

## Über einige Eigenschaften der ebenen Curven III. O. mit Rückkehrpunkt.

Von Heinrich Drasch in Linz a/D.

Art. 1. Ist  $w$  der Wendepunkt einer  $C_3^3$  und  $S$  ein beliebiger Strahl durch  $w$ , welcher  $C_3^3$  noch in den Punkten  $a$  und  $b$  schneidet, so liegen bekanntlich die Tangentialpunkte  $a'$  und  $b'$  von  $a$ , resp.  $b$  in einem Strahle  $S'$ , welcher durch  $w$  geht. Nachdem aber die Berührungspunkte der aus  $a'$  und  $b'$  an  $C_3^3$  gezogenen Tangenten wieder nur die Punkte  $a$  und  $b$  sind, deren Verbindungslinie  $S$  ist, so hat man den Satz:

Die Strahlenbüschel  $S$  und  $S'$  sind zu einander projectivisch.

Art. 2. Aus dem bekannten Satze, dass jeder Strahl  $X$  durch  $w$  die Curve noch in zwei Punkten schneidet, welche durch die Rückkehrtangente und den Wendepunkt harmonisch getrennt sind, folgt, dass jede  $C_3^3$  durch den Rückkehrpunkt  $\delta$ , den Wendepunkt  $w$ , die Rückkehrtangente  $\delta r$ , die Wendetangente  $w r$  und noch einen Curvenpunkt  $p$  bestimmt ist. ( $r$  sei der Schnittpunkt zwischen Wende- und Rückkehrtangente).

Die Construction ergibt sich in folgender Weise:

Man lege durch  $\delta$ ,  $r$  und  $p$  einen Kegelschnitt  $\kappa$ , welcher  $\delta w$  und  $w r$  in  $\delta$ , resp.  $r$  berührt. Sodann mache man  $w$  zum Centrum eines Strahlenbüschels und  $\delta$  zum Centrum eines mit diesem projectivischen involutorischen Strahlenbüschels, indem man den Strahlen  $w r$ ,  $w \delta$ ,  $w p$  die Strahlen  $w \delta$ ,  $w r$ ,  $w p$  zuweist, welche durch  $\kappa$  die involutorischen Strahlenpaare  $\delta w$  (Doppelstrahl),  $\delta r$  (Doppelstrahl) und  $\delta p$ ,  $\delta q$  (Strahlenpaar) bestimmen.

Beachtet man nun, dass diese Construction rein projectivischen Charakter hat und dass das Viereck  $\delta w r p$  die Centralprojection jedes beliebigen anderen Viereckes sein kann, so folgt:

Jede  $C_3^3$  kann als Centralprojection jeder anderen  $C_3^3$  angesehen werden.

Art. 3. Interessant ist der Umstand, dass die Werte gewisser Doppelverhältnisse, welche bei allen  $C_3^3$  constant sind, sich durch einfache Zahlen ausdrücken lassen.

In der Projectivität, welche entsteht, wenn man einen beliebigen Curvenpunkt und dessen Tangentialpunkt aus  $w$  durch die Strahlen  $X$  und  $Y$  projiciert, sind  $w\delta$  und  $wr$  Doppelstrahlen.

Bedeutet nun  $r, x, y, \delta$  die Schnittpunkte der Strahlen  $wr, X, Y$  und  $w\delta$  mit der Rückkehrtangente  $\delta r$ , so ist, wie leicht nachweisbar, der Wert des Doppelverhältnisses  $\frac{ry}{rx} : \frac{\delta y}{\delta x}$  für sämtliche  $C_3^3$  constant.

In der Projectivität, welche entsteht, wenn man einen beliebigen Curvenpunkt  $n$  und dessen Tangentialpunkt  $e$  aus  $\delta$  projiciert, sind  $\delta w$  und  $\delta r$  Doppelstrahlen,  $\delta n$  und  $\delta e$  entsprechende Strahlen. Es ist daher der Wert des Doppelverhältnisses  $\frac{(\delta r)(\delta n)}{(\delta r)(\delta e)} : \frac{(\delta w)(\delta n)}{(\delta w)(\delta e)}$  für alle  $C_3^3$  constant.

Bestimmt man nun für irgend eine  $C_3^3$  diese Werte, so sind dieselben für alle  $C_3^3$  gültig. Die Ermittlung dieser Werte ergibt sich durch rein geometrische Betrachtung unmittelbar z. B. aus der Curve, welche durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte geht. Der Einfachheit wegen sollen dieselben aus der Curve, deren Gleichung:  $xy^2 = c$  lautet, abgeleitet werden.

