

9.

Sur les différents genres de multiplication.

(Par M. Grassmann, prof. des mathém. au collège de Stettin.)

M. *Cauchy* a communiqué à l'Académie des Sciences, le 10, 17 et 24 janvier de l'année passée, les principes d'un calcul fondé sur des quantités qu'il nomme *clefs algébriques*. (Voyez Comptes rendus XXXVI pages 70, 129, 161.) Il a fait voir qu'à l'aide de ce calcul, on peut résoudre avec une grande facilité des questions d'analyse et de mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. Ce n'est que depuis quelques semaines que j'ai pu obtenir connaissance de ces communications; mais au premier coup d'oeil je reconnus que les principes qui y sont établis, et les résultats qui en ont été tirés, étaient absolument les mêmes que ceux, que j'avais publiés déjà en 1844 (dans un ouvrage intitulé „*Ausdehnungslehre oder Wissenschaft der extensiven Gröfse. Leipzig 1844.*”) et dont j'avais donné en même temps des applications nombreuses à l'analyse algébrique, à la géométrie, à la mécanique et à d'autres branches de la physique. Depuis la publication de cet ouvrage, je suis parvenu à simplifier et à généraliser les principes du calcul qui y est exposé, mais je m'étais proposé d'en retarder la publication jusqu'au temps où j'aurais le loisir de remanier tout l'ouvrage. Cependant, en raison des articles cités, je me trouve forcé de publier ici quelques-uns des résultats obtenus, comme je vois que, dans ses *clefs algébriques*, M. *Cauchy* a trouvé en quelque sorte les clefs, non seulement pour entrer dans la théorie que j'ai publiée jusqu'à présent, mais encore pour ouvrir la porte à plusieurs résultats non encore publiés. Ce qui en paraît le plus important, c'est le développement des divers genres de multiplication, dont je me propose de donner ici un aperçu.

L'arithmétique ne connaît qu'un seul genre de multiplication, dont la propriété est que l'on puisse intervertir l'ordre des facteurs, et réunir en un produit particulier autant de facteurs que l'on voudra, sans que la valeur du produit total en soit altérée; et qui de plus ne s'évanouit pas, à moins que l'un de ses facteurs ne devienne égal à zéro. C'est surtout dans la théorie des quantités dans l'espace, que j'ai nommées *extensives*, et traitées dans

l'ouvrage cité, que se présentent des genres de multiplication entièrement différentes de celle de l'analyse ordinaire, dont l'application néanmoins s'étend, à peu près, à toutes les branches des mathématiques et de la physique.

Pour fixer l'idée générale de la multiplication dont il s'agit, je commencerai par établir les principes sur lesquels il paraît convenable de s'appuyer.

Je dis que deux ou plusieurs quantités A , B , C , ... ont entr'elles une *relation algébrique*, quand l'une ou l'autre d'entre elles est égale à un polynôme dont les termes sont proportionnels aux autres, en sorte que l'on ait, par exemple,

$$A = \beta B + \gamma C + \dots,$$

où β , γ , ... désignent de simples nombres, soit rationnels ou irrationnels, soit réels ou imaginaires, soit égaux à zéro, ou non. Pour en donner une idée palpable, concevons que les lettres A , B désignent des objets différents quelconques, par exemple, différentes espèces de plantes. Alors il est évident que la chose représentée par la lettre A ne saurait être regardée comme le produit de la chose B par aucun facteur algébrique; ou, pour en choisir un exemple qui soit plus conforme aux mathématiques, supposons que A et B désignent des *lignes* données en grandeur et en direction, et supposons que le produit d'une ligne par un facteur algébrique réel, représente une ligne de la même direction, mais dont la grandeur est à celle de la ligne donnée comme le facteur algébrique est à l'unité; supposons de plus que le produit d'une ligne réelle par un facteur imaginaire, soit une ligne imaginaire. Alors la ligne A ne pourra évidemment résulter d'une multiplication de la ligne B par un facteur algébrique, à moins que les lignes ne soient parallèles entre elles. D'où il résulte que les lignes A et B n'ont aucune relation algébrique entre elles.

Considérons maintenant n quantités a , b , c ... qui n'ont aucune relation algébrique entre elles: alors il est évident que l'on peut en déduire une infinité de quantités, en multipliant chacune d'elles par un facteur algébrique, et en ajoutant les produits ainsi obtenus. Nous appellerons *unité relative* toute quantité que l'on se propose d'employer, pour en déduire d'autres quantités au moyen d'une multiplication par des facteurs algébriques, tandis que nous réserverons à l'unité des nombres le nom de *unité absolue*. De même nous appellerons *système d'unités relatives* tout assemblage de plusieurs quantités, non liées entre elles par des relations algébriques, mais destinées pour en dériver par voie de multiplication et d'addition, toutes les quantités que

l'on veut considérer. Enfin, nous désignerons les quantités ainsi obtenues par le nom de *quantités extensives*, en sorte que, par exemple le polynôme

