

## 25.

# Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck.

(Von Herrn J. Steiner, Professor an der Universität zu Berlin.)

Eine elementare Aufgabe über das geradlinige Dreieck, die mir im Jahr 1840 von Herrn Prof. *Lehmus* mit dem Wunsche zukam: „*eine rein geometrische Lösung derselben zu finden*“ und die ich später gelegentlich Andern als Übungsbeispiel mittheilte, ist in neuester Zeit in verschiedenen Druckschriften öffentlich zur Sprache gebracht und gelöst worden. Irrthümlicherweise wurde aber die Aufgabe theils mir zugeschrieben, theils nicht so elementar gelöst, als der Urheber derselben und ich es verlangten; auch wurde der Gegenstand mit solchen Bemerkungen begleitet, welche meine einfache Absicht, die ich bei gesprächsweiser Mittheilung der Aufgabe hatte, weit übertreffen. Dies veranlaßt mich — um Mißverständnisse zu verhindern — meine eigene Lösung der Aufgabe, welche ich damals gefunden und Herrn *Lehmus* sogleich mittheilte, hier nachträglich zu veröffentlichen; zumal da ein großer Kenner der Geometrie, Herr *Sturm*, der von seinen Zuhörern und Andern verschiedene Lösungen besaß, die meinige für die elementarste hielt. Bei dieser Gelegenheit werde ich zugleich auf die Gründe aufmerksam machen, warum die Aufgabe für die Rechnung umständlicher ausfällt, als man auf den ersten Blick vermuthet; so wie auch die Aufgabe etwas allgemeiner fassen, und zuletzt auch die analoge sphärische Aufgabe behandeln.

## A u f g a b e I.

„Wenn in einem geradlinigen Dreieck die zwei Geraden, welche dessen Winkel an der Grundlinie hälften und die bis an die Gegenseiten verlängert genommen werden, gleich lang sind, so ist die Frage, ob dann das Dreieck gleichschenkelig sei?“

Wenn also z. B. in dem Dreiecke *ACB* (Fig. 1. Taf. III.) Winkel  $\alpha = \alpha_1$ , Winkel  $\beta = \beta_1$  und die Gerade  $AD = BE$  oder  $a = b$ , so ist die Frage, ob  $AC = BC$  oder; was auf dasselbe hinausläuft, ob  $\alpha = \beta$  sei?

Wollte man annehmen, die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  können ungleich sein, etwa  $\alpha > \beta$  (also auch  $\alpha_1 > \beta_1$ ), so zeigt sich die Unmöglichkeit leicht wie folgt.

Vermöge der Dreiecke **ADB** und **BEA**, die nach Voraussetzung zwei Paar gleiche Seiten und dazwischen die ungleichen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  haben, folgt, daß **BD** > **AE** oder  $d > e$  und Winkel **ADB** > **BEA** (weil  $\alpha_1 + \alpha + \beta > \beta_1 + \beta + \alpha$ ). Diese Dreiecke denke man sich für einen Augenblick (zur bequemeren Übersicht) in solche Lage gebracht (Fig. 2.), wo sie auf entgegengesetzten Seiten über derselben Grundlinie  $c = \mathbf{AB}$  stehen und wo die Seiten den durch dieselben Buchstaben bezeichneten in Fig. 1. gleich sind. Da nach der Annahme  $a = b$  (d. i. **AD** = **BE** Fig. 1.), so ist, wenn man die Gerade **DE** zieht, Winkel  $n = m$ , und daher, da Winkel **D** > **E** (d. i. Winkel **ADB** > **BEA** Fig. 1.), auch Winkel  $x > y$ ; woraus folgt, daß  $e > d$  sein muß; was dem Vorigen,  $d > e$ , widerspricht: demnach können  $\alpha$  und  $\beta$  nicht ungleich, und folglich muß das vorgelegte Dreieck **ACB** gleichschenkelig sein.

Dieses ist meine oben erwähnte erste Lösung der Aufgabe. Die Schwierigkeit, welche die Aufgabe bei anderer Behandlung darbietet, mag ihren Grund darin haben, daß die eine Voraussetzung nicht so absolut bestimmt ist, wie man auf den ersten Blick leicht glauben möchte. Denn wenn gesagt wird: „die Winkel an der Grundlinie werden gehälfet,“ so ist dies sowohl auf die inneren als auf die äußeren Winkel an der Grundlinie anzuwenden; was dann im Wesentlichen drei verschiedene Fälle giebt, indem nämlich, wenn man die bis an die Gegenseiten verlängerten Strahlen, welche die innern Winkel hälften durch  $a$  und  $b$ , und diejenigen, welche die äußeren Winkel hälften, durch  $a_1$  und  $b_1$  bezeichnet, entweder

