

Zur Polarentheorie der Kegelschnitte.

Von **Karl Schober** in Innsbruck.

1. Die Aufgabe, weitere Punkte eines Kegelschnittes zu ermitteln, der durch drei reelle und ein Paar imaginärer Punkte bestimmt ist, führt bekanntlich auf eine lineare Construction, während die gebräuchliche Lösung der zweiten Aufgabe, wobei der Kegelschnitt durch einen reellen Punkt und zwei Paare imaginärer Punkte bestimmt ist, quadratische Constructionen erfordert. In neuerer Zeit gelang es jedoch, durch Einführung des Begriffes der complexen Elemente in die analytische Geometrie^{*)}, nach einer von Prof. Dr. O. Stolz in Innsbruck herstammenden Idee auch für den zweiten Fall eine lineare Construction zu finden.^{**)}

Es lag nun ziemlich nahe, die Fragen aufzuwerfen, ob es denn nicht möglich sei, zu solchen Constructionen zu gelangen, ohne den Begriff des Imaginären bei der Ableitung selbst zu Hilfe zu nehmen, und ob nicht auch die synthetische Geometrie allein imstande sei, ans Ziel zu führen. Diese beiden Fragen sind nun im bejahenden Sinne beantwortet. Die diesbezüglichen Untersuchungen ließen mich auf dem schon so vielfach bearbeiteten Gebiete der Polareigenschaften der Kegelschnitte einige neue Sätze finden, welche dadurch an Interesse und an Bedeutung gewinnen, dass sich aus denselben die in Rede stehenden Constructionen als unmittelbare Folgerungen ergeben. †) Die Ableitung dieser Sätze kann sowohl auf analytischem, als

*) Vergl. O. Stolz, Mathem. Annalen. Bd. IV, pag. 416 ff. — Desgl. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von Lindemann, II. Bd., I. Theil, pag. 104 ff.

**) Herr Prof. Dr. O. Stolz theilte im Jahre 1886 in seinen Vorlesungen über neuere analytische Geometrie für jeden der beiden Fälle eine lineare Construction mit; Beweise hierzu gab in analytischer Behandlung mit Hereinziehen des Imaginären in die Rechnung Herr F. Spath in einer Arbeit „Lineale Constructionen von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen“. Monatshefte f. Math. und Physik. Bd. I, pag. 237 ff.

†) Darunter auch die zwei von Prof. Stolz mitgetheilten.

auch auf synthetischem Wege erfolgen. Hier soll der letztere, der sich durch seine Kürze und Einfachheit auszeichnet, eingeschlagen werden.

2. Ist ABC ein in der Ebene eines Kegelschnittes K gelegenes Dreieck, und werden von den sechs auf den Seiten desselben gelegenen conjugierten Polen der Ecken desselben je zwei auf derselben Seite (der Kürze halber, und um sie von den Paaren conjugierter Pole zu unterscheiden) als ein Paar benachbarter Pole, ferner je zwei auf derselben Seite des Dreieckes gelegene (reelle oder imaginäre) Punkte des Kegelschnittes als ein Paar zusammengehöriger Curvenpunkte bezeichnet, so gelten die folgenden Sätze:

Von den drei Paaren benachbarter Pole und den drei Paaren zusammengehöriger Curvenpunkte, welche durch einen Kegelschnitt K auf den Seiten eines in der Ebene desselben gelegenen Dreieckes bestimmt werden, liegen

- a) irgend ein Paar benachbarter Pole und die auf den beiden anderen Seiten gelegenen Paare zusammengehöriger Curvenpunkte,
 - β) je zwei Paare benachbarter Pole und das auf der dritten Seite gelegene Paar zusammengehöriger Curvenpunkte
- auf je einem Kegelschnitte k .*)