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ désignent de simples nombres, et a, b, c, \dots un système d'unités relatives, devra être regardé comme une quantité *extensive*; et nous dirons qu'elle est *composée* des unités a, b, c, \dots au moyen des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (Dans mon ouvrage cité, j'ai désigné les unités relatives par le nom „*Grundänderungen*,” et un système d'unités relatives par le nom de „*Von einander unabhängige Grundänderungen*” (Voir §. 16.): dénominations qui résultent du point de vue particulier, sous lequel les quantités extensives y sont envisagées.) Il ne serait pas convenable d'employer l'épithète *composé* pour désigner les quantités extensives elles-mêmes, parcequ'il arrive souvent que les quantités extensives sont des quantités aussi simples que les unités dont elles résultent. Par exemple, la diagonale d'un parallélogramme peut être regardée comme la somme des côtés qui partent du même point, pourvu que l'on tienne compte de leur direction, aussi bien que de leur grandeur. Donc, si l'on regarde ces côtés comme des unités relatives, il est clair que la diagonale est composée de ces unités, sans qu'elle cesse pour cela d'être une simple ligne. Nous remarquons à cette occasion que l'on peut regarder trois lignes, ou quatre points quelconques dans l'espace, comme un système d'unités relatives, et qu'on peut en composer toutes les lignes ou tous les points de l'espace, à moins que les lignes ne soient parallèles à un même plan et que les points ne soient situés dans un même plan. (Voyez sur ce sujet mon ouvrage précédemment cité, et où je suis entré dans des détails; en suivant, quant aux points, les principes établis par M. *Moebius* dans son calcul barycentrique. Quant à la somme des lignes données en grandeur et direction, il est remarquable que plusieurs géomètres ont conçu cette idée presque en même temps et indépendamment les uns des autres.)

Considérons maintenant la *multiplication* des *quantités extensives*. La multiplication en général est caractérisée par la propriété, que l'on peut multiplier, chacun par chacun, les termes, dont les facteurs sont composés, ou sont censés composés, sans que la valeur du produit total en soit altérée. Il faut cependant en général tenir compte de l'ordre, dans lequel les multiplications sont effectuées successivement; en sorte que les termes, qui entrent dans chaque produit, y soient rangés dans le même ordre, dans lequel les facteurs qui les

renfermaient, étaient rangés dans le produit donné. Il est facile de voir que l'on pourrait déduire de cette idée générale toutes les lois de la multiplication des nombres, sans y ajouter aucune autre condition que celle que 1.1 soit égal à 1 : condition qui servira à définir l'unité absolue. Il résulte aussi de l'idée générale, qu'ayant à multiplier des quantités quelconques, affectées chacune d'un facteur algébrique, il sera permis de multiplier le produit de ces quantités par le produit des facteurs algébriques, à moins que l'on n'intervertisse l'ordre des facteurs dans le premier des produits. Il sera maintenant facile de *définir* précisément la multiplication des quantités extensives.

Définition. Multiplier des quantités extensives, c'est multiplier d'abord dans le même ordre, chacune par chacune, les unités dont les diverses quantités extensives sont composées: multiplier ensuite ces produits chacun par le produit des coefficients dont les unités qui y entrent étaient affectées, et ajouter finalement par voie d'addition les produits ainsi obtenus.

En d'autres termes:

On multipliera les quantités extensives en suivant les règles de la multiplication algébrique, en ayant seulement soin que l'ordre des facteurs ne soit point altéré. Par exemple, le produit des quantités extensives $\alpha a + \beta b$ et $\gamma a + \delta b$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des nombres, a et b des unités relatives, sera:

$$(\alpha a + \beta b)(\gamma a + \delta b) = \alpha\gamma.aa + \alpha\delta.ab + \beta\gamma.ba + \beta\delta.bb.$$

Il n'y aura donc qu'à définir les produits des unités relatives. On conçoit que, si l'on n'admet aucune relation entre ces produits, il faudra regarder ces produits comme de nouvelles unités relatives, que l'on pourrait appeler unités d'un degré supérieur, par exemple du n ième degré, n étant le nombre des facteurs. Mais rien n'empêche de supposer des relations algébriques arbitrairement choisies, qui lient entre eux les produits des unités. Quelles que soient d'ailleurs ces relations, on pourra toujours en représenter chacune par une équation, en égalant à zéro la somme de ces produits, multipliés chacun par un facteur algébrique. Soient, pour fixer les idées,

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

des nombres quelconques, et

$$A, B, C, \dots$$

les produits des unités relatives: alors toute relation entre ces produits pourra

être représentée par une équation de la forme

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \dots = 0:$$

équation qu'on peut appeler équation de condition par rapport à la multiplication dont il s'agit. Étant donné le système de toutes les équations de condition relatives à une multiplication particulière, celle-ci en sera déterminée précisément; et il est évident qu'à l'aide de ces équations, on pourra éliminer autant des produits A, B, C, \dots qu'il y en a d'équations. Ces éliminations étant effectuées, le reste des produits A, B, C, \dots formera un système d'unités relatives, qui serviront à en composer toutes les quantités fournies par la multiplication dont il s'agit.

Voilà l'idée la plus générale qu'on puisse concevoir de la multiplication de quantités quelconques. C'est cette idée qui a servi de base aux développements dans mon ouvrage cité (Voyez „*Ausdehnungslehre*” §. 12.), et que j'ai tâché ensuite de perfectionner à plusieurs égards. C'est encore cette idée que M. *Cauchy* paraît avoir eue en vue dans ses mémoires sur les *clefs algébriques*. En effet: les *clefs algébriques* de M. *Cauchy* ne sont au fond que les unités relatives; et ses *facteurs symboliques* conviennent, du moins dans un certain rapport, aux quantités extensives telles que je les ai définies. La différence ne consiste qu'en ce que M. *Cauchy* regarde les clefs algébriques seulement comme un moyen pour résoudre divers problèmes de l'analyse et de la mécanique et qui, les problèmes étant résolus, disparaissent, tandis que d'après les principes établis par moi, on est en état, à chaque pas du procédé, d'attribuer une signification indépendante aux unités relatives et aux quantités qui en sont composées, qu'elle que soit d'ailleurs la marche que l'on suive.

