7.
Die Krümmungslinie der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.

(Von Herrn *P. Zech* in Stuttgart.)

(Im 52. Bande dieses Journals habe ich die Eigenschaften der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle untersucht, welche sich aus der punktweisen Construction derselben ergeben. Eine Reihe weiterer Eigenschaften findet man, wenn man sie als Einhüllungsfläche von Ebenen betrachtet. Ich bediene mich dabei derselben Bezeichnungen, wie in jenem Aufsatz und fahre in der Nummernzahl fort.)

9.

Zu den Mantellinien eines Kegels K, welcher die optischen Axen des Ellipsoids E zu Fokallinien hat, lege man senkrechte Ebenen im Abstand der reciproken Mantellinienlänge des Ergänzungskegels C vom Mittelpunkt O. Diese Ebenen sind Berührungsebenen an die Wellenfläche, ihre Einhüllungsfläche ist eine entwickelbare Fläche F: sie ist einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und mit einem Halbmesser gleich jener reciproken Länge umschrieben und ihre Berührungsebenen sind den Berührungsebenen des Ergänzungskegels C parallel, oder sie ist die Einhüllungsfläche der gemeinschaftlichen Berührungsebenen jener Kugel und des Kegelschnitts, in welchem C die unendlich ferne Ebene schneidet (unter Berührungsebene eines Kegelschnitts ist jede Ebene zu verstehen, welche durch eine seiner Tangenten geht). Die Fläche F hat dieselben Hauptschnittebenen wie die Wellenfläche und ist durch zwei auf verschiedenen Hauptschnittebenen senkrechte Berührungsebenen bestimmt. Die Erzeugenden der Fläche F liegen in den Normalebenen des Kegels K, weil je zwei aufeinanderfolgende Berührungsebenen von F senkrecht stehen auf zwei aufeinanderfolgenden Mantellinien von K. Die Wellenfläche ist die Einhüllungsfläche aller möglichen entwickelbaren Flächen F, welche den verschiedenen Kegeln K entsprechen.

Es giebt noch eine zweite Art entwickelbarer Flächen, als deren Einhüllungsfläche die Wellenfläche sich betrachten läfst. Ist ON Mantellinie eines Kegels K, OS die entsprechende Mantellinie des Ergänzungskegels C (2.)

oder die eine Halbaxe des auf ON senkrechten Diametralschnitts von E, OQ die zweite Halbaxe dieses Schnitts, so sind zwei zu ON senkrechte Ebenen in den Abständen $\frac{1}{OS}$ und $\frac{1}{OQ}$ von O Berührungsebenen an die Wellenfläche. Alle möglichen zu den Mantellinien von K senkrechte Ebenen im constanten Abstand $\frac{1}{OS}$ von O bilden eine Fläche F, alle möglichen zu den Mantellinien von K senkrechte Ebenen in dem veränderlichen Abstand $\frac{1}{OQ}$ von O bilden eine entwickelbare Fläche G, welche demselben unendlich fernen Kegelschnitt wie F umschrieben ist. Ist nun OV der Abstand einer zu ON senkrechten Berührungsebene an E von O, so ist $OV.OS.OQ$ constant als Inhalt eines Parallelepipeds aus drei conjugirten Halbmessern von E, welche Richtung auch ON habe: bleibt ON auf K, so ist OS constant, also auch $OV.OQ$, oder das Verhältnifs $OV:\frac{1}{OQ}$, d. h. die Berührungsebenen der Fläche G sind Berührungsebenen an ein E ähnliches Ellipsoid. Die Fläche G ist also die Einhüllungsfläche der gemeinschaftlichen Berührungsebenen an ein E ähnliches Ellipsoid und an einem unendlich fernen Kegelschnitt; sie hat dieselben Hauptschnittebenen wie die Wellenfläche, ihre Erzeugenden liegen in den Normalebenen des Kegels K. Die Wellenfläche ist die Einhüllungsfläche aller möglichen Flächen G. Jede Fläche G ist bestimmt, sobald man von ihr zwei zu verschiedenen Hauptschnittebenen senkrechte Berührungsebenen kennt.