3. Schneiden die Seiten des Dreieckes ABC der Reihe nach den Kegelschnitt K in den drei Punktepaaren $C' C''$, $A' A''$, $B' B''$, so besteht nach dem Theorem von Carnot**) zwischen den Segmenten, welche durch jene Curvenpunkte auf den Seiten des Dreieckes bestimmt werden, die Gleichung

$$AB' \cdot AB'' \cdot BC' \cdot BC'' \cdot CA' \cdot CA'' \\ = AC' \cdot AC'' \cdot BA' \cdot BA'' \cdot CB' \cdot CB'',$$

oder in anderer Form

$$\frac{AB' \cdot AB'' \cdot BC' \cdot BC'' \cdot CA' \cdot CA''}{CB' \cdot CB'' \cdot AC' \cdot AC'' \cdot BA' \cdot BA''} = + 1.$$

Diese Relation gilt auch dann, wenn jene Schnittpunkte paarweise imaginär werden.***)

Nun sind aber die Quotienten der in diesem Bruche übereinander stehenden Segmente nichts anderes als die Theilverhält-

*) Der Vollständigkeit halber sei noch hinzugefügt, dass endlich auch γ) alle drei Paare benachbarter Pole auf einem Kegelschnitte k liegen. Dies ist bekanntlich eine unmittelbare Folge der perspectivischen Lage des Dreieckes ABC und seines Polardreieckes.

**) Carnot, Géométrie de position, pag. 437.

***) Chasles, Traité des sections coniques. 1ière part, pag. 20.

nisse der sechs Curvenpunkte in Bezug auf die entsprechenden Ecken des Dreieckes. Bezeichnen wir der Reihe nach jene Theilverhältnisse der Punkte $A', A'', B', B'', C', C''$ mit $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$, so gilt also für dieselben die Gleichung

$$\alpha' \alpha'' \beta' \beta'' \gamma' \gamma'' = +1 \quad (\text{I})$$

Umgekehrt liegen drei auf den Seiten eines Dreieckes gelegene Punktepaare $A' A'', B' B'', C' C''$ auf einem Kegelschnitte, wenn ihre Theilverhältnisse in Bezug auf die Ecken des Dreieckes die Bedingungsgleichung $\alpha' \alpha'' \cdot \beta' \beta'' \cdot \gamma' \gamma'' = +1$ erfüllen. Denn schneidet z. B. der durch die ersten fünf Punkte (A', A'' auf der Seite \overline{BC} , B', B'' auf \overline{CA} , C' auf \overline{AB}) bestimmte Kegelschnitt die Seite \overline{AB} in dem zweiten Punkte C''' , dessen Theilverhältnis in Bezug auf A und B γ''' ist, so gilt nach früher die Gleichung

$$\alpha' \alpha' \beta' \beta'' \gamma' \gamma''' = +1.$$

Aus dieser Gleichung und der Voraussetzung folgt aber $\gamma''' = \gamma''$, d. h. der Punkt C''' ist mit dem Punkte C'' identisch.

4. Werden die auf den Seiten des Dreieckes ABC gelegenen conjugierten Pole der Ecken desselben der Reihe nach mit $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ bezeichnet (die Paare benachbarter Pole haben denselben Buchstaben), so sind B, \mathfrak{A}' und C, \mathfrak{A}'' offenbar Elementenpaare der durch den Kegelschnitt K auf der Seite \overline{BC} bestimmten Involution, deren Doppelpunkte A' und A'' sind. Dann gehören aber auch die Elementenpaare B, C , sowie A', A'' und $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ einer Involution an. *) Da nun die Producte der Theilverhältnisse je zweier entsprechender Elemente einer Involution in Bezug auf ein bestimmtes Elementenpaar derselben einander gleich sind, so muss, wenn wir die Theilverhältnisse der Punkte \mathfrak{A}' und \mathfrak{A}'' in Bezug auf B und C mit (α') und (α'') bezeichnen, die Gleichung bestehen:

$$(\alpha') (\alpha'') = \alpha' \alpha''. \quad (\text{II})$$

Ebenso gelten auch, wenn $(\beta'), (\beta'')$ und $(\gamma'), (\gamma'')$ die Theilverhältnisse von $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, bzw. $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ bedeuten, die Gleichungen

$$(\beta') (\beta'') = \beta' \beta''; \quad (\text{III})$$

$$(\gamma') (\gamma'') = \gamma' \gamma''. \quad (\text{IV})$$

*) Vgl. Prof. Dr. Em. Weyr, Die Elemente der projectivischen Geometrie 1. Heft, pag. 171.

