Das Problem der Collineation.

Von

Rudolf Sturm in Darmstadt.

Nachdem ich in früheren Aufsätzen (Math. Annalen Bd. I und VI) die Probleme der ebenen und räumlichen Projectivität behandelt, gehe ich nun zu dem der Collineation (Collinearität oder Homographie) über, unter welchem ich das folgende verstehe:

Wenn im Raume zwei Gruppen von gleich vielen und zugeordneten Punkten gegeben sind, solche entsprechende Punkte zu finden, aus denen die zugeordneten Punkte durch homologe Strahlen collinearer Bündel projicirt werden.

I.

1. *Es seien einerseits fünf Strahlen $a_1, \cdots, a_5$ eines Bündels A gegeben; anderseits vier Punkte $B_1, \cdots, B_4$; ein Punkt B bewegt sich durch den ganzen Raum, BB_i werde mit b_i bezeichnet; wie bewegt sich b_5, wenn*

$$(b_1, \cdots, b_5) \text{ coll. } (a_1, \cdots, a_5)$$

sein soll?

Auf $a_1, \cdots, a_5$ seien ebenfalls feste Punkte $A_1, \cdots, A_5$ gelegt; zwei räumliche Systeme mögen dadurch collinear bezogen sein, dass den fünf Punkten $A_1, \cdots, A_4, A$ die festen Punkte $B_1, \cdots, B_4$ und der bewegliche B entsprechen; ist jedesmal B_5 der Punkt, welcher dem A_5 correspondirt, so ist BB_5 der gesuchte Strahl b_5. Nun durchlaufen ersichtlich B und B_5 collineare räumliche Systeme, denen $B_1, \cdots, B_4$ entsprechend gemein sind; *die Verbindungsgeraden b_5 erzeugen demnach einen tetraedralen Complex 2. Grades**). Derselbe ist mit demjenigen identisch, welcher der Geraden a_5 bezüglich der Gruppen $A_1, \cdots, A_4$; $B_1, \cdots, B_4$ correspondirt**); denn $b_5\,(b_1, \cdots, b_4)$ oder

---

*) Reye, Geometrie der Lage, II, 15. Vortrag.

**) Sturm, Räuml. Project., Math. Ann. Bd. VI, S. 514.

b_5 $(B_1, \cdots, B_4)$ ist stets mit a_5 $(a_1, \cdots, a_4)$ oder a_5 $(A_1, \cdots, A_4)$ projectiv*).

2. Bewegt sich B blos in einer Ebene, so beschreibt B_5 ein collineares ebenes System (Feld); die Geraden b_5 erzeugen die Congruenz (3, 1) der Schnittlinien der Osculationsebenen einer cubischen Raumcurve; zu diesen Schmiegungsebenen gehören auch die Träger der beiden collinearen Felder.

Durchläuft B eine Gerade b, so beschreibt B_5 eine projective Punktreihe und *b_5 erzeugt ein Hyperboloid* $[b]^2$. Geht b durch einen der gegebenen Punkte $B_1, \cdots, B_4$, so thut dies auch der Träger der Reihe B_5; also werden die beiden Reihen perspectiv und das Erzeugniss von b_5 ist ein Strahlbüschel.

Bewegt sich B auf einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch jeden der 4 Punkte B_i λ_i-mal geht, so thut dies auch B_5, und b_5 erzeugt eine Fläche vom Grade $n' = 2n - \sum_1^4 \lambda_i$. Ist z. B. die Curve eine cubische Raumcurve, die durch jeden der vier B_i geht, so ist diese Fläche vom 2. Grade.

3. Werden die Punkte $A_1, \cdots, A_5$ auf $a_1, \cdots, a_5$ verschoben, so ändert sich der Complex, die Congruenz, das Hyperboloid, die dem Raume, einer Ebene, einer Geraden zugehören, nicht; das von B_5 erzeugte räumliche System wird ein anderes; d. h. denselben B entsprechen andere B_5, die jedoch auf derselben Complexgeraden liegen. Das räumliche System B_5 hat sich mithin so verschoben, dass jeder Punkt auf der ihn mit seinem entsprechenden B verbindenden Complexgeraden bleibt. Die Punkte, welche den Punkten B einer Ebene entsprechen, bleiben stets in einer Ebene und alle diese Ebenen, die derselben Ebene des Systems B correspondiren, sind die Schmiegungsebenen der dieser Ebene zugehörigen cubischen Raumcurve. Die homologen Punkte der Punkte einer Geraden bleiben stets auf einer Geraden und diese Geraden sind die Leitgeraden von $[b]^2$.

4. *Es sei α_5 eine Ebene des festen Bündels A*; a', a'' zwei in ihr liegende Strahlen dieses Bündels; die entsprechenden Strahlen b', b'' beschreiben, wenn der bewegliche Scheitel B sich auf einer Curve n^{ter} Ordnung bewegt, zwei Flächen n'^{ten} Grades. Um den Torsus (die abwickelbare Fläche) der Ebenen β_5 zu erhalten, welche je durch b', b''

*) Ich schreibe mit Absicht „projectiv" und „perspectiv" nach Analogie von projettivo und projectif, weil ich nicht einsehe, warum wir Deutschen an die Endung „iv" noch die zweite Endung „isch" hängen sollen. Diese Häufung von Endungen hat übrigens nur wenige Analoga, die meistens auch nicht glückliche Bildungen sind.

gehen und demnach der Ebene α_5 correspondiren, durchschneidet man beide Flächen mit einer Ebene; die Schnittcurven sind eindeutig auf einander bezogen und die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen die Spur des gesuchten Torsus. Da n-mal zwei entsprechende Punkte sich vereinigen, nämlich in den Spuren der Curve n^{ter} Ordnung, so ist die Classe dieser Einhüllungscurve und folglich auch des Torsus

$$2n' - n = 3n - 2\sum_1^4 \lambda_i.$$

Wenn also die Curve, auf der B sich bewegt, eine Gerade b ist, die durch keinen der B_i geht, so ist der Torsus der Ebenen β_5 3. Classe; er ist den beiden von b' und b'' erzeugten Hyperboloiden gleichzeitig umschrieben und hat mit dem Ebenenbüschel b, den sie sonst noch gemein haben, zwei Ebenen gemein. Geht aber b durch einen der Punkte B_i, so beschreibt β_5 einen Ebenenbüschel, dessen Ebenen die homologen Strahlen zweier mit derselben Punktreihe perspectiven Strahlbüschel, der ausgearteten Hyperboloide, verbinden.

Ist die von B beschriebene Curve eine durch alle vier Punkte B_i gehende cubische Raumcurve, so ist der Torsus ein Ebenenbüschel, dessen Axe eine Sehne der Raumcurve ist: in der That, wenn ein Punkt B auf einer durch $B_1, \cdots, B_4$ gehenden cubischen Raumcurve sich bewegt und $b_1, b_2, b_3, b_4, \beta_5$ stets collinear bleibt, so dreht sich β_5 um eine Sehne der Curve.

5. *Nehmen wir nun α_5 beweglich und B_5 fest an,* so gehen von den Ebenen, welche einer Ebene α von A in den Bündeln B entsprechen, deren Scheitel die Gerade b durchläuft, drei durch B_5 (Nr. 4.); woraus hervorgeht, dass die drei α_5, welche $b_5 = BB_5$ correspondiren, in α liegen. Folglich *beschreiben alle α_5 einen Kegel 3. Ordnung.* Seine Kanten sind eindeutig auf die Punkte B von b bezogen; also muss er vom Geschlechte 0 sein und eine Doppelkante haben, welche sich bald ergeben wird.

6. *Sei B ein beliebiger Punkt, so liegen die Scheitel aller Bündel, welche mit dem Bündel B so collinear sind, dass die nach $B_1, \cdots, B_5$ gehenden Strahlen sich entsprechen, auf der durch $B_1, \cdots, B_5, B$ gehenden cubischen Raumcurve.* Denn ist B' der Scheitel eines solchen Bündels, so begegnen sich einfach unendlich viele Strahlen von B mit den homologen von B' und diese Begegnungspunkte, unter denen sich hier auch die Punkte $B_1, \cdots, B_5$ befinden, erzeugen bekanntlich eine cubische Raumcurve, auf der auch die beiden Scheitel B und B' liegen; d. h. B' liegt auf der durch $B_1, \cdots, B_5$ und B gehenden cubischen Raumcurve.

