

selben auch bei längerem Stromdurchgang (wenigstens innerhalb gewisser Grenzen) in derselben Weise zeigen, d. h. für diejenige Stromrichtung, welche größeren Widerstand besitzt, muß der Widerstand steigen, für die entgegengesetzte fallen — vollständig in Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Daß bei größeren Stromintensitäten im Inneren mancher der spröden Schwefelmetalle, z. B. Bleiglanz, Contactänderungen auftreten, ist außer Zweifel, da sich die Stromintensität dann bisweilen sprungweise ändert. Doch lassen sich solche Mineralien ausschließen. Aber auch in festeren, nicht vollständig homogenen Massen halte ich solche Aenderungen wohl für möglich. Ueberraschend erscheint mir nur, daß auch bei kleinen Intensitäten und ersten Ausschlägen die Anomalien eintreten. Jedenfalls deutet diese Ueberlegung auf die Möglichkeit von Fehlerquellen, welche vorher vollständig eliminirt werden müssen, ehe man sich der interessanteren Auffassung hingeben darf, welche sofort beim Anblick der Erscheinungen entsteht, daß man es mit einer Art Richtung der leitenden Molecüle und einer gewissen elektrischen Nachwirkung zu thun hat.

Leipzig, den 23. November 1874.

---

## VII. *Ueber die Reflexion des Lichts an der Vorder- und Hinterfläche einer Linse;* *von Dr. Krebs,*

Lehrer an d. höh. Gewerbeschule zu Frankfurt a. M.

---

**W**enn Licht auf einen durchsichtigen Körper z. B. auf eine Linse fällt, so wird (abgesehen von der Absorption im Innern des Körpers) ein Theil des Lichtes an der Vorderfläche reflectirt, ein anderer Theil geht durch den

Körper bis an die hintere Fläche, um dort reflectirt zu werden, und ein dritter Theil geht durch den Körper hindurch in das Medium, welches sich hinter dem Körper befindet.

Dieser Fundamentalsatz läßt sich durch einen einfachen Versuch in sehr instructiver Weise illustriren.

Läßt man durch die 3 bis 4 Zoll weite Röhre im Laden eines dunklen Zimmers ein wagerechtes Strahlenrohr einfallen, und hält man senkrecht in die Strahlen eine Linse, so bemerkt man nicht bloß jenseits der Hinterfläche der Linse einen Punkt, in welchem die Lichtstrahlen zusammengehen, sondern noch einen anderen, viel näher an der Linse und vor ihrer Vorderfläche befindlichen; dieser Punkt wird besonders deutlich sichtbar, wenn man in die Strahlen hineinraucht.

Zugleich sieht man, wenn die Linse nicht zu nahe am Laden sich befindet, auf demselben einen hellen Kreis, welcher von einem halbhellen, durch einen farbigen Saum begrenzten Ring, umgeben ist. Besser nimmt man diese Erscheinung wahr, wenn man einen Bogen Zeichenpapier, nachdem man aus der Mitte desselben einen Kreis ausgeschnitten hat, dessen Durchmesser um wenig größer ist, als der der Röhre am Laden, mittelst Centrumsstifte am Laden befestigt.

Diese beiden Lichtringe sind mit dem Kreisumfang der Röhre concentrisch, wenn man die Linse genau senkrecht in die wagrecht einfallenden Strahlen hält.

Der äußere halbhelle Ring muß jedenfalls, da er farbig gesäumt ist, durch die Reflexion an der Hinterfläche und der ganzhelle durch die Reflexion an der Vorderfläche der Linse entstanden seyn; der erstere verschwindet und es bleibt nur der letztere übrig, wenn man an den vor der Vorderfläche der Linse befindlichen Vereinigungspunkt der Strahlen einen dunklen Körper, z. B. den Finger bringt und dadurch die sich hier vereinigenden Strahlen verhindert auf den Laden zu fallen. Rückt man mit der Linse näher an den Laden, so nimmt der äußere

halbhelle Ring rascher an GröÙe ab, als der ganzhelle und es tritt schließlicb ein Punkt ein, wo der halbhelle Ring von dem ganzhellen vollständig verdeckt wird.

