Bahnbestimmung der Satelliten des Saturn Enceladus, Thetis, Dione und Rhea nach einer neuen Methode.

Da die micrometrischen Messungen, welche ich während der letzten Opposition des Saturn mit dem Zehnzöller der hiesigen Sternwarte angestellt habe, um die Positionen von fünf Satelliten dieses Planeten für gegebene Momente festzulegen, für zwei derselben wenigstens deutlich anzeigten, dass die bekannten Kreisbahnen, welche man in die Ebene der Ringe verlegt, nicht genügten, um die Beobachtungen innerhalb ihrer mittleren Fehler darzustellen, so entschloss ich mich, aus meinen Beobachtungen für die oben genannten vier elliptische Bahnen zu rechnen. Der fünfte der beobachteten Satelliten ist Titan, dessen Bewegung bekanntlich sehr ausführlich von Bessel untersucht worden ist. Weil der Weg, welcher mich zu den unten aufgeführten Resultaten leitete, von den Methoden, welche vordem zu ähnlichen Zielen führten, in vielen Stücken abweicht, so bin ich genöthigt, denselben hier anzugeben, damit man den Grad des Vertrauens bestimmen könne, welchen jene Resultate verdienen.

Obgleich sich die folgenden theoretischen Betrachtungen nun speciell auf den Fall einer Trabantenbahn des Saturn beziehen, so können dieselben doch leicht auf eine solche des Uranus oder Neptun übertragen werden.

Ich gehe davon aus, dass die Lage der Bahnebene und die Dimensionen der scheinbar beschriebenen Projectionsellipse bereits näherungsweise bekannt seien. Ich nehme ferner an, dass man den Positionswinkel P eines Satelliten in Bezug auf den durch das Centrum des Saturn gehenden Parallel von der westlichen Elongation über Norden gezählt, und seine Enfernung ϱ vom Centrum gemessen habe. Da nun die Ebene, auf welcher man die Bewegung des Satelliten zu den verschiedenen Beobachtungszeiten projizirt sieht, ihre Lage zu einer festen Ebene im Raume fortwährend ändert, so hat man, um die Aufgabe der Bahnbestimmung des Satelliten, wie es gewöhnlich geschieht, auf die einer Doppelsternbahn zurückzuführen, die Beobachtungen zunächst wegen des Effectes dieser Veränderungen zu corrigiren. Zu diesem Ende genügt es für die nicht zu sehr entfernten Satelliten vollständig, die Bahnebene mit der Ebene des Ringes zu verwechseln. Die astronomischen Ephemeriden in den Jahrbüchern geben dann alles Nöthige, um die fragliche Reduction leicht vornehmen zu können. Sei p der Positionswinkel der Ringaxe, l der Erhebungswinkel der Erde über die Ebene des Ringes, l_0 aber dieser selbe Winkel für die Zeit T, für welche die gewählte mittlere Lage der Projectionsebene gilt, Δ die Entfernung des Saturn von der Erde und endlich Δ_0 eine gewählte mittlere Entfernung, so erhält man mit genügender Annäherung die Coordinaten des Satelliten auf der mittleren Projectionsebene für die mittlere Entfernung:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\varrho\Delta}{\Delta_0}\cos(P-p) \\ y &= \frac{\varrho\Delta\sin l_0}{\Delta_0\sin l}\sin(P-p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

Jeder so gegebene Punkt soll nun in einer Ellipse liegen, deren Ausdruck sein würde:

$$\begin{aligned} a^2 b^2 = {} & a^2\,[(y-y_0)\cos\psi-(x-x_0)\sin\psi]^2 + \\ & b^2\,[(x-x_0)\cos\psi+(y-y_0)\sin\psi]^2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