7. Liegt B auf b, so begegnet die zu B gehörige (adjungirte) Raumcurve 3. Ordnung im Allgemeinen der Geraden b nicht noch einmal. Unter den cubischen Raumcurven durch $B_1, \cdots, B_5$ giebt

es aber eine, welche b zweimal trifft; ihre beiden Begegnungspunkte mit b senden nach $B_1, \cdots, B_5$ collineare Bündel; folglich entspricht ihnen auch im Bündel A derselbe Strahl a_5, und wir haben so *die Doppelkante des Kegels* 3. *Ordnung.*

8. *Der Punkt B komme* nun während seiner Bewegung auf b *in die Ebene* $\beta_{123} = B_1 B_2 B_3$; es liegen dann die drei Strahlen b_1, b_2, b_3 in derselben Ebene, während a_1, a_2, a_3 dies nicht thun: wir haben *eine exceptionelle Collineation**) zwischen den Bündeln A und B; die Ebene β_{123} ist die singuläre Ebene in B, der Strahl a_4 der singuläre Strahl in A; jedem weiteren Strahle b' von B in β_{123} correspondiren einfach unendlich viele Strahlen von A, alle in der Ebene α' gelegen, die durch a_4 geht, und für welche $a_4 (a_1, a_2, a_3, \alpha') \barwedge B(B_1, B_2, B_3, b')$; hingegen allen Strahlen von B, die nicht in die Ebene β_{123} fallen, entspricht der eine singuläre Strahl a_4. Folglich fällt bei dieser Lage des Scheitels B der dem b_5 entsprechende Strahl a_5 nach a_4; a_4 und ebenso a_1, a_2, a_3 sind also Kanten des Kegels 3. Ordnung.

9. Sei B_5 nun wieder beweglich und α eine Ebene im Bündel A; so gehen von den Ebenen β, welche ihr in dem veränderlichen Bündel B (auf b) entsprechen, zwei durch b (Nr. 4), folglich fällt zweimal der Strahl in A, welcher b entspricht, in die Ebene α; die Strahlen also in A, die dem festen Strahl b der veränderlichen Bündel, deren Scheitel sich auf b bewegt, entsprechen, erzeugen einen Kegel 2. Grades, der durch a_1, a_2, a_3, a_4 geht (Nr. 8).

10. Sei β eine durch b gelegte Ebene; untersuchen wir, indem sie zu den verschiedenen Bündeln gerechnet wird, die Bewegung der entsprechenden Ebene in A. Sei A_5 und a_5 wieder eingeführt; von den entsprechenden b_5, die ein Hyperboloid $[b]^2$ bilden, liegt also eine in β; folglich geht die der β entsprechenden Ebene und nur diese durch A_5 (oder a_5); also bilden diese Ebenen einen Ebenenbüschel. Derselbe ist der Punktreihe b projectiv; sei seine Axe a und die eines andern Büschels, welcher der Ebene β' durch b zugehört, a'; die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen von a und a' erzeugen mithin einen Kegel 2. Grades, der auch durch a und a' geht; aber diese Schnittlinien sind die entsprechenden Strahlen von $b = \beta\beta'$, also ist unser Kegel der obige in Nr. 9. Mithin:

Die entsprechenden Strahlen in A zu dem festen Strahle b der Bündel, deren Scheitel sich auf b bewegt, erzeugen denselben Kegel 2. *Grades, wie die Axen der Büschel, welche je von den Ebenen gebildet werden, die jeder Ebene durch b in A entsprechen.* Jede Kante ist

*) Hirst, on the correlation of two planes (Proceed. Lond. Math. Society V, p. 40; Annali di matem. ser. II, t. VI, p. 260 Nr. 11—14).

also gleichzeitig die homologe Gerade von b für eine gewisse Lage von B auf b und die Axe des Büschels der Ebenen, die einer gewissen β durch b correspondiren.

11. *Sei nun A_5 fest und bewege sich auch der Scheitel A auf einer Geraden a; welches Flächensystem erzeugen die Hyperboloide $[b]^2$, bez., was dasselbe ist, welches Liniensystem ihre Erzeugenden b_5?*

Wenn β eine beliebige Ebene ist, so wird dieselbe von so vielen Hyperboloiden tangirt, als Erzeugende b_5 durch den Punkt $b\beta$ gehen und in β liegen; weil aber alle b_5, die durch diesen Punkt gehen, wegen Nr. 5. einen Kegel 3. Ordnung erzeugen, so ist die Zahl der β tangirenden Hyperboloide 3.

Suchen wir ferner die Zahl der b_5, die durch einen Punkt B_5 gehen; dieselben liegen alle in der Ebene $B_5 b$ und wir haben die Classe der Curve zu ermitteln, die von den b_5 in einer Ebene β durch b umhüllt wird. Durch jeden Punkt von b gehen in β, wie eben gezeigt, drei; ausserdem aber ist noch b selbst eine Doppeltangente dieser Curve.

12. Seien nämlich B', B'' irgend zwei Punkte auf b; so beschreiben nach Nr. 5. die beiden Strahlen b_5', b_5'', welche dem mit A beweglichen Strahle a_5 entsprechen, zwei Kegel 3. Ordnung, welche beide eindeutig auf die Punktreihe a, also auch auf einander bezogen sind. Jede Ebene durch b schneidet 3 Strahlen aus dem Kegel (B') aus, deren drei correspondirende auf (B'') mit b die drei entsprechenden Ebenen geben, ebenso umgekehrt. Also giebt es sechs Coincidenz-Ebenen, zu denen aber auch die vier Ebenen nach $B_1, \cdots, B_4$ gehören (entsprechend den Spuren von a in den vier Ebenen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$).

In den beiden übrigen Ebenen β^* und β^{**} (durch b) liegen also zwei demselben Punkte A^*, bez. A^{**} von a entsprechende b_5' b_5''. Die andern b_5 für A^* z. B. (d. h. die den andern Punkten B von b zugehörigen) liegen dann auch in dieser Ebene β^*. Denn weil b_5' und b_5'' beide in β^* liegen, so gehen die der β^* in A^* entsprechenden Ebenen α (wenn β^* zum Bündel B' oder B'' gerechnet wird) beide durch $a_5 = A^* A_5$; also ist a_5 die Axe des Büschels aller Ebenen α in A^*, welche β^* entsprechen, jenachdem sie zu den verschiedenen Bündeln mit auf b befindlichen Scheiteln gerechnet wird, woraus folgt, dass auch die b_5 in allen diesen Bündeln, welche a_5 entsprechen, in β^* liegen. Das Hyperboloid dieser b_5 hat sich also für A^* und ebenso für A^{**} in einen in β^*, bez. β^{**} gelegenen Kegelschnitt verwandelt.

13. Wenn $A^* A_5$ die Axe eines Büschels von Ebenen ist, die der Ebene β^* entsprechen, so ist sie auch die entsprechende Gerade von b für eine gewisse Lage von B, d. h. in die b fällt, weil dasselbe auch für A^{**} gilt, b_5 zweimal. Mithin ist einerseits gefunden, dass die beiden

Kegelschnitte in β^* und β^{**}, welche entartete Hyperboloide sind, die Gerade b berühren; andererseits, dass für die in Nr. 11. betrachtete Einhüllungscurve b eine doppelte Tangente ist, diese Curve also von der 5^{ten} Classe ist. Folglich gehen durch jeden Punkt B_5 fünf Gerade b_5 und fünf Hyperboloide $[b]^2$; *das Liniensystem der* b_5 *ist demnach* (5, 3); *in dem Hyperboloidsysteme gehen je fünf Flächen durch einen Punkt, berühren je drei eine Ebene und zwei sind zu Kegelschnitten ausgeartet.*

In der Ebene jedes dieser Kegelschnitte zerfällt also die Curve 5. Classe in den Kegelschnitt und eine Curve 3. Classe.

14. Kommt der Scheitel A bei der Bewegung auf a in eine der vier Ebenen $\alpha_{ikl} = A_i A_k A_l$, so degenerirt das Hyperboloid ebenfalls und zwar in ein System von zwei ebenen Strahlbüscheln, deren Scheitel auf der Schnittlinie der Träger liegen. Es liege z. B. A in α_{123}, so muss nach Nr. 8. den beiden Strahlen a_4 und a_5, die nicht in der Ebene $a_1 a_2 a_3$ liegen, dieselbe Gerade b_4 entsprechen, d. h. wo auch B auf b sich befindet, b_5 geht stets durch B_4 und beschreibt also den Strahlbüschel (B_4, b). Gelangt jedoch auch B in die Ebene β_{123}, so ist durch das Entsprechen von a_1, a_2, a_3, a_4 und b_1, b_2, b_3, b_4 die Collineation nicht bestimmt; ist a^0 der Schnittstrahl $(\alpha_{123}, a_4 a_5)$ und b^0 so in β_{123} construirt, dass $b_1 b_2 b_3 b^0 \;\overline{\wedge}\; a_1 a_2 a_3 a^0$, so kann *jeder* Strahl der Ebene $b^0 b_4$ im Bündel B der dem a_5 entsprechende Strahl sein; denn sei b_5 ein solcher Strahl, so sind dann in der durch das Entsprechen von $a_1 a_2 a_4 a_5$ und $b_1 b_2 b_4 b_5$ bestimmten Collineation auch a^0 und b^0, a_3 und b_3 homolog. Also der eine Punkt $B = b\beta_{123}$ liefert den ganzen zweiten Büschel. *Das Hyperboloidsystem enthält mithin vier Ebenenpaare.*

