

Zur Involution.

(Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg.)

Wenn drei Punktenpaare aa' , bb' und cc' auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so hat man zwischen den Entfernungen dieser Punkte die folgenden sieben Gleichungen; und umgekehrt, jede von diesen Gleichungen ist die Bedingung für die Involution, aus welcher die sechs anderen folgen.

$$ab.ab'.a'c.a'c' - a'b.a'b'.ac.ac' = 0,$$

$$bc.bc'.b'a.b'a' - b'c.b'c'.ba.ba' = 0,$$

$$ca.ca'.c'b.c'b' - c'a.c'a'.cb.cb' = 0,$$

$$ab'.bc'.ca' + a'b.b'c.c'a = 0,$$

$$ab'.bc.c'a' + a'b.b'c'.ca = 0,$$

$$ab.b'c'.ca' + a'b'.bc.c'a = 0,$$

$$ab.b'c.c'a' + a'b'.bc'.ca = 0.$$

Von diesen sieben Fundamentalgleichungen der Involution ausgehend stellen wir folgende Betrachtungen an.

Drückt man die Entfernungen der sechs Punkte der Involution, wie sie in den angegebenen Gleichungen vorkommen, durch die Entfernungen $x_1, x_2, \dots x_6$ derselben Punkte von einem beliebig auf der geraden Linie, auf welcher die sechs Punkte liegen, angenommenen Punkte aus, so werden die linken Theile obiger Gleichungen sieben ganze Functionen F der sechs Grössen $x_1, x_2, \dots x_6$.

Werden diese sechs Grössen x als willkürliche genommen, so verschwindet keine von den sieben Functionen F . Sobald aber die sechs Grössen solche Werthe annehmen, dass eine jener sieben Functionen F verschwindet, verschwinden mit ihr auch die sechs anderen.

Es können daher die sieben Functionen F der sechs willkürlichen Grössen x nur durch gewisse Factoren von einander unterschieden sein.

Diese Factoren zu ermitteln ist von Interesse, weil die Producte dieser Factoren und der ihnen entsprechenden Functionen F sieben identische Functionen der sechs willkürlichen Grössen x ergeben, die in der Form sich wesentlich von einander unterscheiden.

Die sieben Functionen F der sechs willkürlichen Grössen x sind folgende:

$$(1.) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{12} = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_5)(x_1 - x_6), \\ F_{34} = (x_3 - x_5)(x_3 - x_6)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) - (x_4 - x_5)(x_4 - x_6)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2), \\ F_{56} = (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_6 - x_3)(x_6 - x_4) - (x_6 - x_1)(x_6 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4), \\ F_1 = (x_4 - x_1)(x_6 - x_3)(x_2 - x_5) + (x_3 - x_2)(x_5 - x_4)(x_1 - x_6), \\ F_2 = (x_4 - x_1)(x_5 - x_3)(x_2 - x_6) + (x_3 - x_2)(x_6 - x_4)(x_1 - x_5), \\ F_3 = (x_3 - x_1)(x_6 - x_4)(x_2 - x_5) + (x_4 - x_2)(x_5 - x_3)(x_1 - x_6), \\ F_4 = (x_3 - x_1)(x_5 - x_4)(x_2 - x_6) + (x_4 - x_2)(x_6 - x_3)(x_1 - x_5). \end{array} \right.$$

Ein bekannter algebraischer Satz lässt sich in dem speciellen Falle, der hier eine Anwendung findet, so wiedergeben: *Wenn man mit $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6$ die Producte der Differenzen von irgend 6 Grössen x bezeichnet:*

$$\pi_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_6), \quad \pi_2 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_6), \quad \dots \\ \dots \pi_6 = (x_6 - x_1)(x_6 - x_2) \cdots (x_6 - x_5),$$

wenn ferner $\varphi(x)$ irgend eine ganze Function von x des vierten Grades ist, so hat man identisch:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(x_2)}{\pi_2} + \dots + \frac{\varphi(x_6)}{\pi_6} = 0.$$

Wenn man für die ganze Function des vierten Grades setzt: $\varphi(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^2$, so verschwinden die beiden ersten Glieder in der angegebenen identischen Gleichung. Vereiniget man die beiden folgenden Glieder ebenso wie die beiden letzten, so erhält man nach Unterdrückung der gleichen Factoren:

$$\frac{F_{34}}{x_3 - x_4} = \frac{F_{56}}{x_5 - x_6}.$$

In dieser identischen Gleichung kann man auch x_1 und x_2 mit x_3 und x_4 oder mit x_5 und x_6 vertauschen, weil diese Vertauschungen erlaubt sind in der identischen Gleichung, aus welcher sie hervorgegangen ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{F_{12}}{x_1 - x_2} = \frac{F_{34}}{x_3 - x_4} = \frac{F_{56}}{x_5 - x_6}.$$

