$$

ergibt.

Die 5 Constanten  $a_1, a_2, a_3, a_4, \lambda_1$  bestimmen sich aus der gegebenen Lage der beiden Endpunkte und der gegebenen Bogenlänge  $l_1$ , und zwar erhält man zwei verschiedene Werthsysteme derselben, die zwei gleichen und entgegengesetzten Werthen der Constanten  $a_2$  angehören. Da nach (4)

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2} \left( e^{\frac{x-a_2}{a_2}} + e^{-\frac{x-a_2}{a_2}} \right)$$

stets dasselbe Zeichen, wie  $\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2}$  besitzt, so hat man, damit der Bogen positiv werde, in den Formeln (3) und (4) der  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  das Zeichen von  $a_2$  beizulegen.

Die Function ferner:

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} U_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} U_1 U_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z'} U_2^2$$

wird nach (1)

$$2W = \frac{z + \lambda_1}{(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2})^3} \{ U_1^2 + U_2^2 + (z' U_1 - y' U_2)^2 \}$$

und hat also nach (3) beständig dasselbe Zeichen wie  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ . Um daher das Minimum zu erhalten, müssen wir diese Wurzel und mit ihr  $a_2$  positiv nehmen, d. h. wir müssen von den beiden Kettenlinien von gegebener Länge, die sich in der, durch die beiden gegebenen Endpunkte gehenden Verticalebene von dem einen Punkte zum anderen ziehen lassen, diejenige nehmen, die ihre convexe Seite nach unten kehrt. In Folge der Voraussetzung  $z_0 = 0$  wird nach (3) dann  $\lambda_1 > 0$ .

Die Grenzgleichung endlich:

$$(5) \quad \sum \pm \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y_0}{\partial a_2} \frac{\partial z}{\partial a_3} \frac{\partial z_0}{\partial a_4} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = 0$$

reducirt sich zunächst wegen der aus (3) und (4) folgenden Formeln:

$$\frac{\partial y}{\partial a_2} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = -1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = 0$$

sofort auf die Gleichung:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-y_0)}{\partial a_1} & \frac{\partial(y-y_0)}{\partial a_2} & 0 \\ \frac{\partial(z-z_0)}{\partial a_1} & \frac{\partial(z-z_0)}{\partial a_2} & \frac{\partial(z-z_0)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_1} & \frac{\partial v_1}{\partial a_2} & \frac{\partial v_1}{\partial a_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man weiter für den Augenblick

$$(7) \quad \frac{x-a_1}{a_2} = \xi, \quad \frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}) = p, \quad \frac{1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) = q,$$

wonach sich aus (3) und (4) ergibt:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a_1 (\xi - \xi_0), \\ z - z_0 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} (p - p_0), \\ v_1 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} (q - q_0), \end{aligned}$$

differentiirt die letzteren Formeln partiell nach  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  und substituirt die Werthe der Differentialquotienten in die Gleichung (6), so erhält man nach einfachen Reductionen und unter Weglassung des constanten Factors  $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2}$  die Gleichung:

$$(\xi - \xi_0) [(p q_0 - p_0 q) (\xi - \xi_0) - (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2] = 0,$$

sodass also schliesslich, wenn man noch

$$\xi - \xi_0 = \frac{x - x_0}{a_2} = \Theta$$

setzt, die Grenzgleichung des Problems wird:

$$\Theta \Psi(\Theta) = 0,$$

worin:

$$\Psi(\Theta) = e^{\Theta} + e^{-\Theta} - \frac{\Theta}{2} (e^{\Theta} - e^{-\Theta}) - 2$$

ist. Die Betrachtung der Functionen  $\Psi'$  und  $\Psi''$  zeigt aber sofort, dass diese Gleichung nur die eine reelle Wurzel  $\Theta = 0$ , d. h.  $x = x_0$  zulässt. Die Gleichung ergibt also keinerlei Beschränkung für die obere Grenze  $x_1$ ; es findet vielmehr für die nach unten convexe Kettenlinie ein unbeschränktes Minimum statt und wir haben den Satz gewonnen:

*Unter allen Curven von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten hat stets die Kettenlinie den tiefsten Schwerpunkt.*

Da  $\lambda_1 > 0$ , so geht zugleich aus diesem Satze durch Anwendung des Reciprocitätsgesetzes noch der folgende hervor:

*Unter allen Curven von gegebenen Endpunkten, deren Schwerpunkte auf einer und derselben Horizontalebene liegen, hat stets die Kettenlinie die kleinste Länge.*

In dem absoluten Probleme dagegen

$$(8) \quad \int_{x_0}^{x_1} (z + \lambda_1) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx = \text{Min.},$$

welches, vorausgesetzt, dass man der Constanten  $\lambda_1$  denselben Werth giebt, den sie in der eben behandelten isoperimetrischen Aufgabe erhält, durch die nämliche Kettenlinie gelöst wird, tritt an die Stelle der Gleichung (5) die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y_0}{\partial a_2} \frac{\partial z}{\partial a_3} \frac{\partial z_0}{\partial a_4} = 0,$$

die sich unter Weglassung des Factors  $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2} (\xi - \xi_0)$  auf

$$(q\xi - p)q_0 - q(q_0\xi_0 - p_0) = 0$$

reducirt. Nun ist nach (3) und (7)

$$p = \frac{2(z + \lambda_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad q = \frac{2a_2 z'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \xi - \xi_0 = \frac{x - x_0}{a_2}.$$

In diesem absoluten Probleme erhalten wir also als Grenzgleichung:

$$x - \frac{z + \lambda_1}{z'} = x_0 - \frac{z_0 + \lambda_1}{z'_0}$$

d. h. wenn wir auf derjenigen Kettenlinie, welche die Aufgabe löst, von dem gegebenen Anfangspunkte aus fortschreiten, so dürfen wir, damit ein wirkliches Minimum stattfinde, hier das Integral nicht bis zu demjenigen Punkte ausdehnen, dessen Tangente die in der Verticalebene der beiden gegebenen Endpunkte gezogene Gerade  $z = -\lambda_1$  wieder in demselben Punkte schneidet, wie die Tangente des Anfangspunktes. Wo wir also in dem isoperimetrischen Probleme (1) ein unbegrenztes Minimum erhalten, erhalten wir in dem unbedingten Probleme (8) nur ein begrenztes Minimum, was den Unterschied zwischen diesen beiden, dieselbe Lösung besitzenden Problemen klar hervortreten lässt.