

13. *Magnetostriktion ferromagnetischer Körper*  
*(Bemerkung zu einer Arbeit des Hrn. A. Heydweiller);*  
*von R. Gans.*

---

Hr. Heydweiller hat vor kurzem<sup>1)</sup> die Längenänderung eines ferromagnetischen Drahtes in einem gleichförmigen Magnetfelde durch einen Kreisprozeß berechnet. Da die Resultate aber infolge eines fehlerhaften Ansatzes für die Arbeit der Kräfte unrichtig geworden sind, so erlaube ich mir, eine meiner Ansicht nach einwandfreie Ableitung zu geben.

Ist die Permeabilität  $\mu$  Funktion der Feldstärke  $M$ , so ist die magnetische Energie des Raumes  $\tau$

$$(1) \quad W_m = \int_{\tau} \frac{d\tau}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} M \partial \mathfrak{M},$$

wo

$$(2) \quad \mathfrak{M} = \mu M$$

und nicht mehr

$$\frac{1}{8\pi} \int \mu M^2 d\tau.$$

Auf diese zwingende Folgerung der Maxwell'schen Theorie hat Hr. Cohn<sup>2)</sup> hingewiesen; an seine Darstellung lehnt sich auch die folgende an.

Hr. Cohn findet<sup>3)</sup> die Zunahme der magnetischen Energie bei irgend welchen virtuellen Verschiebungen als

$$(3) \quad dW_m = \int d\tau \left[ \psi \partial \varrho - \int_0^M \frac{\partial \mu}{4\pi} M \partial M \right].$$

Hierin bedeutet  $\psi$  das Potential von  $M$ , also

$$M_x = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ etc.}$$

und  $\varrho$  die Dichte des wahren Magnetismus.

---

1) A. Heydweiller, Ann. d. Phys. **12.** p. 602. 1903.

2) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 510 ff. Leipzig 1900.

3) l. c. p. 515.

Daraus ergibt sich unter der von Hrn. Cohn gemachten Annahme

$$\partial \mu = - \frac{\partial \mu}{\partial x} \delta x - \frac{\partial \mu}{\partial y} \delta y - \frac{\partial \mu}{\partial z} \delta z,$$

d. h., daß in einem konstanten Felde  $\mu$  nur mit der Materie verschoben wird, die auf die Volumeneinheit wirkende Kraft des Systems

$$(A) \quad f_x^{(1)} = \varrho M_x - \frac{1}{4\pi} \int_0^M \frac{\partial \mu}{\partial x} M \partial M.$$

(Hier ist unter  $\partial \mu$  die Zunahme von  $\mu$  infolge der Änderung der Substanz allein, also bei konstantem  $M$ , gemeint.)

Hr. Cohn berücksichtigt ausdrücklich nicht die Änderungen der Permeabilität durch Deformationen, die für unsere Betrachtungen gerade wesentlich sind.

Die Beobachtungen zwingen uns anzunehmen, daß  $\mu$  sich durch Deformation auch ändert, und zwar in anderer Weise bei einer Dilatation in Richtung der Kraftlinien als bei einer Dilatation senkrecht zu den Kraftlinien.<sup>1)</sup>

Wir wollen setzen

$$(4) \quad \Delta \mu = \alpha \frac{\Delta l}{l} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta l}{l} \right).$$

$\Delta l/l$  soll die Dilatation parallel den Kraftlinien,  $\Delta v/v$  die kubische Dilatation bedeuten, es ist also  $\alpha$  bez.  $\beta$  die Zunahme der Permeabilität durch die lineare Dilatation 1 parallel bez. senkrecht zu den Kraftlinien.

Bezeichnen wir die Kosinus der Neigungswinkel von  $M$  mit den Koordinatenachsen bez. mit  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , so ist

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta l}{l} &= \frac{\partial \delta x}{\partial x} \varepsilon_x^2 + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \varepsilon_y^2 + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \varepsilon_z^2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) \varepsilon_y \varepsilon_z + \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) \varepsilon_z \varepsilon_x \\ &\quad + \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \varepsilon_x \varepsilon_y \end{aligned} \right.$$

und

$$(6) \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}.$$

1) Vgl. F. Poekels, Grunerts Archiv 12. p. 57. 1894.

Setzt man (5) und (6) in (4) ein und (4) wiederum in (3), so ergibt sich außer der von Hrn. Cohn berechneten Kraft  $f^{(1)}$  (vgl. Formel (A)) noch eine zweite

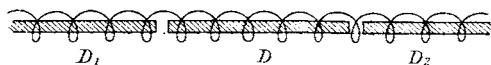
$$(B) \left\{ \begin{aligned} f_x^{(2)} &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^M \epsilon_x^2 \frac{\alpha - \frac{\beta}{2}}{4\pi} M \partial M - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^M \epsilon_x \epsilon_y \frac{\alpha - \frac{\beta}{2}}{4\pi} M \partial M \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^M \epsilon_x \epsilon_z \frac{\alpha - \frac{\beta}{2}}{4\pi} M \partial M - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^M \frac{\beta}{8\pi} M \partial M. \end{aligned} \right.$$

Diese läßt sich leicht durch Spannungen darstellen.

