10. *Das Relativitätsprinzip der Mechanik und die Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern;*

von Philipp Frank.

Vor kurzem hat Hr. Minkowski Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern aus drei Axiomen hergeleitet[1]), von denen das wichtigste fordert, daß die gesuchten Gleichungen ihre Form nicht ändern sollen, wenn eine Transformation aus der Gruppe der Lorentz-Transformationen auf sie angewendet wird. Die genannte Gruppe enthält alle linear-homogenen Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten von der Form:

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= \frac{z - q\,t}{\sqrt{1 - q^2}}\,, \\ t' &= \frac{-q\,z + t}{\sqrt{1 + q^2}}\,, \end{aligned} \right.
$$

wo zur z-Achse jede beliebige Richtung des Raumes gewählt werden kann, und q jede reelle Zahl, die kleiner als 1 ist, bedeuten kann. Diese Forderung nennt man das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik.

Die Gleichungen der klassischen Mechanik gehorchen bekanntlich diesem Prinzip nicht, wohl aber behalten sie bei Anwendung folgender Transformationsgruppe ihre Form bei:

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= z - q\,t\,, \\ t' &= t\,, \end{aligned} \right.
$$

wo z wieder jede beliebige Richtung des Raumes und q jede beliebige reelle Zahl bedeuten kann. Diese Tatsache macht den Inhalt des Relativitätsprinzipes der Mechanik aus. Um einen kurzen Namen zu haben, wollen wir die Gruppe (2), in Erinnerung an das Galileische Trägheitsgesetz, die Gruppe

---

1) H. Minkowski, Göttinger Nachr., Math.-physik. Klasse, 1908.

der Galilei-Transformationen nennen. Minkowski hat[1]) eine Mechanik aufgestellt, in der an Stelle der Galilei- die Lorentz-Transformationen treten.

Ich glaube, daß es zur Durchsichtigkeit der ganzen Relativitätstheorie beitragen wird, wenn wir untersuchen, was herauskommt, wenn wir in den Axiomen, die Minkowski für die Elektrodynamik bewegter Körper aufstellt, an Stelle der Lorentz- die Galilei-Transformationen setzen und im übrigen vollständig dem Gedankengang Minkowskis folgen. Es wird sich, wie auch zu erwarten war, zeigen, daß genau so, wie aus dem Relativitätsprinzip der Elektrodynamik die Minkowskischen (d. h. bis auf Glieder zweiter Ordnung die Lorentzschen) Gleichungen folgten, durch Voranstellung des Relativitätsprinzipes der Mechanik die alten Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper gewonnen werden.

Wir gehen, wie Minkowski, von den Gleichungen für ruhende Körper aus[2]):

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right),$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}.$$

Minkowski unterscheidet in diesen Gleichungen zwei Arten von Vektoren:

Raumzeitvektoren I. Art (mit je vier Komponenten)

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t, \\ \mathfrak{i}_x, & \mathfrak{i}_y, & \mathfrak{i}_z, & \varrho, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z}, & \dfrac{\partial}{\partial t}, \end{array}$$

der letztgenannte Vektor ist wohl ein symbolischer, spielt aber in vieler Hinsicht dieselbe Rolle wie ein eigentlicher.

Raumzeitvektoren II. Art (mit je sechs Komponenten)

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{H}_z, & \mathfrak{D}_x, & \mathfrak{D}_y, & \mathfrak{D}_z, \\ \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{E}_z, & \mathfrak{B}_x, & \mathfrak{B}_y, & \mathfrak{B}_z. \end{array}$$

---

1) l. c., Anhang.

2) In der Bezeichnungsweise folgen wir dem Lehrbuch der Elektrizität von Abraham-Föppl.

Minkowski zeigt nun zunächst, daß die Gleichungen (I) bis (IV) bei Ausführung einer Lorentz-Transformation (1) ihre Form beibehalten, sobald wir gewisse Linearkombinationen der Komponenten der alten Vektoren mit den entsprechenden gestrichelten Buchstaben bezeichnen. Der Vektor

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

wird dabei von Minkowski nicht beachtet, weil seine Komponenten unverändert bleiben können. Für uns ist er aber wichtig, und wir deuten seine identische Transformation eigens an durch:

$$\frac{\partial'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Die Gleichungen (I) bis (IV) gehen so über in:

$$\text{(I')} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{i}' + \frac{\partial' \mathfrak{D}'}{\partial t'}\right),$$

$$\text{(II')} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{D}' = \varrho',$$

$$\text{(III')} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}'}{\partial t'},$$

$$\text{(IV')} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{B}' = 0,$$

wo curl' und div' eine von selbst verständliche Bedeutung haben.