Es ist nun nicht uninteressant, die hier bestehenden Verhältnisse mathematisch festzustellen.

Es falle ein Lichtstrahl  $ab$  (Fig. 4, Taf. IV) parallel mit der Axe  $MM'$  auf die Vorderfläche der Linse  $LL'$ . Seien  $M$  und  $M'$  die Krümmungsmittelpunkte der auf beiden Seiten als gleich gewölbt angenommenen Linse und  $\alpha$  der Winkel, welchen der Strahl  $ab$  mit dem Einfallslotb  $M'b$  bildet, so wird ein Theil des einfallenden Lichtes unter dem gleichen Winkel  $\alpha$  in der Richtung  $br$  reflectirt; ein anderer Theil wird nach dem Einfallslotb  $M'b$  in der Richtung  $bb'$  hingebrochen; der Winkel, den  $b'b$  mit dem Einfallslotb  $M'b$  bildet, mag  $\beta$  heißen.

Das in der Richtung  $bb'$  durch die Linse gehende Licht tritt theilweise in die Luft über und trifft die Axe im Hauptbrennpunkt  $F$ , wobei bekanntlich, wenn  $f$  die Brennweite,  $n$  den Brechungsexponenten und  $r$  den Halbmesser der Linse bedeutet, die Beziehung gilt:

$$f = \frac{r}{2(n-1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aber nicht alles in der Richtung  $bb'$  durch die Linse gehende Licht tritt aus der Linse aus, sondern ein Theil davon wird an der Hinterfläche in der Richtung  $b'b''$  reflectirt, wobei  $\angle Mb'b = \angle Mb'b''$ . Behielte nun das Licht seine Richtung  $b'b''$  auch nach dem Austritt aus der Linse bei, so würde es die Axe in einem Punkte  $d''$  treffen, dessen Entfernung von der Linse unter der Voraussetzung berechnet werden soll, daß die Linse klein und schwach gekrümmt und also auch sehr dünn sey, weswegen  $d''b'' = d''i' = d''o = d''i''$  angenommen werden kann.

Nun gilt für das in der Richtung  $bb'$  einfallende und von der Hinterfläche reflectirte Licht, wenn es beim Austritt aus der Linse seine Richtung beibehält und also die Axe in  $d''$  treffen würde, die Beziehung:

$$e'' = \frac{f'}{1 + \frac{f'}{e}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn  $e'' = d''i''$ ,  $f'$  die Brennweite der Hinterfläche der Linse, als Spiegelfläche angesehen und  $e$  die Entfernung des Punktes  $c$ , in welchem das verlängerte  $bb'$  die Axe trifft, von der Linse bedeutet.

Die GröÙe  $e$  ist leicht zu berechnen.

Es ist nämlich in dem Dreieck  $cbM'$ :

$$\sin(180 - \alpha) : \sin \beta = cb : cM';$$

d. h.

$$n : 1 = e : e - r,$$

woraus:

$$e = \frac{nr}{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man diesen Werth von  $e$  in den von  $e''$ , so wird:

$$e'' = \frac{f'}{1 + \frac{(n-1)f'}{nr}},$$

oder bei gleichzeitiger Beachtung, daß  $f' = \frac{1}{2}r$ :

$$e'' = \frac{nr}{3n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In Wirklichkeit nun trifft der Strahl  $b'b''$  die Axe nicht in  $d''$ , sondern er wird von dem Einfallslot  $M'b''$ , mit welchem er den Winkel  $M'b''b' = gb''d'' = \delta$  bildet, weggebrochen; der Brechungswinkel  $gb''d'$  sey  $\delta'$ ; es gilt alsdann die Beziehung:

$$\sin \delta' : \sin \delta = n : 1.$$

Nimmt man statt  $\delta$  und  $\delta'$  ihre Nebenwinkel, so ist:

$$\sin M'b''d' : \sin M'b''d'' = n : 1. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun gilt aber für die Dreiecke  $M'b''d'$  und  $M'b''d''$  die Gleichung:

$$\sin M'b''d' : \sin d'M'b'' = M'd' : b''d'. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$\sin d''M'b'' : \sin d''b''M' = b''d'' : M'd''. \quad . \quad . \quad (7)$$