Setzt man, um auf die anderen Functionen F zu kommen, $x_1 - x_2 = \varepsilon$, so wird:

$$\frac{F_{12}}{x_1 - x_2} = \frac{\{x_2 - x_3 + \varepsilon\}\{x_2 - x_4 + \varepsilon\}(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) - \{x_2 - x_5 + \varepsilon\}\{x_2 - x_6 + \varepsilon\}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}{\varepsilon}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von ε und dividirt durch ε , so wird die rechte Seite

$$\begin{aligned} & \{x_2 - x_3 + x_2 - x_4 + \varepsilon\}(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) \\ & - \{x_2 - x_5 + x_2 - x_6 + \varepsilon\}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \end{aligned}$$

und wenn man den Werth von $\varepsilon = x_1 - x_2$ wieder einsetzt:

$$\begin{aligned} & \{(x_2 - x_3) + (x_1 - x_4)\}(x_2 - x_5)(x_2 - x_6) \\ & - \{(x_2 - x_5) + (x_1 - x_6)\}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4). \end{aligned}$$

Vereinigt man die Glieder der Entwicklung, welche die Factoren $(x_2 - x_3)$ und $(x_2 - x_5)$ enthalten, und lässt die übrigen Glieder folgen, so hat man:

$$(x_2 - x_3)(x_2 - x_5)(x_4 - x_6) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_6) + (x_2 - x_5)(x_2 - x_6)(x_1 - x_4).$$

Setzt man dafür:

$$\begin{aligned} & \{(x_2 - x_1) + (x_1 - x_3)\}(x_2 - x_5)(x_4 - x_6) - \{(x_2 - x_5) + (x_5 - x_3)\}(x_2 - x_4)(x_1 - x_6) \\ & + (x_2 - x_5)(x_2 - x_6)(x_1 - x_4) \end{aligned}$$

und entwickelt wieder, so erhält man:

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_3)(x_2 - x_5)(x_4 - x_6) - (x_5 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_6) \\ & + (x_2 - x_5)\{(x_2 - x_1)(x_4 - x_6) - (x_2 - x_4)(x_1 - x_6) + (x_2 - x_6)(x_1 - x_4)\}. \end{aligned}$$

Es zerstören sich hier die letzten Glieder, so dass nur die beiden ersten übrig bleiben, deren Summe gleich F_3 ist.

Man hat daher:

$$\frac{F_{12}}{x_1 - x_2} = F_3.$$

Da aber der linke Theil dieser Gleichung ungeändert bleibt, wenn man x_1 mit x_2 oder x_3 mit x_4 oder endlich x_5 mit x_6 vertauscht, so hat man schliesslich:

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F_{12}}{x_1 - x_2} &= \frac{F_{34}}{x_3 - x_4} = \frac{F_{56}}{x_5 - x_6} \\ &= F_1 = F_2 = F_3 = F_4. \end{aligned} \right.$$

Um eine Anwendung von diesen Formeln zu machen, stellen wir, unter der Annahme, dass die sechs Grössen x beliebig gegeben seien, die Gleichungen auf:

$$(3.) \quad \begin{cases} (\alpha - x_1)(\alpha - x_2)(\beta - x_4)(\beta - x_5) - (\alpha - x_4)(\alpha - x_5)(\beta - x_1)(\beta - x_2) = 0, \\ (\alpha - x_2)(\alpha - x_3)(\beta - x_5)(\beta - x_6) - (\alpha - x_5)(\alpha - x_6)(\beta - x_2)(\beta - x_3) = 0, \\ (\alpha - x_3)(\alpha - x_4)(\beta - x_6)(\beta - x_1) - (\alpha - x_6)(\alpha - x_1)(\beta - x_3)(\beta - x_4) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gehen in einander über, wenn man für den Index 6 den Index 1 setzt und die übrigen Indices um eine Einheit erhöht.