15. Jedem Punkte von a entspricht demgemäss ein Hyperboloid $[b]^2$ und im Allgemeinen auch umgekehrt jedem Hyperboloid ein Punkt von a. Aber den beiden Begegnungspunkten der a mit der sie zweimal treffenden cubischen Raumcurve durch $A_1, \cdots, A_5$ entspricht das nämliche Hyperboloid. *Dasselbe ist also in unserem Flächensysteme doppelt*; d. h. es zählt bei jedem seiner Punkte für zwei von den fünf durchgehenden Systemflächen; ebenso zählt die durch ihn gehende Erzeugende b_5 für zwei Gerade im Liniensysteme (5, 3). Die Erzeugenden dieses Hyperboloids sind die Doppelkanten der den verschiedenen Punkten B von b zugehörigen Kegel 3. Ordnung (Nr. 5.), und diejenige, welche je in einer Ebene β durch b liegt, ist eine zweite Doppeltangente der Curve 5. Classe in dieser Ebene (Nr. 11., 13.). Ausser den beiden schon gefundenen Doppeltangenten muss diese Curve, weil sie eindeutig auf die Punktreihe a bezogen ist, noch vier andere haben: dies sind die Schnittlinien von β mit den vier Ebenen β_{123}, β_{124}, β_{134}, β_{234}.

Denn jeder Strahl b_5 um $B = b\beta_{123}$ in β_{123} ist für zwei Punkte A auf a entsprechender Strahl von a_5; in dem Bündel B ist nämlich β_{123} singuläre Ebene, in welcher b_1, b_2, b_3, b_5 liegen, jedem dieser Strahlen entsprechen ganze Büschel von Strahlen, deren Ebenen durch den singulären Strahl von A gehen (Nr. 8.) und, da je einer von ihnen bez. durch A_1, A_2, A_3, A_5 gehen soll, je diese Punkte enthalten. Dem b_4, welcher ausserhalb der singulären Ebene β_{123} liegt, muss der singuläre Strahl a' in A correspondiren; derselbe muss demnach durch A_4 gehen, a in A treffen und so beschaffen sein, dass $a'(A_1 A_2 A_3 A_5) \barwedge B(B_1 B_2 B_3 b_5)$. Also sind die Punkte A die beiden Schnittpunkte der a und des Kegels 2. Grades mit der Spitze A_4, dessen Kanten mit den Punkten A_1, A_2, A_3, A_5 das Doppelverhältniss $B(B_1 B_2 B_3 B_5)$ umfassen.

16. Unser Flächensystem hat die Charakteristiken $\mu = 5$, $\varrho = 3$; ferner ist $\psi = 4$, und, wie wohl nicht schwer zu erkennen, die Zahl φ der Kegel $= 0$; die Zahl der Kegelschnitte ist, wie oben gefunden, 2, jedoch ist in der Formel: $2\mu = \chi + \nu$ jeder derselben doppelt zu rechnen, also $\chi = 2 \cdot 2$, wie mir Herr Zeuthen, dem ich gelegentlich über dies System schrieb, bemerkte: in der That, fassen wir in der Correspondenz (μ, μ), hier also $(5, 5)$, auf einer beliebigen Geraden, aus der die obige Formel folgt, den Schnittpunkt B' mit einer der Kegelschnittebenen ins Auge: von den 5 durch ihn gehenden Geraden des Liniensystems sind zwei Tangenten des Kegelschnitts, die 3 andern gehören allgemeinen Hyperboloiden an; im Flächensysteme gehen also durch ihn die Kegelschnittebene als ausgeartete Fläche und drei Flächen; folglich ist jene doppelt zu rechnen; und von den fünf zweiten Schnittpunkten haben sich zwei mit B' vereinigt; also ist derselbe ein doppelter Coincidenzpunkt. Nun führen die drei Formeln:

$$\varphi = 0 = 2\varrho - \nu = 6 - \nu,$$

$$\chi = 2 \cdot 2 = 2\mu - \nu = 10 - \nu$$

und

$$\psi = 4 = 2\nu - \mu - \varrho = 2\nu - 8$$

alle zu: $\nu = 6$.

II.

17. *Wir geben nun auch dem Punkte B_5 eine feste Lage, so dass wir die beiden Gruppen $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$ haben.* Lassen wir diese einander entsprechen, so sind die beiden Räume (a) und (b) collinear bezogen. Jedem Punkte A correspondirt ein B. *Alle Punkte, die dem A bezüglich $A_1, \cdots, A_5$ adjungirt sind, d. h. welche nach diesen Punkten Bündel senden, die mit A $(A_1, \cdots, A_5)$ collinear sind, erzeugen die durch $A_1, \cdots, A_5$, A gehende cubische Raumcurve a^3 (die dem A adjungirte)* nach Nr. 6.; *alle Punkte B, die ihm (und seinen adjungirten) in Bezug auf beide Gruppen $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$*

correspondiren, d. h. nach $B_1, \cdots, B_5$ Strahlenbündel senden, die zu A ($A_1, \cdots, A_5$) collinear sind, bilden offenbar die cubische Curve b^3, welche der a^3 als zu (a) gehörig in (b) entspricht; zwei derartige Curven mögen *analog* heissen. Es ist nicht schwer, einzusehen, dass zwei solche analoge Curven es auch im Probleme der räumlichen Projectivität (Abschnitt II.) sind; d. h. dass die Ebenenbüschel, welche von irgend einer Sehne der einen Curve nach $A_1, \cdots, A_5$, und von irgend einer Sehne der andern nach $B_1, \cdots, B_5$ gehen, projectiv sind.

Die beiden Bündel cubischer Raumcurven durch $A_1, \cdots, A_5$ und $B_1, \cdots, B_5$ sind collinear, indem sich je die analogen entsprechen. Die analoge Curve in (b) zu einer in (a) erhält man so: sei A ein Punkt der letzteren, so construire man die beiden Kegel mit den Spitzen B_5, B_4, deren Kanten b', bez. b'' so sind, dass $b'(B_1B_2B_3B_4) \wedge AA_5(A_1A_2A_3A_4)$ und $b''(B_1B_2B_3B_5) \overline{\wedge} AA_4(A_1A_2A_3A_5)$; ihr Schnitt ausser B_4B_5 ist die gesuchte Curve.

18. *Bewegt sich A auf einer Geraden a, so beschreibt die adjungirte Curve a^3 eine Fläche 5. Ordnung, welche die fünf Punkte $A_1, \cdots, A_5$ zu dreifachen Punkten, ihre 10 Verbindungsgeraden zu einfachen Geraden hat und die die a zweimal treffende erzeugende Curve doppelt enthält*). Die analoge Curve b^3 gleitet ebenfalls an einer Geraden hin,* der entsprechenden in der räumlichen Collineation, *erzeugt die entsprechende Fläche 5. Ordnung, auf der die entsprechenden Gebilde der eben genannten in derselben Weise liegen.*

Da diese Fläche von einer beliebigen Geraden fünfmal getroffen wird, so zeigt sich nochmals, dass *fünf Punkte von a einen correspondirenden auf b haben*, wie dies sich ja schon daraus ergab, dass fünf der Hyperboloide $[b]^2$, die den Punkten von a zugehören, durch B_5 gehen.

19. Nur einfach unendlich viele analoge Curven der beiden Bündel (Nr. 17.) treffen einander; wir suchen *den Ort dieser Begegnungspunkte, also derjenigen Punkte $(C)_5$, die zugleich nach beiden Gruppen collineare Bündel senden.*

Sei γ eine beide Räume durchziehende Ebene; A ein Punkt derselben aus dem Raume (a); seine correspondirende Curve trifft γ in drei Punkten B; ebenso entsprechen jedem B drei A. Bewegt sich A in γ auf einer Geraden a, so schneidet die Fläche der correspondirenden Curven in γ eine Curve 5. Ordnung ein. Daraus ergiebt sich nach dem Correspondenz-Princip der Ebene**), dass es $3+3+5=11$

*) Reye, Schlömilch's Zeitschrift Bd. 13, S. 525. — Sturm, Borchardt's Journal Bd. 79, S. 99.

**) Salmon, Geometry of three dimensions, 2. Aufl., S. 511 (wie in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie citirt wird), 3. Aufl., S. 537; deutsche

Coincidenzen von A und B giebt. Alle 11 sind Begegnungspunkte analoger Curven. Der Ort der Punkte $(C)_5$ ist demnach *eine Curve* 11. *Ordnung*; dieselbe geht ersichtlich durch die 10 Gruppenpunkte und die vier Punkte, die den beiden collinearen Räumen entsprechend gemein sind.