Pour considérer les produits de quantités quelconques, on pourra se borner d'abord à des produits de *deux* facteurs. Car, quel que soit le nombre des facteurs, il sera toujours possible de les réduire à *deux* facteurs; ce que l'on effectuera, en partageant tous les facteurs en deux groupes, et en réunissant ensuite les facteurs de l'un et de l'autre groupe à deux produits particuliers, lesquels multipliés, donneront le produit proposé. Si donc les lettres $u_1, u_2, \dots u_n$ désignent des unités relatives, on pourra présenter toute équation de condition sous la forme

$$S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0, .$$

où les $\alpha_{r,s}$ désignent des nombres quelconques et le signe sommatoire doit être étendu à toutes les valeurs entières des indices r et s entre les limites

1 et n . Il est évident que l'on peut supposer plusieurs équations de cette forme qui doivent subsister simultanément, et que d'ailleurs tous les coefficients, tels que $\alpha_{r,s}$, sont tout-à-fait arbitraires. On se trouverait ainsi conduit à une infinité de multiplications particulières, qui ne semblent promettre aucune utilité pour la science. Le plus grave inconvénient, qui s'y trouve, est surtout que les équations de condition cessent généralement de subsister lorsqu'on y substitue aux unités les quantités qui en sont composées. Pour faire disparaître cet inconvénient, nous supposerons premièrement que l'on puisse changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, ou bien, de deux quelconques d'entre elles, et substituer chacune d'elles à la place de l'autre, sans que les équations de condition cessent de subsister. En second lieu, nous supposerons en outre que, pour deux unités quelconques, il y ait toujours deux quantités extensives, qui ne soient ni multiples des unités, ni égales à elles, et qui néanmoins, étant substituées à ces unités, satisfassent encore aux équations de condition. En troisième lieu enfin, nous supposerons qu'il soit même permis de substituer à toutes les unités des quantités qui en sont composées à volonté, sans que les équations de condition en soient altérées.

Nous désignerons, dans la suite, les multiplications qui résultent de ces trois suppositions, respectivement par les noms des *multiplications symétriques, circulaires et linéales*; ce qui nous servira, dès à présent, pour distinguer entre elles les trois suppositions que nous venons d'exposer.

Dans la première supposition, soit l'équation

$$S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0$$

l'une quelconque des équations de condition. Après l'avoir mise sous la forme

$$S(\alpha_{1,r} u_1 u_r) + S(\alpha_{r,1} u_r u_1) + \alpha_{1,1} u_1 u_1 + S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0,$$

où les indices r et s sont différents de 1, substituons $-u_1$ à la place de $+u_1$, et nous aurons:

$$-S(\alpha_{1,r} u_1 u_r) - S(\alpha_{r,1} u_r u_1) + \alpha_{1,1} u_1 u_1 + S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0.$$

Ces équations, ajoutées et retranchées, donneront:

$$\alpha_{1,1} u_1 u_1 + S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0,$$

et

$$S(\alpha_{1,r} u_1 u_r) + S(\alpha_{r,1} u_r u_1) = 0.$$

Puis, en substituant dans la première de ces équations, $-u_2$ à la place de l'unité u_2 , on en tirera, par voie d'addition:

$$\alpha_{1,1} u_1 u_1 + \alpha_{2,2} u_2 u_2 + S(\alpha_{r,s} u_r u_s),$$

les indices r et s étant différents des indices 1 et 2. En poursuivant de cette manière, on obtiendra finalement l'équation

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \dots + \alpha_{n,n}u_nu_n.$$

De même, en substituant, dans la seconde des équations ci-dessus trouvées, $-u_2$ à la place de $+u_2$, et en retranchant l'équation ainsi obtenue de celle d'où l'on est parti, on trouvera l'équation

$$\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1,$$

dans laquelle les indices 1 et 2 pourront être remplacés par deux quelconques des indices 1 ... n . On est donc conduit à la proposition suivante.

Théorème 1. „Si l'équation

$$S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0$$

est l'une quelconque des équations de condition relatives à une multiplication, et qu'il soit d'ailleurs permis de changer le signe de chacune des unités relatives $u_1, u_2, \dots u_n$, sans que les équations de condition cessent de subsister, on aura les équations suivantes:

$$(1.) \quad \alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \dots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0$$

et

$$(2.) \quad \alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1 = 0;$$

dont la dernière aura encore lieu, quand on y remplace les indices 1 et 2 par deux différents quelconques parmi les indices 1 ... n ."