Legen wir die Kraftlinien in die Richtung der  $x$ -Achse, so ist

$$(B') \left\{ \begin{aligned} f_x^{(2)} &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^M \frac{\alpha}{4\pi} M \partial M, \\ f_y^{(2)} &= - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^M \frac{\beta}{8\pi} M \partial M, \\ f_z^{(2)} &= - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^M \frac{\beta}{8\pi} M \partial M. \end{aligned} \right.$$

Man erzeugt in einem dünnen, homogenen ferromagnetischen Draht  $D$  wohl am besten ein gleichförmiges Feld parallel der Achse, indem man denselben in einem stromdurchflossenen



Solenoid zwei gleich dicke Drähte  $D_1$  und  $D_2$  aus demselben Material sehr nahe gegenüberstellt, wie die Figur es andeutet.

Hat der Draht keinen wahren Magnetismus, so ist

$$\varrho = 0;$$

wegen der Homogenität ist

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

also ist im ganzen Innern

$$f^{(1)} = 0.$$

Ebenso ist im Innern

$$f^{(2)} = 0.$$

Es bleiben nur noch die Drucke auf die Oberfläche, welche sofort hingeschrieben werden können.

Hr. Cohn findet<sup>1)</sup> für den Zug in Richtung der Kraftlinien

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} M \partial \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \partial \mathfrak{M}.$$

Dieser muß gebildet werden für die Außen- und Innenseite einer Stirnfläche des Drahtes und dann die Differenz genommen werden.

Es wirkt also ein Zug nach außen vom Betrage

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} \mathfrak{M} \partial \mathfrak{M} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu} \mathfrak{M} \partial \mathfrak{M}.$$

Dazu kommt infolge der Deformation ein Zug nach außen

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^M \alpha M \partial M,$$

denn außerhalb des Drahtes können wir  $\alpha = \beta = 0$  annehmen. Der Gesamtzug auf die Stirnfläche des Drahtes ist also

$$(C) \quad P_l = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu} \mathfrak{M} \partial \mathfrak{M} + \frac{1}{4\pi} \int_0^M \alpha M \partial M.$$

Hier bedeutet  $M$  das Feld im Draht und nicht etwa zwischen  $D$  und  $D_1$ .

Ebenso findet Hr. Cohn für den Zug senkrecht zu den Kraftlinien, also radial einen Zug

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^M (\mu - \mu_0) M \partial M.$$

---

1) E. Cohn, l. c. p. 518.

Infolge der Deformation kommt hinzu ein Zug

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^M \frac{\beta}{2} M \partial M,$$

also im ganzen wirkt auf die Mantelfläche ein Zug:

$$(D) \quad P_r = \frac{1}{4\pi} \int_0^M \left( \mu - \mu_0 + \frac{\beta}{2} \right) M \partial M.$$

Aus diesen Zügen auf Stirn- und Mantelfläche des Zylinders berechnen sich nach den Regeln der Elastizitätstheorie die Deformationen<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l}{l} &= \frac{1}{E} (P_l - 2\sigma P_r), \\ \frac{\Delta r}{r} &= \frac{1}{E} (-\sigma P_l + (1 - \sigma) P_r), \end{aligned}$$

wo  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\sigma$  das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation bedeutet.

Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta r}{r} = \frac{1 - 2\sigma}{E} (P_l + 2P_r).$$

Noch einfacher ist der von Bidwell experimentell behandelte Fall, daß der Eisenkörper ein Ring ist, wenn wir nur voraussetzen, daß die Querschnittsdimensionen klein gegen den Radius sind. Dann ist nämlich ein allseitig gleicher Zug vorhanden, und es ist:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1 - 2\sigma}{E} P_r = \frac{1 - 2\sigma}{E 4\pi} \int_0^M \left( \mu - \mu_0 + \frac{\beta}{2} \right) M \partial M,$$

d. h.

$$\frac{\partial \log l}{\partial M} = \frac{1 - 2\sigma}{4\pi E} \left( \mu - \mu_0 + \frac{\beta}{2} \right) M = \frac{(1 - 2\sigma) M}{E} \left( \alpha + \frac{\beta}{8\pi} \right),$$

wenn  $\alpha$  die Suszeptibilität  $(\mu - \mu_0)/4\pi$  bedeutet.

---

1) Vgl. z. B. H. Weber, Partielle Differentialgleichungen der math. Physik 2. p. 174. Braunschweig 1901.

Hr. Heydweiller setzt den magnetischen Zug, wie er sich aus  $f_1$  ergibt, allseitig gleich

$$\frac{\mu M^2}{4\pi} \text{ anstatt gleich } \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu} \mathfrak{M} \partial \mathfrak{M} \text{ bez. } \frac{1}{4\pi} \int_0^M (\mu - \mu_0) M \partial M,$$

ferner setzt er die Arbeit, welche das System leistet, wenn ein starrer Körper zu Orten höherer Feldstärke gebracht wird, gleich

$$\frac{v}{4\pi} M \partial \mathfrak{M} \text{ anstatt gleich } \frac{\mu - \mu_0}{4\pi} v M \partial M.^1)$$

Eine genaue Bestimmung der elastischen Konstanten  $E, \sigma$  und der magnetischen Konstanten  $\mu, \alpha, \beta$  wird erweisen können, ob die Maxwellsche Theorie auch die Magnetostriktion ferromagnetischer Körper beschreibt.

Tübingen, Physik. Institut, den 21. November 1903.

1) E. Cohn, l. c. p. 523.

(Eingegangen 24. November 1903.)