

# ÜBER DIE LÖSUNG DER ERSTEN RANDWERTAUFGABE DER ELASTICITÄTSTHEORIE.

Von **Arthur Korn** (Berlin-Wilmersdorf).

Adunanza del 27 febbrajo 1910.

Das Problem des elastischen Gleichgewichts bei gegebenen Verrückungen eines elastischen Körpers an der Oberfläche oder die erste Randwertaufgabe der Elasticitätstheorie fordert die Auffindung von drei in dem Gebiete  $\tau$  des elastischen Körpers mit ihren ersten Ableitungen eindeutigen und stetigen Funktionen  $u, v, w$  der Stelle  $x, y, z$ , welche den Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = -X, \\ \Delta v + k \frac{\partial \theta}{\partial y} = -Y, \\ \Delta w + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -Z, \end{cases} \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

im Gebiete  $\tau$  und den Grenzbedingungen

$$(2) \quad \begin{cases} u = \bar{u}, \\ v = \bar{v}, \\ w = \bar{w} \end{cases}$$

an der Oberfläche  $\omega$  von  $\tau$  genügen. Dabei sind  $X, Y, Z$  drei in  $\tau$  gegebene Funktionen der Stelle  $x, y, z$ ;  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  drei gegebene Funktionen der Stelle an der Oberfläche  $\omega$  von  $\tau$  und  $k$  eine gegebene Zahl.

Ich habe die allgemeine Lösung dieser Aufgabe <sup>1)</sup> für den Fall gegeben, dass die

<sup>1)</sup> A. KORN, a) *Abhandlungen zur Elasticitätstheorie, I: Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu München, B. XXXVI (1906), S. 37-80]; b) *Sur les équations de l'élasticité* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XXIV (1907), S. 9-75]; c) *Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume* [Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Jahrgang 1907, S. 837-896]; d) *Ueber die COSSERAT'schen Funktionentripel und ihre Anwendung in der Elasticitätstheorie* [Acta mathematica, Bd. XXXII (1908), S. 81-96].

Fläche  $\omega$  geschlossen und stetig gekrümmt ist, dass die Funktionen  $X, Y, Z$  mit ihren ersten Ableitungen <sup>2)</sup> in  $\tau$  eindeutig und stetig, die Funktionen  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  an der Oberfläche  $\omega$  mit ihren ersten und zweiten <sup>3)</sup> Ableitungen eindeutig und stetig sind, für eine beliebige Zahl  $k > -1$ .

Bei diesen Lösungsmethoden wurde das Problem zunächst auf das einfachere Randwertproblem zurückgeführt, bei dem die Grenzwerte von  $u, v, w$  an der Oberfläche verschwinden; es geschieht das in sehr einfacher Weise durch Abtrennung dreier Potentialfunktionen mit den Randwerten  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  von den gesuchten Funktionen; hierauf führt für die übrig bleibenden Teile von  $u, v, w$  eine Methode der successiven Annäherungen zum Ziele.

Der Zweck der gegenwärtigen Untersuchung ist, die Zurückführung auf das Problem der verschwindenden Randwerte zu vermeiden und eine direkte Lösung mit Hilfe der Methode der successiven Näherungen anzusetzen. Die Methode, welche wir im Folgenden beweisen werden, besteht darin, dass man zunächst die Funktionen  $u'_0, v'_0, w'_0$  bestimmt, welche in  $\tau$  mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind und den folgenden Bedingungen genügen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u'_0 = -\frac{2+k}{2(1+k)} X, \\ \Delta v'_0 = -\frac{2+k}{2(1+k)} Y, \\ \Delta w'_0 = -\frac{2+k}{2(1+k)} Z \end{array} \right\} \text{ in } \tau;$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_0 = \bar{u}, \\ v'_0 = \bar{v}, \\ w'_0 = \bar{w} \end{array} \right\} \text{ an } \omega;$$

hierauf successive die Potentialfunktionen  $u'_j, v'_j, w'_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) mit den Rand-

<sup>2)</sup> An Stelle der Stetigkeit der ersten Ableitungen der Funktionen  $X, Y, Z$  kann die weniger enge Bedingung treten, dass für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  des Gebietes  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$ :

$$|X(x_2, y_2, z_2) - X(x_1, y_1, z_1)| \leq c \cdot r_{12}^\varpi, \dots,$$

wo  $c$  eine endliche Konstante und  $\varpi$  eine positive Zahl  $> 0$  vorstellt.