Verbinden wir nun die Gleichungen (II), (III), (IV) einzeln und zu zweien mit der Gleichung (I), so erhalten wir die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\alpha')(\alpha'') \cdot \beta' \beta'' \cdot \gamma' \gamma'' &= +1, \\ \alpha' \alpha'' \cdot (\beta')(\beta'') \cdot \gamma' \gamma'' &= +1, \\ \alpha' \alpha'' \cdot \beta' \beta'' \cdot (\gamma')(\gamma'') &= +1; \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' \alpha'' \cdot (\beta')(\beta'') \cdot (\gamma')(\gamma'') &= +1, \\ (\alpha')(\alpha'') \cdot \beta' \beta'' \cdot (\gamma')(\gamma'') &= +1, \\ (\alpha')(\alpha'') \cdot (\beta')(\beta'') \cdot \gamma' \gamma'' &= +1. \end{aligned} \right\} \text{(VI)}$$

Mit diesen zwei Gruppen von Gleichungen sind die im Art. 2 aufgestellten zwei Sätze bewiesen; denn nach (V) liegen die Punkte

$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'', B', B'', C', C''; A', A'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', C', C''; A', A'', B', B'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'';$

und nach (VI)

$A', A'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''; \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'', B', B'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''; \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', C', C''$

auf je einem Kegelschnitte k .*)

5. Aus den obigen allgemeinen Sätzen können noch mehrere besondere Fälle abgeleitet werden; von denselben sollen hier nur zwei hervorgehoben werden, von denen weiter unten Gebrauch gemacht wird.

Wenn eine Seite des Dreieckes ABC eine Tangente des Kegelschnittes K ist, so fallen die betreffenden zwei zusammengehörigen Curvenpunkte zusammen, so dass also die entsprechenden Theilverhältnisse gleich sind. Dann nehmen die Gleichungen (V) und (VI) die folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha')(\alpha'') \cdot \beta'^2 \cdot \gamma' \gamma'' &= +1 \\ \alpha' \alpha'' \cdot (\beta')(\beta'') \gamma'^2 &= +1 \\ \alpha'^2 \cdot \beta' \beta'' \cdot (\gamma')(\gamma'') &= +1 \end{aligned} \right\} \text{(V')}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha'^2 \cdot (\beta')(\beta'') \cdot (\gamma')(\gamma'') &= +1 \\ (\alpha')(\alpha'') \cdot \beta'^2 \cdot (\gamma')(\gamma'') &= +1 \\ (\alpha')(\alpha'') \cdot (\beta')(\beta'') \cdot \gamma'^2 &= +1 \end{aligned} \right\} \text{(VI')}$$

*) Endlich ist auch noch $(\alpha')(\alpha'') \cdot (\beta')(\beta'') \cdot (\gamma')(\gamma'') = +1$, d. h. die sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ liegen, wie dies schon früher erwähnt worden, auf einem Kegelschnitte.

Der Kegelschnitt k geht im ersten Falle (V) durch ein Paar benachbarter Pole und ein Paar zusammengehöriger Curvenpunkte, im zweiten Falle (VI) durch zwei Paare benachbarter Pole und berührt in beiden Fällen die dritte Seite des Dreieckes ABC in dem Berührungspunkte derselben mit dem gegebenen Kegelschnitte K .