Wenn man das Angeführte beachtet, kann man Minkowskis drittes Axiom[1]) (das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik) in etwas anderer Weise formulieren als er es tut, und dadurch einerseits eine scheinbare Willkür, die in seinem Wortlaut liegt, beseitigen und andererseits den Parallelismus zum Relativitätsprinzip der Mechanik stärker hervortreten lassen.

Genau dasselbe wie Minkowskis drittes Axiom fordert nämlich offenbar folgender Satz: Die Gleichungen sollen so beschaffen sein, daß sie vermöge jeder *Lorentz-Transformation* (1) ihre Form beibehalten, wenn man als neue Komponenten der vorkommenden Vektoren

$$\mathfrak{i}_x', \mathfrak{i}_y', \mathfrak{i}_z', \varrho', \mathfrak{E}_x', \mathfrak{E}_y', \mathfrak{E}_z', \mathfrak{D}_x', \mathfrak{D}_y', \mathfrak{D}_z', \mathfrak{H}_x', \mathfrak{H}_y', \mathfrak{H}_z', \mathfrak{B}_x', \mathfrak{B}_y', \mathfrak{B}_z',$$
$$\frac{\partial'}{\partial x}, \frac{\partial'}{\partial y}, \frac{\partial'}{\partial z}, \frac{\partial'}{\partial t}$$

jene Linearkombinationen der ursprünglichen Vektorkomponenten einführt, die man schon einführen mußte, damit die Gleichungen (I) bis (IV) für ruhende Körper bei einer Lorentz-Transformation ihre Form beibehielten.

1) l. c., § 8.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in einem Körper, der sich mit der Geschwindigkeit w in der Richtung der z-Achse bewegt, auf Grund folgender Axiome ableiten.

Erstes Axiom (genau wie bei Minkowski): *Wenn eine einzelne Stelle der Materie in einem Momente ruht, also w für ein System x, y, z, t Null ist, so sollen für den Raumpunkt x, y, z, t, zwischen ϱ, den Vektoren* $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ *und deren Ableitungen nach x, y, z, t genau die Beziehungen (I) bis (V) statthaben, die zu gelten hätten, falls alle Materie ruhte.*

Minkowskis zweites Axiom, das behauptet, jede Geschwindigkeit der Materie sei kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, brauchen wir nicht vorauszusetzen; wir können beliebige Geschwindigkeiten zulassen. Wir stellen vielmehr sofort das Relativitätsprinzip der Mechanik als zweites Axiom auf, und zwar in folgender Fassung:

Zweites Axiom: Die Gleichungen für bewegte Körper sollen so beschaffen sein, daß sie vermöge jeder Galilei-Transformation (2) ihre Form beibehalten, wenn man als neue Komponenten der vorkommenden Vektoren

$$\mathfrak{i}_x', \; \mathfrak{i}_y', \; \mathfrak{i}_z', \; \varrho', \quad \mathfrak{E}_x', \; \ldots \; \mathfrak{B}_z', \quad \frac{\partial'}{\partial x}, \quad \frac{\partial'}{\partial y}, \quad \frac{\partial'}{\partial z}, \quad \frac{\partial'}{\partial t}$$

jene Linearkombinationen der ursprünglichen Vektorkomponenten einführt, die man schon einführen mußte, damit die Gleichungen (I) bis (IV) für ruhende Körper bei einer Galilei-Transformation ihre Form beibehielten.

Wir führen also zunächst an den Gleichungen (I) bis (IV) die Transformation (2) aus. Dann wird daraus:

$$\text{(I'')} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t'} - q \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial z'}\right),$$

$$\text{(II'')} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(III'')} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t'} - q \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z'}\right),$$

$$\text{(IV'')} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{B} = 0,$$

wo

$$\operatorname{div}' = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}$$

und curl' analog aufzufassen ist.

