

De linearum tertii ordinis proprietatibus.

Von Herrn Observator *Clausen* in Dorpat.

1. In opusculo: „Enumeratio linearum tertii ordinis V., Neutonius illud profert theorema:

Quemadmodum circulus umbram projiciendo, generat sectiones omnes conicas, sic parabolae quinque divergentes umbris suis generant et exhibent alias omnes secundi generis curvas.

Hujus theorematis nulla fit in libris usitationibus mentio. *Chasles* in libro nuperime edito: *Histoire de Géométrie*, hoc theorema protulit, simulque professus est, demonstrationem sibi ignotam et frustra quaesitam. Egomet cum huic rei incumberem, post irrita quaedam tentamina demonstrationem inveni generalem quidem, at haud satis, uti videri posset, elegantem. Nihilominus nullum habui dubium, quin eam cum lectoribus ipsorum A. N. communicarem, praesertim cum per hoc occasio fit, novum theorema depromendi.

2. Aequatio linearum tertii ordinis generalis, si ad tangentem ceu axem ipsorum x , et punctum tactum tamquam coordinatarum initium refertur, haec est:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + iy = 0.$$

$$u = \xi_1^2 v + \beta \xi_1^2 + 2\alpha \xi_1 v + \alpha v^2 + (2\alpha\beta + b)\xi_1 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta + c)v + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + b\alpha + c\beta + d = 0$$

Eligantur novae axium directiones, ut fiat:

$$(2\alpha\beta + b)\xi_1 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta + c)v = ev_2$$

quod semper fieri potest: simulque determinentur α et β ita ut expressio $\beta \xi_1^2 + 2\alpha \xi_1 v + \alpha v^2$ quae generaliter fit $f\xi_1^2 + g\xi_1 v + hv^2$ per v_2 divisibilis evadat, vel uti $f = 0$ fiat. Hoc efficitur, si $\beta \xi_1^2 + 2\alpha \xi_1 v + \alpha v^2$ simul cum v_2 evanescit, vel si $\frac{\xi_1}{v} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + c}{2\alpha\beta + b}$ et

$$\beta \left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + c}{2\alpha\beta + b} \right)^2 - 2\alpha \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + c}{2\alpha\beta + b} + \alpha = 0, \text{ vel}$$

$$-3\alpha^4\beta - 2b\alpha^3 - 2c\alpha^2\beta + 4\alpha^2\beta^3 + 4\alpha c\beta^2 - 2bc\alpha + c^2\beta + \alpha b^2 = 0.$$

Si in aequatione transformata pars constans evanesci statuatur, vel si punctum cujus coordinatae $\xi_2 = 0$, $v_2 = 0$ sunt, in ipsa curva jacet, fieri debet:

$$(2) \dots u = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + b\alpha + c\beta + d = 0$$

et si haec aequatio per $3\alpha^2 - 3\alpha\beta - c$ multiplicatur et ad

Si haec curva projicitur, coordinataeque puncti projecti ξ , v ita ab ipsis x , y pendeant, ut fit $x = \frac{\xi}{v}$, $y = \frac{1}{v}$, habetur aequatio curvae projectae:

$$a\xi^3 + e\xi^2v + b\xi^2 + f\xi v + i v^2 + c\xi + g v + d = 0.$$

Duo jam se efferunt casus: primus, in quo e non evanescit secundus, ubi $e = 0$.

Quando e non evanescit, sit $v = v_1 - \frac{a}{e}\xi$, $\xi = \xi_1$, qua substitutione aequatio curvae in formam abit:

$$\xi_1^2 v_1 + b\xi_1^2 + f\xi_1 v_1 + i v_1^2 + e\xi_1 + g v_1 + d = 0$$

si desuper $v_1 = v_2 - b$; $\xi_1 = \xi_2 - \frac{1}{2}f$, ponitur, aequatio prodit formae:

$$\xi_2^2 v_2 + i_2 v_2^2 + e_2 \xi_2 + g_2 v_2 + d_2 = 0.$$

3. Scribamus brevitate gratia hanc formam:

$$u = \xi^2 v + a v^2 + b \xi + c v + d = 0 \dots \dots (1)$$

Jam si in hac aequatione ponitur $\xi = \xi_1 + \alpha$, $v = v_1 + \beta$, habetur:

aequationem modo inventam additur, prodit:

$$u_2 = b\alpha^3 + a^2\beta^3 + 3d\alpha^2 - 3ab\alpha\beta - 3bc\alpha - 3ad\beta + ab^2 - cd = 0 \dots (3)$$

