

demnach

$$x^2 - \frac{S_1^{rn} - S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}} x = \frac{S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}}.$$

Da hier (welche Grösse auch r haben mag) immer dieselbe Gleichung entsteht, so müssen die Grössen $\frac{S_1^{rn} - S_2^{rn-1}}{S_1^{rn}}$ und $\frac{S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}}$, die wir durch a und c bezeichnen wollen, für jedes beliebige r denselben Werth haben.

Bezeichnet man den $(rn+p)$ ten Näherungswerth durch $K_1^{rn+p} = \frac{S_1^{rn+p}}{S_2^{rn+p}}$,

so ist, wie leicht erweislich, $K_1^{rn+p} = \frac{S_1^{rn} S_1^p + S_1^{rn-1} S_2^p}{S_2^{rn} S_1^p + S_1^{rn-1} S_2^p}$.

Führt man hier die Constanten c und a ein, $S_1^{rn-1} = c S_2^{rn}$; $S_2^{rn-1} = S_1^{rn} - a S_2^{rn}$ setzend, so erhält man

$$K_1^{rn+p} = \frac{S_1^{rn} S_1^p + c S_2^{rn} S_2^p}{S_2^{rn} S_1^p + S_1^{rn} S_2^p - S_2^{rn} S_2^p}.$$

Da nun $K_1^{rn} = \frac{S_1^{rn}}{S_2^{rn}}$, $K_1^p = \frac{S_1^p}{S_2^p}$ ist, so ist, wenn Zähler und Nenner durch $S_2^{rn} S_2^p$ dividirt wird:

$$1) \quad K_1^{rn+p} = \frac{K_1^{rn} K_1^p + c}{K_1^{rn} + K_1^p - a}.$$

Bezeichnet man nun K_1^n durch x ; ferner durch N_r das r te Glied einer recurrenten Reihe, in welcher $N_0=0$, $N_1=1$, $N_2=a$, $N_r=aN_{r-1}+cN_{r-2}$ ist, so ist leicht zu beweisen, dass

$$2) \quad K_1^{rn} = \frac{x^r - rcN_0x^{r-1} + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} cN_1x^{r-2} - \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} cN_2x^{r-3} + \pm cN_{r-1}}{rN_1x^{r-1} - \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} N_2x^{r-2} + \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} N_3x^{r-3} - \mp N_r}.$$

Es erhellet dies durch den Schluss von r auf $r+1$. Setzt man nämlich in die Gleichung (1.) x statt K_1^p , und für K_1^{rn} den Werth aus der Gleichung (2.), so muss sich nothwendig die der Formel (2.) analoge Formel für $K_1^{(r+1)n}$ finden.

2. Setzt man demnach $K_1^{rn} = \xi$, so findet zwischen den Grössen ξ , x , a , c folgende Gleichung Statt:

$$3) \quad x^r - r(cN_0 + N_1\xi)x^{r-1} + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} (cN_1 + N_2\xi)x^{r-2} - + (-1)^r (cN_{r-1} + N_r\xi) = 0.$$

Man kann nun versuchen, diese Gleichung in ihre Factoren zu zerlegen, d. h. aus dem gegebenen Werthe von K_1^{rn} auf die r Werthe von K_1^n zu schliessen, welche diese Grösse dann haben kann.

Es sei r nicht eine Primzahl, sondern $=mp$, so kann man $\xi = K_1^r = K^{m.p}$ auch als bloss m Perioden umfassend betrachten, deren jede p einfache Perioden enthält, und für welche die Constanten a und c dieselben bleiben. Setzt man daher $K_1^r = X$, so verwandelt sich die Gleichung (3.), vom r ten, in folgende vom n ten Grade:

$$X^m - m(cN_0 + N_1\xi)X^{m-1} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}(cN_1 + N_2\xi)X^{m-2} - \dots + (-1)^m(cN_{m-1} + N_m\xi) = 0.$$

Sind also $\xi', \xi'', \xi''', \dots, \xi^{(m)}$ die m Wurzeln dieser Gleichung, so sind sie zugleich die m Werthe, welche die p fache Periode K_1^p in Bezug auf K^{mp} haben kann. Sucht man daher die p Werthe von K_1^n in Bezug auf $K_1^p = \xi'$; dann die p Werthe von K_1^n in Bezug auf $K_1^p = \xi''$; dann die p Werthe von K_1^n in Bezug auf $K_1^p = \xi'''$, etc., so müssen die so gefundenen mp Werthe zugleich die Wurzeln der Gleichung (3.) sein. Nun sind aber die mp Werthe von K_1^n in Bezug auf K_1^p , nemlich $\xi', \xi'', \xi''', \dots, \xi^{(m)}$ nothwendig die Wurzeln der Gleichungen

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi')x^{p-1} + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2}(cN_1 + N_2\xi') - \dots \pm (cN_{p-1} + N_p\xi') = 0,$$

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi'')x^{p-1} + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2}(cN_1 + N_2\xi'') - \dots \pm (cN_{p-1} + N_p\xi'') = 0,$$

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi''')x^{p-1} + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2}(cN_1 + N_2\xi''') - \dots \pm (cN_{p-1} + N_p\xi''') = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi^{(m)})x^{p-1} + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2}(cN_1 + N_2\xi^{(m)}) - \dots \pm (cN_{p-1} + N_p\xi^{(m)}) = 0.$$

Demnach muss das Product dieser m Gleichungen die Gleichung (3.) geben.

Hierdurch ist folgender Satz bewiesen:

Ist ξ eine beliebige unbestimmte Grösse und $r=mp$ (wo r, m, p ganze Zahlen sind), und bezeichnet man den Ausdruck

$$x^r - \frac{r}{1}(cN_0 + N_1\xi)x^{r-1} + \frac{r \cdot r - 1}{1 \cdot 2}(cN_1 + N_2\xi)x^{r-2} - \dots \pm (cN_{r-1} + N_r\xi)$$

durch $P_r(\xi)$, (während N_0, N_1, \dots, N_r eine recurrente Reihe bilden, deren Beziehungsscale $N_r = aN_{r-1} + cN_{r-2}$ ist und in welcher $N_0=0, N_1=1$ ist): sind ferner $\xi', \xi'', \xi''', \dots, \xi^{(m)}$ die m Wurzeln des Ausdrucks $P_m(\xi)$ (nach x genommen), so findet folgende Gleichung Statt:

$$4) \quad P_r(\xi) = P_p(\xi') \cdot P_p(\xi'') \cdot P_p(\xi''') \dots P_p(\xi^{(m)}).$$

Eine Anwendung dieses Satzes ist in den folgenden Betrachtungen über recurrente Reihen gemacht.