Durch Multiplication der Gleichungen (6) und (7) mit einander erhält man, wenn man beachtet, daß  $\angle d''M'b'' = \angle d'M'b''$ :

$$\sin M'b''d' : \sin d''b''M' = M'd' . b''d'' : b''d' . M'd''. \quad (8)$$

Durch Vergleichung mit (5) ergibt sich hieraus:

$$n : 1 = M'd' \cdot b''d'' : d''d' \cdot M'd'',$$

oder:

$$M'd' \cdot b''d'' = n \cdot b''d' \cdot M'd''. \quad (9)$$

Bedeutet nun  $e'$  die Entfernung des Punktes  $d'$  von der Linse, wobei  $d'i' = d'o = d'i'' = d'b''$  genommen werden kann, so hat man:

$$d'b'' = e'; M'd' = r + e'; d''b'' = e'' \text{ und } M'd'' = r + e''.$$

Die Gleichung (9) erlangt nach Einsetzung dieser Werthe folgende Gestalt:

$$(r + e')e'' = ne'(r + e''),$$

woraus:

$$re'' - ne'r = (n - 1)e'e''.$$

Dividirt man die ganze Gleichung mit  $re'e''$ , so wird:

$$\frac{1}{e'} - n \cdot \frac{1}{e''} = (n - 1) \cdot \frac{1}{r}.$$

Beachtet man nun Gleichung (4), so ergibt sich:

$$\frac{1}{e'} - \frac{3n - 1}{r} = \frac{n - 1}{r},$$

woraus schliesslich:

$$\frac{1}{e'} = \frac{2(2n - 1)}{r}. \quad (10)$$

Vergleicht man nun die Werthe von  $f$  (1) und  $e'$  (10), so hat man:

$$\frac{e'}{f} = \frac{n - 1}{2n - 1}. \quad (11)$$

Wenn z. B. der Brechungsexponent  $n = \frac{3}{2}$  ist, so wird:

$$f = r, e' = \frac{r}{4} \text{ und } \frac{e'}{f} = \frac{1}{4};$$

es liegt also dann der Punkt  $d'$  um  $\frac{1}{4}$  des Radius oder der Brennweite von der Linse weg.

Ist ferner, wie bei einer Quarzlinse,  $n = 1,562$  und  $r = 1500^{\text{mm}}$ , so findet sich

$$f' = 750^{\text{mm}}; f = 1334,5^{\text{mm}}; e' = 353^{\text{mm}} \text{ und } \frac{e'}{f} = 0,26;$$

es ist also der Punkt  $d'$  um kaum mehr als ein Viertel der Brennweite von der Linse entfernt.

Es gilt nun noch nachzuweisen, daß die äußersten der an der hinteren Linsenfläche reflectirten Strahlen einen größeren Winkel mit der Axe bilden, als die äußersten der an der Vorderfläche reflectirten Strahlen, so daß die ersteren in einiger Entfernung von der Linse einen größeren Lichtkreis auf dem Schirm erzeugen müssen, als die letzteren.

Man ziehe den Strahl  $AL$  parallel der Axe; er möge mit dem Einfallslot  $M'L$  den Winkel  $\mu$  bilden; dann bildet der an der vorderen Fläche reflectirte Strahl  $LA'$  einen Winkel  $2\mu$  mit der Axe.

Sei ferner  $L'd'$  der äußerste an der hinteren Fläche reflectirte Strahl, so gilt, wenn  $L'o = h$  und  $\angle L'd'o = \vartheta$  gesetzt wird:

$$\frac{h}{r} = \operatorname{tg} \mu,$$

wobei  $M'o = r$  genommen worden.