20. Die acht weiteren Schnittpunkte dieser Curve, z. B. mit der Ebene α_{123}, sind leicht zu ermitteln. Sei A ein Punkt dieser Ebene, so besteht die ihm adjungirte Curve aus der Geraden $a_{45} = A_4 A_5$ und dem Kegelschnitte in α_{123} durch A_1, A_2, A_3, A und die Spur von a_{45}, die correspondirende aus b_{45} und dem analogen Kegelschnitte in β_{123} durch B_1, B_2, B_3, und die Spur von b_{45}; d. h. dem, von dessen Punkten nach diesen vier Punkten Büschel gehen, die zu den von den Punkten jenes Kegelschnitts nach den homologen Punkten gehenden Büscheln projectiv sind. Da also die veränderlichen Theile der correspondirenden Curven der Punkte von α_{123} in β_{123} liegen, so kann eine Coincidenz nur auf der Geraden $\alpha_{123}\beta_{123}$ statthaben: jedem A oder B dieser Geraden entsprechen zwei bewegliche Schnittpunkte seiner correspondirenden Curve mit dieser Geraden; also giebt es vier Coincidenzen. Dies sind Punkte unserer Curve 11. Ordnung. Die vier übrigen in α_{123} sind $\alpha_{123}b_{45}$, $a_{12}\beta_{345}$, $a_{13}\beta_{245}$, $a_{23}\beta_{145}$.

III.

21. Es seien nun zwei Gruppen von je sechs Punkten gegeben: $A_1, \cdots, A_6$; $B_1, \cdots, B_6$. Wir bilden aus ihnen zwei Gruppenpaare von je fünf Punkten: $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$, welche wir $(\mathsf{A})^5$ und $(\mathsf{B})^5$ nennen wollen, und $A_1, \cdots, A_4, A_6$; $B_1, \cdots, B_4, B_6$, welche $(\mathsf{A}')^5$ und $(\mathsf{B}')^5$ heissen mögen. Wenn nun ein Punkt A im Raume (a) einen derartigen correspondirenden B in (b) hat, dass

$$A(A_1, \cdots, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_6),$$

der ihm also in Bezug auf die beiden sechspunktigen Gruppen $(\mathsf{A})^6$, $(\mathsf{B})^6$ entspricht, so muss B sowohl auf der A in Bezug auf $(\mathsf{A})^5 (\mathsf{B})^5$ correspondirenden Curve in (b), als auch auf der in Bezug auf $(\mathsf{A}')^5 (\mathsf{B}')^5$ correspondirenden liegen. Ist A ein beliebiger Punkt, so haben diese beiden correspondirenden Curven im Allgemeinen (ausser den Punkten $B_1, \cdots, B_4$) keinen Punkt gemein; also hat im Allgemeinen ein Punkt keinen correspondirenden in Bezug auf $(\mathsf{A})^6$, $(\mathsf{B})^6$. Wir haben mithin die Fläche $\mathfrak{A}^*$ der Punkte $(A)_6$ aufzusuchen, welche correspondirende

---

Bearbeitung 2. Aufl., 2. Th., S. 556. — Zeuthen hat dies Princip selbständig gefunden (Comptes rendus Juni 1874), rein geometrisch bewiesen und auf den Fall einer Coincidenzcurve, sowie auf den Raum ausgedehnt.

Punkte $(B)_6$ haben. Diese correspondirenden erfüllen natürlich eine Fläche von derselben Art: $\mathfrak{B}^*$.

22. Sei a eine beliebige Gerade, auf welcher ein Punkt bewegt werde; seine entsprechende Curve in Bezug auf $(A)^5 (B)^5$ beschreibt eine Fläche 5. Ordnung, und ebenso die in Bezug auf $(A')^5$, $(B')^5$; diese Flächen haben ausser den 6 Verbindungslinien der Punkte $B_1, \cdots, B_4$ noch eine Curve 19. Ordnung gemein. Jeder Punkt B auf dieser hat, weil durch ihn je eine erzeugende Curve der beiden Flächen geht, einen entsprechenden Punkt A und A' auf a, deren Coincidenzen wir suchen. Die dem Punkte A auf der ersten Fläche entsprechende Curve trifft die zweite Fläche und damit die Curve 19. Ordnung ausser in den vier Punkten B_i noch in 3 Punkten, denen also 3 Punkte A' entsprechen; ebenso umgekehrt. Folglich giebt es 6 Coincidenzen der A und A'. Kommt nun A in die Ebene α_{123}, so besteht die entsprechende Curve auf der ersten Fläche aus der Geraden b_{45} und einem gewissen Kegelschnitte durch B_1, B_2, B_3 zusammengesetzt; die drei Begegnungspunkte dieser Curve mit der andern Fläche sind die beiden ferneren Schnittpunkte von b_{45} ausser dem dreifachen Punkte B_4 und der einzige noch übrige des Kegelschnitts ausser den drei dreifachen Punkten B_1, B_2, B_3. Die durch den letzten Punkt gehende erzeugende Curve der zweiten Fläche besteht aus b_{46} und einem gewissen Kegelschnitte in der Ebene β_{123}; folglich liegt sein entsprechender Punkt A' auf a in α_{123}, ist mithin unser jetziger Punkt A. Es ist auf diese Weise eine Coincidenz von A und A' zu Stande gekommen; ebenso geben die drei andern Ebenen α_{124}, α_{134}, α_{234} Coincidenzen; und es bleiben nur noch zwei weitere.

23. Die vier Coincidenzpunkte, die in den Ebenen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ liegen, führen, obgleich ihre correspondirenden Curven in Bezug auf $(A)^5 (B)^5$ und auf $(A')^5 (B')^5$ sich begegnen, doch nicht zu Paaren von correspondirenden Punkten in Bezug auf $(A)^6 (B)^6$, d. h. zu solchen Punktepaaren, welche collineare Bündel nach den beiden sechspunktigen Gruppen senden.

Denn es sei A ein beliebiger Punkt in α_{123} (wie ja a in Nr. 22. eine beliebige Gerade ist). Man lege durch ihn die beiden Kegelschnitte, welche durch A_1, A_2, A_3 und bez. die Spuren A_{45}, A_{46} von a_{45} und a_{46} geben, und construire in β_{123} durch B_1, B_2, B_3 und bez. die Spuren B_{45}, B_{46} von b_{45} und b_{46} die analogen Kegelschnitte (Nr. 20.), die Kegelschnitttheile der beiden dem Punkte A correspondirenden cubischen Raumcurven; ist nun B deren vierter Schnittpunkt, so ist zwar, weil A und B den einen analogen Kegelschnitten angehören,

$$A(A_1, \cdots, A_5) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_5),$$

und weil sie auch auf den andern liegen,

$$A(A_1, \cdots, A_4, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_4, B_6);$$

daraus folgt aber noch nicht:

$$A(A_1, \cdots, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_6).$$

Denn dazu ist nothwendig, dass durch das Entsprechen von $A(A_1, \cdots, A_4)$ und $B(B_1, \cdots, B_4)$ eine einzige collineare Beziehung festgesetzt wird. Hier aber, wo sowohl $A(A_1 A_2 A_3)$ als $B(B_1 B_2 B_3)$ in einer Ebene liegen, giebt es ein System von einfach unendlich vielen Collineationen, in denen sich jene Strahlen entsprechen: man kann nämlich noch irgend einem Strahle a' von A irgend einen Strahl b' in B zuordnen, wofern nur $AA_4(A_1 A_2 A_3 a') \overline{\wedge} BB_4(B_1 B_2 B_3 b')$ *); in der Collineation, die durch das Entsprechen von $A(A_1 A_2 A_4 a')$ und $B(B_1 B_2 B_3 b')$ bestimmt ist, sind in Folge dieser Projectivität AA_3 und BB_3 homolog, weil dies bei den Schnittstrahlen $(\alpha_{123}, a'A_4)$ und $(\beta_{123}, b'B_4)$ der Fall ist (vergl. Nr. 14.). Im Allgemeinen werden nun in einer der unendlich vielen Collineationen AA_5 und BB_5, in einer andern AA_6 und BB_6 correspondiren.

24. Also die Punkte, in denen die Gerade a den vier Ebenen α_{ikl} begegnet, haben keine solchen correspondirenden, dass aus ihnen collineare Bündel nach den beiden Gruppen $(A)^6$ und $(B)^6$ gehen. Es gilt dies mithin nur für die beiden andern Coincidenzpunkte, die sich ergeben haben.

Diejenigen Punkte $(A)_6$ im Raume (a), welche in Bezug auf die beiden Gruppen $(A)^6$ $(B)^6$ correspondirende haben, erfüllen eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$, die entsprechenden $(B)_6$ eine ebensolche Fläche $\mathfrak{B}^2$.

25. Die Curven, in denen diese Flächen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ bez. von α_{123} und β_{123} durchschnitten werden, lassen sich leicht als Kegelschnitte erkennen. Denn wenn auch nicht alle Punkte von α_{123} correspondirende haben, so haben doch einfach unendlich viele von ihnen und zwar nothwendig in β_{123}. Solche correspondirende Punkte A und B müssen dann, wenn die Spuren von a_{56} in α_{123}, b_{56} in β_{123} bez. A_{56}, B_{56} sind, der Bedingung genügen:

$$A(A_1 A_2 A_3 A_{45} A_{46} A_{56}) \wedge B(B_1 B_2 B_3 B_{45} B_{46} B_{56});$$

denn ist das der Fall und lässt man dann $A(A_1, A_2, A_4, A_5)$ und $B(B_1, B_2, B_4, B_5)$ entsprechen, wodurch eine einzige Collineation bestimmt wird, so entsprechen sich auch $A(A_3, A_5, A_6)$ und $B(B_3, B_5, B_6)$.

Die Punkte aber A und B, welche der obigen Bedingung genügen, erfüllen zwei cubische Curven, welche bez. durch die Punkte der Grup-

---

*) Man erhält alle möglichen Collineationen, wenn a' festgehalten und b' in der durch die obige Projectivität bestimmten Ebene gedreht wird; eine Veränderung von a' wird nur dieselben Collineationen reproduciren.

pen gehen, wofern die Lage dieser Punkte eine ganz beliebige*). Das ist nun hier nicht der Fall, denn sowohl A_{45}, A_{46}, A_{56}, als auch B_{45}, B_{46}, B_{56} liegen je in einer Geraden.

Es sei also A ein beliebiger Punkt auf der Geraden der drei ersten Punkte und B der zweite Schnittpunkt des analogen Kegelschnitts durch B_1, B_2, B_3, B_{45} mit der zweiten Geraden, so folgt, weil $AA_{45} \equiv AA_{46} \equiv AA_{56}$ und ebenso $BB_{45} \equiv BB_{46} \equiv BB_{56}$, dass

$$A(A_1 A_2 A_3 A_{45} A_{46} A_{56}) \overline{\wedge} B(B_1 B_2 B_3 B_{45} B_{46} B_{56}),$$

ohne dass dies zu:

$$A(A_1 A_2 \cdots A_6) \text{ coll. } B(B_1 B_2 \cdots B_6)$$

führte.

Die beiden Geraden nehmen also an den Curven 3. Ordnung theil, welche demnach je in sie und einen durch A_1, A_2, A_3 bez. B_1, B_2, B_3 gehenden Kegelschnitt $\mathfrak{a}^2_{123}$, $\mathfrak{b}^2_{123}$ zerfallen. Auf den Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ liegen nur die letzteren.

26. Wie auf der Curve 3. Ordnung, so liegen auch auf $\mathfrak{a}^2_{123}$ und $\mathfrak{b}^2_{123}$ Punkte von folgender Art: allen Punkten des Kegelschnitts durch $A_1 A_2 A_3 A_{46} A_{56}$ entspricht in Bezug auf die beiden Gruppen, von denen die eine aus diesen Punkten, die andere aus den homologen Punkten besteht, ein einziger Punkt; derselbe liegt auf $\mathfrak{b}^2_{123}$ **); ebenso solche Punkte liefern die Kegelschnitte durch $A_1 A_2 A_3 A_{45} A_{56}$ und durch $A_1 A_2 A_3 A_{45} A_{46}$ (die drei andern werden Geradenpaare); nennen wir diese Punkte B^6_{123}, B^5_{123}, B^4_{123}. Drei ähnliche Punkte ergeben sich auf $\mathfrak{a}^2_{123}$.

27. *Mit den eben gefundenen Kegelschnitten $\mathfrak{a}^2_{ikl}$, $\mathfrak{b}^2_{ikl}$ liegen natürlich auch die Punkte $A_1, \cdots, A_6$, $B_1, \cdots, B_6$ bez. auf $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$*; wie dies auch von anderer Seite zu erkennen ist.

Sei nämlich a_0^3 die cubische Raumcurve durch die 6 Punkte $A_1, \cdots, A_6$; ist b_0^3 die ihr als Curve durch $A_1, \cdots, A_5$ analoge in Bezug auf $(A)^5$, $(B)^5$, so entsprechen allen Punkten von a_0^3 in Bezug auf diese Gruppen alle Punkte von b_6^3; weil bei dem Punkte A_6 der Strahl $A_6 A_6$ unbestimmt ist, also passend gewählt werden kann, so entsprechen diesem Punkte A_6 alle Punkte von b_6^3 auch in Bezug auf die beiden sechspunktigen Gruppen.

A_6 liegt demnach auf $\mathfrak{A}^2$, b_6^3 auf $\mathfrak{B}^2$; ebenso liegen auf $\mathfrak{B}^2$ die fünf Curven $b_1^3, b_2^3, \cdots, b_5^3$, die den Punkten $A_1, \cdots, A_5$ correspondiren, und die Fläche $\mathfrak{A}^2$ besitzt sechs ebensolche Curven $a_1^3, \cdots, a_6^3$,

*) Ebene Projectivität Nr. 14.

**) Ebene Projectivität Nr. 5, 6, 14.

die den Punkten $B_1, B_2, \cdots, B_6$ *entsprechen.* Es folgt daraus, dass $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ Flächen mit reellen Geraden sind.

28. Der Kegelschnitt $(A_1 A_2 A_3 A_{46} A_{56})$ ist die Projection der Curve a_0^3 aus A_6 auf α_{123}; daraus geht hervor, dass der Punkt B^6_{123} auf der Sehne durch B_6 (aus welchem Punkte B_4 und B_5 auf β_{123} in B_{46} und B_{45} projicirt werden) an die Curve b_6^3 liegt*), die zu a_0^3 in Bezug auf $(A)^5 (B)^5$ analog ist; diese Sehne liegt ja auch auf $\mathfrak{B}^2$, weil sie mit ihr 3 Punkte gemein hat.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass je zwei Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2_{ikl}$ (oder $\mathfrak{b}^2_{ikl}$) zwei Punkte gemein haben, so dass durch drei, wie $\mathfrak{a}^2_{123}$, $\mathfrak{a}^2_{124}$, $\mathfrak{a}^2_{345}$, eine Fläche 2. Grades gelegt werden kann. Da nun die Sehne aus A_6 an a_6^3 diese 3 Kegelschnitte trifft, so liegt sie auf dieser Fläche, also auch A_6; womit dann sich zeigen lässt, dass alle andern Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2_{ikl}$ mit derselben mindestens 5 Punkte gemein haben, also auf ihr liegen; dies führt dazu, dass je die Sehne aus einem Punkte A_i an die Curve a_i^3 der Fläche angehört und also auch diese Curve selbst, weil sie 7 Punkte mit ihr gemein hat. Damit ist ein von Nr. 24. unabhängiger Beweis gegeben, dass die sechs Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2_{ikl}$ und die 6 Curven a_i^3 auf derselben Fläche 2. Grades liegen.

29. *Jede Curve* a^3 *durch* 5 *Punkte* A_i *trifft* $\mathfrak{A}^2$ *nur noch in einem Punkte*; auf jeder solchen Curve a^3 giebt es also nur einen Punkt $(A)_6$, der einen correspondirenden in Bezug auf $(A)^6 (B)^6$ hat.

Dies lässt sich auch ohne Kenntniss der Flächen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ einsehen. Die Curve a^3 gehe durch $A_1, \cdots, A_5$. Die Curven 3. Ordnung durch die Punkte $A_1, \cdots, A_4, A_6$, welche eine Gerade a treffen, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung, für welche diese fünf Punkte dreifach sind und die also von a^3 ausser in $A_1, \cdots, A_4$ noch in drei Punkten getroffen wird; geht a durch einen der Punkte $A_1, \cdots, A_4$, so entartet die Fläche 5. Ordnung in einen Kegel 2. Ordnung, der diesen Punkt zur Spitze hat: a^3 hat mit demselben ausser den Punkten $A_1, \cdots, A_4$ noch einen Punkt gemein. Folglich erzeugen die cubischen Raumcurven durch $(A')^5$, welche a^3 treffen, eine cubische Fläche, die die vier Punkte $A_1, \cdots, A_4$ zu Doppelpunkten hat. Die analogen Curven durch $(B')^5$ erzeugen ebenfalls eine Fläche 3. Ordnung, welche in $B_1, \cdots, B_4$ Doppelpunkte hat und die von der analogen Curve zu a^3 durch $(B)^5$ ausser in diesen Doppelpunkten in einem Punkte getroffen wird. Folglich wird jede Curve durch $(A)^5$ nur von einer Curve durch $(A')^5$ getroffen, in der Art, dass die analogen Curven durch $(B)^5$ und $(B')^5$ sich auch begegnen; womit der Beweis geführt ist. Es ist

*) Räumliche Projectivität Nr. 22.

dann zugleich erkannt, dass jeder Punkt, der überhaupt einen correspondirenden in Bezug auf $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$ hat, nur einen hat.

30. Dass die Curve $a_0{}^3$ (Nr. 27.) der Fläche $\mathfrak{A}^2$ ausser in den Punkten A_i nicht begegnet, kann man auch ohne Kenntniss der Ordnung von $\mathfrak{A}^2$ einsehen.

Wenn A ein Punkt auf $a_0{}^3$ ist, B einer auf $b_6{}^3$, welche jener in Bezug auf die Gruppen $(\mathsf{A})^5\,(\mathsf{B})^5$ analog ist, so sind $A\,(A_1, \cdots, A_5)$ und $B\,(B_1, \cdots, B_5)$ collinear. Sucht man in B den entsprechenden Strahl zu $A A_6$, so wird derselbe sich nicht ändern, wenn A die Curve $a_0{}^3$ durchläuft, weil dabei der Bündel $A\,(A_1, \cdots, A_6)$ collinear bleibt; nur die Bewegung von B auf $b_6{}^3$ wird jenen Strahl verändern, sodass er blos einfach unendlich viele Lagen einnehmen kann, von denen im Allgemeinen keine B_6 enthält. Diese Lagen erzeugen nach Nr. 4. eine Fläche 2. Grades. Demnach hat von den Punkten auf $a_0{}^3$ keiner einen correspondirenden in Bezug auf $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$, ausgenommen die sechs A_i. Hieraus, in Verbindung mit der vor. Nr., lässt sich die Ordnung der Fläche $\mathfrak{A}^2$ ableiten.

Daraus folgt weiter, dass keine zwei $b_i{}^3$, z. B. $b_5{}^3$ und $b_6{}^3$, ausser den Punkten $B_1, \cdots, B_4$ noch einen Punkt gemein haben; denn derselbe (B) würde dann, wenn A irgend ein Punkt von $a_0{}^3$ ist, so beschaffen sein, dass

$$B(B_1, \cdots, B_5) \text{ coll. } A\,(A_1, \cdots, A_5),$$

weil er auf $b_6{}^3$ liegt, und

$$B\,(B_1, \cdots, B_4, B_6) \text{ coll. } A(A_1, \cdots, A_4, A_6),$$

weil B auf $b_5{}^3$ liegt, so dass auch, weil $A\,(A_1, A_2, A_3, A_4)$ und $B\,(B_1, B_2, B_3, B_4)$ durch ihr Entsprechen eine einzige Collineation bewirken,

$$B\,(B_1, \cdots, B_6) \text{ coll. } A(A_1, \cdots, A_6);$$

also alle Punkte von $a_0{}^3$ hätten einen (und zwar denselben) correspondirenden für $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Folglich verhalten sich alle 6 Curven $b_i{}^3$ gegen die beiden Geradenschaaren auf $\mathfrak{B}^2$ gleichartig, d. h. alle treffen die Geraden der einen Schaar (b'') zweimal und die andern (b') einmal. Aehnlich ist es auf $\mathfrak{A}^2$ mit den Curven $a_i{}^3$.

31. Eine beliebige Ebene α schneidet $\mathfrak{A}^2$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{a}^2$ (der stets reell ist); welches ist die Ordnung der Curve auf $\mathfrak{B}^2$, deren Punkte denen von $\mathfrak{a}^2$ correspondiren?

Sei β eine beliebige Ebene im Raume (b), B ein Punkt auf ihr; durch ihn geht eine Curve des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$; die analoge im Bündel $(A_1, \cdots, A_5)$ trifft α in drei Punkten. Durch jeden derselben geht eine Curve des Bündels $(A_1, \cdots, A_4, A_6)$; die analogen Curven zu diesen 3 Curven im Bündel $(B_1, \cdots, B_4, B_6)$ treffen die Ebene β in 9 Punkten B'; ebenso entsprechen jedem Punkte B' 9 Punkte B.

Bewegt sich B auf einer Geraden b in β, so beschreiben die Curven des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$ und ihre analogen je eine Fläche 5. Ordnung; durchläuft ebenso B' eine Gerade b' in β, so erzeugen die Curven des Bündels $(B_1, \cdots, B_4, B_6)$ und ihre analogen eben solche Flächen; da die beiden Curven 5. Ordnung, die von den (a)-Flächen in α eingeschnitten werden, ausser den Spuren der 6 Verbindungsgeraden der 4 Punkte $A_1, \cdots, A_4$ 19 Punkte gemein haben, so giebt es 19 Punkte B auf b, deren entsprechende B' auf b' liegen. Folglich ist die Zahl der Coincidenzpunkte nach dem Correspondenzprincip der Ebene (Nr. 19.) $9 + 9 + 19 = 37$.

Betrachten wir aber die Gerade $\beta\beta_{123}$ und bewegen B blos auf ihr; die Curve des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$ durch jeden B zerfällt in b_{45} und einen Kegelschnitt durch B_1, B_2, B_3, die analoge in a_{45} und einen Kegelschnitt durch A_1, A_2, A_3, welcher α in zwei beweglichen Punkten trifft, die auf $\alpha\alpha_{123}$ liegen. Durch jeden derselben geht eine Curve des Bündels $(A_1, \cdots, A_4, A_6)$, welche in a_{46} und einen Kegelschnitt durch A_1, A_2, A_3 zerfällt, deren analoge Curve ähnlich aus b_{46} und einem Kegelschnitte durch B_1, B_2, B_3 besteht und β in zwei auf $\beta\beta_{123}$ liegenden beweglichen Punkten B' trifft. Also jedem B auf $\beta\beta_{123}$ entsprechen vier ebenfalls auf dieser Geraden gelegene Punkte B', ebenso umgekehrt; diese Correspondenz führt zu acht Coincidenzen, welche sich unter den 37 befinden.

Gelangt B bei seiner Bewegung auf $\beta\beta_{123}$ nach βb_{12}, so zerfällt der Kegelschnitt, der mit b_{45} die durch B gehende Curve des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$ bildet, in b_{12} und die Gerade von B_3 nach der Spur von b_{45}; der analoge Kegelschnitt besteht aus a_{12} und der Geraden von A_3 nach der Spur von a_{45} *); einer der Punkte, in denen dieser α trifft, ist mithin αa_{12}. Die Curve des Bündels $(A_1, \cdots, A_4, A_6)$, welche durch diesen geht, zerfällt demnach in a_{46}, a_{12} und die Gerade von A_3 nach der Spur von a_{46} in α_{123}; ähnlich ist ihre analoge Curve beschaffen und geht durch βb_{12}, sodass, wenn B in diesen Punkt kommt, einer der entsprechenden B' dort mit ihm zusammenfällt. Unter den 8 Coincidenzpunkten auf $\beta\beta_{123}$ befinden sich folglich die 3 Punkte $\beta(b_{12}, b_{13}, b_{23})$. Zu den 37 Coincidenzpunkten der Ebene β gehören demnach die 6 Ecken des vollständigen Vierseits, in welchem β das Tetraeder $B_1B_2B_3B_4$ durchschneidet, und auf jeder Seite noch 5 Punkte.

Diese 26 Punkte sind nicht Punkte $(B)_6$ auf β, welche ihre correspondirenden auf α haben; denn wenn auch die in ihnen sich schneiden-

*) Probl. der ebenen Project. Nr. 3.

den Curven der Bündel $(B_1, \cdots, B_5)$ und $(B_1, \cdots, B_4, B_6)$ zu analogen Curven solche haben, die sich auf α treffen, so führen doch diese Curven, weil sie zerfallen, aus den früher schon auseinandergesetzten Gründen nicht in ihren bez. auf α und β gelegenen Schnittpunkten zu solchen Punkten, welche collineare Bündel nach den sechspunktigen Gruppen senden. Wohl aber ist dies der Fall für die 11 übrigen Punkte.

Es giebt also in α 11 Punkte $(A)_6$, deren entsprechende $(B)_6$ auf β liegen. Oder *die entsprechenden Punkte* $(B)_6$ *der Punkte* $(A)_6$ *in* α — *die auf dem Kegelschnitte* $\mathfrak{a}^2 = (\mathfrak{A}^2, \alpha)$ *liegen* — *erzeugen eine Curve* 11: *Ordnung* $\mathfrak{b}^{11}$, *welche natürlich auf* $\mathfrak{B}^2$ *sich befindet.*

32. *Auf dieser Curve* $\mathfrak{b}^{11}$ *liegen die* 6 *Punkte* $B_1, \cdots, B_6$ *dreifach*; denn z. B. von den Punkten $(A)_6$, welche dem Punkte B_6 entsprechen und die Curve a_6^3 erfüllen, liegen drei in der Ebene α.

33. Da nun ferner zwei Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2$ zwei Punkte gemein haben, so haben auch ihre entsprechenden $\mathfrak{b}^{11}$ zwei bewegliche Punkte (ausser den 6 festen dreifachen) gemein. Daraus lässt sich ermitteln, wie gross die Zahlen μ und ν der Begegnungspunkte einer solchen Curve mit den Geraden der beiden Schaaren auf $\mathfrak{B}^2$ sind. Denn zunächst ist $\mu + \nu = 11$; legt man ferner ein beliebiges Projectionscentrum O auf die Fläche $\mathfrak{B}^2$ und projicirt zwei Curven $\mathfrak{b}^{11}$, so können nur die beiden in O sich schneidenden Geraden von $\mathfrak{B}^2$ die beiden Curven in getrennten Punkten treffen; in der Projection bewirken sie einen μ-fachen, bez. einen ν-fachen Punkt. Die Projectionen haben also gemein diese beiden Punkte, die dreifachen Punkte und die beweglichen Schnittpunkte; also ist $11^2 = \mu^2 + \nu^2 + 6 \cdot 3^2 + 2$; dies führt zu: $\mu = 7$, $\nu = 4$.

34. Die durch $A_1, \cdots, A_5$ auf $\mathfrak{A}^2$ gehende Curve a_6^3 schneidet die Geraden a'' zweimal, die a' einmal; es giebt noch eine cubische Raumcurve $(a_6^3)^*$ durch dieselben fünf Punkte, welche umgekehrt die a'' einmal, die a' zweimal trifft. Alle Punkte dieser Curve sind, weil sie auf $\mathfrak{A}^2$ liegt, Punkte $(A)_6$; ihre analoge Curve in Bezug auf $(\mathsf{A})^5$ $(\mathsf{B})^5$ geht nicht auch durch B_6, also hat jeder Punkt von $(a_6^3)^*$ einen besonderen correspondirenden $(B)_6$; diese entsprechenden müssen aber auf der analogen Curve $(b_6^3)^*$ liegen und füllen diese aus; mithin liegt dieselbe auf $\mathfrak{B}^2$.

Jedes Paar von homologen fünfpunktigen Gruppen in $(A)^6\,(B)^6$ *liefert also ein Paar analoger Curven* $(a_i^3)^*$, $(b_i^3)^*$, *welche auch in Bezug auf* $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$ *analog sind*; jedoch so, dass jedem Punkt der einen nur ein Punkt der andern entspricht, nicht alle, wie es bei der Analogie in Bezug auf fünfpunktige Gruppen der Fall ist.

35. Die Fläche der cubischen Raumcurven des Bündels $(A_1, \cdots, A_5)$, welche eine Gerade a treffen, ist 5. Ordnung und begegnet demnach dem Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2 = (\alpha, \mathfrak{A}^2)$ in 10 Punkten. Die Fläche also der Curven desselben Bündels, welche $\mathfrak{a}^2$ schneiden, ist 10. Ordnung und enthält die beiden Curven $a_6{}^3$ und $(a_6{}^3)^*$, welche beide zu den erzeugenden gehören und $\mathfrak{a}^2$ dreimal treffen, dreifach, hingegen, weil durch 6 Punkte nur eine cubische Raumcurve geht, die Leitcurve $\mathfrak{a}^2$ nur einfach. Der ganze Schnitt dieser Fläche 10. Ordnung mit $\mathfrak{A}^2$ besteht aus $\mathfrak{a}^2$, $a_6{}^3$, $(a_6{}^3)^*$. Die analogen Curven der erzeugenden Curven dieser Fläche (in Bezug auf $(\mathsf{A})^5(\mathsf{B})^5$) erzeugen ebenfalls eine Fläche 10. Ordnung, die, welche jener in den durch das Entsprechen von $A_1, \cdots, A_5$ und $B_1, \cdots, B_5$ collinear gemachten Räumen (a) und (b) entspricht; sie enthält den in dieser Collineation dem Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2$ entsprechenden Kegelschnitt einfach (als Leitcurve ihrer erzeugenden Curven) und die entsprechenden Curven von $a_6{}^3$ und $(a_6{}^3)^*$ dreifach. Letztere ist $(b_6{}^3)^*$ und liegt allein von diesen drei Curven auf $\mathfrak{B}^2$, so dass die beiden Flächen noch einen Schnitt 11. Ordnung gemein haben: das ist die Curve $\mathfrak{b}^{11}$, welche dem Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2$ entspricht. Da $(b_6{}^3)^*$ von den b' und b'' beziehlich zweimal, einmal getroffen wird, so schneiden diese die Fläche 10. Ordnung ausserdem noch und damit die $\mathfrak{b}^{11}$ in $10 - 2 \cdot 3$, bez. $10 - 3$, also in 4, bez. 7 Punkten, womit der Satz in Nr. 33. noch mehr präcisirt ist.

36. Suchen wir *die Curven auf $\mathfrak{B}^2$, welche den Geraden a'', a' entsprechen*. Da erstere den $a_6{}^3$ zweimal, letztere einmal begegnen, so werden die correspondirenden Curven von a'', bez. a' durch die B_i zweimal, bez. einmal gehen.

Die Fläche 5. Ordnung der Curven des Bündels $(A_1, \cdots, A_5)$, welche eine a'' treffen, enthält $a_6{}^3$ doppelt, $(a_6{}^3)^*$ einfach; die der analogen Curven ist die entsprechende jener bei der Collineation $(A_1, \cdots, A_5)$, $(B_1, \cdots, B_5)$, folglich ist sie ebenfalls 5. Ordnung und enthält die entsprechende Curve von $a_6{}^3$ doppelt, die von $(a_6{}^3)^*$, d. i. $(b_6{}^3)^*$ einfach und hat also ausser letzterer mit $\mathfrak{B}^2$ noch eine Curve 7. Ordnung b^7 gemein, welche der a'' correspondirt; dieselbe trifft jede b'' in $5 - 1 = 4$, jede b' in $5 - 2 = 3$ Punkten.

Ebenso ergiebt sich, dass einer Geraden a' eine Curve 4. Ordnung b^4 entspricht, welche den b'' in 3, den b' in 1 Punkte begegnet, also die unicursale Curve II. Species ist. Die Curven b^7 und $\mathfrak{b}^{11}$ sind ebenso unicursal, da sie ja auf unicursale Curven eindeutig bezogen sind.

37. Für $\mathfrak{b}^{11}$ lässt sich dies auch auf folgende Art erkennen: Sei A_0 ein fester, A ein beweglicher Punkt auf $\mathfrak{a}^2$; betrachten wir jenen als Spur einer festen a_0'', diesen als Spur einer beweglichen a', also den Büschel A_0A als Spur des Ebenenbüschels $a_0''a'$. Die Curven 4. Ordnung b^4, welche den a' correspondiren, haben mit der Curve 11. Ordnung, welche dem $\mathfrak{a}^2$ entspricht, ausser den 6 festen auf letzterer dreifachen, auf ersteren einfachen Punkten B_i noch $4 \cdot 11 - 4 \cdot 1 - 7 \cdot 3 - 6 \cdot 3 = 1$ Punkt gemein, wie auf ähnliche Weise als in Nr. 33. durch Projection aus einem Centrum O auf $\mathfrak{B}^2$ ermittelt werden kann, wobei zu berücksichtigen ist, dass von den beiden Geraden durch O die b'' die Curven 7mal, bez. 3mal, die b' 4mal, bez. 1mal trifft. Der Curvenbüschel der b^1, von dem jede Curve einem Punkte auf $\mathfrak{a}^2$ entspricht, schneidet also $\mathfrak{b}^{11}$ nur in einem beweglichen Punkte.

38. Wie die Gebilde, denen sie entsprechen, so begegnen sich auch je zwei Curven b^4 und $\mathfrak{b}^{11}$ (wie eben gefunden), b^7 und $\mathfrak{b}^{11}$, b^4 und b^7 in einem, je zwei b^4 und je zwei b^7 in keinem beweglichen Punkte, wie dies auch durch Projection leicht zu ersehen ist.