Ajoutons maintenant à la supposition précédemment établie, cette autre, que l'on puisse substituer réciproquement l'une quelconque des unités à l'autre, sans altérer par là les équations de condition. Cette hypothèse admise, en substituant, dans l'équation (1.) du théorème précédent, les unités u_1 et u_2 l'une à l'autre, on aura l'équation

$$\alpha_{1,1}u_2u_2 + \alpha_{2,2}u_1u_1 + \dots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0;$$

donc, en la retranchant de l'équation primitive

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \dots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0,$$

on obtiendra celle-ci:

$$(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})(u_1u_1 - u_2u_2) = 0.$$

De plus, en remplaçant, dans la même équation (1.), les unités

$$u_1, u_2, \dots u_{n-1}, u_n$$

respectivement par

$$u_2, u_3, \dots u_n, u_1$$

on en tirera l'équation

$$(\alpha_{2,2} - \alpha_{3,3})(u_2 u_2 - u_3 u_3) = 0.$$

Puis, en appliquant le même remplacement à l'équation obtenue, et ainsi de suite, jusqu'à ce que chaque unité soit changée successivement dans toutes les autres, et en ajoutant finalement toutes ces équations, on obtiendra pour équation résultante:

$$(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{n,n})(u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n) = 0.$$

Considérons maintenant l'autre équation du théorème précédent, savoir:

$$\alpha_{1,2} u_1 u_2 + \alpha_{2,1} u_2 u_1 = 0.$$

En y substituant l'une à l'autre les deux unités u_1 et u_2 , nous aurons

$$\alpha_{2,1} u_1 u_2 + \alpha_{1,2} u_2 u_1 = 0.$$

Ces équations, combinées entre elles par voie d'addition et de soustraction, donneront les équations

$$(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1})(u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0,$$

$$(\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})(u_1 u_2 - u_2 u_1) = 0,$$

dans lesquelles on peut remplacer les indices 1 et 2 par deux quelconques différents parmi les valeurs 1 ... n . Les résultats, auxquels on est arrivé, peuvent être énoncés par la proposition suivante.

Théorème 2. „S'il est permis de changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, ainsi que d'en substituer réciproquement l'une quelconque à l'autre, sans que les équations de condition cessent de subsister, on peut en tirer les systèmes suivants d'équations:

$$(1.) \quad (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})(u_1 u_2 - u_2 u_1) = 0,$$

$$(2.) \quad (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1})(u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0,$$

$$(3.) \quad (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})(u_1 u_1 - u_2 u_2) = 0,$$

$$(4.) \quad (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{n,n})(u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n) = 0,$$

dont les trois premiers subsistent encore, quand on y substitue à la place des indices deux quelconques différents parmi les valeurs 1 ... n ."

Le premier membre de chacune des équations précédentes contient deux facteurs; par conséquent, le second membre étant égal à zéro, il faudra que l'un ou l'autre de ces facteurs *s'évanouisse*. On tirera donc de chacune de ces équations deux nouvelles équations, dont l'une ou l'autre devra se vérifier, et dont l'une se rapporte aux coefficients, l'autre aux unités. Or il

est clair que chacune des équations qui renferment les unités, entraînera avec elle les autres qui en résultent par l'échange des indices, et qu'il en sera de même pour les équations des coefficients. Il s'ensuit que chacun des quatre systèmes d'équations ci-dessus établis, se partagera en deux systèmes, dont l'un ou l'autre devra subsister. En plaçant ces systèmes deux à deux en ligne horizontale, on aura :

- 1°. ou $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1}$ etc., ou $u_1 u_2 = u_2 u_1$ etc.,
- 2°. ou $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} = 0$ etc., ou $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$ etc.,
- 3°. ou $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,3} \dots$, ou $u_1 u_1 = u_2 u_2 = u_3 u_3 \dots$,
- 4°. ou $\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{n,n} = 0$, ou $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n = 0$.

Il y a donc *seize* cas différents, puisqu'on peut choisir l'un ou l'autre système de chaque colonne horizontale. Or il est évident que, réciproquement, toutes les équations que nous venons d'établir entre les unités, continueront encore de subsister, quand on y fait les substitutions ci-dessus désignées. On est donc conduit à la proposition suivante.

Théorème 3. „Entre deux facteurs, composés des unités relatives $u_1, u_2, \dots u_n$, il en existe *seize* espèces de multiplication; de sorte que les équations de condition subsistent encore, soit que l'on échange arbitrairement les unités relatives, soit que l'on change le signe de l'une quelconque d'entre elles. On obtient les équations de condition relatives à chacune de ces espèces, en choisissant, comme l'on voudra parmi ces quatre systèmes d'équations suivants :

- (1.) $u_r u_s = u_s u_r$,
- (2.) $u_r u_s + u_s u_r = 0$,
- (3.) $u_1 u_1 + u_2 u_2 = \dots = u_n u_n$,
- (4.) $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n = 0$;

les deux premiers devant subsister pour deux différentes valeurs entières quelconques r et s entre les limites 1 et n ."

En second lieu, en poursuivant la marche proposée, ajoutons aux suppositions précédemment établies, cette autre, qu'aux unités u_1 et u_2 on puisse substituer des quantités $x_1 u_2 + x_2 u_1$ et $y_1 u_1 + y_2 u_2$, qui en sont composées au moyen des coefficients x_1, x_2, y_1, y_2 , supposés distincts de zéro, sans que les équations de condition en soient altérées.

En posant, pour abrégé,

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = a, \quad y_1 u_1 + y_2 u_2 = b,$$

on aura :

$$aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1),$$

$$ab = x_1 y_1 u_1 u_1 + x_2 y_2 u_2 u_2 + x_1 y_2 u_1 u_2 + x_2 y_1 u_2 u_1,$$

d'où l'on tirera les valeurs des produits bb et ba , en remplaçant l'une par l'autre, les lettres x et y .

