

Satz aus der Störungstheorie.

(Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.)

(Von Herrn Scheibner in Leipzig.)

Es sei M die Sonne, m ein Planet mit der elliptischen mittleren Entfernung a , Excentricität e , mittleren Anomalie $g = nt + c$, so dass $a^3 n^2 = x^2 (M + m)$. Es sei ferner μ ein Komet, Asteroid oder Mond mit zu vernachlässigender Masse, so kann man die vollständigen Bewegungsgleichungen von μ in folgender strengen Form aufstellen.

Ueber der Länge a als Grundlinie construiren man aus den drei Massen ein fictives Dreieck $M'm'\mu'$, dessen drei Seiten $M'm' = a$, $M'\mu' = R$, $m'\mu' = r$ den entsprechenden Seiten des wahren Dreiecks $Mm\mu$ der drei Körper parallel sein sollen. Bezieht man dann die Lage von μ' auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt von a liegen mag, dessen x -Axe durch M' gehen und dessen xy -Ebene der Ekliptik oder Ebene der Planetenbahn parallel sein soll, so ergeben sich die Differentialgleichungen

$$(1 + e \cos g) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(1 + e \cos g) \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - 2n \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$(1 + e \cos g) \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + z \right) = \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo zur Abkürzung

$$U = x^2 M \left(\frac{1}{R} + \frac{R^2}{2a^3} \right) + x^2 m \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2a^3} \right)$$

geschrieben ist. Den (letzten) Multiplicator dieses Gleichungensystems erhält man ohne Schwierigkeit. Da hier unter t nicht die wahre, sondern eine fictive Zeit verstanden wird, so hat man, um nach geschehener Integration die Lage von μ zu finden, für das Verhältniss der Seiten des wahren und des fictiven Dreieckes den Werth $1 - ee : 1 + e \cos g$ zu benutzen.

Für $e = 0$ fällt das fictive mit dem wahren Dreiecke zusammen; man kann diesen Fall als das *ungestörte* Problem betrachten, wobei die Producte

$$-\frac{e \cos g}{1 + e \cos g} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{e \cos g}{1 + e \cos g} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{e \cos g}{1 + e \cos g} \frac{\partial U}{\partial z}$$

die störenden Kräfte ausdrücken. Schreibt man dann

$$\frac{dx}{dt} + ny = \xi, \quad \frac{dy}{dt} - nx = \eta, \quad \frac{dz}{dt} = \zeta,$$

$$H = \frac{1}{2}(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta) + n(x\eta - y\xi) - \frac{x^2 M}{R} - \frac{x^2 m}{r},$$

so nehmen die ungestörten Differentialgleichungen die canonische Form an

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\zeta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}$$

Da H einer Constanten gleich ist, der letzte Multiplicator die Einheit wird und die unabhängige Variable t nicht explicite vorkommt, so bleiben noch drei Integrationen zu leisten, um die Aufgabe für $e = 0$ auf Quadraturen zurückzuführen.

December 1865.