

Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz.

Von

DAVID HILBERT in Leipzig.

Die binäre Form $f_{(n)}$ vom Grade $n = \mu\nu$ sei die μ^{te} Potenz der Form $\varphi_{(\nu)}$ vom ν^{ten} Grade, so dass die Relation:

$$f_{(n)} = \varphi_{(\nu)}^{\mu}$$

besteht. Beide Seiten dieser Gleichung mögen in die $\frac{1}{\mu}^{\text{te}}$ Potenz erhoben und darauf $\nu + 1$ mal nach der einen nicht homogenen Variablen x differenziert werden. Da der Ausdruck $\varphi_{(\nu)}$ die Variable höchstens im Grade ν enthält, so folgt die Bedingung:

$$(1) \quad \frac{x^{\nu+1} f_{(n)}^{\frac{1}{\mu}}}{dx^{\nu+1}} = 0,$$

deren Existenz somit jedenfalls für die Form $f_{(n)}$ als nothwendig erscheint, damit dieselbe die μ^{te} Potenz einer Form $\varphi_{(\nu)}$ sein kann. Gehen wir nun umgekehrt von der Bedingung (1) aus, so ist klar, dass aus derselben durch $\nu + 1$ fache Integration nach x eine Relation von der Gestalt:

$$(2) \quad f_{(n)}^{\frac{1}{\mu}} = \psi_{\nu}$$

entspringt, worin $\psi_{(\nu)}$ eine unbestimmte binäre Form ν^{ten} Grades bedeutet, deren Coefficienten nichts anderes als die $\nu + 1$ auftretenden Integrationsconstanten sind. Da somit in Gleichung (2) rechter Hand eine rationale Form steht, so gilt das Gleiche von ihrer linken Seite d. h. die Form $f_{(n)}$ ist nothwendig in Folge der bestehenden Bedingung (1) eine vollständige μ^{te} Potenz, wodurch sich das oben gefundene Criterium (1) für die fragliche Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ auch als ein hinreichendes erweist.

Es bleibt noch übrig, den gewonnenen Ausdruck linker Hand von (1) in seiner Eigenschaft als Covariante der Form $f_{(n)}$ zu erkennen und demselben zugleich eine für die Berechnung geeignete Gestalt zu geben. Als Hilfsmittel hiefür bedarf es einiger allgemeiner Sätze, welche sich auf die Darstellbarkeit einer jeden invarianten Form als Function der einseitigen Derivirten ihrer Grundform beziehen. Führen wir nämlich für die einseitigen Differentialquotienten der Grundform $f_{(n)}$ nach der einen nicht homogenen Variablen x die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{(n)}, \\ f_1 &= \frac{(n-1)!}{n!} \frac{df_{(n)}}{dx}, \\ f_2 &= \frac{(n-2)!}{n!} \frac{d^2 f_{(n)}}{dx^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n f_{(n)}}{dx^n}, \end{aligned}$$

so gelten mit Benutzung der beiden abkürzenden Differentiationssymbole:

$$\begin{aligned} D &= f_0 \frac{\partial}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial}{\partial f_2} + 3 f_2 \frac{\partial}{\partial f_3} + \dots, \\ \Delta &= n f_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + (n-2) f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} + \dots \end{aligned}$$

die folgenden für unseren Zweck erforderlichen Sätze*):

I. Jede homogene und isobare Function C der Differentialquotienten $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ ist eine Invariante oder Covariante der Form $f_{(n)}$, wenn sie der Differentialgleichung:

$$DC = 0$$

genügt.

II. Die Quelle d. h. das erste Glied dieser Covariante ergibt sich einfach, wenn wir in jenem Ausdrücke C die mit den bezüglichen Zahlenfactoren multiplicirten Differentialquotienten $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ durch die entsprechenden Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ der Grundform ersetzen.

III. Die Anwendung des Differentiationssymbol Δ auf eine homogene und isobare Function der einseitigen Derivirten $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ kommt einer Differentiation jener Function nach der einen nicht homogenen Variablen x gleich.

IV. Für wiederholte und abwechselnde Anwendung der beiden Differentiationssymbole D und Δ auf eine Function der bezeichneten Art gelten allgemein die Formeln:

*) Betreffs der Begründung und ausführlichen Behandlung derselben sei auf meine Inauguraldissertation „Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen“ § I und § II verwiesen. —

$$(3a) \quad D^k \Delta^l = \Delta^l D^k + \left(\chi + \frac{k-1}{1} \right) \cdot l \cdot k \Delta^{l-1} D^{k-1} \\ + \left(\chi + \frac{k-1}{2} \right) l(l-1) \cdot k(k-1) \Delta^{l-2} D^{k-2} + \dots,$$

$$(3b) \quad \Delta^l D^k = D^k \Delta^l + \left(l - \frac{k-1}{1} \right) \cdot l \cdot k D^{k-1} \Delta^{l-1} \\ + \left(l - \frac{k-1}{2} \right) l(l-1) \cdot k(k-1) D^{k-2} \Delta^{l-2} + \dots$$

worin χ den mit n multiplicirten Grad der fraglichen Function in den f , vermindert um ihr doppeltes Gewicht bedeutet.