<sup>3)</sup> An Stelle der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  kann die etwas weniger enge Bedingung treten, dass die ersten Ableitungen  $D_1 \bar{u}, D_1 \bar{v}, D_1 \bar{w}$  für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  der Oberfläche  $\omega$  von  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$  die Bedingung erfüllen:

$$|D_1 \bar{u}(x_2, y_2, z_2) - D_1 \bar{u}(x_1, y_1, z_1)| \leq c \cdot r_{12}^\varpi, \dots,$$

wo  $c$  eine endliche Konstante und  $\varpi$  eine positive Zahl  $> 0$  vorstellt.

werten <sup>4)</sup>:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} u'_j &= -u'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w'_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v'_{j-1} \frac{d\tau}{r} + 2U'_{j-1}, \\ v'_j &= -v'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u'_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w'_{j-1} \frac{d\tau}{r} + 2V'_{j-1}, \\ w'_j &= -w'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v'_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u'_{j-1} \frac{d\tau}{r} + 2W'_{j-1} \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega, \quad (j=1, 2, 3, \dots).$$

wobei wir

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} U'_j &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left[ \frac{\partial \psi'_j}{\partial y} \cos(vz) - \frac{\partial \psi'_j}{\partial z} \cos(vy) \right] \frac{d\omega}{r}, \\ V'_j &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left[ \frac{\partial \psi'_j}{\partial z} \cos(vx) - \frac{\partial \psi'_j}{\partial x} \cos(vz) \right] \frac{d\omega}{r}, \\ W'_j &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left[ \frac{\partial \psi'_j}{\partial x} \cos(vy) - \frac{\partial \psi'_j}{\partial y} \cos(vx) \right] \frac{d\omega}{r} \end{aligned} \right\} \quad (j=0, 1, 2, 3, \dots)$$

setzen und unter  $\psi'_j$  die Potentialfunktion des Gebietes  $\tau$  mit den normalen Ableitungen

$$(7) \quad \frac{\partial \psi'_j}{\partial v} = u'_j \cos(vx) + v'_j \cos(vy) + w'_j \cos(vz), \text{ an } \omega$$

verstehen; dann sind die Reihen

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \dots, \\ v' &= v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \dots, \\ w' &= w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \dots, \\ U' &= U'_0 + \lambda U'_1 + \lambda^2 U'_2 + \dots, \\ V' &= V'_0 + \lambda V'_1 + \lambda^2 V'_2 + \dots, \\ W' &= W'_0 + \lambda W'_1 + \lambda^2 W'_2 + \dots \end{aligned} \right.$$

mit ihren ersten Ableitungen für beliebige

$$(9) \quad |\lambda| < 1$$

in  $\tau$  gleichmässig konvergent und erfüllen die Bedingungen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u' &= -\frac{2+k}{2(1+k)} X, \\ \Delta v' &= -\frac{2+k}{2(1+k)} Y, \\ \Delta w' &= -\frac{2+k}{2(1+k)} Z \end{aligned} \right\} \text{ in } \tau,$$

<sup>4)</sup> Wir gebrauchen stets die Abkürzungen:

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

<sup>5)</sup>  $v$  ist stets die *innere* Normale von  $d\omega$ .

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \bar{u} + \lambda \left\{ -u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} + 2U' \right\}, \\ v' = \bar{v} + \lambda \left\{ -v' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} + 2V' \right\}, \\ w' = \bar{w} + \lambda \left\{ -w' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} + 2W' \right\} \end{array} \right\} \text{ an } \omega,$$

und die Funktionen

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u' (1 + \lambda) - \lambda \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} + 2U' \right\}, \\ v = v' (1 + \lambda) - \lambda \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} + 2V' \right\}, \\ w = w' (1 + \lambda) - \lambda \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} + 2W' \right\} \end{array} \right\}$$

genügen den Bedingungen des Problems (1), (2), wenn man

$$(13) \quad \lambda = -\frac{k}{2+k}, \quad k = -\frac{2\lambda}{1+\lambda}$$

setzt, so dass die Methode für alle Werte

$$(14) \quad k > -1$$

anwendbar ist. Für verschwindende Randwerte geht die Methode in unsere frühere Methode über. Wie bei dieser ergibt sich bei der gegenwärtigen Untersuchung die Existenz einer abzählbar unendlich grossen Menge von Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

$$(15) \quad 1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$$

denen Potentialfunktionen  $\dot{u}'_x, \dot{v}'_x, \dot{w}'_x$  entsprechen, welche den Grenzbedingungen

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}'_x = \lambda_x \left\{ -\dot{u}'_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \dot{w}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \dot{v}'_x \frac{d\tau}{r} + 2\dot{U}'_x \right\}, \\ \dot{v}'_x = \lambda_x \left\{ -\dot{v}'_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \dot{u}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \dot{w}'_x \frac{d\tau}{r} + 2\dot{V}'_x \right\}, \\ \dot{w}'_x = \lambda_x \left\{ -\dot{w}'_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \dot{v}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \dot{u}'_x \frac{d\tau}{r} + 2\dot{W}'_x \right\} \end{array} \right\} \text{ an } \omega, \quad (x=1, 2, \dots)$$

genügen. Diejenigen unter diesen Funktionentripeln, für welche

$$(17) \quad \dot{u}'_x \cos(\nu x) + \dot{v}'_x \cos(\nu y) + \dot{w}'_x \cos(\nu z) = 0, \text{ an } \omega$$

ist, sind die früher von mir als biharmonische Funktionentripel oder genauer als biharmonische Funktionentripel erster Art bezeichneten Funktionen. Die Funktionen