Diese Curve besitzt die  $Y$ -Achse zur Wendetangente mit unendlich fernem Wendepunkt, und die  $X$ -Achse zur Rückkehrtangente mit unendlich fernem Rückkehrpunkt.

Ist  $P(x_1 y_1)$  ein beliebiger Curvenpunkt, und zieht man von  $P$  aus die einzige mögliche Tangente an  $C_3^3$ , so findet man als Abscisse des Berührungspunktes den Wert  $\frac{x_1}{4}$  und als Ordinate desselben  $(-2y_1)$ .

Es gelten also die Sätze:

Zieht man vom Wendepunkt einer  $C_3^3$  nach einem beliebigen Curvenpunkt und dessen Tangentialpunkt die Strahlen  $X$ , resp.  $Y$ , und noch den Strahl nach dem Rückkehrpunkt, so bilden diese drei Strahlen mit der Wendetangente einen Vierstrahl, für welchen der Wert des Doppelverhältnisses  $\frac{(wr)(wy)}{(wr)(wx)} : \frac{(w\delta)(wy)}{(w\delta)(wx)}$  constant gleich (4) ist, und:

Zieht man vom Rückkehrpunkt einer  $C_3^3$  je einen Strahl nach einem beliebigen Curvenpunkt  $n$  und dessen Tangentialpunkt  $e$ , so bilden diese zwei Strahlen mit der Rückkehrtangente und dem Strahle nach dem Wendepunkte einen Vierstrahl, für welchen der Wert des Doppelverhältnisses  $\frac{(\delta r)(\delta n)}{(\delta r)(\delta e)} : \frac{(\delta w)(\delta n)}{(\delta w)(\delta e)}$  constant gleich  $(-2)$  ist.

Diese Ergebnisse gestatten eine einfache Construction der Tangente für einen beliebigen Punkt der  $C_3^3$ , wenn diese durch

die Punkte  $\delta$ ,  $w$  und einen Curvenpunkt, und die Tangenten in  $\delta$  und  $w$  bestimmt ist.

Mit Rücksicht darauf, dass jede  $C^3$  als Projection einer Raumcurve III. O. betrachtet werden kann, wenn das Projectionscentrum auf einer Tangente der Raumcurve liegt, folgt für diese Curven der Satz:

Bezeichnet  $p$  einen beliebigen Punkt in einer Raumcurve III. O.  $C^3$ ,  $t$  dessen Tangente und  $T$  einen beliebigen Punkt in  $t$ , ferner  $W$  den einzigen Punkt in  $C^3$ , dessen Schmiegungsebene durch  $T$  geht, so lassen sich die Punkte in  $C^3$  paarweise projectivisch auf einander beziehen, wenn man jedem Punkt  $a$  denjenigen  $a'$  zuweist, welcher mit der Tangente in  $a$  an  $C^3$  und dem Punkt  $T$  in einer Ebene liegt. Die Punkte  $a$  und  $a'$  werden sowohl durch die Gerade  $t$  als auch durch die Gerade  $TW$  durch projectivische Ebenenbüschel projiciert. Das Doppelverhältnis  $t(aa'pW)$  hat für alle  $C^3$  denselben Wert ( $-2$ ), das Doppelverhältnis  $T\overline{W}(aa'pW)$  für alle  $C^3$  den Wert ( $4$ ).

Der Umstand, dass die Werte der früher besprochenen Doppelverhältnisse für alle  $C^3$  constant sind, gestattet auch eine Construction einer  $C^3$ , wenn von derselben die Rückkehrtangente und Wendetangente sammt deren Berührungspunkten und noch eine Tangente gegeben sind, und führt dieselbe zugleich auf eine Eigenschaft des Dreieckes  $W\delta r$  in Bezug auf sämtliche  $C^3$ , welche die Rückkehrtangente  $\delta r$ , die Wendetangente  $Wr$ , den Rückkehrpunkt  $\delta$  und den Wendepunkt  $W$  gemeinsam haben, und welche Curven folglich ein Büschel bilden.

Ist nämlich  $W\delta r$  das in Rede stehende Dreieck und  $r''d$  eine beliebige Tangente, so findet man den Tangentialpunkt und daraus ihren Berührungspunkt durch folgende Betrachtung:

Man ziehe vorerst  $\delta r''$  und darauf  $\delta b$  so, dass  $\frac{rr''}{rb} : \frac{Wr''}{Wb} = -2$  ist und durch  $n'$  (Schnittpunkt von  $r''d$  mit  $\delta r$ ) den Strahl  $Wn'$  und hierauf den Strahl  $Wn''$  so, dass  $\frac{r''n''}{r'n''} : \frac{dn''}{dn'} = 4$  ist.