D'après le théorème précédent, on a pour équations de condition les quatre systèmes d'équations :

$$(1.) \quad u_1 u_2 = u_2 u_1, \dots$$

$$(2.) \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \dots$$

$$(3.) \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = u_3 u_3 = \dots$$

$$(4.) \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n = 0,$$

qui doivent subsister, ou séparés, ou combinés d'une manière quelconque. Il est d'abord évident que le premier de ces systèmes ne sera pas altéré par des substitutions quelconques.

Pour trouver les transformations des autres équations, supposons d'abord, pour plus de simplicité, qu'il en existe plus de deux unités. Alors, en substituant a et b à la place des unités u_1 et u_2 , ce qui est permis par hypothèse, on aura, en partant des équations (2.), la suivante :

$$0 = ab + ba = 2x_1 y_1 u_1 u_1 + 2x_2 y_2 u_2 u_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(u_1 u_2 + u_2 u_1);$$

d'où, puisque le dernier terme s'évanouit en vertu de l'équation supposée $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$, il vient :

$$x_1 y_1 u_1 u_1 + x_2 y_2 u_2 u_2 = 0.$$

On en tirera, à l'aide du théorème (2.) :

$$x_1 y_1 (u_1 u_1 - u_3 u_3) = 0,$$

d'où il suit (x_1 et y_1 étant différents de zéro) :

$$u_1 u_1 = u_3 u_3.$$

Donc, on obtiendra par l'échange des indices, permis par hypothèse :

$$u_1 u_2 = u_2 u_2 = u_3 u_3 = \dots;$$

c'est à dire : les équations (2.) entraîneront avec elles les équations (3.).

Supposons maintenant que les équations (3.) aient lieu. En appliquant à l'équation

$$u_1 u_1 = u_3 u_3$$

la substitution indiquée, on aura :

$$u_3 u_3 = aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1),$$

d'où, en remplaçant les carrés $u_2 u_2$ et $u_3 u_3$ par le carré équivalent $u_1 u_1$, on trouvera :

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1) u_1 u_1 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0.$$

En y changeant le signe de l'unité u_1 , ce qui est permis par hypothèse, et retranchant l'équation ainsi obtenue de l'équation précédente, on aura :

$$x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0;$$

d'où, x_1 et x_2 étant distinctes de zéro, il résulte :

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0;$$

c'est à dire : les équations (3.) entraîneront avec elles les équations (2.).

Il est donc évident que, dans l'hypothèse admise, les équations (2. et 3.) ne sauraient subsister séparément, et que, par suite, au lieu de ces deux systèmes d'équations, on en aura un seul, résultant de leur combinaison.

Pour trouver les conditions auxquelles les coefficients x_1, y_1, x_2, y_2 sont assujettis, transformons aussi l'équation (4.) par les substitutions ci-dessus énoncées. On aura :

$$\begin{aligned} 0 &= aa + bb + u_3 u_3 + \dots u_n u_n \\ &= (x_1^2 + y_1^2) u_1 u_1 + (x_2^2 + y_2^2) u_2 u_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2) (u_1 u_2 + u_2 u_1) + u_3 u_3 + \dots u_n u_n. \end{aligned}$$

Par suite, en retranchant l'équation (4.), on obtiendra :

$$0 = (x_1^2 + y_1^2 - 1) u_1 u_1 + (x_2^2 + y_2^2 - 1) u_2 u_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2) (u_1 u_2 + u_2 u_1);$$

d'où l'on tirera, à l'aide du théorème (2.), les équations suivantes :

$$(x_1^2 + y_1^2 - 1) (u_1 u_1 - u_3 u_3) = 0,$$

$$(x_2^2 + y_2^2 - 1) (u_2 u_2 - u_3 u_3) = 0,$$

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2) (u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0.$$

Par conséquent, si le système combiné des équations (2. et 3.) n'a pas lieu, on aura :

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \quad x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

d'où l'on tirera :

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad y_1 = \mp x_2, \quad y_2 = \pm x_1.$$

C'est à dire : pour que l'on puisse substituer les quantités a et b à la place des unités u_1 et u_2 , il faudra que l'on ait :

$$a = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad b = \mp (x_1 u_2 - x_2 u_1),$$

$x_1^2 + x_2^2$ étant égal à zéro. Les mêmes équations auraient été obtenues, si nous avions supposé au lieu de l'équation (4.) le système des équations (2. et 3.).

Supposons, pour en donner un exemple palpable, que les unités u_1 et u_2 représentent deux rayons d'un cercle, perpendiculaires l'un à l'autre; alors il est clair, que les quantités a et b représenteront pareillement deux rayons perpendiculaires du même cercle. Par cette raison nous appelons *changement circulaire* ou *transformation circulaire*, toute transformation, au moyen de laquelle deux quantités quelconques a et b se changent respectivement en $xa + yb$ et en $\mp(xb - ya)$; et admettons que le changement soit appelé ou positif ou négatif, selon que, dans l'expression dernière, on met le signe positif ou le signe négatif. Je dirai de plus qu'un système de quantités est transformé par un changement *circulaire*, quand on a appliqué ce changement à deux quelconques d'entre elles.

(Les changements *circulaires* s'appliquent convenablement surtout aux théories des diamètres conjugués, des points triples et quadruples, à la théorie de la rotation et à d'autres théories de la géométrie et de la mécanique, où ils servent souvent à faciliter beaucoup les recherches.)

Nous avons trouvé que, dans l'hypothèse admise, les équations de condition se réduisent à trois systèmes d'équations, dont l'un résulte de la combinaison des équations (2. et 3.) du théorème (3.), et que de plus il faut que les transformations des unités soient de la forme circulaire, pour que les trois systèmes d'équations n'en soient pas altérés. Il nous reste à faire voir que, réciproquement, ces transformations circulaires ne sauraient altérer aucun de ces systèmes.

