23.

Über eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Es seien S, S_1 die Scheitel der Haupt-Axe und F, F_1 die Brennpuncte eines Kegelschnitts; es seien ferner P, P_1 zwei solche Puncte in der Axe, welche zu den Scheiteln S, S_1 harmonisch sind, und zwar liege S zwischen P und P_1; ferner liege P aufserhalb des Kegelschnitts, so dafs aus ihm zwei Tangenten PT, PT_1 an diesen gehen, deren Berührungssehne TT_1 die Axe im Puncte P_1 trifft. Aus einem der Puncte P oder P_1 ziehe man eine beliebige Secante PAB (oder P_1AB) durch den Kegelschnitt, und nach den Schnittpuncten A, B ziehe man aus dem dem Scheitel S zunächst liegenden Brennpuncte F die Leitstrahlen $FA=\alpha$, $FB=\beta$, so wie endlich nach dem Berührungspuncte T den Leitstrahl $FT=\tau$: so giebt es jedesmal zwei bestimmte constante Gröfsen r und k von der Beschaffenheit, dafs immer

$$1. \quad (\alpha-r)(\beta-r) = (\tau-r)^2 = k^2,$$

wie auch die Secante AB ihre Richtung und dadurch die Strahlen α und β ihre Gröfse ändern mögen, und gleichviel ob die Secante durch P oder P_1 gehen mag. Verändert man aber die Lage der festen Pole P und P_1, so ändern sich auch die Constanten r und k.

Dem andern Brennpuncte F_1 entspricht gleichzeitig die nämliche Constante k, dagegen eine andere Constante r_1, und wenn man die Leitstrahlen $F_1A=\alpha_1$, $F_1B=\beta_1$, $F_1T=\tau_1$ zieht, so hat man, wie für F:

$$(\alpha_1-r_1)(\beta_1-r_1) = (\tau_1-r_1)^2 = k^2.$$

Ändern die conjugirten Pole P und P_1 ihre Lage, so bleibt entweder die Summe oder der Unterschied der gleichzeitigen Gröfsen r und r_1 constant; nämlich diese Summe oder dieser Unterschied ist stets der Haupt-Axe $2a$ des Kegelschnitts gleich, also

$$2. \quad r_1 \pm r = 2a.$$

Bezeichnet man die Excentricität des Kegelschnitts durch c, setzt die Tangente $PT = t$ und den Winkel, welchen sie mit dem Leitstrahle $FT = \tau$ bildet, also den Winkel $PTF = \varphi$, so hat man

$$3. \quad k^2 = (a-r)^2 - c^2,$$

$$4. \quad k = \tau - r = \tfrac{1}{2} t \cdot \cos\varphi.$$

Unter Umständen können von den Gröfsen r, r_1, α, β, ... einzelne ihr Vorzeichen ändern. Ich will dies, nebst einigen andern Besonderheiten, bei den verschiedenen Kegelschnitten etwas näher andeuten.

I. Bei der Ellipse kann die Gröfse r *positiv, negativ* oder *Null* sein, je nachdem die Pole P und P_1 liegen. Im letzten Fall, wo $r = 0$, wird die Gröfse k der halben kleinen Axe b der Ellipse gleich, so dafs für diesen Fall (1.)

$$5. \quad \alpha\beta = \tau^2 = b^2.$$

Dies giebt den besonderen Satz:

„Beschreibt man mit der halben kleinen Axe b um den Brennpunct F der Ellipse einen Kreis, der die Ellipse allemal in zwei reellen Puncten T und T_1 scheidet, zieht die Sehne TT_1, die der Haupt-Axe in P_1 begegnet und legt in T (oder T_1) an die Ellipse die Tangente TP, welche die Haupt-Axe in P trifft, zieht ferner aus einem der Puncte P oder P_1, gleichviel aus welchem, eine willkürliche Secante AB durch die Ellipse und nach ihren Schnittpuncten A und B aus dem Brennpuncte F die Strahlen α und β, so ist das Rechteck unter diesen Strahlen constant, und zwar gleich dem Quadrat über der halben kleinen Axe."

Rücken nun, von dem genannten Zustande ausgehend, die Pole P und P_1 dem Scheitel S näher, so ist r positiv: entfernen sie sich dagegen von demselben, so wird r negativ und dann verwandeln sich die obigen Ausdrücke in folgende:

$$1. \quad (\alpha+r)(\beta+r) = (\tau+r)^2 = k^2,$$

$$2. \quad r_1 - r = 2a,$$

$$3. \quad k^2 = (a+r)^2 - c^2,$$

$$4. \quad k = \tau + r = \tfrac{1}{2} t \cdot \cos\varphi.$$

Es sei M der Mittelpunct der Ellipse und es werde $MP = p$ und $MP_1 = p_1$ gesetzt, so finden ferner noch folgende Relationen statt:

$$6.\quad k = \frac{c}{2a}\cdot\frac{p^2-a^2}{p} = \frac{c}{2a}\cdot\frac{a^2-p_1^2}{p_1} = \frac{c}{2a}(p-p_1),$$

$$7.\quad r = a\mp\frac{c}{2a}\cdot\frac{p^2+a^2}{p} = a\mp\frac{c}{2a}\cdot\frac{p_1^2+a^2}{p_1} = a\mp\frac{c}{2a}(p+p_1),$$

$$8.\quad p = \frac{a}{c}(k\pm\surd(k^2+c^2)) = \frac{a}{c}[a-r\pm\surd((a-r)^2-c^2)],$$

wo die untern Zeichen in (7.) und (8.) den Werthen für r_1 und p_1 entsprechen.

II. Bei der Hyperbel sind die Gröfsen r und r_1 immer positiv und für alle Lagen der Pole P und P_1 ist immer

$$2.\quad r_1 - r = 2a.$$

In Rücksicht der Strahlen α, β kommt es dagegen darauf an, ob die Schnittpuncte A und B der Secante AB im nämlichen Zweige der Hyperbel liegen, oder nicht. Liegen sie im nämlichen Zweige (der also S zum Scheitel hat und den Brennpunct F umschliefst), so hat man wie oben

$$(\alpha-r)(\beta-r) = (\tau-r)^2 = k^2 \quad \text{und} \quad (\alpha_1-r_1)(\beta_1-r_1) = (\tau_1-r_1)^2 = k^2.$$

Dreht nun aber die Secante AB sich so um den festen Pol P oder P_1, bis B sich ins Unendliche entfernt und von da in den andern Zweig hinübergeht, so ändert der Strahl β sein Zeichen, und damit wird nun gleichzeitig $r > \alpha$, während zuvor $\alpha > r$ war, so dafs alsdann die Formel in folgende übergeht:

$$(r-\alpha)(r+\beta) = (\tau-r)^2 = k^2, \quad \text{und} \quad (r_1-\alpha_1)(r_1+\beta_1) = (\tau_1-r_1)^2 = k^2.$$

Die Gröfsen r und r_1 lassen sich hier auf eigenthümliche Art construiren. Aus einem der Pole P oder P_1, etwa aus P, ziehe man, einer Asymptote parallel, die Gerade PR, welche die Hyperbel in R trifft, und ziehe sodann die Leitstrahlen FR, F_1R, so sind diese die verlangten Gröfsen r und r_1.

III. Bei der Parabel sind die Pole P und P_1 jedesmal gleich weit vom Scheitel S entfernt. Für alle Lagen dieser Pole bleibt die Gröfse r constant, und zwar ist sie stets der Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel gleich, also ist $r = FS = e$. Die Gröfse k ist jedesmal dem Abstande des Pols P oder P_1 vom Scheitel S gleich, also $k = SP = SP_1 = d$. Daher hat man:

$$(\alpha-e)(\beta-e) = d^2,$$

d. h.: *„Beschreibt man um den Brennpunct F der Parabel mit dem Abstande e desselben vom Scheitel S einen Kreis, zieht sodann aus dem Brennpuncte nach irgend zwei Puncten A und B in der Parabel die Leitstrahlen FA und FB, welche vom Kreise in A_1 und B_1 geschnitten werden, und zieht endlich die Sehne AB, welche die Parabel-Axe in* *irgend einem Puncte Q (d. i. P oder P_1) trifft, so ist allemal das Rechteck unter denjenigen Abschnitten der Strahlen, welche zwischen dem Kreise und der Parabel liegen, gleich dem Quadrat über dem Abschnitte der Axe, welcher zwischen ihrem Scheitel und dem Puncte Q enthalten ist, also $AA_1 \cdot BB_1 = SQ^2$."*

Daraus schliefst man weiter den folgenden Satz:

„*Schneiden eine beliebige Sehne AB und die Tangenten in ihren Endpuncten A und B die Parabel-Axe beziehlich in Q, A_0, B_0, und trifft das aus dem gegenseitigen Schnittpuncte der Tangenten auf die Axe gefällte Perpendikel dieselbe in R, so ist allemal*

$$SA_0 \cdot SB_0 = SQ^2 = SR^2.$$

Berlin, im April 1845.