Aequationibus (2) et (3) satisfieri debet, si aequationem (1) per transformationem coordinationum ita transformare vis, ut partes in ξ_2^2 et ξ_2 multiplicatae, simulque constans evanescant. Videamus an hisce aequationibus semper satisfieri possit per valores ipsorum α et β reales. Casum ubi $b = 0$ statim seponimus, cum in hoc casu aequatio (1) projecta per transformationem $\xi = \frac{x}{y}$, $v = \frac{1}{y}$ statim in formam $x^2 + ay + cy^2 + dy^3 = 0$ abiret, quae ad parabolas Neutonianas pertinet.

Sit $a = 0$, erit aequatio (3) $b\alpha^3 + 3d\alpha^2 + 3bc\alpha - cd = 0$, quae aequatio, cum b non evanescat, unam saltem radicem realem habet. Hac inventa, habetur per (2) $\beta = +\frac{b\alpha + d}{\alpha^2 + c}$ qui, valor finitus est, nisi $\alpha^2 = -c$; cum vero in hoc casu per

aequationem determinationi ipsius α inservientem invenitur etiam $b\alpha + d = 0$, habetur per regulas notas $\beta = -\frac{b}{2\alpha}$. β igitur semper est finita nisi $\alpha = 0$, $c = 0$, tum vero alius valor ipsius α habetur $-\frac{3d}{b}$, qui non evanescit. Si enim a , c , et d omnes simul evanescerent, fieret aequatio (1) $\xi^2 v + b\xi = 0$, vel $\xi v + b = 0$, quae ad hyperbolam conicam pertinet.

4. Casus ergo superest quo neque a neque b evanescunt. Videamus num in hoc casu aequationes (2) et (3) pro α et β radices reales sistunt. Facile perspicitur, hoc fieri, si lineae tertii ordinis ex aequationibus hisce constructae, cum α et β tamquam coordinatae orthogonales spectantur, a se mutuo secantur. Hoc saltem in uno puncto fieri absque difficultate sic probatur.

Intersectiones curvarum $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ eadem sunt, ac quae duobus curvis $u_3 = 0$, $u_2 + u^2 u_1 = 0$, (designante u valorem realem finitum non evanescentem) communia sunt puncta. Illae vero cum singulas habeant asymptotas haud parallelas, et in plagas contrarias continuo ductu in infinitum porriguntur, planum in quo sitae sunt in duas partes sic dirimunt, ut nulla alia linea in alteram partem perducere queat, nisi quae curvam secet. Jam cum curvae magis magisque ad asymptotas accedant, hae vero a se in infinitum utrimque in partes contrarias recedunt; partes lineae alterae in plagas diversas infinitum productae alteram lineam a diversis regionibus respiciunt, ideoque in partibus intermediis secare debent.

Quodsi ergo substitutiones modo nominatas, et quas reales evinimus rite perficiantur, aequatio (1) hanc induit formam:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + exy + fy^2 + gy = 0$$

in qua a non evanescit, alias enim aequatio per y esset divisibilis. Si haec projiciatur, dum $x = \frac{\xi}{v}$, $y = \frac{1}{v}$ ponitur, habemus

$$a\xi^3 + b\xi^2 + e\xi v + g v^2 + c\xi + f v + d = 0$$

quae cum casu secundo art. 2 prorsus convenit.

5. Consideremus jam hunc casum, et ponamus $\xi = x - \frac{1}{3}\frac{b}{a}$, $v = y$; sic ad aequationem delabimur:

$$(4) \dots x^3 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Quando $b = 0$, ponamus $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$; et nascimur:

$$0 = x'^3 + 3\alpha x'^2 + 3\alpha x'y' + (3\alpha^2 + a\beta + c)x' + (a\alpha + d)y' + \alpha^3 + a\alpha\beta + c\alpha + d\beta + e.$$

$$\text{Sit} \quad x^3 + a\alpha\beta + c\alpha + d\beta + e = 0$$

$$\frac{3\alpha}{a} = \frac{3\alpha^2 + a\beta + c}{a\alpha + d},$$

$$\text{vel} \quad \beta = \frac{3d}{a^2}\alpha - \frac{c}{a},$$

$$\text{invenitur} \quad x^3 + \frac{3d}{a}x^2 + \frac{3d^2}{a^2}x - \frac{cd}{a} + e = 0,$$

$$\text{vel denique} \quad \left(\alpha + \frac{d}{a}\right)^3 = \frac{d^3}{a^3} + c \cdot \frac{d}{a} - e.$$