Premièrement, il est évident que les équations (1.) ne seront altérées par aucune transformation des unités.

Secondement, supposons que les équations (2. et 3.) aient lieu simultanément, et admettons qu'on y remplace les unités u_1 et u_2 par des quantités a et b , qui en sont dérivées par un changement circulaire positif, de sorte que l'on ait:

$$a = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad b = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

L'expression $u_1 u_2 + u_2 u_1$ se changera par là en

$$ab + ba = (x_1^2 - x_2^2)(u_1 u_2 + u_2 u_1) + x_1 x_2 (u_2 u_2 - u_1 u_1).$$

Donc, puisque par hypothèse:

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad u_1 u_1 = u_2 u_2,$$

on aura :

$$ab + ba = 0.$$

De plus, l'expression $u_1 u_r + u_r u_1$ (r étant différent de 1. et 2.) se changera en

$$au_r + u_r a = x_1(u_1 u_r + u_r u_1) + x_2(u_2 u_r + u_r u_2) = 0.$$

La même chose ayant lieu pour l'expression $u_2 u_r + u_r u_2$, il est clair que les équations (2.) subsisteront encore dans l'hypothèse admise.

De l'autre côté, le carré $u_1 u_1$ se changera en

$$aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1),$$

d'où, puisque $u_1 u_2 + u_2 u_1$ est égal à zéro, et $u_1 u_1 = u_2 u_2$, il vient :

$$aa = (x_1^2 + x_2^2) u_1 u_1,$$

donc, en vertu de l'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$, on a :

$$aa = u_1 u_1.$$

Il est donc évident que le système des équations (2. et 3.), ne sera altéré par aucun changement circulaire positif. Mais comme ces équations ne cessent pas de subsister, quand on y change le *signe* d'une quantité quelconque y contenue, il est clair que le résultat obtenu aura encore lieu par rapport à un changement circulaire *négatif*, et conséquemment par rapport à un changement circulaire *quelconque*.

Troisièmement, supposons que l'équation (4.) ait lieu, et admettons qu'on y applique le changement circulaire ci-dessus adopté; alors l'expression $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots u_n u_n$ se changera en :

$$aa + bb + u_3 u_3 + \dots u_n u_n = (x_1^2 + x_2^2)(u_1 u_1 + u_2 u_2) + u_3 u_3 + \dots u_n u_n.$$

Donc, $x_1^2 + x_2^2$ étant égale à 1, il en résultera :

$$aa + bb + u_3 u_3 + \dots u_n u_n = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \dots u_n u_n = 0.$$

L'équation (4.) ne sera donc altérée par *aucune* transformation circulaire.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'il y ait plus de deux unités. Or il est facile de s'assurer que pour le cas de deux unités, on pourrait déduire les mêmes conséquences, quoique la marche nécessaire dans ce cas, s'écarte à quelques égards, de celle que nous venons de suivre.

Les résultats, auxquels on est arrivé, peuvent être énoncés par les propositions suivantes.

Théorème 4. „Si d'abord il doit être permis de changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, et de remplacer à volonté l'une

par l'autre, et si ensuite il doit y avoir deux quantités, composées de deux unités au moyen de coefficients différents de zéro, et qui, étant substituées à ces unités, satisfont encore aux équations de condition: il est nécessaire que ces équations, pourvu qu'il y en ait, forment un ou plusieurs des trois systèmes suivants:

$$(1.) \quad u_r u_s = u_s u_r,$$

$$(2.) \quad u_r u_s + u_s u_r = 0, \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \dots u_n u_n,$$

$$(3.) \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots u_n u_n = 0,$$

où les signes $u_1, u_2, \dots u_n$ représentent les unités relatives, et où r et s désignent deux quelconques différents des indices 1, 2, $\dots n$."

Théorème 5. „Chacun des systèmes d'équations, établis dans le théorème précédent, continue de subsister, quand les unités sont transformées par des changements circulaires quelconques; et réciproquement: il n'y a en outre aucune transformation des unités qui laisse subsister tous ces systèmes."

Théorème 6. „Il existe huit espèces de multiplication, dont les équations de condition continuent de subsister, quand on assujettit les unités à des transformations circulaires quelconques. On obtient les équations de condition relatives à chacune de ces multiplications, en choisissant entre les trois systèmes, assignés dans le théorème (5.) autant que l'on en voudra."

Nous désignons les multiplications obtenues ici sous le nom de *multiplications circulaires*, tandis que les multiplications établies par les théorèmes (1. 2. 3.) pourraient être appelées *multiplications symétriques*. Cependant il faut faire observer que les *huit* espèces de la multiplication *circulaire* font partie des *seize* espèces de la multiplication *symétrique*, en sorte que parmi celles-ci il n'y a que *huit* espèces, qui ne sont pas en même temps circulaires.

