

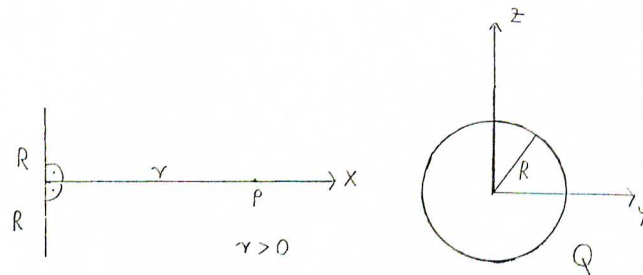
Die Beleuchtungsstärke - senkrechter Kreis als Lichtquelle mit Absorption

Harald Schröder

2015

Wir wenden uns nun der Beleuchtungsstärke (im visuellen Bereich) zu.

Wir betrachten eine Kreisscheibe und einen Punkt p im Abstand r von der Kreisscheibe. Die Kreisscheibe soll die Lichtquelle Q sein und die Lichtstärke I haben. Die ganze Anordnung ist im luftleeren Raum. Siehe dazu die Abb.



R ist der Radius der Kreisscheibe.

$w = \frac{I}{(2) \cdot \pi \cdot R^2}$ ist die Flächenlichtstärkedichte
(2) wenn beide Seiten strahlen.

Die Beleuchtungsstärke ist dann:

$$\vec{E} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{wR}{(r^2 + \bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \cos \alpha \\ \bar{x} \sin \alpha \end{pmatrix} \right] d\alpha d\bar{x} \quad (1)$$

$x \in [0, R]$

R ist dabei die Wurzel der Gramschen Determinante vom inneren Integral. Nun ist:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \\ -\bar{x} \cos \alpha \\ -\bar{x} \sin \alpha \end{pmatrix} d\alpha = \begin{pmatrix} 2\pi r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 2\pi w R r \cdot \int_0^R \frac{1}{(r^2 + \bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\bar{x} \quad (3)$$

Integration nach Gröbner [1] Abschnitt 231 S.39 Nr.20b):

$$\vec{E} = 2\pi w R r \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\bar{x}}{\sqrt{r^2 + \bar{x}^2}} \right]_0^R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Probe durch Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{r^2 + \bar{x}^2}} \right) &= \frac{\sqrt{r^2 + \bar{x}^2} - \bar{x} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + \bar{x}^2}}}{r^2 + \bar{x}^2} \\ &= \frac{\frac{r^2 + \bar{x}^2 - \bar{x}^2}{\sqrt{r^2 + \bar{x}^2}}}{(r^2 + \bar{x}^2)} = \frac{r^2}{(r^2 + \bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Aus (4) folgt:

$$\vec{E} = \frac{2\pi w R^2}{r\sqrt{r^2 + R^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

für den Betrag ergibt sich:

$$|\vec{E}| = \frac{2\pi w}{r} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{r^2 + R^2}} \quad (6)$$

Spezialfälle:

1) $R \ll r$

$$\vec{E} \approx 2\pi w \frac{R^2}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

oder

$$|\vec{E}| \approx 2\pi w \frac{R^2}{r^2} \quad (8)$$

2) $r \ll R$ $r > 0$

$$\vec{E} \approx \frac{2\pi w R}{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

oder

$$|\vec{E}| \approx \frac{2\pi w R}{r} \quad (10)$$

Nun soll dieselbe Anordnung in reiner Luft mit dem Schwächungskoeffizienten m betrachtet werden. Die Dichte der Luft ist konstant d.h. m ist konstant. Dann kommt der Faktor e^{-ms} mit s als Strecke, die das Licht zurückgelegt hat, dazu. Also ist nach (1):

$$\vec{E} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{w R e^{-m\sqrt{r^2+\bar{x}^2}}}{(r^2 + \bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \cos \alpha \\ \bar{x} \sin \alpha \end{pmatrix} \right] d\alpha d\bar{x} \quad (11)$$

R ist wieder die Wurzel der Gramschen Determinante vom inneren Integral wie bei (1). Führt man die innere Integration wie in (2) durch, so erhält man:

$$\vec{E} = 2\pi w R r \cdot \int_0^R \frac{e^{-m\sqrt{r^2+\bar{x}^2}}}{(r^2 + \bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\bar{x} \quad (12)$$

Leider ist keine integralfreie Darstellung bekannt.

Wir berechnen ein Beispiel mit $R=1$ Meter und der Lichtstärke 1 Candela. Nur eine Seite soll strahlen. Der Absorptionskoeffizient m beträgt bei reiner Luft und einer Wellenlänge von 435 Nanometern $0.00003 \text{ Meter}^{-1}$. Die Beleuchtungsstärke wird in Lux angegeben. Wir bekommen folgende Tabelle:

$r[\text{Meter}]$	$E_x = \vec{E} $	Näherung $E_x = \vec{E} $
1	1.4142	2.0000
2	0.4440	0.5000
3	0.2108	0.2222
4	0.1213	0.1250
5	0.0784	0.0800
6	0.0548	0.0555
7	0.0404	0.0408
8	0.0310	0.0313
9	0.0245	0.0247
10	0.0200	0.0200

Literatur

- [1] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5. Auflage 1975 Springer Verlag Wien
- [2] Harald Schröer „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001