* * *

6. Von einem Kegelschnitte K seien ein reeller Punkt A' und zwei Paare imaginärer Punkte B', B'' und C', C'' (als Doppelpunkte zweier elliptischer Involutionen) gegeben; es sollen weitere Punkte von K ermittelt werden.

Wir ziehen durch den reellen Punkt A' eine beliebige Gerade a und suchen den auf derselben gelegenen zweiten Punkt A'' von K . Die Ausführung dieser Construction auf linearem Wege erfolgt auf Grund des im Art. 2 aufgestellten Satzes β).

Die durch A' gezogene Gerade a bildet mit den Trägern b und c der beiden Involutionen ein Dreieck ABC , dessen Seiten a, b, c von dem Kegelschnitte K der Reihe nach in dem reellen Punktepaare A', A'' (A'' vorläufig unbekannt) und in den imaginären Punktepaaren B', B'' , C', C'' geschnitten werden. Nun liegen nach (VI,₁) die auf b und c gelegenen Paare benachbarter Pole der Ecken jenes Dreieckes und das auf a gelegene Paar reeller Punkte des Kegelschnittes K auf einem anderen Kegelschnitte k . Dieser Hilfskegelschnitt k (der natürlich weder in diesem Falle, noch in einem der späteren Fälle wirklich zu construieren ist) hat also mit K außer dem gegebenen reellen Punkte A' noch den gesuchten reellen Punkt A'' gemeinsam.

Es nimmt somit die Construction für diesen Fall die folgende Gestalt an: Die Träger b und c der beiden Involutionen treffen einander im Punkte A und werden von der durch A' in beliebiger Richtung gezogenen Geraden a in den Punkten C und B geschnitten; zu den Punkten A, B, C sind nun die vier auf b und c gelegenen conjugierten Pole (d. h. die entsprechenden Punkte in den beiden Involutionen) zu ermitteln, was aus den gegebenen Elementenpaaren der beiden Involutionen bekanntlich auf linearem Wege erfolgen kann. Werden die benachbarten Pole auf b und c in beliebiger Ordnung \mathfrak{B}' und \mathfrak{B}'' , bezw. \mathfrak{C}' und \mathfrak{C}'' genannt, so ist der gesuchte Punkt A'' der sechste Eckpunkt des durch die fünf reellen Punkte $A', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$,

\mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' und die durch A' gezogene Gerade a bestimmten Pascal'schen Sechseckes. *)

Geht die durch den reellen Punkt A' gelegte Gerade a durch den Schnittpunkt A der Träger b und c der beiden Involutionen, und wird unter Beibehaltung der vorhin angegebenen Reihenfolge der Ecken des Pascal'schen Sechseckes die Construction des Punktes A'' für diesen besonderen Fall specialisiert, so erhält man die bekannte lineare Construction, nach welcher auf einer durch den Pol einer Geraden gehenden Secante eines Kegelschnittes zu dem einen bekannten Curvenpunkte der zweite als harmonisch conjugierter in Bezug auf den Pol und den Schnittpunkt der Secante mit der Polare bestimmt wird. Die Punkte B und C fallen dann mit A zusammen; daher fallen auch die benachbarten Pole \mathfrak{B}' und \mathfrak{B}'' auf b und \mathfrak{C}' und \mathfrak{C}'' auf c zusammen, so dass der Hilfskegelschnitt k die Träger b und c der beiden Involutionen berührt.

Nachdem in dem oben besprochenen allgemeinen Falle der Punkt A' gefunden worden ist, können drei weitere Curvenpunkte E, F, G als die zweiten Schnittpunkte der Secanten $\overline{A'A}$, $\overline{A''A}$ und beispielsweise \overline{EC} mit K auf kurzem Wege erhalten werden; dann sind von K fünf reelle Punkte A', A'', E, F, G bekannt.