En troisième lieu, supposons qu'il soit permis de substituer aux unités, des quantités qui en sont composées à volonté, sans que les équations de condition en soient altérées. Il est d'abord évident que les suppositions établies jusqu'ici, auront encore lieu dans ce cas. On peut donc recourir aux systèmes d'équations obtenus ci-dessus. Reprenons les quatre systèmes d'équations relatifs à la multiplication symétrique, savoir:

$$(1.) \quad u_1 u_2 = u_2 u_1,$$

$$(2.) \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0,$$

$$(3.) \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \dots$$

$$(4.) \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n = 0,$$

et substituons à la place de l'unité u_1 , la quantité a , supposée égale au polynôme $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots$, dont les coefficients x_1, x_2, \dots sont arbitraires. Alors, en partant de l'équation (1.), on aura:

$$au_2 = x_1 u_1 u_2 + x_2 u_2 u_2 + x_3 u_3 u_2 + \dots$$

d'où, en échangeant l'ordre des unités dans chaque terme du second membre (ce qui est permis en vertu de l'équation (1.)), il résulte:

$$\begin{aligned} au_2 &= x_1 u_2 u_1 + x_2 u_2 u_2 + x_3 u_2 u_3 + \dots \\ &= u_2 (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \dots) \\ &= u_2 a, \end{aligned}$$

c'est à dire: l'équation (1.) ne cesse pas de subsister, quand on y remplace l'une quelconque des unités par une quantité composée arbitrairement de toutes les unités. Puis, en partant de l'équation (2.), on obtiendra par la même substitution:

$$au_2 + u_2 a = x_1 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + 2x_2 u_2 u_2 + x_3 (u_1 u_3 + u_3 u_1) + \dots,$$

et comme tous les termes du second membre, excepté seulement le terme $2x_2 u_2 u_2$, doivent s'évanouir en vertu des équations (2.), il faudra, que ce terme $2x_2 u_2 u_2$ s'évanouisse pareillement, pour que l'équation (2.) puisse subsister encore après la substitution. Donc, puisque x_2 peut être supposé différent de zéro, on aura $u_2 u_2 = 0$; et par l'échange des indices:

$$0 = u_1 u_1 = u_2 u_2 = \dots$$

Or il est évident que ces équations résulteraient aussi de la combinaison des équations (3. et 4.). Par suite nous en concluons que dans l'hypothèse admise, les équations (2.) entraîneront avec elles les équations (3. et 4.). En partant maintenant des équations (3.), on aura:

$$aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + x_2^2 u_2 u_2 + \dots$$

Or d'après l'hypothèse, le carré aa doit être égal encore au carré $u_2 u_2$. On aura donc:

$$u_2 u_2 = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + \dots,$$

et puisque cette équation doit subsister, quelles que soient les valeurs des coefficients x_1, x_2, \dots , on aura séparément:

$$u_1 u_1 = 0, \quad u_2 u_2 = 0, \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad \text{etc.};$$

c'est à dire: les équations (3.) entraîneront les équations (2. et 4.).

En parlant enfin de l'équation (4.) on aura:

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \\ &= x_1^2 u_1^2 + (x_2^2 + 1) u_2^2 + \dots + (x_n^2 + 1) u_n^2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + \dots, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_2^2 = \dots = 0, \\ u_1 u_2 + u_2 u_1 &= 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

En combinant les résultats, trouvés dans l'hypothèse établie, on peut énoncer la proposition suivante.

Théorème 7. „S'il est permis de remplacer chaque unité, renfermée dans les équations de condition, par une quantité composée arbitrairement d'unités, sans que ces équations cessent de subsister: il faudra, que les équations de condition, pourvu qu'il y en ait, forment un des deux systèmes:

$$(1.) \quad u_r u_s = u_s u_r,$$

$$(2.) \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \dots = 0, \quad u_1 u_2 = -u_2 u_1, \dots,$$

ou bien qu'elles en soient combinées.”

Nous désignons les multiplications établies dans ce théorème sous le nom de *multiplications linéales*, parceque, étant appliquées à la Géométrie, elles s'effectuent par des constructions *linéales*, sans qu'il faudrait recourir au *cercle*. Il est évident qu'il y aura, pour parler exactement, quatre espèces de multiplication linéale, et qu'il y restera également quatre multiplications circulaires, qui ne sont pas en même temps linéales. Cependant parmi les quatre multiplications linéales il y en a une que l'on peut rejeter entièrement, parceque tous les produits en seraient égaux à zéro. Ce serait celle où les deux systèmes d'équations, établis ci-dessus, auraient lieu conjointement. De même, la multiplication qui n'est assujettie à aucune condition, peut être rejetée, parcequ'elle ne paraît pas fournir des applications remarquables. Il nous restera donc deux multiplications linéales, dont l'une est assujettie aux équations (1.) et l'autre aux équations (2.). L'une et l'autre est de la plus grande importance, tant pour l'analyse que pour la géométrie, la mécanique et la physique en général; l'une et l'autre peut d'ailleurs être étendue sans aucune difficulté à autant de facteurs que l'on voudra. La première, qui jouit de la propriété, que le produit est indépendant de l'ordre dans lequel se suivent les facteurs, est identique, quant aux opérations, à la multiplication employée dans l'analyse algébrique, et sera appelée pour cela *multiplication*

algébrique; l'autre est celle que j'ai appelée *multiplication extérieure*, et qui fait l'objet principal de mon ouvrage cité plus haut. C'est par elle qu'on est en état d'effectuer avec la plus grande facilité l'élimination des inconnues entre des équations, tant linéaires que non-linéaires, et de résoudre tout à coup un grand nombre de problèmes de géométrie, ainsi que de mécanique, difficiles à résoudre autrement; comme je l'ai fait voir déjà en 1844 et comme Mrs. *Cauchy* et de *Saint-Venant* l'ont proposé récemment, sans y ajouter rien de nouveau. Cependant, ayant publié plusieurs applications de cette multiplication non-seulement dans l'ouvrage cité, mais aussi dans le journal de M. *Crelle* (Tomes 31, 36, 42, 44) je peux me dispenser d'entrer dans plus de détail à ce sujet.