Von diesen Gleichungen ist ferner eine die Folge der beiden anderen. Denn multiplicirt man dieselben auf einander folgend mit den Factoren:

$$(\alpha - x_3)(\beta - x_6), \quad -(\alpha - x_1)(\beta - x_4), \quad (\alpha - x_5)(\beta - x_2)$$

und addirt, so sieht man, ohne die Producte aufzulösen, dass man identisch Null erhält.

Es brauchen daher nur zwei von den drei Gleichungen (3.) erfüllt zu sein, die dritte wird von selber erfüllt. Da aber zwei von diesen Gleichungen durch gewisse Werthe von α und β immer erfüllt werden können, so erfüllen auch die durch diese beiden Gleichungen bestimmten Werthe der Unbekannten die dritte Gleichung.

Jede der drei Gleichungen ist die Bedingung für die Involution von sechs Punkten auf einer geraden Linie und die drei Gleichungen selbst drücken analytisch den Satz aus:

„Wenn irgend sechs Punkte 1, 2, . . . 6 auf einer geraden Linie gegeben sind, so giebt es immer ein Punktenpaar $\alpha\beta$, welches gleichzeitig mit den beiden Punktenpaaren 12 und 45, mit den beiden Punktenpaaren 23 und 56 und mit den beiden Punktenpaaren 34 und 61 eine Involution bildet.“

Dividirt man jede von den Gleichungen (3.) durch $\alpha - \beta$, so erhält man mit Rücksicht auf (2.):

$$(4.) \quad \begin{cases} (x_2 - \alpha)(x_5 - x_1)(\beta - x_4) + (x_1 - \beta)(x_4 - x_2)(\alpha - x_5) = 0, \\ (x_3 - \alpha)(x_6 - x_2)(\beta - x_5) + (x_2 - \beta)(x_5 - x_3)(\alpha - x_6) = 0, \\ (x_4 - \alpha)(x_1 - x_3)(\beta - x_6) + (x_3 - \beta)(x_6 - x_4)(\alpha - x_1) = 0. \end{cases}$$

In dieser Form sieht man es den Gleichungen nicht mehr an, dass sie einzeln mit den angegebenen Factoren multiplicirt und addirt identisch Null geben. Wir legen darauf auch weiter kein Gewicht, behalten aber die Eigenschaft dieser Gleichungen im Auge, dass die Werthe von α und β , wie sie sich aus zwei Gleichungen ergeben, auch der dritten genügen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Werthe von α und β sich aus zwei von jenen Gleichungen ergeben.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (4.), so nehmen sie die Form an:

$$(5.) \quad \begin{cases} A_1\alpha\beta + B_1(\alpha + \beta) + C_1 = 0, \\ A_2\alpha\beta + B_2(\alpha + \beta) + C_2 = 0, \\ A_3\alpha\beta + B_3(\alpha + \beta) + C_3 = 0, \end{cases}$$

in welcher die 9 Coefficienten A, B, C gewisse Functionen der sechs gegebenen Grössen x bedeuten.

Es sind dies lineare Gleichungen, wenn man die Grössen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ als die Unbekannten betrachtet. Löset man zwei Gleichungen nach den Unbekannten auf, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha\beta = B,$$

und man kann daraus eine quadratische Gleichung bilden:

$$(6.) \quad \lambda^2 - A\lambda + B = 0,$$

deren Wurzeln die gesuchten Grössen α und β sind.

Die Gleichungen (5.) sind in Rücksicht auf die Unbekannten $(\alpha + \beta)$ und $\alpha\beta$ lineare Gleichungen, welche für ein bestimmtes Werthsystem der Unbekannten zugleich erfüllt werden. Man kann deshalb drei Factoren φ_1 , φ_2 , φ_3 der Art bestimmen, dass, wenn man die Gleichungen mit diesen Factoren einzeln multiplicirt und hierauf addirt, die Summe unabhängig von den Werthen der Unbekannten identisch verschwindet.

Diese Eigenschaft behalten auch die drei folgenden Gleichungen bei, welche aus (5.) dadurch hervorgehen, dass man für $(\alpha + \beta)$ setzt $2x$ und für $\alpha\beta$ setzt x^2

$$(7.) \quad \begin{cases} A_1 x^2 + 2B_1 x + C_1 = 0, \\ A_2 x^2 + 2B_2 x + C_2 = 0, \\ A_3 x^2 + 2B_3 x + C_3 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestehen aber nicht mehr zugleich, wie die vorhergehenden, aus welchen sie auf die angegebene Art hervorgegangen sind. Wollen wir daher die hervorgehobene Eigenschaft derselben, dass sie einzeln mit den Factoren φ_1 , φ_2 , φ_3 multiplicirt und addirt identisch Null geben, weiter verwerthen, so müssen wir sie einzeln geometrisch interpretiren.

