19.

Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist.

(Von Herrn *Th. Clausen* in Altona.)

Von *Hippocrates* haben wir schon den Ausdruck des Flächen-Inhalts einer von zwei Kreisbogen begränzten Figur: es scheint mir merkwürdig, dafs man noch nicht mehrere gesucht hat. Es lassen sich leicht mit den Hülfsmitteln der jetzigen Analysis noch vier finden.

Es seien zwei Kreis-Ausschnitte von gleichem Flächen-Inhalte $ACBEA = AC'BE'A$ (Fig. 1.), deren Chorden AB gleich sind: so wird, wie man leicht sieht, $CBC'AC$ der mondförmigen Figur $AEBE'A$ (Fig. 1.) gleich. Setzt man den Halbmesser des gröfsten Kreises $AC = r$, den Winkel des Ausschnittes $ACB = 2\varphi$; des kleinsten Kreises Halbmesser $AC' = r'$, den Winkel des Ausschnittes $AC'B = 2\varphi'$; so giebt die Gleichheit der Flächen folgende Gleichung:

$$1.\quad r^2\varphi = r'^2\varphi'$$

und die Gleichheit der Chorden:

$$2.\quad r\sin\varphi = r'\sin\varphi'.$$

Sind m und n ganze Zahlen und $\varphi = m\alpha$, $\varphi' = n\alpha$, so lassen sich $\sin\varphi$ und $\sin\varphi'$ algebraisch durch $\sin\alpha$ ausdrücken; und da der Gleichung (1.) durch die Werthe

$$r = \frac{a}{\sqrt{m}},\qquad r' = \frac{a}{\sqrt{n}}$$

Genüge geleistet wird, so verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$3.\quad \sqrt{n}.\sin m\alpha = \sqrt{m}.\sin n\alpha.$$

Aus dieser folgt eine algebraische Gleichung mit $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ als unbekannte Gröfse, die sich in folgenden Fällen durch Ausziehung von Quadratwurzeln oder geometrisch auflösen läfst.

I. Wenn $n = 2$, $m = 1$, wodurch man den Mond des *Hippocrates* findet.

II. Wenn $n = 3$, $m = 1$, so wird die Gleichung (3.)

$$\sqrt{3}.\sin\alpha = \sin 3\alpha,$$
$$\sqrt{3} = 1 + 2\cos 2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Die Gestalt dieses Mondes zeigt Fig. 2. Der Winkel des Ausschnittes des gröſsern Kreises wird $68^0,5$, des kleinern $205^0,6$ ungefähr.

III. Wenn $n=3$, $m=2$, so wird die Gleichung (3.)

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha} = \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

$$\frac{\cos 2\alpha^2 + 4\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha + 2} = \tfrac{3}{2}; \text{ folglich}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}.$$

Die Gestalt dieses Mondes zeigt Fig. 1. Die Kreis-Ausschnitte enthalten $107^0,2$ und $160^0,9$.

IV. Wenn $n=5$, $m=1$, so wird

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos 2\alpha^2 + 2\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5} \text{ und}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{(5+4\sqrt{5})} - 1}{4}.$$

Diesen Mond zeigt Fig. 3.; seine Bogen enthalten $46^0,9$ und $234^0,4$.

V. Wenn $n=5$, $m=3$, so ist

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4\cos 2\alpha^2 + 2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1} = \sqrt{\tfrac{5}{3}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{\tfrac{5}{3}} - 1 + \sqrt{\left(\frac{20}{3} + \sqrt{\frac{20}{3}}\right)}}{4}.$$

Die Form dieses Mondes ist in der vierten Figur dargestellt. Die Bogen enthalten $100^0,8$ und $168^0,0$.

Für jedes der angegebenen Verhältnisse der Winkel der Ausschnitte geben die Gleichungen *nur eine* brauchbare Wurzel. Ich glaube schwerlich, daſs sich die Gröſsen, die die Winkel der, andern Verhältnissen entsprechenden Ausschnitte bestimmen, geometrisch finden lassen.

Altona, den 18ten Juli 1840.