39. *Es liege auf $\mathfrak{A}^2$ irgend eine Curve C_a $(\mu+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, die den Geraden a'' in μ, den Geraden a' in ν Punkten begegne und durch A_h λ_h mal gehe.* Es lässt sich durch ähnliche Schlüsse wie in Nr. 35. finden, dass die Fläche der Curven des Bündels $(A_1, \cdots, A_5)$, welche C_a treffen, von der Ordnung $\sigma = 5(\mu+\nu) - 3\sum_{h=1}^{h=5}\lambda_h$ ist; durch Projection aus einem Centrum O auf $\mathfrak{A}^2$ ergiebt sich, dass C_a den Curven a_6^3 und $(a_6^3)^*$ ausser in den 5 Punkte A_i in $\varrho = \mu + 2\nu - \sum_{h=1}^{h=5}\lambda_h$ und $\varrho^* = 2\mu + \nu - \sum_{h=1}^{h=5}\lambda_h$ Punkten begegnet; so dass ϱ und ϱ^* auch die Vielfachheit dieser Curven a_6^3 und $(a_6^3)^*$ auf der Fläche σ^{ter} Ordnung ist; C_a und diese beiden Curven bilden den vollen Schnitt der Fläche mit $\mathfrak{A}^2$. Ferner ist auch a_0^3, weil C_a in ihrem λ_6-fachen Punkte A_6 sie trifft, eine λ_6-fache erzeugende Curve der Fläche σ^{ter} Ordnung. Die analogen Curven in Bezug auf $(\mathsf{A})^5(\mathsf{B})^5$ bilden ebenfalls eine Fläche σ^{ter} Ordnung, welche die entsprechenden Curven von a_6^3, $(a_6^3)^*$ und a_0^3 ebenfalls bez. ϱ-fach, ϱ^*-fach, λ_6-fach enthält. Letztere beiden sind $(b_6^3)^*$ und b_6^3 und liegen auf $\mathfrak{B}^2$. Folglich ist der übrige Schnitt, das ist die Curve C_b der Punkte, die denen von C_a correspondiren, von der Ordnung $2\sigma - 3(\varrho^*+\lambda_6) = 4\mu + 7\nu - 3\sum_{h=1}^{h=6}\lambda_h$. Diese Zahl ist übrigens, wie leicht zu erkennen, gerade diejenige der Begegnungspunkte von C_a mit einer Curve $\mathfrak{a}^{11}$ auf $\mathfrak{A}^2$, die ausserhalb der A_i liegen; und in der That, so oft C_a eine solche Curve $\mathfrak{a}^{11}$ trifft, so oft muss die entsprechende C_b dem ebenen Schnitte von $\mathfrak{B}^2$ begegnen, welcher $\mathfrak{a}^{11}$ correspondirt. Diese Curve C_b geht durch jeden B_i so oft, als C_a die a_i^3 ausser in den 5 Punkten $(\mathsf{A})^6$ trifft, durch welche a_i^3 geht; mithin ist die Vielfachheit von B_i gleich $\mu + 2\nu - \sum_{h=1}^{h=6}\lambda_h + \lambda_i$. Ferner trifft jede b'', b' die Curve C_b so oft, als sie der Fläche σ^{ter} Ordnung ausser auf $(b_6^3)^*$ und b_6^3 begegnet, das ist in $\sigma - \varrho^* - 2\lambda_6 = 3\mu + 4\nu - 2\sum_{k=1}^{k=6}\lambda_k$, bez. in $\sigma - 2\varrho^* - \lambda_6 = \mu + 3\nu - \sum_{k=1}^{k=6}\lambda_k$ Punkten.

Ist z. B. C_a eine Raumcurve 4. Ordnung I. Species, welche durch $A_1, \cdots, A_5$ geht, aber nicht durch A_6; so ist $\mu = \nu = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = 0$; folglich entspricht ihr eine Curve C_b 7. Ordnung, welche durch die Punkte $B_1, \cdots, B_5$ je zweimal, durch B_6 einmal geht und die Geraden b'' viermal, die b' dreimal trifft.

40. Die Punkte $(C)_5$, welche gleichzeitig nach $(\mathsf{A})^5$ und $(\mathsf{B})^5$ collineare Bündel senden, erzeugen eine Curve 11. Ordnung (Nr. 8.); ebenso entsteht durch die Punkte, welche mit $(\mathsf{A}')^5$ und $(\mathsf{B}')^5$ collineare Bündel geben, eine solche Curve. Bei der Beliebigkeit der den Gruppen nicht gemeinsamen Punkte werden beide Curven ausser den 8 Punkten $A_1, \cdots, A_4, B_1, \cdots, B_4$ keinen weiteren Punkt gemeinsam haben. Es giebt also im Allgemeinen keinen Punkt im Raume, der gleichzeitig nach $(\mathsf{A})^6$ und $(\mathsf{B})^6$ collineare Bündel schickt.

IV.

41. Wir betrachten nun zwei Gruppen von je sieben Punkten: $A_1, \cdots, A_7$; $B_1, \cdots, B_7$. Zu den sechspunktigen Gruppen $A_1, \cdots, A_6$; $B_1, \cdots, B_6$ gehören zwei Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, welche die in Bezug auf die Gruppen correspondirenden Punkte $(A)_6$ und $(B)_6$ enthalten. Die Punkte $(A)_6'$ und $(B)_6'$, welche sich in Bezug auf die Gruppen $A_1, \cdots, A_5, A_7$; $B_1, \cdots, B_5, B_7$ correspondiren, erfüllen zwei Flächen $(\mathfrak{A}^2)'$, $(\mathfrak{B}^2)'$. Die Punkte $(A)_7$, welche correspondirende $(B)_7$ in Bezug auf $(\mathsf{A})^7 (\mathsf{B})^7$ haben, können also nur auf der Curve 4. Ordnung I. Species a^4 liegen, in der sich $\mathfrak{A}^2$ und $(\mathfrak{A}^2)'$ durchschneiden; die entsprechenden auf $b^4 = [\mathfrak{B}^2, (\mathfrak{B}^2)']$. Aber da jeder Punkt von $\mathfrak{A}^2$ oder $(\mathfrak{A}^2)'$ nur einen entsprechenden hat, so brauchen diejenigen Punkte, welche einem Punkte von a^4 in Bezug auf $(\mathsf{A})^6 (\mathsf{B})^6$ und auf $(\mathsf{A}')^6 (\mathsf{B}')^6$ entsprechen, nicht identisch zu sein.

a^4 geht durch die fünf Punkte $A_1, \cdots, A_5$, mithin entspricht ihr als Curve von $\mathfrak{A}^2$ eine Curve 7[ter] Ordnung, wie sie in Nr. 39. am Ende beschrieben ist, auf $\mathfrak{B}^2$. Diese Curve begegnet der ebenfalls auf $\mathfrak{B}^2$ gelegenen Curve b^4, welche durch $B_1, \cdots, B_5$ einfach geht und alle Geraden b'', b' zweimal trifft, ausser in den Punkten $B_1, \cdots, B_5$, wie durch Projection aus einem Centrum, das auf $\mathfrak{B}^2$ liegt, gefunden werden kann, in $7 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 4$ Punkten, offenbar den vier weiteren Begegnungspunkten der Curve 7. Ordnung mit $(\mathfrak{B}^2)'$. Sei B einer von diesen Punkten, so liegt sein correspondirender in Bezug auf $(\mathsf{A})^6 (\mathsf{B})^6$ auf a^4 und damit auch auf $(\mathfrak{A}^2)'$; weil B auf $(\mathfrak{B}^2)'$ liegt, so hat er auch einen correspondirenden in Bezug auf

$(\mathsf{A}')^6 (\mathsf{B}')^6$, der auch auf $(\mathfrak{A}^2)'$ liegt. Beide correspondirende können aber nicht verschieden sein; denn da sie nothwendig beide auf der cubischen Raumcurve durch $A_1, \cdots, A_5$ liegen müssen, welche die dem B in Bezug auf $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$ correspondirenden Punkte enthält, so können sie nur in dem einzigen sechsten Punkte sich vereinigen, den diese nicht auf $(\mathfrak{A}^2)'$ gelegene Curve mit $(\mathfrak{A}^2)'$ ausser $A_1, \cdots, A_5$ gemein hat. Ist dieser Punkt A, so ist demnach sowohl

$$A(A_1, \cdots, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_6),$$

als auch

$$A(A_1, \cdots, A_5, A_7) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_5, B_7),$$

mithin auch

$$A(A_1, \cdots, A_5, A_6, A_7) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_5, B_6, B_7).$$

A und B sind folglich Punkte $(A)_7$ $(B)_7$.

Es giebt daher vier Punktenpaare $(A)_7$ $(B)_7$, welche bez. nach den beiden siebenpunktigen Gruppen $A_1, \cdots, A_7$; $B_1, \cdots, B_7$ collineare Bündel senden.

Bildet man ein drittes Gruppenpaar $A_1, \cdots, A_4, A_6, A_7$, $B_1, \cdots, B_4, B_6, B_7$, welches zu den Flächen $(\mathfrak{A}^2)''$, $(\mathfrak{B}^2)''$ führt; so sind die vier Punkte $(A)_7$, bez. $(B)_7$ die vier, welche den Flächen $\mathfrak{A}^2$, $(\mathfrak{A}^2)'$, $(\mathfrak{A}^2)''$, bez. $\mathfrak{B}^2$, $(\mathfrak{B}^2)'$, $(\mathfrak{B}^2)''$ ausser $A_1, \cdots, A_4$, bez. $B_1, \cdots, B_4$ noch gemeinsam sind.

Darmstadt, den 20. December 1875.