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_x = \dot{u}'_x - \frac{\lambda_x}{1+\lambda_x} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \dot{w}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \dot{v}'_x \frac{d\tau}{r} + 2\dot{U}'_x \right\}, \\ \dot{v}_x = \dot{v}'_x - \frac{\lambda_x}{1+\lambda_x} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \dot{u}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \dot{w}'_x \frac{d\tau}{r} + 2\dot{V}'_x \right\}, \\ \dot{w}_x = \dot{w}'_x - \frac{\lambda_x}{1+\lambda_x} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \dot{v}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \dot{u}'_x \frac{d\tau}{r} + 2\dot{W}'_x \right\} \end{array} \right\}$$

welche den Bedingungen:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{u}_x + k_x \frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial x} = 0, \\ \Delta \dot{v}_x + k_x \frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial y} = 0, \\ \Delta \dot{w}_x + k_x \frac{\partial \dot{\theta}_x}{\partial z} = 0, \end{array} \right\} \text{ in } \tau; \quad k_x = -\frac{2\lambda_x}{1 + \lambda_x};$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_x = 0, \\ \dot{v}_x = 0, \\ \dot{w}_x = 0 \end{array} \right\} \text{ an } \omega$$

genügen, bezeichnen wir (ev. nach Multiplikation mit gewissen Konstanten), wie früher, als COSSERAT'sche Funktionentripel oder genauer als COSSERAT'sche Funktionentripel erster Art. Wir werden aus der gegenwärtigen Untersuchung schliessen können, dass die allgemeinen Funktionentripel (16) mit den früheren durch die Bedingung (17) charakterisierten biharmonischen Funktionentripeln koincidieren, dass zu denselben nur noch die Funktionentripel

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \cos(vz) - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \cos(vy) \right\} \frac{d\omega}{r}, \\ -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \cos(vx) - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \cos(vz) \right\} \frac{d\omega}{r}, \\ -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \cos(vy) - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \cos(vx) \right\} \frac{d\omega}{r} \end{array} \right.$$

hinzugenommen werden müssen, in denen die  $\psi_x$  POINCARÉ'sche Fundamentalfunktionen<sup>6)</sup> des Gebietes  $\tau$  mit den zugehörigen Zahlen  $\lambda_x$  sind. Die diesen Tripeln (21) entsprechenden COSSERAT'schen Funktionentripel, wie sie nach (18) zu konstruieren wären, sind identisch null, so dass wir keine neuen COSSERAT'schen Funktionentripel erster Art auf diesem Wege gewinnen.

Dieses Resultat ist nicht überraschend; denn man kann ja von vornherein von den zu konstruierenden Lösungen des Problems (1), (2) Funktionentripel

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} U' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(vz) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos(vy) \right) \frac{d\omega}{r}, \\ V' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos(vx) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(vz) \right) \frac{d\omega}{r}, \\ W' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(vy) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(vx) \right) \frac{d\omega}{r} \end{array} \right.$$

abtrennen, in denen  $\psi$  eine Potentialfunktion des Gebietes  $\tau$  darstellt, in solcher Weise,

<sup>6)</sup> Man vergleiche A. KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie* (Berlin, Ferd. Dümmlers Verlag, 1902), Abhandlung 5.

dass für den übrigbleibenden Teil der Lösung die normale Wirbelkomponente an der Oberfläche null ist; dann kann dieser übrig bleibende Teil der Lösung offenbar nach der früheren Methode konstruiert werden und wird nur zu biharmonischen Tripeln der früheren, durch die Bedingung (17) charakterisierten Art führen. Andererseits genügen die Funktionen  $U'V'W'$ , wenn für  $\psi$  eine POINCARÉ'sche Fundamentalfunktion mit der zugehörigen Zahl  $\lambda_x$  gesetzt wird, den Gleichungen (16), sind also auch biharmonische Funktionentripel erster Art in dem hier erweiterten Sinne.

Für die Reihenentwicklungen nach biharmonischen Funktionentripeln erster Art erhalten wir durch die Hinzunahme der Tripel (21) zu den biharmonischen Funktionentripeln erster Art den Vorteil, dass wir in den früheren Resultaten über solche Reihenentwicklungen nicht mehr über die zu entwickelnden Funktionen  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  die Voraussetzung

$$(23) \quad u' \cos(vx) + v' \cos(vy) + w' \cos(vz) = 0, \text{ an } \omega$$

zu machen brauchen.

## § 1.

Der wesentliche Teil unserer Untersuchung wird der Beweis dreier Hilfssätze sein; nachdem wir diese in dem ersten Paragraphen bewiesen haben werden, gelangen wir in das Fahrwasser früherer Untersuchungen und können dann sehr leicht (§ 2) alle gewünschten Schlussfolgerungen ziehen.