Was nun unser Criterium (1) anbetrifft, so nimmt zunächst die linke Seite desselben nach III die Gestalt an:

$$(4) \quad \Delta^{v+1} f_0^{\frac{1}{\mu}}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich nach einmaliger Anwendung des Symbolen D unter Benutzung der Formel (3a) in IV auf Null wegen:

$$D \Delta^{v+1} f_0^{\frac{1}{\mu}} = \Delta^{v+1} D f_0^{\frac{1}{\mu}} + \binom{0}{1} \Delta^v f_0^{\frac{1}{\mu}} = 0$$

und ist dadurch nach I als Covariante der Grundform $f_{(n)}$ legitimirt. Schliesslich ist offenbar, dass wir die gebrochenen und irrationalen Bestandtheile des Ausdruckes (4) nachträglich durch einfache Multiplication desselben mit $f_0^{v-\frac{1}{\mu}+1}$ in Wegfall bringen, ohne dabei den invarianten Charakter des Ausdruckes oder seine Eigenschaft als nothwendiges und hinreichendes Criterium für die fragliche Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ zu beeinträchtigen. Führen wir daher die Bezeichnung ein:

$$(5) \quad C_v = f_0^{v-\frac{1}{\mu}+1} \Delta^{v+1} f_0^{\frac{1}{\mu}}, \quad v\mu = n,$$

so können wir das gewonnene Resultat, wie folgt, zusammenfassen:

Das identische Verschwinden der Covariante C_v (5), welche in den Coefficienten der Grundform $f_{(n)}$ den Grad $v+1$, das nämliche Gewicht $v+1$, mithin in den Variablen den Grad $(n-2)(v+1)$ besitzt, liefert die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ vom Grade $n = \mu v$ als vollständige μ^{te} Potenz einer Form $\varphi_{(v)}$ v^{ten} Grades.

Es bleibt noch übrig, die gewonnene Covariante C_v für die ersten Fälle mittelst ihrer Definitionsgleichung (5) wirklich auszuwerthen und durch bekannte und übersichtliche covariante Bildungen darzustellen. Wir erhalten nach Unterdrückung unwesentlicher Zahlenfactoren für $n = 1, 2, 3, 4$ die einfachen Werthe:

$$\begin{aligned}
C_1 &= H, \\
C_2 &= T, \\
C_3 &= 3(2n-3)H^2 - (n-2)Af_{(n)}^2, \\
C_4 &= 4(3n-4)HT - (n-3)Bf_{(n)}^2,
\end{aligned}$$

worin die Bezeichnungen gelten:

$$\begin{aligned}
f_{(n)} &= a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_x^n = b_x^n = c_x^n, \\
H &= (a_0 a_2 - a_1^2) x^{2n-4} + \dots = \frac{1}{2} (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \\
T &= (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x^{3(n-2)} + \dots = (ab)^2 (bc) a_x^{n-2} b_x^{n-3} c_x^{n-1}, \\
A &= (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) x^{2(n-4)} + \dots = \frac{1}{2} (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}, \\
B &= (a_0^2 a_5 - 5a_0 a_1 a_4 + 2a_0 a_2 a_3 + 8a_1^2 a_3 - 6a_1 a_2^2) x^{3n-10} + \dots \\
&= (ab)^4 (ac) a_x^{n-5} b_x^{n-4} c_x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Die für $\nu = 1$ und $\nu = 2$ gewonnenen Resultate stimmen sehr gut mit der bekannten Thatsache überein, der zu Folge das identische Verschwinden der Hesseschen Covariante H die Darstellbarkeit der Form $f_{(n)}$ als n^{te} Potenz einer linearen Form und das identische Verschwinden der Covariante T für die biquadratische Form die Ausartung derselben in ein Quadrat einer quadratischen Form bedingt.

Der Zweck dieser Note liegt zugleich darin, gelegentlich eines so einfachen und greifbaren Beispiels, wie das behandelte ist, auf die Brauchbarkeit desjenigen bisher verborgenen Verfahrens hinzuweisen, welches durch die vier oben kurz mitgetheilten Sätze an die Hand gegeben wird und vorwiegend dazu geeignet erscheint, in naturgemässer Weise die gebrochenen und irrationalen algebraischen Gebilde der invariantentheoretischen Forschung zugänglich zu machen.

Leipzig, den 30. November 1885.