

Bestimmung der Anzahl involutorischer Elementenpaare einförmiger mehrdeutiger Gebilde.

(Von Herrn *Emil Weyr* in Prag.)

Bei vielen geometrischen Fragen, bei deren Lösung Verwandtschaften einförmiger Elementargebilde zur Anwendung gelangen, stellt sich die folgende Frage zur Beantwortung auf.

„Wenn sich zwei m - n -deutige einförmige und gleichartige Elementargebilde auf einem und demselben Träger befinden, wie viel involutorischer Elementenpaare enthalten sie; d. h. wie viele Mal kommt es vor, dass sich die beiden Elemente eines Paares vertauschungsfähig entsprechen.“

Seien G_m , G_n die beiden m - n -deutigen Gebilde, welche sich auf dem gemeinschaftlichen Träger T befinden. Jedem Elemente von G_m entsprechen (algebraisch) n Elemente von G_n , und umgekehrt entsprechen jedem Elemente des letzteren Gebildes m Elemente des ersteren. Zwei Elemente i , i' bilden ein involutorisches Elementenpaar beider Gebilde, wenn jedem das andere entspricht, ob man nun jenes zu dem m -deutigen oder dem n -deutigen Gebilde rechnet. Diese Eigenschaft theilen offenbar auch die sich selbst entsprechenden Elemente beider Gebilde, d. h. die in der Zahl $(m+n)$ vorhandenen *Doppelemente* beider Gebilde. Ausser diesen Doppelementen giebt es jedoch noch eine bestimmte Anzahl von *eigentlichen* involutorischen Elementenpaaren, welche Anzahl zu bestimmen, der Zweck dieser kurzen Mittheilung ist.

Zwischen den Parametern x_m , x_n zweier entsprechenden Elemente der beiden Gebilde wird eine Gleichung:

$$(1.) \quad F(x_m, x_n) = 0$$

bestehen, welche in x_m vom m^{ten} und in x_n vom n^{ten} Grade ist, und deren Grad somit $(m+n)$ sein wird. Sind nun x_m , x_n die Parameter der Elemente eines involutorischen Paares, und ist die Bedeutung beider Parameter die nämliche, so wird auch die Gleichung:

$$(2.) \quad F(x_n, x_m) = 0$$

erfüllt sein müssen, welche man aus (1.) durch Vertauschung von x_m und x_n erhält.

Die den beiden Gleichungen (1.), (2.), von denen jede vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade ist, gemeinsamen Wurzelpaare sind somit die Parameter der Elemente involutorischer Elementenpaare. Solcher, den beiden Gleichungen gemeinschaftlicher Wurzelpaare giebt es $(m+n)^2 - 2mn$, d. h. $(m^2 + n^2)$, wie man sich leicht in folgender Weise überzeugen kann.

Fasst man (1.) und (2.) als Gleichungen zweier Curven in der Ebene auf, bezogen auf ein und dasselbe System paralleler Coordinaten, so stellt jede der Gleichungen eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung dar. Die Curve (1.) hat jedoch auf der Axe (x_m) einen unendlich weiten n -fachen, und auf der Axe (x_n) einen unendlich weiten m -fachen Punkt. Dagegen hat (2.) auf (x_m) einen unendlich weiten m -fachen und auf (x_n) einen unendlich weiten n -fachen Punkt. Die beiden unendlich weiten Punkte der Coordinatenaxen gelten somit für $2m \cdot n$ gemeinschaftlicher Schnittpunkte beider Curven, so dass dieselben im Endlichen noch weitere $(m+n)^2 - 2mn$, d. i. $(m^2 + n^2)$ Schnittpunkte besitzen müssen. Die Coordinatenwerthe dieser Punkte sind die den Gleichungen (1.) und (2.) gemeinschaftlichen Wurzelpaare.

Unter diesen Wurzelpaaren sind jedoch auch die Parameter der $(m+n)$ sich selbst entsprechenden Elemente enthalten, denn es ist klar, dass wenn unter der Bedingung $x_m = x_n$ der Gleichung (1.) genügt wird, gleichzeitig auch die Gleichung (2.) befriedigt sein muss. Es bleiben uns somit für die eigentlichen involutorischen Elementenpaare bloss $(m^2 + n^2) - (m+n)$, d. h. $[m(m-1) + n(n-1)]$ gemeinschaftlicher Wurzelpaare der Gleichungen (1.), (2.). Nun ist jedoch weiter klar, dass jedes involutorische Elementenpaar zu zwei gemeinschaftlichen Wurzelpaaren beider Gleichungen Veranlassung giebt, von denen das eine aus dem anderen durch die Vertauschung seiner Wurzeln hervorgeht. Denn ist z. B. x_m, x_n ein gemeinschaftliches Paar von Wurzeln, so ist auch x_n, x_m ein solches. Wir finden daher das folgende Ergebniss als Antwort für die aufgestellte Frage:

„Befinden sich zwei gleichartige einförmige und $m-n$ -deutige Elementargebilde auf demselben Träger, so besitzen sie:

$$\frac{1}{2} [m(m-1) + n(n-1)]$$

involutorische Elementenpaare.“

Wir fügen noch den folgenden geometrischen Beweis des ausgesprochenen Theorems bei.