À l'égard de la multiplication algébrique, les règles d'opération en sont connues; mais il n'en est pas de même quant à l'application de cette multiplication à des quantités qui ne sont pas tout à fait algébriques; par exemple, s'il s'agit de multiplier algébriquement, non les grandeurs des lignes, mais les lignes elles-mêmes, données en grandeur et direction, ou bien des points quelconques. Pour mettre en évidence l'avantage de cette multiplication, nous remarquerons, par exemple que, les lettres $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ désignant neuf points quelconques d'une courbe du troisième ordre, et x un dixième point de cette courbe, on obtiendra pour équation de cette courbe celle-ci:

$$a^3.b^3.c^3.d^3.e^3.f^3.g^3.h^3.i^3.x^3 = 0:$$

équation, dans laquelle chaque exposant se rapporte à la multiplication algébrique, en sorte que la puissance $a^3 = aaa$ désigne un produit algébrique de trois facteurs, dont chacun est égal au point a , et ainsi de suite, et dans laquelle les diverses puissances sont multipliées l'une par l'autre au moyen de la multiplication extérieure. Une proposition analogue aura lieu par rapport à toute courbe algébrique. De plus, à l'aide de la multiplication algébrique, appliquée à des quantités extensives, on peut réduire toute fonction de plusieurs variables à une fonction d'une seule variable, et appliquer directement la plupart des théorèmes démontrés pour des fonctions d'une seule variable, à des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Enfin, par cette multiplication, on est en état d'appliquer immédiatement tous les théorèmes analytiques aux fonctions de quantités purement géométriques; comme de points etc.

Parmi les quatre multiplications, proprement dites *circulaires*, il y en a deux qui sont d'un grand usage dans l'analyse, dans la géométrie, et surtout dans la mécanique. Ce sont celles, dont les produits sont indépendants de

l'ordre des facteurs, et dont l'une d'ailleurs est assujettie aux équations (2.) du théorème (4.), et l'autre à l'équation (4) du même théorème. La première est déterminée par les équations

$$u_r u_s = 0, \text{ où l'index } r \text{ est différent de } s,$$

$$\text{et } u_1 u_1 = u_2 u_2 = \dots$$

Je l'ai appelée *multiplication intérieure*, (Voyez „*Ausdehnungslehre*” pag. XI, et surtout „*Geometrische Analyse*, gekrönte Preisschrift, Leipz. 1847.” pag. 17—57, où j'ai donné des applications à la géométrie et à la mécanique.) en voulant exprimer par ce mot la rapport particulier qui existe entre elle et la multiplication extérieure. Pour trouver ce rapport, prenons pour unités trois lignes perpendiculaires et égales en grandeur l'une à l'autre, et projetons une ligne quelconque, désignée par la lettre a sur deux autres lignes b et c , supposées perpendiculaires l'une à l'autre; soient b_1 et c_1 ces projections: alors il est facile de s'assurer que le produit *intérieur* des deux lignes a et b sera égal au produit ab_1 , tandis que le produit *extérieur* des mêmes lignes sera égal au produit ac_1 ; donc, parceque les lignes a et b_1 sont situées l'une *dans* l'autre, et que les lignes a et c_1 sont situées l'une *au dehors* de l'autre, il sera convenable de désigner ces produits sous les noms que je leur ai données.

L'autre multiplication circulaire est déterminée par les équations

$$u_r u_s = u_s u_r \text{ et } u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n = 0.$$

Cette multiplication remarquable est représentée, si l'on ne suppose que deux unités relatives, par la multiplication de deux quantités *complexes*, telles que $a + b\sqrt{-1}$ et $c + d\sqrt{-1}$. En effet, il sera permis de regarder l'unité absolue et l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ comme des unités relatives, pourvu que l'on n'en compose des quantités qu'au moyen de coefficients réels. Alors, en désignant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ par la lettre i , on aura

$$1 + i^2 = 0,$$

et le produit sera en outre indépendant de l'ordre des facteurs. Donc les équations

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 \text{ et } u_1 u_1 + u_2 u_2 = 0$$

auront lieu au cas où u_1 est $= 1$ et $u_2 = \sqrt{-1}$. Pour cette raison, on pourrait désigner cette multiplication sous le nom de *multiplication complexe*.

Il est bon de remarquer que l'une ou l'autre de ces multiplications circulaires s'appliquera en géométrie et en mécanique à tous les problèmes qui se rapportent d'une manière quelconque au *cercle*, ou à *l'angle*, ou à la *grandeur des lignes*, séparée de leur direction, et aux aires des surfaces situées dans l'espace. Et il sera facile de voir que dans tous ces cas, l'emploi des multiplications linéales ne suffira pas pour résoudre les problèmes.

Il nous resterait encore à discuter les huit multiplications symétriques qui ne sont pas en même temps circulaires. Mais nous remarquons que ces multiplications ne sont d'aucun usage, ni dans l'analyse, ni dans la géométrie, et que nous n'en aurions fait aucune mention, s'il ne nous eût pas paru convenable, d'en partir, pour établir les divers genres de la multiplication circulaire.

Stettin le 5 Février 1854.