7. Sind von einem Kegelschnitte K eine reelle Tangente a' und zwei Paare imaginärer Tangenten b', b'', c', c'' (letztere als Doppelstrahlen zweier elliptischer Strahleninvolutionen) gegeben, und sollen weitere Tangenten desselben ermittelt werden, so nehmen wir — dem Vorgange in Art. 6 reciprok — auf a' einen beliebigen Punkt A an und suchen die durch denselben gehende zweite Tangente a'' von K . Die durch die Scheitel B und C der gegebenen Strahleninvolutionen hindurchgehenden Paare benachbarter Polaren $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''$ und $\mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ (das sind die den Dreiecksseiten a, b, c entsprechenden Elemente der Involutionen) bestimmen mit der reellen Tangente a' einen Hilfskegelschnitt k , welcher mit K die gesuchte Tangente a'' gemeinsam hat. Es tritt demnach bei der Ermittlung von a'' an Stelle des Brianchon'schen Sechseites $b' b'' c' c'' a' a''$, in welchem die ersten vier Seiten imaginär sind, das Sechseit $\mathfrak{b}' \mathfrak{b}'' \mathfrak{c}' \mathfrak{c}'' a' a''$ mit lauter reellen Seiten u. s. w.

Auch hier kommt man in dem besonderen Falle, wo der auf der reellen Tangente a' gelegene Punkt A gleichzeitig auf der Verbindungsgeraden a der Scheitel B und C der beiden

*) Je nach der Wahl der Reihenfolge jener sechs Punkte als Ecken von Pascal'schen Sechsecken ergeben sich in der Ausführung mehr oder weniger vortheilhafte und übersichtliche Constructions. Beachtenswert sind die Sechsecke $A' \mathfrak{B}' \mathfrak{C}'' \mathfrak{C}' \mathfrak{B}'' A''$ und $A' \mathfrak{C}'' \mathfrak{B}' \mathfrak{B}'' \mathfrak{C}' A''$; die Pascal'sche Gerade geht im ersten Falle durch B , im zweiten durch C .

Strahleninvolutionen angenommen, also in den Schnittpunkt von a' mit a verlegt wird, auf eine bekannte lineare, dem entsprechenden Fall in Art. 6 reciproke Construction.

8. Für den Fall, dass ein Kegelschnitt K durch drei reelle Punkte A', B', B'' und ein Paar imaginärer C', C'' , bezw. durch drei reelle Tangenten a', b', b'' und ein Paar imaginärer c', c'' bestimmt ist, gibt es mehrere lineare Constructionen, um weitere Punkte, bezw. Tangenten desselben zu ermitteln. Die im Folgenden mit kurzen Worten gegebene Construction wird hauptsächlich nur deshalb vorgeführt, weil sie eine unmittelbare Folge des in Art. 2 aufgestellten Satzes α) ist, und weil zwischen ihr und jener, wo nur ein reelles Element gegeben ist, eine gewisse Übereinstimmung herrscht.

Der Träger der elliptischen Involution, deren Doppelpunkte die gegebenen imaginären Punkte C', C'' des Kegelschnittes K sind, heiße c , die Verbindungsgerade der reellen Punkte B', B'' heiße b und irgend eine durch A' gezogene Gerade a ; die letztere treffe K in dem zu ermittelnden Punkte A'' . Die auf c gelegenen, den Ecken A und B des von den drei Geraden a, b, c gebildeten Dreieckes conjugierten Pole \mathfrak{C}' und \mathfrak{C}'' bilden ein Paar benachbarter Pole, welche nach (V, 3) mit den auf b und a gelegenen Paaren zusammengehöriger Curvenpunkte B', B'' und A', A'' auf einem Kegelschnitte k liegen; dieser hat mit K die genannten vier reellen Punkte gemeinsam. Es wird somit durch das auf c gelegene Paar benachbarter Pole $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, durch die gegebenen reellen Punkte A', B', B'' und die durch A' gehende Gerade a ein Pascal'sches Sechseck bestimmt, dessen sechster Eckpunkt der gesuchte Punkt A'' des Kegelschnittes K ist.