Cum α infinita evadat, quando $\alpha = 0$, necesse est hunc casum seorsim considerare. Tum fit $x^3 + cx + dy + e = 0$; sit $cx + dy + e = y'$, $x = x'$, erit $x'^3 + y' = 0$, quae si per substitutiones $x' = \frac{\xi}{v}$, $y' = \frac{1}{v}$ projecta fuerit, in $\xi^3 + v^2 = 0$ transit, quae parabola Newtoni est. Si vero a non evanescit, habentur α et β quantitates finitae, atque si ponatur $3xx' + \alpha y' = y''$, aequatio nostra fit: $0 = x'^3 + x'y'' + \alpha'y''$. Quae si per substitutionis $x' = \frac{\xi}{v}$, $y' = \frac{1}{v}$ projiciatur, emergit: $0 = \xi^3 + \xi v + a'v^2$. Cum a' non evanescit, sit $v + \frac{\xi}{a'} = v'$, et habetur:

$$0 = \xi^3 - \frac{\xi^2}{a'} + a'v'^2$$

quae e parabolis saepe memoratis est.

6. Regrediamur jam ad casum reliquum aequ. (4), in quo b non evanescit, et supponatur: $y + \frac{a}{2b}x = y'$. Hoc modo aequatio (4) hanc formam capit:

$$by'^2 + dy' + x^3 + ax^2 + cx + e = 0$$

quae per substitutionem $y' + \frac{d}{2b} = y''$ in parabolam Newtonianam transit.

Ceterum vix opus erit monere, permutationes omnes, quibus usus sum, umbris fieri posse. Hinc cum projectio, quae repetitis projectionibus oritur, singula projectione ex forma primitiva semper gigni possit, propositionis Newtonianae, omnes casus diversos perlustrando, demonstrationem perfeci.

7. Novum in peragenda demonstratione se obtulit theorema: In quavis curva tertii gradus unum datur punctum flexus contrarii vel tria in eadem recta sita.

Cum enim projiciendi per umbras, recta in rectam, et curva in curvam abeant, idem de flexu contrario valet, qui etiam in flexum contrarium projicitur. Quot igitur in curvis parabolicis genetricibus flexus contrarii dantur, tot in curvis ex ipsis genitis, neque plures inveniuntur. Id quod disquisi-

tionem de istis punctis generalem in curvis tertii gradus maxime sublevat. Est enim aequatio parabolica generalis:

$$(5) \dots \dots \dots y y = x^3 + a x^2 + b x.$$

In puncto flexus contrarii habetur: $dx:dy = d^2x:d^2y$; hinc cum differentiando fit:

$$2y dy = (3x^2 + 2ax + b) dx \text{ erit}$$

$$2y d^2y = (3x^2 + 2ax + b) d^2x,$$

et iterum differentiando

$$2y d^2y + 2dy^2 = (3x^2 + 2ax + b) d^2x + (bx + 2a) dx^2$$

unde denique sequitur:

$$(6) \dots \dots \dots 0 = 3x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 - b^2 = v.$$

Quando $b = 0$ et $a = 0$, erit $x = 0$. in quo puncto cuspis est, neque vero flexus in contrarium. Hoc casu intra finitum spatium nullus datur flexus in contrarium. At si curva projiciatur per substitutiones $y = \frac{1}{v}$, $x = \frac{\xi}{v}$, invenitur $v = \xi^3$, quae curva flexum habet in contrarium in puncto $\xi = 0$, $v = 0$, quod ad $y = \infty$, $x = \infty$ pertinet.

Quando $b = 0$ et a negativa, erit punctum $x = 0$, $y = 0$ punctum singulum curvae, a cetera curva sejunctum. In punctis $x = -\frac{4a}{3}$, $y = \pm \frac{4a}{3} \sqrt{-\frac{a}{3}}$, flexus in contrarium erunt, quod etiam de puncto in infinitum remoto valet. Curva enim modo memorata projecta haec est $\xi^3 + a\xi^2v = v$, quae in puncto $\xi = 0$, $v = 0$, quod ad punctum illud pertinet, in contrarium flectitur. Haec ergo parabola, quae a Newtono punctata dicta est, tres flexus in contrarium habet.