Sind K_1 und K_2 zwei sich schneidende Kegel, welche die optischen Axen von E zu Fokallinien haben, so bestimmt der Kegel K_1 eine Fläche F_1 und eine Fläche G_1, welche demselben unendlich fernen Kegelschnitt umschrieben sind, der Kegel K_2 eine Fläche F_2 und eine Fläche G_2, welche auch Einem unendlich fernen Kegelschnitt umschrieben sind. Die zu einer gemeinschaftlichen Mantellinie von K_1 und K_2 senkrechten Berührungsebenen an die Wellenfläche sind Berührungsebenen der 4 Flächen F_1, G_1, F_2, G_2 und zwar die eine von F_1 und G_2, die andere von F_2 und G_1. Jede Berührungsebene der Wellenfläche läfst sich also als Berührungsebene entweder einer Fläche G oder einer Fläche F betrachten; die zwei Flächen sind bestimmt durch sich rechtwinklig schneidende Kegel, also sind die Erzeugenden, längs welcher sie von jener Berührungsebene berührt werden, senkrecht auf einander, weil die eine in der Normalebene eines Kegels K_1, die andere in der Normalebene eines Kegels K_2 längs ihrer gemeinschaftlichen Mantellinie liegt.

10.

*Die zwei Arten entwickelbarer Flächen **F** und **G** sind die Polarflächen der ellipsoidischen und sphärischen Kegelschnitte auf der Wellenfläche in Beziehung auf ein Ellipsoid **D**, welches dieselben Hauptschnittebenen wie die Wellenfläche und die Halbaxen $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$, $\sqrt{ab}$ hat, wenn die des Ellipsoids $\mathfrak{E}$ beziehungsweise nach denselben Richtungen a, b und c sind.*

Denn die Polarfläche eines ellipsoidischen Kegelschnitts ist die Einhüllungsfläche der gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Polarflächen des Ellipsoids und des Kegels, die sich längs des Kegelschnitts schneiden. Das Ellipsoid ist E ähnlich (6.), hat also die Halbaxen $\frac{1}{ma}$, $\frac{1}{mb}$, $\frac{1}{mc}$, wo m verschieden ist für verschiedene ellipsoidische Kegelschnitte; seine Polarfläche für das Ellipsoid D ist ein Ellipsoid mit den Halbaxen $mabc$, $mbca$, $mcab$, d. h. eine Kugel. Die Polarfläche des Kegels ist durch einen unendlich fernen Kegelschnitt vorgestellt. Die Polarfläche jedes ellipsoidischen Kegelschnitts ist also eine einer Kugel und einem unendlich fernen Kegelschnitt umschriebene entwickelbare Fläche, und daher durch zwei auf verschiedenen Hauptschnittebenen der Wellenfläche senkrechte Berührungsebenen bestimmt. Die vier Scheitel des ellipsoidischen Kegelschnitts liegen auf zwei Kreisen, in welchen die Wellenfläche zwei ihrer Hauptschnittebenen schneidet; die Polarflächen dieser Kreise für D sind elliptische Cylinder, welche, wie sich leicht ergiebt, die Wellenfläche längs der zwei Ellipsen berühren, in welchen die Wellenfläche dieselben Hauptschnittebenen schneidet. Die Polarebenen der vier Scheitel sind also Berührungsebenen der Wellenfläche und daher Berührungsebenen einer der entwickelbaren Flächen F, welche einer Kugel und der Wellenfläche umschrieben sind. Da nun diese vier Berührungsebenen die Fläche F vollkommen bestimmen, und ebenso die Polarfläche des ellipsoidischen Kegelschnitts, so fallen die beiden Flächen zusammen.

Auf ganz ähnliche Art ergiebt sich der Beweis, dafs die Polarflächen der sphärischen Kegelschnitte die entwickelbaren Flächen G sind.

*Es folgt daraus, dafs die Wellenfläche in Beziehung auf das Ellipsoid **D** ihre eigene Polarfläche ist; d. h. dafs sie die Einhüllungsfläche der Polarebenen ihrer Punkte in Beziehung auf **D** ist*).*

*) Ein Satz, welcher bereits von Herrn *Plücker* (Bd. 19 S. 42 dieses Journals) aufgestellt worden ist. *B.*

11.