1.  $a = b$ , oder
2.  $a_1 = b_1$ , oder
3.  $\begin{cases} a = b_1, \text{ oder} \\ a_1 = b \end{cases}$

angenommen werden kann. Im ersten Falle (1.) ist nun, zufolge des obigen Beweises, das Dreieck allemal gleichschenkelig. Beim zweiten Falle (2.) kommt es noch auf eine nähere Unterscheidung an, ob nämlich  $\alpha$ ) beide Strahlen  $a_1, b_1$  die verlängerten Gegenseiten jenseits der Spitze **C**, oder beide dieselben unterhalb der Grundlinie **AB** treffen, oder ob  $\beta$ ) der eine die Gegenseite jenseits der Spitze und der andere sie unterhalb der Grundlinie trifft. Unter der Bedingung ( $\alpha$ .) ist das Dreieck gleichschenkelig; dagegen unter ( $\beta$ .) nicht. Im drit-

ten Falle (3.) endlich ist das Dreieck im Allgemeinen nicht gleichschenkelig, (nur scheint die Möglichkeit vorhanden zu sein, daß es in ganz besonderem Falle gleichschenkelig sein kann, wobei es dann aber ein der Form nach ganz bestimmtes Dreieck ist, d. h. bestimmte Winkel hat).

Da nun die Aufgabe alle diese Fälle für die Rechnung stillschweigend zugleich umfaßt, so begreift man, wie diese, wenn sie nicht geschickt angegriffen wird, auf höhere Gleichungen führen muß.

Für den genannten Fall ( $\alpha$ ), mit der Bedingung, daß beide Strahlen  $a_1$ ,  $b_1$  die Gegenseiten jenseits der Spitze  $C$  treffen, ist der Beweis dem obigen fast gleich.

Nämlich wollte man annehmen es sei  $\alpha_1 > \beta_1$  (Fig. 3.), so wäre  $p + \beta > q + \alpha$ , und daher  $AE > BD$  (als Seiten der Dreiecke  $AEB$  und  $BDA$ ) und  $\gamma > x$  (als Winkel der Dreiecke  $BCE$  und  $ACD$ , deren Winkel bei  $C$  gleich und wo  $\alpha > \beta$ ). Bringt man das Dreieck  $AEB$  in die Lage von  $BE_1A$ , wobei also  $BE_1 = AE$ ,  $q_1 = q$ ,  $\gamma_1 = \gamma$ ,  $b_0 = b_1 = a_1$ , etc. und zieht die Gerade  $DE_1$ , so ist  $n = m$  und  $\gamma_1 > x$ , also  $m + \gamma_1 > n + x$ , folglich  $BD > BE_1$ , oder  $BD > AE$ ; was dem Vorigen,  $AE > BD$ , widerspricht; woraus man schließt, daß  $\alpha_1 = \beta_1$  und somit das Dreieck  $ACB$  gleichschenkelig sein muß \*).

Wenn dagegen beide Strahlen  $a_1$ ,  $b_1$  den Gegenseiten unterhalb der Grundlinie begegnen, wie in Fig. 4., so scheint der Beweis nicht auf analoge Weise Statt zu finden. Ich habe dafür den folgenden, minder einfachen aufgestellt.

Sollten  $\alpha$  und  $\beta$  ungleich sein können, etwa  $\alpha > \beta$ , so wäre  $BF > AF$  und daher  $FD > FE$ . Man nehme  $FG = FA$  und  $FH = FE$ , so ist  $GB = HD$  (weil nach der Voraussetzung  $AD = BE$  oder  $a_1 = b_1$ ). Ferner sind die Dreiecke  $HFG$  und  $EFA$  congruent, daher  $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ , mithin  $\alpha_2 > \beta_1$ , und folglich muß die Gerade  $GH$  der Seite  $CB$  jenseit  $D$ , etwa in  $K$  begegnen, und zwar unter einem Winkel  $\gamma$ , welcher, wie leicht zu sehen,  $= \angle \varepsilon$  ist. Nun ist, vermöge des Dreiecks  $DAC$ , Winkel  $\alpha_1 = C + D$ , daher  $\alpha > D$  (da  $\alpha = \alpha_1$ ), und mithin  $BD > BA$ . Nimmt man  $BL = BA$ ,

\*) Man könnte übrigens auch wie folgt schließen. Wäre  $\alpha_1 > \beta_1$ , so wäre auch, wie oben,  $\gamma > x$  und  $p > q$ , und daher  $AC > BC$ ; dagegen müßte, da die Dreiecke  $ACD$  und  $BCE$ , vermöge ihrer gleichen Winkel bei  $C$  und ihrer gleichen Seiten  $AD = BC$ , gleichen Kreisen eingeschrieben sind, und da  $\gamma > x$  ist, auch  $BC > AC$  sein; was sich widerspricht: daher muß  $\alpha_1 = \beta_1$  und demzufolge  $AC = BC$  sein. — Da dieser Beweis sich auf den Kreis stützt, so ist er nicht so elementar, wie der obige.

so sind die Dreiecke **BAG** und **BLG** congruent, also ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ . Aber als äußerer Winkel des Dreiecks **GLK** ist  $\varepsilon_1 > \gamma$ , also auch  $\varepsilon > \gamma$ ; was dem Vorigen,  $\gamma = 2\varepsilon$ , widerspricht: folglich können  $\alpha$  und  $\beta$  nicht ungleich, d. h. das Dreieck **ACB** muß gleichschenkelig sein \*).