Da nun

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}{2 \operatorname{tg} \mu},$$

so folgt:

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2 \frac{h}{r}}{1 - \frac{h^2}{r^2}} = \frac{2hr}{r^2 - h^2}. \quad \dots \quad (12)$$

Ferner ist:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{h}{e'};$$

setzen wir hierin für  $e'$  seinen Werth aus (10), so er giebt sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2h(2n-1)}{r}. \quad \dots \quad (13)$$

Aus (12) und (13) aber folgt die Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\mu : \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{1 - \frac{h^2}{r^2}} : (2n-1) \quad \dots \quad (14)$$

Da nun  $h$  im Verhältniß zu  $r$  sehr klein, als  $\frac{h^2}{r^2}$  nahezu Null ist, so ist  $\frac{1}{1 - \frac{h^2}{r^2}}$  nicht viel über 1; es müßte, was

übrigens nicht zulässig, wenn die Linse einigermaßen brauchbar seyn soll,  $h$  schon gleich  $\frac{1}{2}r$  seyn, damit  $\frac{1}{1 - \frac{h^2}{r^2}}$

den Werth  $\frac{4}{3}$  erreichte; dagegen ist, selbst wenn Wasser als brechende Substanz vorausgesetzt wird,  $2n - 1 = \frac{8}{3}$  (für  $n = \frac{3}{2}$  aber ist  $2n - 1 = 2$  und für  $n = 1,63$  ist  $2n - 1 = 2,26$ ).

Hieraus geht hervor, daß jedenfalls  $2\mu$  kleiner ist als  $\vartheta$ .

Es dürfte nun noch von Interesse seyn zu berechnen, in welcher Entfernung von der Linse der durch die Reflexion des Lichts an der Hinterfläche gebildete Lichtkegel den durch die Reflexion an der Vorderfläche gebildeten schneidet.

Man ziehe von dem Punkte  $v$ , in welchem die äußersten Strahlen der zwei Lichtkegel einander treffen, eine Linie  $vw$  senkrecht zur Linsenaxe, dann ist:

$$\frac{vw}{d'w} = \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{vw}{pw} = \operatorname{tg} 2\mu.$$

Hieraus folgt:

$$d'w \cdot \operatorname{tg} \vartheta = pw \cdot \operatorname{tg} 2\mu \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nun ist aber:

$$pw = po + od' + d'w.$$

Setzt man nun für  $po$  und  $od'$  die Werthe  $\frac{h}{\operatorname{tg} 2\mu}$  und  $\frac{h}{\operatorname{tg} \vartheta}$  in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich:

$$pw = \frac{h}{\operatorname{tg} 2\mu} + \frac{h}{\operatorname{tg} \vartheta} + d'w.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von  $pw$  in (15) erhält man:

$$d'w \cdot \operatorname{tg} \vartheta = h + \frac{h \cdot \operatorname{tg} 2\mu}{\operatorname{tg} \vartheta} + d'w \cdot \operatorname{tg} 2\mu,$$

woraus sich ableiten läßt:

$$d'w = \frac{h(\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} 2\mu)}{\operatorname{tg} \vartheta (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu)} = \frac{h \left(1 + \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)}{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Um nun aber die Entfernung des Punktes  $w$  von der Linse zu finden, kann man die Gleichung aufstellen:

$$ow = d'o + d'w = c' + d'w = \frac{r}{2(2n-1)} + \frac{h \left(1 + \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)}{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu}.$$

Beachtet man den Werth von  $\operatorname{tg} \vartheta$  (13) so findet sich:

$$ow = \frac{h \left[ 2(2n-1) + \frac{r}{h} \operatorname{tg} 2\mu \right] + r(\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu)}{2(2n-1)(\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu)}$$

oder:

$$ow = \frac{2h(2n-1) + r \operatorname{tg} \vartheta}{2(2n-1)(\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu)} = \frac{\frac{2h(2n-1)}{\operatorname{tg} \vartheta} + r}{\frac{2(2n-1)}{\operatorname{tg} \vartheta} (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu)}.$$