Die zwei entwickelbaren Flächen F und G, welche eine bestimmte Berührungsebene mit der Wellenfläche gemein haben, werden von dieser Berührungsebene längs zweier Erzeugenden berührt, welche Tangenten an die Krümmungslinien durch den Berührungspunkt auf der Wellenfläche sind; und *die Berührungskurven der entwickelbaren Flächen F und G mit der Wellenfläche sind die Krümmungslinien der Wellenfläche.*

Denn es sei wieder ON gemeinschaftliche Mantellinie zweier sich rechtwinklig schneidender Kegel K_1 und K_2, welche die optischen Axen von E zu Fokallinien haben, T eine der auf ON senkrechten Berührungsebenen der Wellenfläche. T ist Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche F_1 und einer entwickelbaren Fläche G_2, von denen die erste durch den Kegel K_1, die zweite durch den Kegel K_2 bestimmt ist (9.). Die Erzeugende von F_1 in T liegt in der Normalebene von K_1 längs ON, die Erzeugende von G_2 in T liegt in der Normalebene von K_2 längs ON. Geht man von der gemeinschaftlichen Mantellinie ON weiter zu der ihr unendlich nahen Mantellinie auf K_2 und betrachtet man diese als Mantellinie eines neuen Kegels K_1, so erhält man senkrecht zu ihr eine Berührungsebene einer neuen Fläche F_1, welche auch auf der Normalebene zum ersten Kegel K_1 längs ON senkrecht steht. Die Erzeugenden, längs welcher die zwei Flächen F von den zwei aufeinanderfolgenden Berührungsebenen berührt werden, liegen in der Normalebene und die Schnittlinie der zwei aufeinanderfolgenden Berührungsebenen oder die Tangente an die Berührungskurve der Fläche F mit der Wellenfläche steht senkrecht auf der Normalebene zu K_1 längs ON. Ganz ähnlich ergiebt sich, dafs die Tangente an die Berührungskurve von G_2 mit der Wellenfläche senkrecht steht auf der Normalebene zu K_2 längs ON.

Die Berührungskurven der Flächen F und G mit der Wellenfläche durchschneiden sich also rechtwinklig und in jedem Punkt der Berührungskurve ist die Erzeugende der einen Fläche Tangente an die Berührungskurve der andern.

Ist nun ON Mantellinie eines Kegels K_1 und OS die entsprechende Mantellinie des Ergänzungskegels C_1, $R'M'$ die Spur der (auf der Ebene SON senkrechten) Polarebene von S auf E für eine Kugel mit dem Mittelpunkt O und mit der Längeneinheit als Halbmesser, so ist (wie sich aus (4.) ergiebt) $R'M'$ die Richtung der Normale zur Wellenfläche, welche zu der auf ON

senkrechten Berührungsebene T im Abstand $\frac{1}{OS}$ von O gehört. Die Linie $R'M'$ ist (4.) gemeinschaftliche Tangente an das Ellipsoid E und eine concentrische Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{OS}$, also Erzeugende einer entwickelbaren Fläche H, der Einhüllungsfläche der dem Ellipsoid und der Kugel gemeinschaftlichen Berührungsebenen. Ist s unendlich nahe an S auf dem sphärischen Kegelschnitt, in welchem C_1, das Ellipsoid E schneidet, so erhält man eine neue Erzeugende $r'm'$ der Fläche H, welche die vorhergehende schneidet und mit ihr die auf SON senkrechte Berührungsebene der Fläche H bestimmt, die Polarebene von S für die Kugel mit der Längeneinheit als Halbmesser. Ist R der Berührungspunkt der Wellenfläche mit T, r der Berührungspunkt der Wellenfläche mit der neuen Berührungsebene t an die Wellenfläche, die sich aus Os ergiebt, so ist Rr ein Element der Berührungskurve einer Fläche F mit der Wellenfläche, also senkrecht zur Ebene SON, der Normalebene des Kegels K_1 längs ON. Denkt man sich also durch Rr eine Ebene parallel zur Ebene $R'M'm'r'$, so fallen die Parallelen zu $R'M'$ durch R und zu $r'm'$ durch r in diese Ebene, d. h. die Normalen in R und r zur Wellenfläche schneiden sich. Die aufeinanderfolgenden Normalen der Wellenfläche längs der Berührungskurve einer Fläche F mit der Wellenfläche schneiden sich, diese Berührungskurven sind Krümmungslinien der Wellenfläche, also auch die sie rechtwinklig schneidenden Berührungskurven der Flächen G.

Da die Wellenfläche Einhüllungsfläche der Flächen F oder der Flächen G ist, so kann man auch sagen, die Charakteristiken bei diesen zwei Einhüllungsarten seien die Krümmungslinien der Wellenfläche.

Nur die eine Reihe Krümmungslinien (die auf den Flächen F) wird durch folgende Definition bestimmt: Eine Krümmungslinie der Wellenfläche ist der geometrische Ort der Berührungspunkte aller sich gleich schnell fortpflanzender ebener Wellen mit der Wellenfläche. Darunter befinden sich die Berührungskreise der singulären Berührungsebenen.

Stuttgart, März 1857.