Die obige Aufgabe (I.) kann übrigens auch etwas allgemeiner gestellt und doch eben so leicht gelöst werden, nämlich wie folgt.

### Aufgabe II.

*„Wenn die Winkel an der Grundlinie eines Dreiecks in gleichem Verhältniß getheilt werden, so daß  $\alpha : \alpha_1 = \beta : \beta_1$ , und wenn die bis an die Gegenseiten verlängerten Theilungslinien **AD** und **BE** gleich lang sind, so ist die Frage, ob dann das Dreieck gleichschenkelig sei?“*

Für die Fälle von (Fig. 1.) und (Fig. 3.) läßt sich auf ähnliche Weise, wie oben, zeigen, daß das Dreieck auch unter den gegenwärtigen Bedingungen gleichschenkelig sein muß.

In Rücksicht des sphärischen Dreiecks lassen sich die beiden entsprechenden Aufgaben zum Theil auf fast gleiche Art elementar behandeln.

### Aufgabe III.

*„Wenn die beiden Hauptkreisbogen, welche die Winkel an der Grundlinie in einem sphärischen Dreieck hälften, von den Winkeln bis an die Gegenseiten genommen, gleich lang sind, so ist die Frage, ob dann das Dreieck gleichschenkelig sei?“*

Es sei im Dreieck **ACB** (Fig. 5.) Winkel  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$  und der Hauptkreisbogen **AD** = **BE**. Sollten  $\alpha$  und  $\beta$  ungleich sein können, etwa  $\alpha > \beta$ , so wäre **BF** > **AF**, und daher **FD** > **FE**. Man nehme **FH** = **FA** und **FG** = **FE**, so sind die Dreiecke **AFE** und **HFG** symmetrisch gleich, also Winkel  $x_1 = x$  und  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Da das Dreieck **BFD** offenbar größeren Inhalt hat als das Dreieck **HFG**, so muß auch seine Winkelsumme größer sein, als die des letztern; den Winkel bei **F** haben sie gemein, und von den übrigen ist  $\alpha_2 > \beta_1$  (weil  $\alpha_2 = \alpha_1 > \beta_1$ ), daher muß Winkel  $\gamma > x_1$  und somit auch  $\gamma > x$  sein. Da ferner die Dreiecke **BAD** und **ABE** zwei Paar gleiche Seiten und dazwischen die ungleichen Winkel  $\alpha > \beta$  haben, so ist Seite **d** > **e** (d. i. **BD** > **AE**). Man denke sich nun das Dreieck **ABE** in der Lage von **BAE**<sub>1</sub>, wo nämlich Winkel  $x_2 = x$ ,  $\gamma = \alpha + \alpha_1$ , Seite

\*) Auf fast ähnliche Art läßt sich auch der obige Fall (1.) beweisen.

$e_1 = e$  ( $BE_1 = AE$ ), etc. ist, so wird man — falls der Winkel  $DBE_1 = \gamma + \beta + \beta_1 < \pi$ , d. h. falls die Summe der Winkel an der Grundlinie  $AB$  im gegebenen Dreieck  $ACB$  kleiner als zwei Rechte ist — durch Hülfe des Hauptkreisbogens  $DE_1$ , auf ganz gleiche Weise wie oben bei Fig. 2., auf den Widerspruch geführt, daß  $e_1 > d$ , also  $e > d$  sein müßte; woraus sodann auf die Gleichheit von  $\alpha$  und  $\beta$ , und daraus auf die Gleichheit von  $AC$  und  $BC$  geschlossen wird.

Für die andere, allgemeinere Aufgabe, wo die Winkel an der Grundlinie, statt gehäuftet, in irgend einem gleichen Verhältniß getheilt werden, folgt auf gleiche Weise, daß das Dreieck gleichschenkelig sein muß, falls die Summe der beiden Winkel an der Grundlinie kleiner als zwei Rechte ist.

Wenn dagegen die Summe der Winkel an der Grundlinie größer als zwei Rechte ist, so wird der Beweis für beide Aufgaben unbrauchbar. — Ich begnüge mich mit dieser Andeutung und überlasse es den Liebhabern, die vollständige, aber möglichst elementare Lösung aufzufinden.