wenn a und b ihre Halbaxen, x_0 und y_0 die Coordinaten ihres Mittelpunktes und ψ den Winkel bezeichnen, welchen die grosse Axe mit der x-Axe macht. Diese Formel lässt sich im vorliegenden Falle in einen handbaren genäherten Ausdruck umwandeln, wenn man die vollständig legitimirten Voraussetzungen macht, dass man genügende Annäherungen für a, b und ψ kenne, um sowohl $\cos\psi$ nach einer passenden Verlegung der Richtung der x-Axe gleich Eins setzen, als ferner die höheren Potenzen der Correctionen von a und b und die von $\sin\psi$ vernachlässigen zu können. Das Gleiche darf man sich offenbar wegen der sehr geringen Excentricitäten der Satellitenbahnen auch mit den höheren Potenzen von x_0 und y_0 erlauben. Wenn man unter diesen Voraussetzungen die Gleichung (II) auflöst, indem man in dieselbe statt a und b, $a+da$ und $b+db$ einsetzt, dieselbe nach den fünf Unbekannten ordnet und schliesslich durch $2a^2$ dividirt, so erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & da\left(\frac{y^2}{a}-\frac{b^2}{a}\right)+db\left(\frac{bx^2}{a^2}-b\right)-x_0x\frac{b^2}{a^2}-y_0y- \\ & xy\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin\psi+\frac{1}{2}\left(y^2+x^2\frac{b^2}{a^2}-b^2\right)=0 \end{aligned} \quad \text{(III)}$$

Derselbe ist in Bezug auf die fünf zu suchenden Grössen da, db, x_0, y_0, und $\sin\psi$, welche Lage und Dimensionen der Projectionsellipse der Satellitenbahn bestimmen, linear, und kann folglich benutzt werden, um aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungen jene fünf Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen.

Nachdem so die Projectionsellipse bekannt geworden ist, findet man den Uebergang auf die wahre

Bahn durch eine leichte Uebertragung des graphischen Verfahrens der Bestimmung einer Doppelsternbahn in ein rechnendes. Ich schreibe deshalb die Formeln, welche ich benutzt habe, auf, ohne ihre Ableitung zu geben, weil diese aus dem bekannten Verfahren leicht abgeleitet werden können oder bereits bekannt sind.

Für die Formel (III) fiel die Richtung der x-Axe, (I) zufolge, mit dem Positionswinkel der Axe der Saturnringe zusammen; nennt man diesen in Bezug auf die mittlere Projectionsebene p_0, so hat man für den Positionswinkel G des Perisaturniums auf dieser letzteren, indem man den Nullpunkt des Systems in das Centrum der Projectionsellipse verlegt und die Winkel wieder vom westlichen Parallel an zählt:

$$\operatorname{tang}(G-p_0) = \frac{-y_0}{-x_0} \quad \ldots \text{(IV)}$$

Ferner wird die Projection der halben grossen Axe der Bahn

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{\sin^2(G-p_0-\psi)+\frac{b^2}{a^2}\cos^2(G-p_0-\psi)} \quad \ldots \text{(V)}$$

wenn nun a und b die verbesserten Werthe für die Halbaxen der Projectionsellipse bedeuten. Die Richtung der halben kleinen Axe der Bahn H wird dann durch die Formel gefunden:

$$\operatorname{tang}(H-p_0-\psi) = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotang}(G-p_0-\psi) \quad \ldots \text{(VI)}$$

und die Projection der halben kleinen Axe

$$\beta^2 = \frac{b^2}{\sin^2(H-p_0-\psi)+\frac{b^2}{a^2}\cos^2(H-p_0-\psi)} \quad \ldots \text{(VII)}$$

Die Excentricität e der Bahn erhält man durch

$$e^2 = \frac{x_0^2+y_0^2}{\alpha^2} \quad \ldots \text{(VIII)}$$

Führt man nun die Hülfsgrösse

$$c = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-e^2) \quad \ldots \text{(IX)}$$

ein, so wird die Richtung der Knotenlinie N der Bahn auf der Projectionsebene gefunden durch:

$$\operatorname{tang} 2N = \frac{c\sin 2G+\sin 2H}{c\cos 2G+\cos 2H} \quad \ldots \text{(X)}$$

und weiter die Neigung $\mathcal{J}$ gegen die gewählte Ebene:

$$\cos^2\mathcal{J} = -\operatorname{tang}(G-N)\operatorname{tang}(H-N) \quad \ldots \text{(XI)}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass die der Richtung N entsprechende vom Mittelpunkt des Saturn aus gesehene Länge in der Bahn stets bekannt ist. Da nämlich die Knotenlinie N der Bahn auf der Projectionsebene senkrecht zum Visionsradius auf Saturn steht, so ist die Länge desselben in der Bahn offenbar gleich der Restascension α_0 des Saturn, zur Zeit, für welche die gewählte Lage der mittleren Projectionsebene gilt, weniger 90^0, indem man die Winkel in der Bahn im Sinne der Bewegung der Satelliten, also umgekehrt wie bisher zählt. Es folgt dann hieraus leicht die Relation, durch welche die Länge des Perisaturniums gefunden wird, nämlich:

$$\operatorname{tang}(\alpha_0-\pi-90^0) = \operatorname{tang}(G-N)\sec\mathcal{J} \quad \ldots \text{(XII)}$$

Endlich wird die halbe grosse Axe der Bahn

$$a_1 = \alpha\cos(G-N)\sec(\alpha_0-\pi-90^0) \ldots \text{(XIII)}$$

Um N und $\mathcal{J}$ auf den Aequator als Fundamentalebene zu beziehen, hat man nun, wenn δ_0 die Declination des Saturn zur Zeit bezeichnet, für welche die Lage der mittleren Projectionsebene gilt, die Restascention A und Declination D des Pols der Bahnebene durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin D &= \sin\delta_0\cos\mathcal{J}+\cos\delta_0\sin\mathcal{J}\cos N\\ \sin(\alpha_0-A) &= -\frac{\sin\mathcal{J}}{\cos D}\sin N\end{aligned}\right\} \ldots \text{(XIV)}$$

Knoten und Neigung in Bezug auf den Aequator sind dann $\Omega = A+90^0$ und $i = 90^0-D$.

Um nun zur Bestimmung einer mittleren Länge des Satelliten in seiner Bahn und seiner Umlaufszeit die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden mittleren Anomalien abzuleiten, bin ich folgendermassen verfahren. Zunächst berechnete ich für bestimmte grössere Zeitintervalle eine Ephemeride für die Knotenlinie und die Neigung der Bahn gegen die jedesmalige Projectionsebene nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos\mathcal{J} &= \sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)\\ \sin N &= -\frac{\cos D}{\sin\mathcal{J}}\sin(\alpha-A)\end{aligned}\right\} \ldots \text{(XV)}$$

wo α und δ die jedesmalige geocentrische Restascension und Declination des Saturn zu den gewählten Zeiten sind. Aus dieser Ephemeride interpolirte ich dann die zu den einzelnen Beobachtungszeiten gehörigen betreffenden Werthe. Dann berechnete ich mit diesen

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tang}F = \operatorname{tang}(P-N)\sec\mathcal{J}\\ \text{wo}\quad &F = \alpha-v-\pi-90^0\end{aligned}\right\} \ldots \text{(XVI)}$$

und v die wahre Anomalie des Satelliten ist. Dann erhält man die excentrischen und mittleren Anomalien auf bekannte Weise durch:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}{}^1/_2\,v &= \operatorname{tang}{}^1/_2\,E\\ M &= E-e\sin E\end{aligned}\right\} \ldots \text{(XVII)}$$

Ist nun M_0 eine gesuchte mittlere Anomalie für die Zeit t_0, M die für diese Zeit beobachtete von dem Fehler dM behaftete, weiter μ eine angenommene mittlere tägliche Bewegung des Satelliten, $d\mu$ die gesuchte

Correction derselben und endlich M_1 eine für die Zeit t_1 beobachtete mittlere Anomalie, so kann man nach der Formel

$$d\mu(t_1-t_0)+dM+M-M_1+\mu(t_1-t_0) = 0 \quad \text{(XVIII)}$$

die mittlere Anomalie für die gewählte Epoche und die mittlere Bewegung aus allen Beobachtungen zugleich nach der Methode der kleinsten Quadrate aufsuchen. Es ist selbstverständlich dass die Beobachtungszeiten, welche an dieser Stelle zuerst in die Bahnrechnung eingeführt werden, zuvor von dem Einflusse der Lichtgeschwindigkeit befreit werden müssen. Ist t die beobachtete, t_1 die corrigirte Zeit, so hat man

$$t_1 = t + 497^s78\,(\Delta_0-\Delta) \quad \text{(XIX)}$$

Um mit diesem nunmehr vollständigen Elementensysteme die Beobachtungen wieder darzustellen, braucht man, wenn man die von Bessel hierfür in seiner Untersuchung über die Bewegung des Titan gegebenen etwas weitläuftigen Formeln nicht anwenden will, nur den soeben beschriebenen Weg rückwärts zu verfolgen. Die Formeln (XVII) dienen zunächst zur Bestimmung der wahren Anomalien. Dann hat man weiter durch (XVI) den Positionswinkel P. Die Distanz ϱ findet sich dann einfach durch:

$$\left.\begin{aligned} r &= a_1(1-e\cos E) \\ \varrho &= \frac{\Delta_0 r}{\Delta}\cos F \sec(P-N) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XX)}$$

Die Anzahl der auf diese Weise behandelten Beobachtungen beläuft sich für Enceladus nur auf acht; für Thetis habe ich 23, für Dione 22 und für Rhea 21 Messungen benutzen können. Ich erhielt aus diesen die

Elliptischen Elemente der Satelliten des Saturn:

	Enceladus	Thetis	Dione	Rhea
T =	1880 Oct. 8.0	1880 Oct. 27.0	1880 Oct. 27.0	1880 Oct. 27.0
M_0 =	183° 17′6	95° 33′ 3″	334° 48′ 25″	70° 16′ 52″
U =	1ᵈ 8ʰ 52ᵐ 39ˢ 7	1ᵈ 21ʰ 17ᵐ 58ˢ 1	2ᵈ 17ʰ 40ᵐ 54ˢ 1	4ᵈ 12ʰ 25ᵐ 25ˢ 4
a_1 =	34″33	42″54	54″580	75″968
e =	0.066235	0.006847	0.016888	0.014657
π =	181° 45′ 3	204° 6′ 45″	180° 16′ 48″	239° 26′ 0″
☊ =	127 5.9	113 57 33	124 17 2	127 4 31
i =	4 38.0	7 0 40	6 41 30	6 36 10

Für die Epoche gilt der Meridian von Greenwich und M_0 für den Augenblick, in welchem das Licht die Entfernung 9.53890 vom Saturn zurückgelegt hat. Aus dieser selben mittleren Entfernung ist a_1 gesehen. Das Aequinoctium ist das der Epoche.

Der mittlere Beobachtungsfehler bleibt für den stets unter erschwerenden Umständen gemessenen Enceladus ± 0″905. Für Thetis ist derselbe gleich 0″724, für Dione 0″684 und für Rhea 0″651. Zur richtigen Beurtheilung dieser Fehler bemerke ich, dass die x und y in Bezug auf eine mit der Ringaxe coïncidirende Coordinatenaxe immer so gemessen wurden, dass zwei Einstellungen des Micrometers von jedem Rande des Planeten aus gemacht wurden. Ich musste mich auf diese kleine Zahl beschränken, weil die Beobachtungen, namentlich in der ersten Zeit des regelmässigen Gebrauchs unseres neuen Instrumentes, ziemlich viel Zeit in Anspruch nahmen, und deshalb die Bestimmung des mittleren Beobachtungsmomentes, für die schnell laufenden Satelliten, von zu grosser Unsicherheit behaftet gewesen wäre, wenn ich die Einstellungen an jedem Abende beträchtlich vervielfältigt hätte. Die angewandten Vergrösserungen waren 150 und 250. Alle weiteren wünschbaren Details über diese Arbeit werden in den Memoiren der hiesigen physikalischen Gesellschaft mit denen über meine micrometrischen Messungen des Saturn selbst im Laufe des Sommers gegeben werden.

Die reciproke Masse des Saturn, aus den Bewegungen aller vier Satelliten geschlossen, erhalte ich gleich 3511.6 mit einer Unsicherheit von etwa $\frac{1}{400}$.

Genf, den 2. April 1881.

Dr. *M. Wilhelm Meyer.*