9. Fallen zwei von den reellen Punkten der vorigen Aufgabe, z. B. B' und B'' , zusammen, ist also der Kegelschnitt K durch ein Paar imaginärer Punkte C', C'' , durch zwei reelle Punkte A', B' und die Tangente b in B' bestimmt, so bleibt die Ermittlung eines weiteren Punktes A'' im wesentlichen dieselbe wie vorhin. In diesem Falle geht der Hilfskegelschnitt k nach der Gleichung $\alpha' \alpha'' \cdot \beta'^2 \cdot (\gamma')(\gamma'') = +1$ (den Gleichungen V analog gebildet) durch das Paar benachbarter Pole $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ auf c , das Paar zusammengehöriger Curvenpunkte A' und A'' auf a (hierbei ist A'' der gesuchte Punkt) und berührt die dritte Seite b des Dreieckes ABC in dem Berührungspunkte B' derselben mit K .

Die reciproken Aufgaben der im Art. 8 und 9 besprochenen werden in analoger Weise gelöst.

10. Die im ersten Theile dieser Abhandlung entwickelten Sätze sind auch sonst noch für die Theorie der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittreihen, welche durch ein Paar oder zwei Paare imaginärer Scheitel, bezw. imaginärer gemeinschaft-

licher Tangenten bestimmt sind, von einiger Bedeutung. Es sollen hier mit kurzen Worten nur einige hierher gehörige Aufgaben mit Benützung jener Sätze gelöst werden.

a) Es sind die beiden Kegelschnitte eines Büschels zu construieren, die eine gegebene Gerade berühren, wenn sämtliche Scheitel desselben imaginär sind.

Heißen die vier imaginären Scheitel B', B'', C', C'' und die gegebene Gerade a , so handelt es sich zunächst darum, die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 des Büschels mit a , d. h. die Doppelpunkte D_1 und D_2 der durch die Gegenseitenpaare des vollständigen Viereckes $B' B'' C' C''$ auf a bestimmten Involution zu ermitteln. Von den Gegenseiten jenes Viereckes sind jedoch nur zwei, nämlich die Träger b und c der beiden die Paare imaginärer Scheitel B', B'' und C', C'' bestimmenden elliptischen Involutionen, reell; somit erscheint auf a nur das eine reelle Elementenpaar B, C unmittelbar gegeben. Dieselbe Involution wird aber auf a noch auf eine andere Art erzeugt, was aus dem Folgenden ersichtlich ist.

Infolge der Berührung von K_1 und K_2 mit a geht die Gleichung (I), wenn $\alpha' = \alpha'' = \xi$ gesetzt wird, über in

$$\xi_2 \cdot \beta' \beta'' \cdot \gamma' \gamma'' = +1;$$

daraus erhalten wir für ξ zwei gleich große, entgegengesetzt bezeichnete Werte

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta' \beta'' \cdot \gamma' \gamma''}},$$

welche den beiden (durch B und C harmonisch getrennten) Berührungspunkten D_1 und D_2 entsprechen.

Für die Hilfskegelschnitte k_1 und k_2 , welche durch die beiden Paare benachbarter Pole $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ auf b und $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ auf c hindurchgehen und a berühren, ist nach (VI', 1), wenn $\alpha' = \eta$ gesetzt wird,

$$\eta^2 \cdot (\beta') (\beta'') \cdot (\gamma') (\gamma'') = +1;$$

daraus ergeben sich für die Theilverhältnisse der Berührungspunkte von k_1 und k_2 mit a in Bezug auf dieselben zwei Punkte B und C wie vorhin die Werte

$$\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{(\beta') (\beta'') \cdot (\gamma') (\gamma'')}}.$$