Woraus mit Beachtung des Werthes von  $\operatorname{tg} \vartheta$ :

$$ow = \frac{2h}{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Berechnet man aus (12) und (13) den Werth von  $\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu$ , so findet sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu = \frac{2h[2nr^2 - 2r^2 - 2nh^2 + h^2]}{r(r^2 - h^2)}.$$

Diesen Werth in (17) eingesetzt, giebt:

$$ow = \frac{r(r^2 - h^2)}{2r^2(n-1) - h^2(2n-1)}. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ist z. B. bei einer gleichgewölbten biconvexen Glaslinse  $r = 18^{\text{cm}}$ ,  $h = 3^{\text{cm}}$ ,  $n = \frac{3}{2}$ , so erhält  $ow = 18,53^{\text{cm}}$ . Ist ferner bei einer Quarzlinie  $r = 150^{\text{cm}}$ ,  $h = 3^{\text{cm}}$ ,  $n = 1,562$ , so erhält man  $ow = 134^{\text{cm}}$ . Will man noch den gemeinschaftlichen Radius  $vw$  der Schnittfläche der beiden Lichtkegel berechnen, so geht man von der Gleichung:

$$\frac{vw}{d'w} = \operatorname{tg} \vartheta$$

aus.

Daraus folgt:

$$vw = d'w \cdot \operatorname{tg} \vartheta$$

und man findet nun mit Benutzung des Werthes von  $d'w$  aus (16):

$$vw = h \cdot \frac{\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} 2\mu}{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} 2\mu}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe für  $\operatorname{tg} \vartheta$  und  $\operatorname{tg} 2\mu$  aus (12) und (13), so erhält man schliesslich:

$$vw = h \cdot \frac{(r^2 - h^2)(2n-1) + r^2}{(r^2 - h^2)(2n-1) - r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$



Ist z. B.  $r = 18^{\text{cm}}$ ,  $h = 3^{\text{cm}}$ ,  $n = \frac{3}{2}$ , so findet sich:

$$vw = 9,35^{\text{cm}}.$$

Ist ferner  $r = 150^{\text{cm}}$ ,  $h = 3^{\text{cm}}$ ,  $n = 1,562$ , so erhält man:

$$vw = 8,34^{\text{cm}}.$$

Steht die Linse um eine Strecke vom Laden ab, welche größer ist, als  $ow$ , so sieht man, wie schon Eingangs erwähnt worden ist, rund um die Röhre am Laden einen hellen Ring, welcher noch von einem farbig gesäumten halbhellen Ring umgeben ist. Rückt man näher, so wird der halbhelle Ring rascher an Größe abnehmen, als der ganz helle, und wenn die Entfernung von dem Laden  $\leq ow$ , da sieht man nur einen hellen Ring. Da die Röhre am Laden gewöhnlich  $4\frac{1}{2}$  bis  $6^{\text{cm}}$  Halbmesser hat, so kann man, da der Halbmesser  $vw$  des Durchschnittskreises beider Lichtkegel in den vorhin erwähnten Beispielen  $8,34$  bis  $9,35^{\text{cm}}$  beträgt, die Erscheinung mit solchen Linsen noch recht wohl bis zu dem Punkt verfolgen, wo der halbhelle Ring verschwindet; besser ist es aber eine Linse von etwas größerem Oeffnungs-Halbmesser  $h$  zu nehmen, denn die Größe  $vw$  wächst mit dem Halbmesser  $h$ : nimmt man z. B. eine Crown Glaslinse von  $50^{\text{cm}}$  Brennweite, deren Brechungsexponent  $= 1,53$  und deren Oeffnungs-Halbmesser  $h = 4^{\text{cm}}$ , so wird  $vw = 11,6$ , was vollkommen hinreicht, um die Erscheinung zu übersehen.

Allerdings finden an den beiden Linsenflächen nicht bloß die hiergenannten, sondern auch noch andere, wiederholte Reflexionen statt, allein diese lassen sich experimentell kaum mehr auf eine einfache Art nachweisen.