Die erste Gleichung (5.) ist die Bedingung, dass die Punktenpaare $\alpha\beta$, 12, 45 eine Involution bilden. Durch diese eine Gleichung ist das erste Punktenpaar $\alpha\beta$ nicht bestimmt, wenn die beiden anderen Punktenpaare gegeben sind. Für jeden Punkt α giebt es einen entsprechenden Punkt β . Man kann daher nach der Lage des Punktes α fragen, dessen entsprechender Punkt β mit dem Punkte α zusammenfällt. Wenn wir diese beiden Lagen des Punktes α als ein Punktenpaar auffassen, so ist die erste Gleichung (7.) der analytische Ausdruck dieses Punktenpaares.

Wir bringen nun den bekannten Satz in Erinnerung: *Wenn auf einer geraden Linie zwei Punktenpaare gegeben sind, so giebt es unendlich viele*

Punktenpaare, welche mit den gegebenen eine Involution bilden, aber es giebt nur zwei Punkte, in welchen eins von diesen Punktenpaaren zusammenfällt und diese beiden Punkte sind harmonisch zu dem einen wie zu dem anderen gegebenen Punktenpaare.

Daraus ist ersichtlich, dass die erste Gleichung (7.) dasjenige Punktenpaar analytisch darstellt, welches harmonisch ist sowohl zu dem gegebenen Punktenpaar 12 als zu dem gegebenen Punktenpaar 45. Die zweite Gleichung (7.) stellt ebenso das Punktenpaar dar, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren 23 und 56. Die dritte Gleichung (7.) endlich ist der analytische Ausdruck für dasjenige Punktenpaar, welches harmonisch ist zu den Punktenpaaren 34 und 61.

Um nun die oben hervorgehobene Eigenschaft der drei Gleichungen (7.) geometrisch zu verwerthen, benutzen wir den bekannten Satz: *Wenn drei quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten analytisch drei Punktenpaare auf einer geraden Linie darstellen, so bilden die drei Punktenpaare eine Involution unter der Bedingung, dass die Gleichungen mit gewissen constanten Factoren multiplicirt und addirt identisch Null geben.* Hiernach bilden die drei durch die Gleichungen (7.) dargestellten Punktenpaare eine Involution, und wir haben den Satz:

„Wenn irgend sechs Punkte 1, 2, . . . 6 auf einer geraden Linie gegeben sind, und man construirt drei Punktenpaare, von welchen das erste harmonisch ist zu den Punktenpaaren 12 und 45, das zweite harmonisch zu den Punktenpaaren 23 und 56, das dritte harmonisch zu den Punktenpaaren 34 und 61, so bilden die drei construirten Punktenpaare eine „Involution“.

Da man die sechs auf der geraden Linie gegebenen Punkte 1, 2, . . . 6 auch beliebig mit einander vertauschen kann, so erhält man durch diese Vertauschungen nach dem ersten Satze 60 verschiedene Punktenpaare $\alpha\beta$ und nach dem letzten Satze 60mal drei Punktenpaare, welche eine Involution bilden.

Man wird bemerken, dass diese beiden Sätze dem *Pascalschen* und dem *Brianchonschen* Satze vom Sechsecke, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben ist, nachgebildet sind. Und in der That kann man auch ein Uebertragungsprincip angeben, nach welchem nicht nur die genannten beiden Sätze ohne Schwierigkeit aus dem *Pascalschen* und dem *Brianchonschen* hervorgehen, sondern noch andere Sätze über Punktenpaare auf

einer und derselben geraden Linie, welche ebenso den bekannten Erweiterungen des *Pascalschen* und des *Brianchonschen* Satzes entsprechen.

Wenn die sechs Punkte 1, 2 . . . 6 durch eine Gleichung vom sechsten Grade gegeben sind, so kann man allerdings die Punkte, von welchen die angegebenen beiden Sätze handeln, nicht mehr durch algebraische Gleichungen rational ausdrücken; aber diese Sätze machen auf gewisse unsymmetrische Relationen der Wurzeln aufmerksam, die für die Algebra der Gleichung des sechsten Grades nicht ohne Bedeutung sind.

Heidelberg, im December 1863.