Denkt man sich nun in der Tangente  $r''d$  einen beliebigen Punkt  $p$  und zu diesem den projectivisch zugeordneten Punkt  $r'$  nach dem Doppelverhältnis  $\frac{n'p}{n'r'} : \frac{dp}{dr'} = -2$  construiert und desgleichen den projectivisch zugeordneten Punkt ( $r''$ ) nach dem Doppelverhältnis  $\frac{r''(r'')}{r''p} : \frac{d(r'')}{dp} = 4$  bestimmt, so wird  $p$  zum Berührungs-

punkt in der Tangente, wenn die ihm zugeordneten Punkte  $r'$  und  $(r'')$  zusammenfallen. Die auf diese Weise erhaltenen Punktreihen  $r'$  und  $(r'')$  sind also zu einander projectivisch. Fällt  $p$  in  $Wr$  hinein, so fällt  $r'$  in den Strahl  $\delta b$  und  $(r'')$  nach  $r''$  in den Strahl  $Wr$ . Fällt  $p$  in den Strahl  $\delta r$ , so fällt  $r'$  auch in denselben nach  $n'$  und  $(r'')$  nach  $n''$ . Fällt endlich  $p$  in den Strahl  $W\delta$  nach  $d$ , so fallen  $r'$  und  $(r'')$  nach  $d$ , weshalb  $d$  der eine Doppelpunkt der projectivischen Reihen  $r'$  und  $(r'')$  ist. Der zweite Doppelpunkt gibt dann den einzigen Tangentialpunkt, wodurch auch der einzige Berührungspunkt in der Tangente  $r''d$  bestimmt ist.

Dreht sich nun die Tangente um den Punkt  $r''$  und ist  $r''d_3$  eine neue Lage derselben, so sind die drei Paare entsprechender Punkte, durch welche die Projectivität der Punktreihen  $r'$  und  $(r'')$  bestimmt wird, die folgenden:  $d_3$  (Doppelpunkt),  $r'_3 (= r')$  und  $r''_3 [(= r'')]$ ,  $n'_3 (= r')$  und  $n''_3 [(= r'')]$  2 Paare entsprechender Punkte.

Diese Bestimmungsdaten liegen aber zu den Bestimmungsdaten der Projectivität der Punktreihen  $r'$  und  $(r'')$  auf der Tangente  $r''d$  perspectivisch bezüglich des Centrums  $\delta$ , weshalb auch die zweiten Doppelpunkte auf den Trägern  $r''d$  und  $r''d_3$  auf einem Strahle durch  $\delta$  liegen müssen.

Dreht sich die Tangente  $r''d$  um den Punkt  $n'$  im Strahle  $\delta r$ , und ist  $r''_1 d_1$  eine neue Lage derselben, so sind die Bestimmungsdaten der erwähnten Projectivität der Punktreihen  $r'$  und  $(r'')$  die folgenden:  $d_1$  (Doppelpunkt),  $r'_1 (= r')$  und  $r''_1 (= r'')$ ,  $n'_1 (= r')$  und  $n''_1 (= r'')$  zwei Paare entsprechender Punkte, und zwar liegen diese mit den Bestimmungsdaten auf der ursprünglichen Tangente  $r''d$  perspectivisch bezüglich des Centrums  $W$ , weshalb auch der zweite Doppelpunkt auf  $r''_1 d_1$  mit dem zweiten Doppelpunkt auf  $r''d$  auf einem durch  $W$  gehenden Strahle liegen muss.

Dreht sich endlich die Tangente  $r''d$  um den Punkt  $d$  im Strahle  $W\delta$ , und ist z. B.  $d r''_2$  eine neue Lage derselben, so liegen die Bestimmungsdaten der Projectivität der Punktreihen  $r'$  und  $(r'')$  mit denen auf der ursprünglichen Tangente  $r''d$  perspectivisch bezüglich des Centrums  $r$ , und wir können somit den Satz aussprechen:

Ist ein Curvenbüschel von  $C^3$  durch die Rückkehrtangente  $\delta r$ , die Wendetangente  $Wr$ , den Rückkehrpunkt  $\delta$  und den Wendepunkt  $W$  bestimmt, und zieht man von einem beliebigen Punkte einer Seite des Dreieckes  $W\delta r$  Tangenten an die Individuen des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einer Geraden, welche durch die der genannten Dreiecksseite gegenüberliegende Ecke geht.