HILFSSATZ I. — Es seien

$$u'_j v'_j w'_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, p)$$

$p + 1$  Tripel von Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$ , und wir setzen die Stetigkeit der ersten Ableitungen dieser Funktionen

$$D_1 u'_j, \quad D_1 v'_j, \quad D_1 w'_j$$

derart voraus, dass für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  des Gebietes  $\tau$  in dem Abstände  $r_{12}$ :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'_j(x_2, y_2, z_2) - \theta'_j(x_1, y_1, z_1)| \leq B'_j r_{12}^\alpha, \\ |u'_j(x_2, y_2, z_2) - u'_j(x_1, y_1, z_1)| \leq B'_j r_{12}^\alpha, \dots \end{array} \right\} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, p)$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u'_j(x_2, y_2, z_2) - u'_j(x_1, y_1, z_1)| \leq B'_j r_{12}^\alpha, \dots \end{array} \right\}$$

wo die  $B'_j$  Konstanten bedeuten und  $\alpha$  einen echten Bruch vorstellt; wir setzen

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \alpha_0 u'_0 + \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \dots + \alpha_p u'_p, \\ v' = \alpha_0 v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \alpha_2 v'_2 + \dots + \alpha_p v'_p, \\ w' = \alpha_0 w'_0 + \alpha_1 w'_1 + \alpha_2 w'_2 + \dots + \alpha_p w'_p; \end{array} \right.$$

$$(27) \quad B' = \alpha_0 B'_0 + \alpha_1 B'_1 + \alpha_2 B'_2 + \dots + \alpha_p B'_p,$$

wo  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  Konstanten sein mögen, welche der Gleichung

$$(28) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen; wir definieren die drei Potentialfunktionen  $\bar{u}' \bar{v}' \bar{w}'$  durch die Grenzbedin-

gungen :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{u}' &= -u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} + 2U', \\ \bar{v}' &= -v' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} + 2V', \\ \bar{w}' &= -w' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} + 2W' \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega,$$

wobei wir

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} U' &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \psi'}{\partial y} \cos(vz) - \frac{\partial \psi'}{\partial z} \cos(vy) \right\} \frac{d\omega}{r}, \\ V' &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \psi'}{\partial z} \cos(vx) - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cos(vz) \right\} \frac{d\omega}{r}, \\ W' &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cos(vy) - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \cos(vx) \right\} \frac{d\omega}{r} \end{aligned} \right.$$

setzen und unter  $\psi'$  die Potentialfunktion des Gebietes  $\tau$  mit den normalen Ableitungen

$$(31) \quad \frac{\partial \psi'}{\partial v} = u'_v \equiv u' \cos(vx) + v' \cos(vy) + w' \cos(vz), \text{ an } \omega$$

verstehen. Wir behaupten, wir können stets die Konstanten

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$$

so bestimmen, dass

$$(32) \quad \int_{\tau} \{\bar{\theta}'^2 + \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2\} d\tau \leq \varepsilon_p \int_{\tau} \{\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2\} d\tau + \varepsilon'_p B'^2,$$

wo  $\varepsilon_p$  und  $\varepsilon'_p$  positive Zahlen sind, welche man durch Vergrößerung von  $p$  unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken kann, und die in keiner Weise von der Wahl der Funktionen  $u'_j v'_j w'_j$  abhängen, oder

$$(33) \quad \bar{I} \leq \varepsilon_p I + \varepsilon'_p B'^2,$$

wenn wir

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{I} &= \int_{\tau} \{\bar{\theta}'^2 + \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2\} d\tau, \\ I &= \int_{\tau} \{\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2\} d\tau \end{aligned} \right.$$

setzen.

Zum Beweise teilen wir das Gebiet  $\tau$  in  $m$  Teile, wo  $m$  gleich  $\frac{p}{4}$  oder gleich der nächsten ganzen Zahl unterhalb  $\frac{p}{4}$  ist, in solcher Weise, dass die grösste Entfernung je zweier in ein und demselben Teilgebiet gelegener Punkte

$$(35) \quad r_{12} \leq \frac{\alpha}{\sqrt[p]{p}},$$

wo  $\alpha$  eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängt, und wir bestimmen die Konstanten

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$$

derart, dass die Gleichungen stattfinden

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\tau_i} \bar{\theta}' d\tau = 0, \\ \int_{\tau_i} \bar{u}' d\tau = 0, \\ \int_{\tau_i} \bar{v}' d\tau = 0, \\ \int_{\tau_i} \bar{w}' d\tau = 0 \end{array} \right.$$

für jedes der kleinen Teilgebiete  $\tau_i$ ; es sind dies in der Tat  $p$  oder weniger lineare und homogene Gleichungen für die  $p+1$  Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p,$$

welche noch der Bedingung

$$(37) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

zu genügen haben; diese Bestimmung ist also stets möglich.