Die $m-n$ -deutigen Gebilde G_m, G_n mögen zwei $m-n$ -deutige Punktsysteme auf einem Kegelschnitte C_2 sein. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte werden eine Curve $C_{(m+n)}^{2mn}$ der $(m+n)^{\text{ten}}$ Classe und der $2mn^{\text{ten}}$ Ordnung umhüllen, welche man wohl auch die *Directionscurve* der beiden Systeme nennen könnte. Dass diese Curve von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Classe sein müsse, folgt schon aus dem Umstande, dass durch jeden Punkt von $C_2(m+n)$ ihrer Tangenten gehen, nämlich erstens die m Geraden, welche den betreffenden Punkt mit den entsprechenden Punkten des m -deutigen, und dann die n Geraden, welche ihn mit den entsprechenden Punkten des n -deutigen Systems verbinden. Uebrigens ist es nicht schwer, einen directen Beweis dafür zu liefern, dass durch einen beliebigen Punkt der Ebene $(m+n)$ Tangenten von $C_{(m+n)}^{2mn}$ hindurchgehen. Es kommt einfach darauf an zu zeigen, dass eine quadratische Involution, welche sich mit zwei $m-n$ -deutigen Gebilden auf demselben Träger befindet, mit ihnen $(m+n)$ Elementenpaare gemeinschaftlich hat.

Die Ordnung der Directionscurve finden wir, wenn wir die Zahl der Punkte bestimmen, welche sie mit dem Träger C_2 gemeinschaftlich hat. Zunächst sind die $(m+n)$ sich selbst entsprechenden Punkte ebensoviele Berührungspunkte der Directionscurve mit dem Träger C_2 und zwar aus demselben Grunde, aus welchem die beiden Doppelpunkte zweier projectivischen Punktsysteme auf C_2 die Berührungspunkte dieses Kegelschnittes mit jenem Kegelschnitte sind, welcher von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllt wird. Die $(m+n)$ Doppelpunkte der beiden Systeme gelten somit für $2(m+n)$ Schnittpunkte der Curven $C_2, C_{(m+n)}^{2mn}$. Nun giebt es aber im m -deutigen Gebilde bekanntlich $2m(n-1)$ Verzweigungspunkte, d. h. solche Punkte, denen im n -deutigen Gebilde zwei unendlich nahe Punkte entsprechen. Durch jeden solchen Verzweigungspunkt gehen somit zwei unendlich nahe Tangenten der Directionscurve, so dass ein solcher Punkt als der Curve $C_{(m+n)}^{2mn}$ angehörig betrachtet werden muss. Die Verzweigungspunkte sind also Schnittpunkte der Directionscurve mit dem Träger C_2 ; ebenso sind die $2n(m-1)$ Verzweigungspunkte des n -deutigen Systemes ebensoviele Schnittpunkte der Curven $C_2, C_{(m+n)}^{2mn}$, so dass wir im Ganzen

$$2(m+n) + 2m(n-1) + 2n(m-1) = 4mn$$

gemeinschaftlicher Schnittpunkte erhalten, woraus hervorgeht, dass $C_{(m+n)}^{2mn}$ in der That eine Curve der $2mn^{\text{ten}}$ Ordnung sein müsse, da ausser den aufgezählten keine anderen Schnittpunkte vorkommen können.

Die Reduction der Ordnungszahl der Umhüllungscurve $C_{(m+n)}^{2mn}$ kann

nur von Doppeltangenten herrühren, für deren Anzahl x wir leicht, gemäss den Formeln von *Plücker* die Gleichung erhalten:

$$(m+n)(m+n-1)-2x = 2mn,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{1}{2} [m(m-1) + n(n-1)].$$

Da nun jede Doppeltangente der Directionscurve ein involutorisches Elementenpaar der beiden Gebilde liefert, so haben wir durch obige Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten von neuem die Richtigkeit des von uns ausgesprochenen Theoremes erhärtet.

Prag, im October 1871.