und wegen $(\beta')(\beta'') = \beta'\beta''$ und $(\gamma')(\gamma'') = \gamma'\gamma''$, auch

$$\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta'\beta''\gamma'\gamma''}},$$

also

$$\xi_1 = \eta_1 \text{ und } \xi_2 = \eta_2;$$

d. h. die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 des durch die vier imaginären Scheitel B', B'', C', C'' bestimmten Büschels mit der Geraden a sind auch die Berührungspunkte der beiden Hilfskegelschnitte k_1 und k_2 des durch die vier reellen Scheitel $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ bestimmten Büschels mit a . D_1 und D_2 werden somit als die Doppelpunkte der durch die Gegenseitenpaare des vollständigen Viereckes $\mathfrak{B}' \mathfrak{B}'' \mathfrak{C}' \mathfrak{C}''$ auf der Geraden a bestimmten Involution erhalten, welche mit der früher besprochenen identisch ist. Je nachdem dieselbe hyperbolisch oder elliptisch ist, sind die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 gleichzeitig mit den entsprechenden Hilfskegelschnitten k_1 und k_2 reell oder imaginär.

Sind nur zwei Scheitel, z. B. C', C'' , imaginär, so bleibt die Construction (unter Benützung des vollständigen Viereckes $B' B'' \mathfrak{C}' \mathfrak{C}''$) im wesentlichen dieselbe wie vorhin.

β) Ist die Gerade a der vorigen Aufgabe die unendlich weite Gerade der Ebene des Kegelschnittbüschels, so stellen K_1 und K_2 die beiden in diesem Falle bekanntlich stets reellen Parabeln desselben vor. Die Richtungen ihrer Achsen werden mittelst des vollständigen Viereckes der reellen Punkte $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ gefunden; denn aus α) folgt, dass wegen der gemeinschaftlichen Berührungspunkte D_1 und D_2 mit der unendlich weiten Geraden die Achsen der beiden durch die vier imaginären Punkte B', B'', C', C'' bestimmten Parabeln K_1 und K_2 , zu denen der beiden durch die vier reellen Punkte $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ bestimmten Parabeln k_1 und k_2 parallel sein müssen.

γ) Die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 einer Reihe, welche vier gemeinschaftliche imaginäre Tangenten b', b'', c', c'' besitzen und durch einen reellen Punkt A gehen, berühren in dem letzteren die beiden Geraden d_1 und d_2 , welche sich als die Doppelstrahlen der Strahleninvolution ergeben, die durch die Gegeneckenpaare des vollständigen Vierseites b', b'', c', c'' , dessen Seiten sämtlich reell sind, im Punkte A bestimmt ist. Hierbei bedeuten b', b'' und c', c'' die Paare benachbarter Polaren, welche durch B und C , die Scheitel der elliptischen Strahleninvolutionen, deren Doppelstrahlen die gegebenen zwei Paare imaginärer Tangenten sind, hindurchgehen.

δ) Ist die Parabel K einer Kegelschnittreihe zu construieren, deren vier gemeinschaftlichen Tangenten sämtlich imaginär

sind, so werden weitere Tangenten derselben von bestimmter Richtung auf Grund des dem Satze β) im Art. 2 reciproken Satzes erhalten. Die zwei Paare benachbarter Polaren, welche durch die Scheitel B und C der gegebenen elliptischen Strahleninvololutionen hindurchgehen, bestimmen mit der unendlich weiten Geraden der Ebene der Kegelschnittreihe eine Parabel k , welche mit K die zu ermittelnde Tangente von gegebener Richtung gemeinsam hat. *)

*) Bezüglich der Behandlung der Constructionen zweiten Grades, welche zur Lösung der im Art. 10 besprochenen Aufgaben erforderlich sind, vergl. A. Adler, „Über die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben nothwendigen Hilfsmittel.“ Sitzungsber. der kais. Akademie d. Wissensch. Bd. XCIX.