Nach Voraussetzung und mit Rücksicht auf frühere bekannte Sätze <sup>7)</sup> genügen die ersten Ableitungen von  $\bar{u}' \bar{v}' \bar{w}'$  in  $\tau$  der Stetigkeitsbedingung, dass für irgend zwei Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  von  $\tau$  in dem Abstände  $r_{12}$ :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{\theta}'(x_2, y_2, z_2) - \bar{\theta}'(x_1, y_1, z_1)| \leq (c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B') r_{12}^\sigma, \\ |\bar{u}'(x_2, y_2, z_2) - \bar{u}'(x_1, y_1, z_1)| \leq (c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B') r_{12}^\sigma, \dots, \end{array} \right.$$

wo  $c_1$  und  $c_2$  zwei endliche Konstanten vorstellen, welche lediglich von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängen.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (36) ist für jeden Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  des Gebietes  $\tau_i$ :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau_i} \{ \bar{\theta}'(\xi, \eta, \zeta) - \bar{\theta}'(x, y, z) \} d\tau, \\ \bar{u}'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i} \int_{\tau_i} \{ \bar{u}'(\xi, \eta, \zeta) - \bar{u}'(x, y, z) \} d\tau, \dots, \end{array} \right.$$

folglich nach (35) und (38):

$$\left\{ \begin{array}{l} |\bar{\theta}'| \\ |\bar{u}'|, \dots \end{array} \right\} \leq (c_1 \text{ abs. Max. } (\theta', u', v', w') + c_2 B') \left( \frac{\alpha}{\sqrt[p]{p}} \right)^\sigma,$$

demnach:

$$(40) \quad \int_{\tau} \{ \bar{\theta}'^2 + \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2 \} d\tau \leq \{ C_1^8 \} [ \text{abs. Max. } (\theta', u', v', w') ]^2 + C_2 B'^2 \frac{1}{\sqrt[p]{p^{2\sigma}}}.$$

7) Man vgl. l. c. <sup>1)</sup> b), S. 15, 25, 29 und l. c. <sup>6)</sup>, Abhandlung 3, S. 5-9.

8)  $C_1$  und  $C_2$  sind wieder zwei endliche, nur von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende Konstanten.

Nun ist, da  $\theta', u', v', w'$  allgemeine Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$  sind [man vgl. die Berkung S. 847 meiner Anm. <sup>1)</sup>, c) citierten Abhandlung]:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'| \\ |u'|, \dots \end{array} \right\} \leq \frac{c'}{\sqrt{\rho^3}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2) d\tau} + \rho^{\sigma} B',$$

wo  $c'$  eine lediglich von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängende Konstante vorstellt,  $\rho$  eine positive Zahl, welche man beliebig klein wählen kann.

Bei geeigneter Wahl von  $\rho$  kann man daher in der Ungleichung:

$$(42) \quad \int_{\tau} \{\bar{\theta}'^2 + \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2\} d\tau \leq \varepsilon \int_{\tau} \{\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2\} d\tau + \varepsilon' B'^2$$

zunächst  $\varepsilon'$  beliebig klein wählen und dann, indem man  $p$  gross genug wählt, auch  $\varepsilon$  so klein machen, wie man will.

HILFSSATZ II. — Es seien  $u' v' w'$  drei Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$ ; wir setzen die Stetigkeit der ersten Ableitungen dieser Funktionen

$$D_i u', \quad D_i v', \quad D_i w'$$

derart voraus, dass für irgend zwei Punkte des Gebietes  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$ :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta'(x_2 y_2 z_2) - \theta'(x_1 y_1 z_1)| \\ |u'(x_2 y_2 z_2) - u'(x_1 y_1 z_1)|, \dots \end{array} \right\} \leq B' r_{12}^{\sigma},$$

wo  $B'$  eine Konstante und  $\sigma$  einen echten Bruch vorstellt; wir definieren die drei Potentialfunktionen  $\bar{u}' \bar{v}' \bar{w}'$  des Gebietes  $\tau$  durch die Randwerte:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}' = -u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} + 2U' \text{ 9),} \\ \bar{v}' = -v' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} + 2V', \\ \bar{w}' = -w' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} + 2W'; \end{array} \right.$$

dann ist stets für irgend zwei Punkte  $(x_1 y_1 z_1)$  und  $(x_2 y_2 z_2)$  des Gebietes  $\tau$  im Abstände  $r_{12}$ :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{\theta}'(x_2 y_2 z_2) - \bar{\theta}'(x_1 y_1 z_1)| \\ |\bar{u}'(x_2 y_2 z_2) - \bar{u}'(x_1 y_1 z_1)|, \dots \end{array} \right\} \leq \left( \frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\sigma}}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2) d\tau} + \varepsilon B' \right) r_{12}^{\sigma},$$

wo  $c$  eine endliche Konstante vorstellt, welche lediglich von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängt,  $\varepsilon$  eine positive Zahl, welche man beliebig klein wählen kann.

9)  $U' V' W'$  sind wieder die Funktionen:

$$(44_a) \quad U' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos(vz) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos(vy) \right\} \frac{d\omega}{r}, \dots,$$

wobei wir unter  $\Psi$  die Potentialfunktion des Gebietes  $\tau$  verstehen, welche die normalen Ableitungen

$$(44_b) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v} = u'_v \equiv u' \cos(vx) + v' \cos(vy) + w' \cos(vz), \text{ an } \omega$$

besitzt.