Si $b = 0$, et a positiva. In puncta $x = 0$, $y = 0$ nodus est, flexus contrarius nullus. In puncto nodato lineae tertii ordinis hoc omnino locum habere nequit. Agatur enim ad hunc flexum tangens quae cum ramo, quem et secat et tangit tria puncta communia haberet, cum vero ramum alterum secat, rectae cum curva tertii ordinis quatuor puncta communia essent, id quod absurdum. In parabola nostra hoc clarius elucet, si $y - x\sqrt{a} = y'$, $y + x\sqrt{a} = x'$ ponatur, quo aequatio nostra in hanc $x'y' = \left(\frac{x' - y'}{2\sqrt{a}}\right)^3$ transit, quae pro

$$x' = 0, y' = 0, x' = -\frac{1}{8a\sqrt{a}}y'^2 + \dots, y' = \frac{1}{8a\sqrt{a}}x'^2 + \dots$$

pro partibus minimis ramorum dat. Alter ipsius x valor $-\frac{4a}{3}$ valorem ipsius y imaginarium reddit. Superest igitur tantummodo punctum in infinitum remotum, in quo flexus in contrarium esse, facile ostenditur.

Quando b non evanescit, atque aequatio (5) $x^3 + ax^2 + bx$ unam tantum radicem habet realem, aequatio (6) cum fit

$\frac{dv}{dx} = x^3 + ax^2 + bx$ duas tantummodo radices habet, alteram positivam, alteram negativam, quarum haec rejicitur, cum valorem ipsius y imaginarium redderit. Illa ad duos ipsius y valores reales pertinet, ideoque ad duo ipsius curvae puncta, quae cum puncto in infinitum remoto, tres flexus in contrarium sistunt.

Si b non evanescit, atque aequationis (5) tres radices omnes reales sunt: $x = 0$, $-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)}$, valores ipsius v (6) pro hisce valoribus, qui aequationi $\frac{dv}{dx} = 0$ conveniunt, erunt resp. $-b^2$, $-\frac{1}{2}a^2 + b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - a^2b\right)}$. Cum in hisce quadratum partis rationalis majus sit quadrato partis irrationalis, facile perspicitur, utrumque horum ipsius v valorum fore aut positivum aut negativum.

In casu priori utraque radix ($x = 0$ excepta) aequationis (5) I. aut positiva, aut II. negativa, vel denique III. alterutra positiva, alterutra negativa est. Designentur r , r' , r'' radices aequationis (5) secundum magnitudinem scriptas, majoribus sequentibus, habemus valores ipsius v (6) pro $x = \pm \infty$ et pro $x = r$, r' , r'' , qui cum $\frac{dv}{dx} = 0$ simul locum habent.

	$x = -\infty$	$x = r$	$x = r'$	$x = r''$	$x = +\infty$
I.	+	—	+	+	+
II.	+	+	+	—	+
III.	+	+	—	+	+

Aequationem (6) duas tantummodo radices reales habere, facile ex hoc schemate dijudicatur. Cum vero pro valore quocunque ipsius x inter $-\infty$ et r valor ipsius yy (5) prodiret negativa, radix inter hos limites, aequationis (6) rejicienda erit, quod etiam de radicibus inter r' et r'' valet. Unica ergo tantum semper adest radix, quae duo puncta sistit, quae similiter ac antea cum puncto in infinitum remoto tres flexus in contrarium dant.

In casu posteriori, quando v (6) pro omnibus ipsius $\frac{dv}{dx} = 0$ radicibus negativa evadit, duo tantummodo ipsius v radices habentur, altera inter $-\infty$ et r sita, quae rejicienda, altera inter r'' et $+\infty$ quae duos ipsius y valores dat. Omnibus ergo hisce parabolis, quae a Newtoni cum ovali dicuntur tres flexus in contrarium sunt.

His omnibus collectis patet: Parabolam Neilianam et nodatam, et quas umbris gignunt, flexum tantummodo solum in contrarium habere; reliquas omnes ternos.