Diese Gleichungen gehen offenbar in die Gleichungen (I') bis (IV′) über, wenn wir folgende Linearkombinationen der alten Vektorkomponenten einführen:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}, \quad \varrho' = \varrho, \\
\dfrac{\partial'}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial'}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial'}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial'}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} - q\dfrac{\partial}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (I′) bis (IV′) haben aber genau die Formen der Gleichungen (I) bis (IV). Es sind also die Linearkombinationen (3) jene, von denen in unserem zweiten Axiom die Rede ist.

Wir gehen nun genau wie Minkowski vor. Wir denken uns die gesuchten Gleichungen für das bewegte System angeschrieben. In ihnen wird jedenfalls die Geschwindigkeit w des Systems auftreten. Auf diese Gleichungen üben wir die Transformation (2) mit dem speziellen Werte $q = w$ aus. Dadurch erhalten wir ein neues System von Gleichungen in den unabhängigen Variablen x', y', z', t'. Die Geschwindigkeit des neuen Systems hängt wegen (2) mit der des alten zusammen durch

$$\frac{d z'}{d t'} = \frac{d z}{d t} - q = w - q.$$

Wegen $q = w$ ist also die Geschwindigkeit der Bewegung in bezug auf das neue System Null. Daher können wir das erste Axiom auf das gestrichelte System anwenden. Die, wie wir sagen, auf „Ruhe transformierten“ Gleichungen lauten gemäß dem genannten Axiom:

$$\text{(Ia)}\qquad \operatorname{curl}'\mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{i}' + \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'}\right),$$

$$\text{(IIa)}\qquad \operatorname{div}'\mathfrak{D}' = \varrho',$$

$$\text{(IIIa)}\qquad \operatorname{curl}'\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t'},$$

$$\text{(IVa)}\qquad \operatorname{div}'\mathfrak{B}' = 0,$$

$$\text{(Va)}\qquad \mathfrak{D}' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}', \quad \mathfrak{B}' = \mu\mathfrak{H}', \quad \mathfrak{i}' = \sigma\mathfrak{E}'.$$

Nun wenden wir das zweite Axiom an, das besagt: Sobald wir von den Gleichungen (Ia) bis (Va) vermittelst der Transformation

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - wt, \quad t' = t$$

zum ursprünglichen System zurückgehen, ändert sich die Form nicht, wenn wir nur statt der gestrichelten Vektorkomponenten die durch (3) gegebenen Linearkombinationen der ursprünglichen einführen. Zuerst formen wir die Gleichungen (Ia) bis (Va) so um, daß der Vektor

$$\frac{\partial'}{\partial x}, \quad \frac{\partial'}{\partial y}, \quad \frac{\partial'}{\partial z}, \quad \frac{\partial'}{\partial t}$$

in ihnen auftritt. Das geschieht vermöge der unmittelbar ein-euchtenden Beziehungen:

$$\frac{\partial'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial'}{\partial t} + 2\,w\,\frac{\partial'}{\partial z}.$$

Dann schreiben sich die Gleichungen (Ia) und (IIIa) in der Form:

$$\text{(I}'\text{a)} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{i}' + \frac{\partial' \mathfrak{D}'}{\partial t} + 2\,w\,\frac{\partial' \mathfrak{D}'}{\partial z}\right),$$

$$\text{(III}'\text{a)} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial' \mathfrak{B}'}{\partial t} + 2\,w\,\frac{\partial' \mathfrak{B}'}{\partial z}\right).$$

Jetzt gehen wir, wie unser zweites Axiom verlangt, vermöge (3) zu den Koordinaten im bewegten System über und erhalten, wenn wir noch wie üblich

$$\frac{\partial}{\partial t} + w\,\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{d t}$$

setzen, die endgültige Form der Gleichungen für bewegte Körper:

$$\text{(Ib)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{i} + \frac{d \mathfrak{D}}{d t}\right),$$

$$\text{(IIb)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IIIb)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{d \mathfrak{B}}{d t},$$

$$\text{(IVb)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(Vb)} \qquad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}.$$

Diese Gleichungen sind auch von jedem Hinweis auf eine bestimmte Wahl der Achsen unabhängig; denn d/dt bedeutet die zeitliche Änderung in bezug auf einen die Bewegung mitmachenden substantiellen Raumpunkt.

Die Gleichungen (Ib) bis (Vb) sind aber die Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper.

Wien, September 1908.

(Eingegangen 28. September 1908.)