Nach den Gleichungen (44) sind

$$\bar{u}' + u' = 2U',$$

$$\bar{v}' + v' = 2V',$$

$$\bar{w}' + w' = 2W'$$

die Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$ , welche die Randwerte

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r}, \dots \text{ an } \omega$$

besitzen, und nach der Methode des arithmetischen Mittels gelten daher für die normalen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial v} (\bar{u}' + u' - 2U'),$$

[man vgl. die analoge Betrachtung S. 53 meiner Anm. <sup>1)</sup>, b) citierten Abhandlung] die folgenden Relationen:

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (\bar{u}' + u' - 2U') &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y \partial v} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial v} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right\}_a + \Xi, \\ \frac{\partial}{\partial v} (\bar{v}' + v' - 2V') &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial v} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} \right\}_a + \text{H}, \\ \frac{\partial}{\partial v} (\bar{w}' + w' - 2W') &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial v} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\}_a + \text{Z} \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega,$$

wo  $\Xi$ ,  $\text{H}$ ,  $\text{Z}$  Funktionen darstellen, welche an der Oberfläche  $\omega$  von der Art

$$(47) \text{ } ^{10)} \quad |\Xi(x_2 y_2 z_2) - \Xi(x_1 y_1 z_1)| \leq \left\{ \text{endl. Konst.} \cdot \frac{\text{abs. Max. } (u', v', w')}{\varepsilon'} + \varepsilon' B' \right\} r_{12}^{\sigma}, \dots$$

( $\varepsilon'$  eine positive Zahl, welche man beliebig klein wählen kann) stetig sind; es folgt somit an der Oberfläche  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}' + u' - 2U' &= 2u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} u'_v \frac{d\omega}{r} + \text{Z} \cos(vy) - \text{H} \cos(vz) \\ &- \frac{1}{2\pi} \left[ \cos(vy) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial v} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \text{ } ^{11)} \right. \\ &\quad \left. - \cos(vz) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial v} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \right], \dots \end{aligned}$$

<sup>10)</sup> Mit Rücksicht darauf, dass die zweiten Ableitungen der Integrale  $\int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r}, \dots$  den Ungleichungen genügen:

$$\left| D_2 \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right| \leq \text{endl. Konst.} \cdot \frac{\text{abs. Max. } u'}{\varepsilon} + \varepsilon B', \dots$$

( $\varepsilon$  eine positive Zahl, welche man beliebig klein wählen kann).

<sup>11)</sup> Wir gebrauchen die Abkürzung:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \right\}_{i+a} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \right\}_i + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \right\}_a, \dots$$

oder:

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \bar{u}' &= 2u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} u'_v \frac{d\omega}{r} + u' + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \\ &+ Z \cos(vy) - H \cos(vz) - \frac{1}{2\pi} \left[ \cos(vx) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \right. \\ &\left. + \cos(vy) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} + \cos(vz) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \right], \dots \end{aligned} \right.$$

Da

$$(49) \left\{ \begin{aligned} 2u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} u'_v \frac{d\omega}{r} &= 2 \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\partial \psi'}{\partial v} \frac{d\omega}{r} = \xi_1, \dots \\ u' + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} &= \xi_2, \dots \\ \cos(vx) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} u' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} &+ \cos(vy) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} v' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \\ &+ \cos(vz) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \int_{\tau} w' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} = \xi_3, \dots \end{aligned} \right.$$

wo wieder die Funktionen

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \eta_3, \zeta_3,$$

an der Oberfläche  $\omega$  von der Art (47) stetig sind, so ergibt sich:

$$(50) |\bar{u}'(x_2 y_2 z_2) - \bar{u}'(x_1 y_1 z_1)| \leq \left\{ \text{endl. Konst.} \frac{\text{abs. Max.}(\theta', u', v', w')}{\varepsilon'} + \varepsilon' B' \right\} r_{12}^{\sigma}, \dots$$

und mit Rücksicht auf (41) ergibt sich die Behauptung für  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ , ( $\rho^{\sigma} = \varepsilon'^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}$ ):

$$|\bar{u}'(x_2 y_2 z_2) - \bar{u}'(x_1 y_1 z_1)| \leq \left( \frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\sigma}}} \sqrt{\int_{\tau} (\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2) d\tau} + \varepsilon B' \right) r_{12}^{\sigma}, \dots$$

[ $c$  eine endliche Konstante, welche lediglich von der Gestalt der Fläche  $\omega$  abhängt,  $\varepsilon (= 2\varepsilon')$  eine positive Zahl, die man beliebig klein wählen kann].

Um den analogen Beweis für  $\bar{\theta}'$  zu führen, schreiben wir die Gleichungen (44) in der Form:

$$(51) \left\{ \begin{aligned} \bar{u}' &= u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} + \Phi, \\ \bar{v}' &= v' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} + X, \\ \bar{w}' &= w' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} + \Psi, \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega$$

<sup>12)</sup> Man vgl. die analoge Betrachtung S. 185 in meiner Abhandlung *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface* [Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Ser. II, Bd. X (1908), S. 165-269].

wo  $\Phi X \Psi$  drei Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$  vorstellen, welche der Bedingung:

$$(52) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

genügen.

Nach diesen Gleichungen sind

$$\bar{u}' - u' = \Phi,$$

$$\bar{v}' - v' = X,$$

$$\bar{w}' - w' = \Psi$$

die Potentialfunktionen des Gebietes  $\tau$ , welche die Randwerte

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r}, \dots \text{ an } \omega$$

besitzen, und nach der Methode des arithmetischen Mittels gelten daher für die normalen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\bar{u}' - u' - \Phi), \dots$$

[man vgl. die analoge Betrachtung S. 53 meiner Anm. <sup>1</sup>), b)] citierten Abhandlung die folgenden Relationen:

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} (\bar{u}' - u' - \Phi) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} + \Xi, \dots \text{ an } \omega,$$

wo  $\Xi H Z$  Funktionen darstellen, welche an der Oberfläche  $\omega$  von der Art (47) stetig sind; es folgt somit an der Oberfläche  $\omega$ :

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\theta}' &= -\left\{ \theta' + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} \right\} \\ &+ \Xi \cos(\nu x) + H \cos(\nu y) + Z \cos(\nu z). \end{aligned} \right.$$

Da

$$(55) \quad \theta' + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} \theta' \frac{d\tau}{r} \right\}_{i+a} = \xi,$$

wo wieder die Funktion  $\xi$  an der Oberfläche  $\omega$  von der Art (47) stetig ist, ergibt sich wieder mit Rücksicht auf (41) die Behauptung für  $\bar{\theta}'$ :

$$|\bar{\theta}'(x_2, y_2, z_2) - \bar{\theta}'(x_1, y_1, z_1)| \leq \left( \frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\alpha}}} \sqrt{\int_{\tau} \{\theta'^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2\} d\tau} + \varepsilon B' \right) r_{12}^{\alpha}.$$

HILFSSATZ III. — Die durch die Gleichungen (5), (6), (7) definierten, successiven Funktionentripel  $u'_j v'_j w'_j$  genügen den Relationen:

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\tau} \{\theta_j'^2 + u_j'^2 + v_j'^2 + w_j'^2\} d\tau \\ &= \int_{\tau} \{\theta_{j-1}' \theta_{j+1}' + u_{j-1}' u_{j+1}' + v_{j-1}' v_{j+1}' + w_{j-1}' w_{j+1}'\} d\tau, \quad (j=1, 2, \dots). \end{aligned} \right.$$

In der Tat, setzen wir:

$$(57) \quad u_j = u'_j + u'_{j-1} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w'_{j-1} \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v'_{j-1} \frac{d\tau}{r} \right\} - 2U'_{j-1}, \dots$$

so ist:

$$(58) \quad \Delta u_j = 2 \left\{ \frac{\partial w'_{j-1}}{\partial y} - \frac{\partial v'_{j-1}}{\partial z} \right\}, \dots \text{ in } \tau$$

$$(59) \quad u_j = v_j = w_j = 0, \text{ an } \omega$$

und

$$(60) \quad u_j = u'_j - u'_{j-1} - 4u'_{j-1} + 2 \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial x}, \dots$$

$$(61) \quad \theta_j = \theta'_j + \theta'_{j-1}.$$

Aus (58) und (59) ergibt sich:

$$(62) \quad \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial w_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \{ u'_j u'_{j-1} + \dots \} d\tau$$

und analog sowohl

$$(63) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_j}{\partial x} \frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \{ u'_j u'_j + \dots \} d\tau,$$

als auch

$$(64) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \{ u'_{j-1} u'_{j+1} + \dots \} d\tau,$$

somit:

$$\int_{\tau} \{ u_j u'_j + \dots \} d\tau = \int_{\tau} \{ u_{j+1} u'_{j-1} + \dots \} d\tau,$$

und hieraus nach (60)<sup>13)</sup>:

$$(65) \quad \int_{\tau} \{ u_j'^2 + v_j'^2 + w_j'^2 \} d\tau = \int_{\tau} \{ u'_{j+1} u'_{j-1} + v'_{j+1} v'_{j-1} + w'_{j+1} w'_{j-1} \} d\tau.$$

Wir können die Gleichungen (58) und (59) auch so schreiben:

$$(66) \quad \Delta u_j = -2 \frac{\partial \theta'_{j-1}}{\partial x}, \dots \text{ in } \tau;$$

$$(67) \quad u_j = v_j = w_j = 0, \text{ an } \omega,$$

und wir erhalten nach denselben:

$$(68) \quad \int_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial w_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \theta_j \theta'_{j-1} d\tau,$$

<sup>13)</sup> Mit Rücksicht darauf, dass

$$\int_{\tau} \left\{ u'_j \left( 2 \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial x} - 4 u'_{j-1} \right) + \dots \right\} d\tau = \int_{\tau} \left\{ u'_{j-1} \left( 2 \frac{\partial \psi'_j}{\partial x} - 4 u'_j \right) + \dots \right\} d\tau.$$

und analog sowohl

$$(69) \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_j}{\partial x} \frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \theta_j \theta'_j d\tau,$$

als auch:

$$(70) \int_{\tau} \left\{ \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \dots \right\} d\tau = 2 \int_{\tau} \theta_{j+1} \theta'_{j-1} d\tau,$$

und hieraus nach (61):

$$(71) \int_{\tau} \theta_j'^2 d\tau = \int_{\tau} \theta'_{j+1} \theta'_{j-1} d\tau.$$

Die Addition der beiden Formeln (65) und (70) ergibt die Behauptung.

## § 2.

Durch diese drei Hilfssätze gelangen wir nun unmittelbar in das Fahrwasser der früheren Untersuchungen [man vgl. die Anm. 1 c) d) citierten Abhandlungen]. Wir können die Konvergenzbeweise für die Reihen (8) und ihre ersten Ableitungen in aller Strenge führen, solange  $\lambda$  absolut genommen kleiner als eine bestimmte, endliche Zahl  $\lambda_1$  ist, die streng genommen grösser als eins ist. In jedem Falle können wir für irgend ein  $|\lambda|$ , das kleiner ist, als eine beliebig gegebene positive Zahl  $m$ , eine Zahl  $p$  und  $p + 1$  der Gleichung

$$(72) \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

genügende Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

so finden, dass das Problem

$$(73) \Delta u'' = - \frac{2+k}{2(1+k)} \alpha_0 X, \dots \text{ in } \tau;$$

$$(74) \left\{ \begin{array}{l} u'' = \alpha_0 u'_0 + \alpha_1 u'_1 + \dots + \alpha_p u'_p \\ + \lambda \left\{ -u'' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w'' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v'' \frac{d\tau}{r} + 2U'' \right\}^{14} \right\}, \dots \text{ an } \omega \end{array} \right.$$

durch die Methode der successiven Approximation in der auseinandergesetzten Weise gelöst wird, und es ergibt sich somit, falls nicht gerade  $\lambda$  eine Lösung der Gleichung

$$(75) D(\lambda) \equiv (-\lambda)^p \alpha_0 - (-\lambda)^{p-1} \alpha_1 + \dots + (-1)^p \alpha_p = 0$$

ist, dass wir die Lösungen des Problems (10), (11) für jedes

$$|\lambda| \leq m$$

<sup>14)</sup> Die Bedeutung der Funktionen  $U'' V'' W''$  ist der Bedeutung der Funktionen  $U' U' W'$  Anm. 9) analog.

in der Form

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{P(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)}, \\ v' = \frac{Q(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)}, \\ w' = \frac{R(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} n \leq p, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \end{array}$$

darstellen können, wo die Funktionen  $P, Q, R$  mit ihren ersten Ableitungen in  $\tau$  für jedes  $|\lambda| \leq m$  eindeutig und stetig sind und für

$$\lambda = \lambda_x \quad (x = 1, 2, \dots, n),$$

abgesehen von einer von null verschiedenen, multiplikativen Konstanten in die biharmonischen Funktionentripel  $\dot{u}'_x \dot{v}'_x \dot{w}'_x$  erster Art übergehen, welche nunmehr durch die Gleichungen:

$$(77) \quad \Delta \dot{u}'_x = \Delta \dot{v}'_x = \Delta \dot{w}'_x = 0, \quad \text{in } \tau,$$

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}'_x = \lambda_x \left\{ -\dot{u}'_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \dot{w}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \dot{v}'_x \frac{d\tau}{r} + 2 \dot{U}'_x \right\}, \\ \dot{v}'_x = \lambda_x \left\{ -\dot{v}'_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \dot{u}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \dot{w}'_x \frac{d\tau}{r} + 2 \dot{V}'_x \right\}, \\ \dot{w}'_x = \lambda_x \left\{ -\dot{w}'_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \dot{v}'_x \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \dot{u}'_x \frac{d\tau}{r} + 2 \dot{W}'_x \right\} \end{array} \right\} \quad \text{an } \omega,$$

$$(79) \quad \int_{\tau} \{ \dot{u}'_x{}^2 + \dot{v}'_x{}^2 + \dot{w}'_x{}^2 \} d\tau = 1$$

definiert sein mögen.

Nach der Lösung des Problems (10), (11) ergibt sich unmittelbar die Lösung des Problems (1), (2) mit Hilfe der Gleichungen (12), und die Diskussion aller anschliessenden Fragen bedarf, da sie mit den früheren Untersuchungen genau parallel geht, keiner weiteren Ausführung.

Berlin-Wilmersdorf, den 14 Februar 1910.

ARTHUR KORN.