8. Quo clarius, quam ex praecedentibus sponte, sequitur, pateat, uti tres flexus in recta eadem jaceant, alio modo rem

aggrediamur. Sit aequatio tertii gradus, ad axem ipsius x relata, quae curvam in tribus punctis $x = \alpha$, $x = \alpha'$, $x = \alpha''$ secat; talis ergo formae:

$$(x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha'') + y f(x, y) = 0.$$

Ponamus

$$l_1 = x + \lambda y - \alpha$$

$$l_2 = x + \lambda' y - \alpha'$$

$$l_3 = x + \lambda'' y - \alpha''$$

$$l_4 = y$$

designantibus λ , λ' , λ'' quantitates constantes; inde deducitur

$$l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 + l_4 f'(x, y) = 0$$

$l_4 = 0$ aequatio est rectae quae cum axi ipsorum x coincidit $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ aequationes linearum rectarum, quae axem hanc in punctis $x = \alpha$, $x = \alpha'$, $x = \alpha''$ respective secant. Sit $l_5 = 0$ aequatio lineae rectae, quae has tres lineas rectas in tribus aliis ipsius curvae punctis secat, erit, cum in hisce tribus punctis valor aequationis evanescit, nec non prima pars ipsius aequationis, neque vero l_4 , cum alia tria puncta quam in quibus haec linea curvam secat, supposuimus; in hisce tribus punctis $f'(x, y) = 0$. Cum vero $f'(x, y)$ secundum tantum gradum attingit, productum ipsius l_5 in aliam primi gradus aequationem, vel in constantem erit, in casu contrario enim a recta $l_5 = 0$ in duobus tantummodo punctis secari potuisset. Habemus ergo aequationem curvae:

$$l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_5 \cdot l_6 = 0.$$

Jam supposuimus $l_4 = 0$ et $l_5 = 0$ cum singula ex his $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ singula locum in curvae ambitu habere, unde tandem sequitur tres reliquas intersectionis rectarum harum cum curva, si adsunt, in eadem recte $l_6 = 0$ jacere.

Hinc tanquam corollarium deducitur: tangentes ad tria puncta, in eadem recta sita, curvam tertii ordinis, in tribus punctis secant, quae similiter ipsae in recta linea jacent. Casum hujus corollarii specialem asymptotae tres praebent.

Si duo illorum tangentium curvam in puncto contactus simul secant, vel si flexus in contrarium adest, idem de tertio

puncto curvae in eadem cum duobus praecedentibus recta sita valet. Inde etiam patet, cum recta quaevis curvam in uno vel tribus punctis secat, si duo talia puncta adfuerint, tertium etiam adfore.

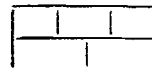
9. Aequatio modo allata curvae tertii gradus propositionem sistit pro hisce curvis, ei similem, quae in sectionibus conicis valet:

Ducatur linea l_4 quae curvam in puncto p_1 , p_2 , p_3 secat, similiter l_5 quae eam in aliis tribus punctis p_4 , p_5 , p_6 perstringit; jam si aguntur rectae l_1 per puncta p_1 et p_4 , l_2 per p_2 et p_5 , l_3 per p_3 et p_6 , hae omnes si curvam desuper in tribus punctis p_7 , p_8 , p_9 secant, ipsa in recta l_6 sita erunt. His praemissis dico: Productum ex tribus a puncto in curvae circuitu quocumque ad lineas l_1 , l_2 , l_3 ductis perpendicularis, ad productum ex tribus ab eodem puncto ad lineas rectas l_4 , l_5 , l_6 ductis, rationem tenet constantem.

Theorem: Die Anzahl aller Verbindungen zu vier, von einer ungraden Anzahl Punkte, von denen keine drei in einer graden Linie liegen, in denen ein Punkt innerhalb des Dreiecks liegt, dessen Spitzen von den übrigen dreien gebildet werden: ist immer grade.

Folgender Satz läßt sich geometrisch beweisen.

Die Figur



läßt sich nicht in drei continuir-

lichen Zügen beschreiben, ohne einige Theile zwei oder mehrmal zu ziehen.

Dieses Theorem läßt sich sowohl geometrisch als analytisch beweisen.

Th. Clausen.

Elements and Ephemeris of *Mauvais'* Comet.

Von Herrn *John Russel Hind*.

The elements of this comet were first deduced from an observation at Paris on May 6, one at Abo on June 5 and the Hamburg observation on July 5. I further corrected the elements thus obtained by applying the method of least squares to equations of condition depending on the Königs-

berg observations of May 21, June 11 and July 1, the Paris observation on May 6 and the observation at Hamburg on July 20. The following are the elements of the corrected orbit: